# Четырехузловой оболочечный конечный элемент для анализа несущей способности элементов железобетонных конструкций

С. Ю. Фиалко

Технический университет «Краковская Политехника» sergiy.fialko@gmail.com

#### План

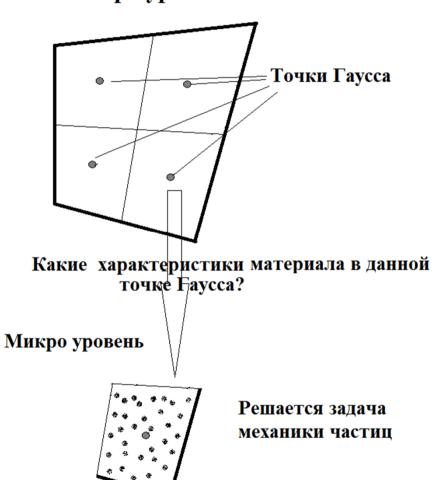
- Введение
- Разрешающие соотношения для бетона
- Разрешающие соотношения для арматуры
- Сравнение полученных результатов с результатами других авторов
- Циклическое нагружение
- Заключение

#### Введение

- Современные исследования поведения ЖБ конструкций в основном направлены на численное моделирование образования и раскрытия трещин в бетоне под действием монотонно возрастающих нагрузок. В последние годы получили развитие двухуровневые модели, причем на макро уровне используется тот или иной вариант метода конечных элементов, опирающегося на основополагающие соотношения механики сплошной среды, а на микро уровне применяются соотношения механики частиц.
- При этом арматура обычно моделируется отдельными стержневыми элементами, что накладывает жесткие ограничения на размеры и форму конечных элементов, моделирующих бетон, а также порождает большое количество КЭ.

## Пример: конечный элемент плоского напряженного состояния





- Достоинством таких подходов является высокая точность и достоверность результатов при сравнении с физическими экспериментами, если в расчетную модель заложить характеристики бетона, соответствующие данному физическому образцу.
- Недостатками являются сложность и громоздкость расчетной модели, а также неопределенность структуры частиц на микро уровне, влияющая на результат решения.

• В результате в литературе имеются отдельные решения как правило для типично академических задач: изгибаемых балок, узлов сопряжения колонн и ригелей прямоугольного поперечного сечения и балок-стенок.

- Однако современное проектирование выдвигает требования к анализу более сложных фрагментов расчетных моделей в реальное для проектировщика время, причем основным рабочим инструментом является настольный компьютер либо недорогая рабочая станция.
- В связи с этим в данной работе предлагается оболочечный конечный элемент, моделирующий работу фундаментных ЖБ плит, плит перекрытий, пилонов, стен и простенков, а также элементов конструкций, состоящих из перечисленных выше фрагментов.

#### Бетон

- Используется теория оболочек средней толщины Мидлина

   Рейсснера и соотношения деформационной теории
   пластичности с учетом деградации в растянутой зоне.
- Деформации и углы поворота считаются малыми.
- Отсутствие проскальзывания между бетоном и арматурой.
- Тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z}) = \frac{1}{3} (\sigma_{x} + \sigma_{y})$$

#### Приведенные напряжения:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

#### • Тензор деформаций:

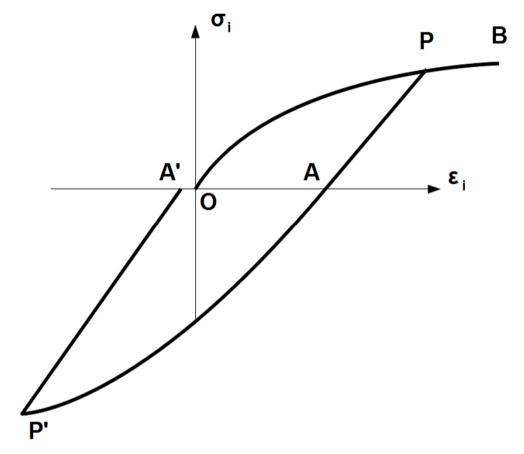
$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{y} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_{z} \end{pmatrix} \qquad \sigma_{z} = 0 = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_{z} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \theta \right), \quad \theta = \varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} + \varepsilon_{z}$$

$$\varepsilon_{z} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \left( \varepsilon_{x} + \varepsilon_{y} \right)$$

#### Приведенные деформации:

$$\varepsilon_{i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - v + v^{2}}{3(1 - v)^{2}} \left(\varepsilon_{x}^{2} + \varepsilon_{y}^{2}\right) - \frac{1 - 4v + v^{2}}{3(1 - v)^{2}}} \varepsilon_{x} \varepsilon_{y} + \frac{1}{4} \left(\gamma_{xy}^{2} + \gamma_{xz}^{2} + \gamma_{yz}^{2}\right)$$

• Диаграмма  $\sigma_i - \epsilon_i$  (бетон):



ОРВ – активное нагружение (растяжение)

РА – разгрузка

**АР' – активное нагружение после разгрузки (сжатие)** 

Р'А' – разгрузка

#### • Активное нагружение (бетон):

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = D(\varepsilon_i)(\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_A) \\ \vec{\tau} = D_{sh}(\varepsilon_i)(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_A) \end{cases}$$

$$D(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i^{sh}} \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{2\nu}{1-\nu} & 0\\ \frac{2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{sh}(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i^{sh}} \begin{pmatrix} k & 0\\ 0 & k \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\epsilon}_A = \begin{pmatrix} \epsilon_x^A \\ \epsilon_y^A \\ \gamma_{xy}^A \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}_A = \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^A \\ \gamma_{yz}^A \end{pmatrix}$$

#### • Приведенная деформация:

$$\varepsilon_{i}^{sh} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - v + v^{2}}{3(1 - v)^{2}}} \left( \overline{\varepsilon}_{x}^{2} + \overline{\varepsilon}_{y}^{2} \right) - \frac{1 - 4v + v^{2}}{3(1 - v)^{2}} \overline{\varepsilon}_{x} \overline{\varepsilon}_{y} + \frac{1}{4} \left( \overline{\gamma}_{xy}^{2} + \overline{\gamma}_{xz}^{2} + \overline{\gamma}_{yz}^{2} \right),$$

$$\overline{\varepsilon}_{x} = \varepsilon_{x} - \varepsilon_{x}^{A}, \quad \overline{\varepsilon}_{y} = \varepsilon_{y} - \varepsilon_{y}^{A}, \quad \overline{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{A}, \quad \overline{\gamma}_{xz} = \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^{A},$$

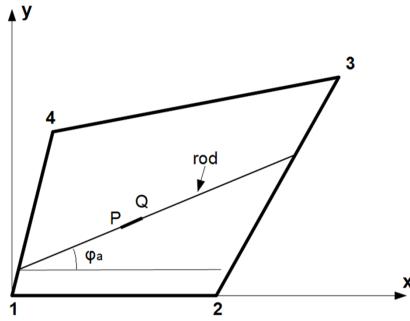
$$\overline{\gamma}_{yz} = \gamma_{yz} - \gamma_{yz}^{A}$$

#### • Разгрузка (бетон):

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{un} + D_{el}\vec{\epsilon} \\ \vec{\tau} = \vec{\tau}_{un} + D_{el}^{sh}\vec{\gamma} \end{cases}, \quad \vec{\sigma}_{un} = \begin{pmatrix} \sigma_x^P - \frac{E}{1 - v^2} \left( \epsilon_x^P + v \epsilon_y^P \right) \\ \sigma_y^P - \frac{E}{1 - v^2} \left( \epsilon_y^P + v \epsilon_x^P \right) \\ \tau_{xy}^P - G \gamma_{xy}^P \end{pmatrix}, \quad \vec{\tau}_{un} = \begin{pmatrix} \tau_{xz}^P - G \gamma_{xz}^P \\ \tau_{yz}^P - G \gamma_{yz}^P \end{pmatrix}$$

$$D_{el} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1 - v^2} & \frac{vE}{1 - v^2} & 0\\ \frac{vE}{1 - v^2} & \frac{E}{1 - v^2} & 0\\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad D_{el}^{sh} = \begin{pmatrix} kG & 0\\ 0 & kG \end{pmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1 + v)}, \quad k = \frac{5}{6}$$

#### Арматура.

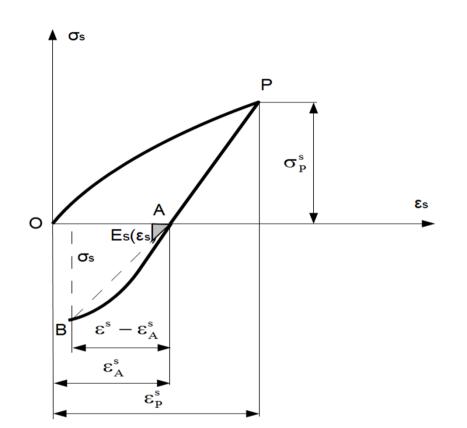


Предполагаем, что арматурные стержни работают только на растяжение-сжатие.

$$\mathbf{\varepsilon}_{s} = \mathbf{\varepsilon}_{x} \cos^{2} \mathbf{\phi}_{a} + \mathbf{\varepsilon}_{y} \sin^{2} \mathbf{\phi}_{a}$$

• Поскольку при реальном армировании и густоте сетки на каждый конечный элемент приходится большое к-во стержней, а функции формы обладают медленной изменяемостью в переделах КЭ, мы заменяем дискретные стержни равномерно «размазанным» «арматурным слоем». Математически это выражается в замене конечных сумм интегралом по площади КЭ.

#### Активное нагружение:



$$E_c = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s}, \quad E_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s}$$

$$\sigma_{s} = E_{c} \left( \varepsilon_{s} - \varepsilon_{A}^{s} \right) = \frac{\sigma_{s}}{\left| \varepsilon_{s} - \varepsilon_{A}^{s} \right|} \left( \varepsilon_{s} - \varepsilon_{A}^{s} \right) =$$

$$= E_{s} \left( \varepsilon_{s} \right) \cdot \left( \varepsilon_{s} - \varepsilon_{A}^{s} \right)$$

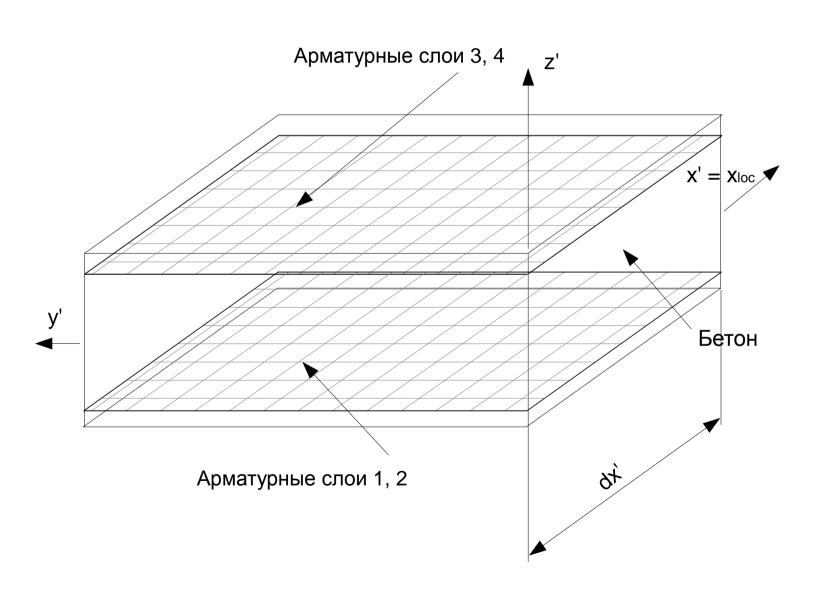
#### Разгрузка:

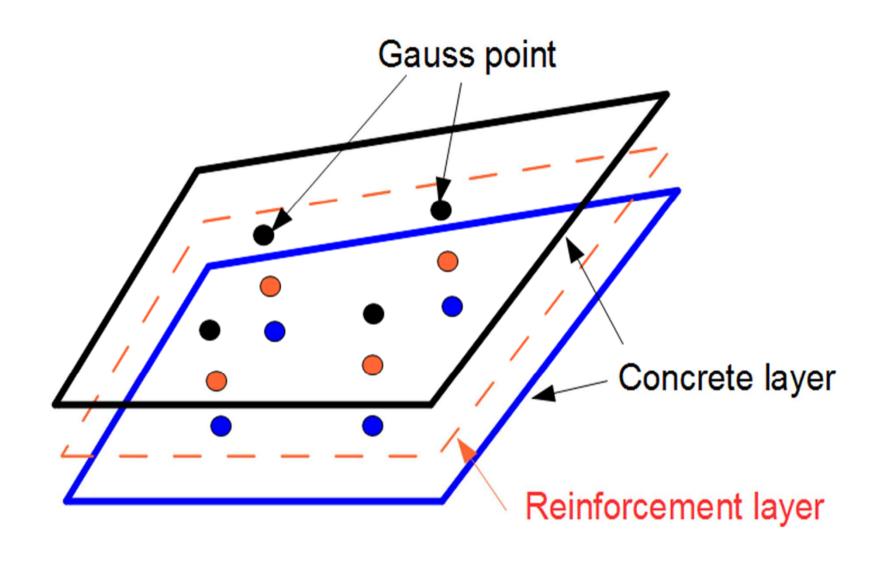
$$\sigma_{s} = \sigma_{P}^{s} - E_{s} (\varepsilon_{P}^{s} - \varepsilon_{s}) = \sigma_{P}^{s} - E_{s} \varepsilon_{P}^{s} + E_{s} \varepsilon_{s} =$$

$$= \sigma_{un}^{s} + E_{s} \varepsilon_{s}, \quad \sigma_{un}^{s} = \sigma_{P}^{s} - E_{s} \varepsilon_{P}^{s}$$

- При вычислении интегралов по толщине оболочки применяется метод трапеций. В результате оболочка по толщине разбивается на слои.
- Интегралы по площади КЭ вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса-Лежандра. Используется изопараметрическое преобразование.
- Физико-механические характеристики бетона и арматуры для текущего этапа нагружения определяются в каждой точке Гаусса для каждого слоя бетона и арматурных слоев.

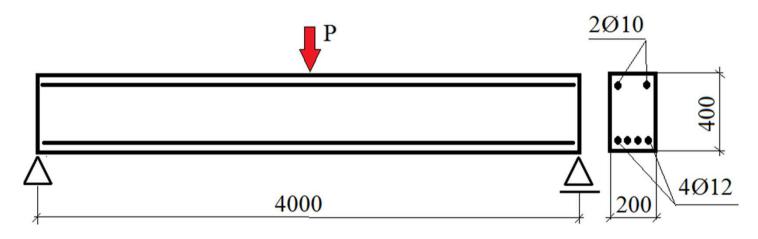
## Каждый арматурный слой представляет арматуру данного направления





## Пример 1. Балка прямоугольного сечения под действием сосредоточенной силы посреди пролета.

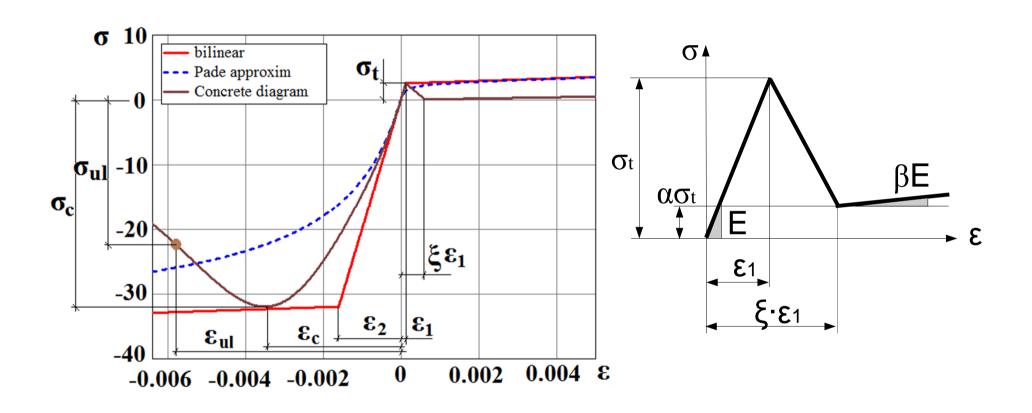
Rabczuk T., Belytschko T. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. // International journal of fracture, 137, pp. 19 – 49, 2006.



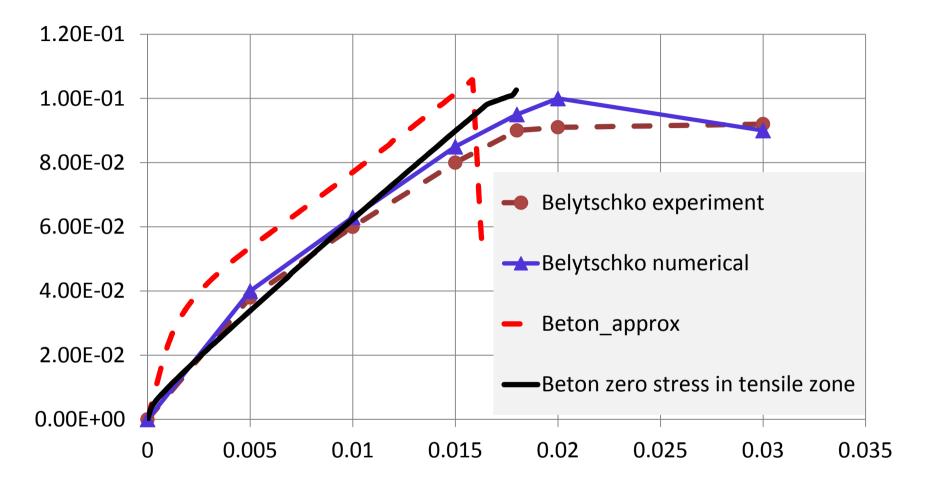
Бетон: E = 28 000 MPa,  $\sigma_c$  = 32 MPa,  $\sigma_{ul}$  = 0.85 $\sigma_c$ ,  $\sigma_t$  = 2.5 MPa,  $\nu$  = 0.22,  $\varepsilon_c$  = 0.0035,  $\varepsilon_{ul}$  = 1.41  $\varepsilon_c$ 

Арматура:  $E_s = 200 \ 000 \ MPa$ ,  $\sigma_y^s = 587 \ MPa$ .

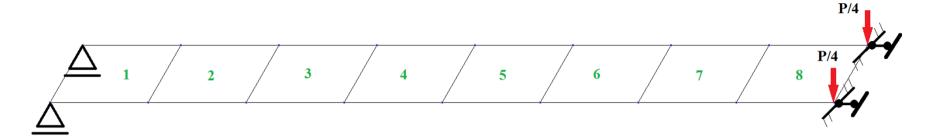
#### Диаграмма σ – ε для бетона.



#### Нагрузка - прогиб



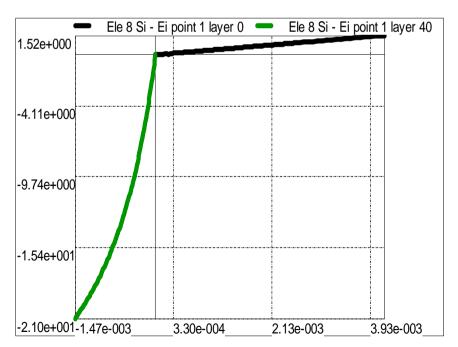
Beton\_approx. :  $\sigma_t$  = 2.5 MPa,  $\xi$  = 20,  $\alpha$  = 0.02,  $\beta$  = 0.005 Beton zero stress in tensile zone:  $\sigma_t$  = 0.025 MPa,  $\xi$  = 2,  $\alpha$  = 2,  $\beta$  = 0.005

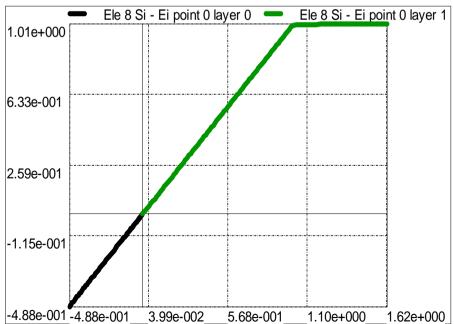


#### Concrete: zero stresses in tensile zone.

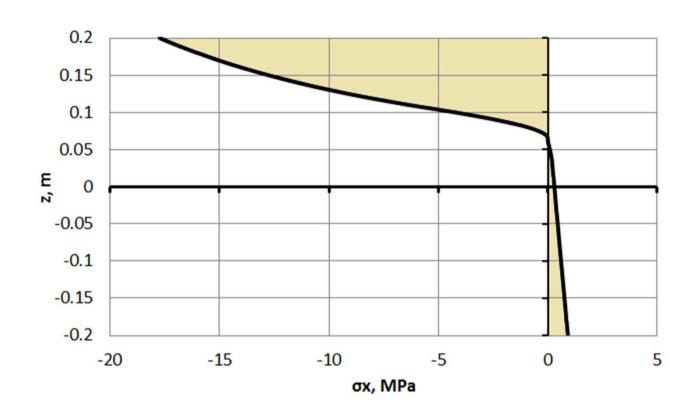
## Диаграмма $\sigma_i - \epsilon_i$ для наиболее растянутого и наиболее сжатого слоев бетона, элемент №8

## Диаграмма σ − ε для растянутой и сжатой арматуры, элемент №8

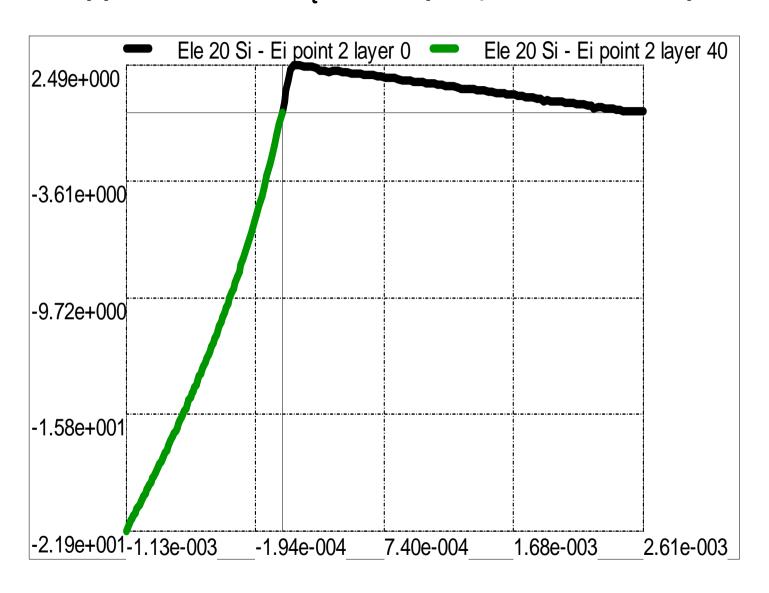




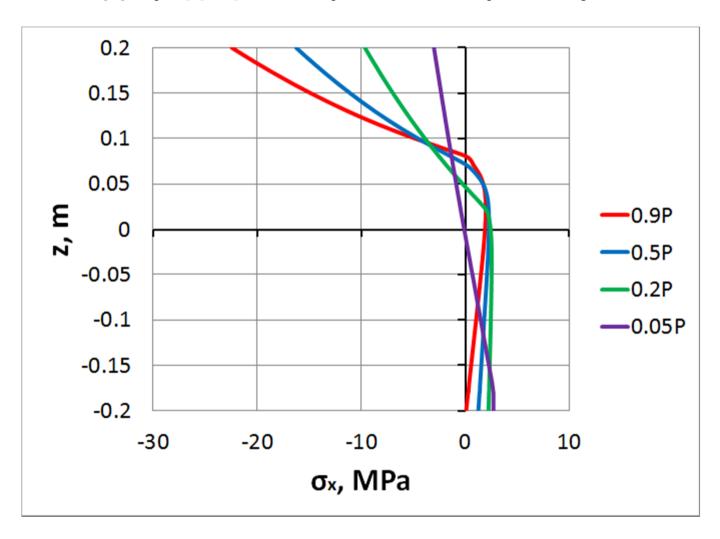
## Распределение напряжений σ<sub>x</sub> в бетоне по высоте сечения. Элемент №8, P = 0.95P<sub>max</sub>



#### Concrete approximations: $\sigma_t$ = 2.5 Mpa, $\xi$ = 20, $\alpha$ = 0.02, $\beta$ = 0.005

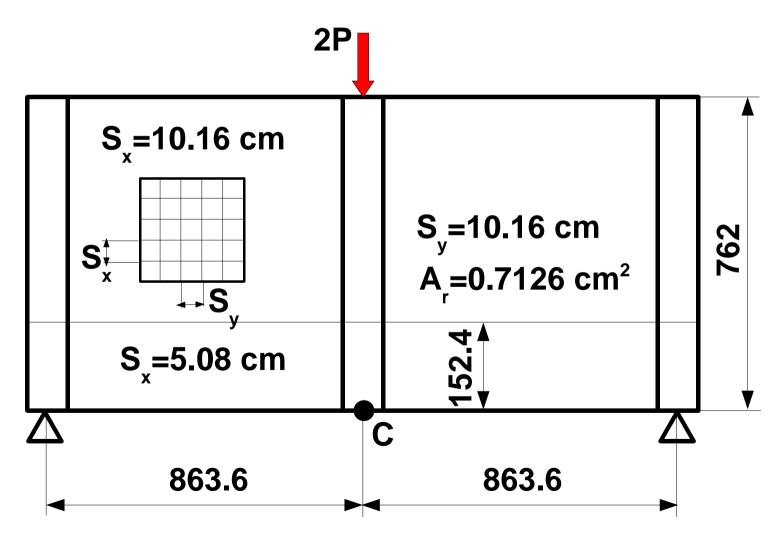


Concrete approximations: σ<sub>t</sub> = 2.5 Mpa, ξ = 20, α = 0.02, β = 0.005 Напряжения в бетоне при различных уровнях нагружения. Элемент № 8. Деградация напряжений в растянутой зоне.



#### Пример 2. Балка-стенка.

Podleś K., Szarliński A., Truty A. Analiza konstrukcji 2D z betonu w stanach granicznych dla procesów doraźnych i długotrwałych. // Metody Numeryczne w Projektowaniu i Analizie Konstrukcji Hydrotechnicznych, XIII Konferencja Naukowa – Korbielów, 2001, pp. 1 – 10.



#### КЭ модель

#### Бетон:

E = 20 000 MPa,

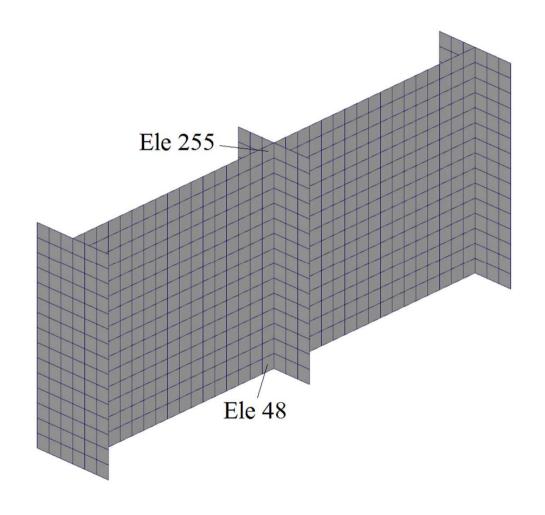
 $\sigma_{\rm c}$  = 26.8 MPa,  $\sigma_{\rm ul}$  = 0.85 $\sigma_{\rm c}$  ,

 $\sigma_{\rm t}$  = 3.65 MPa, v = 0.167,

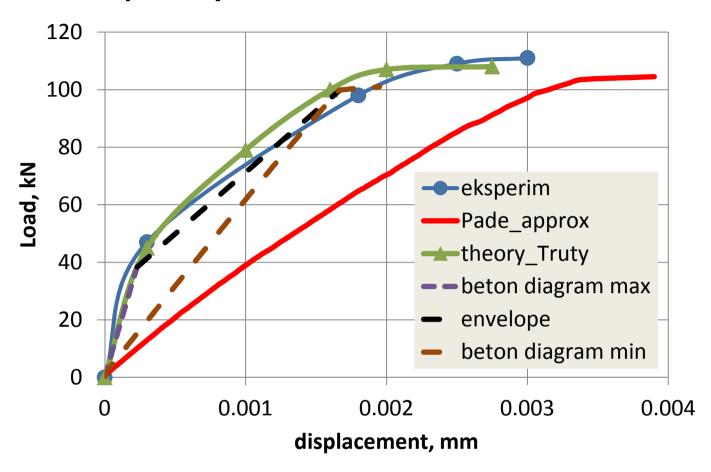
 $\varepsilon_{\rm c}$  = 0.0035,  $\varepsilon_{\rm ul}$  = 1.41  $\varepsilon_{\rm c}$ 

Арматура:  $E_s = 200 000 MPa$ ,

 $\sigma_{v}^{s} = 353 \text{ MPa}$ .



#### Прогиб узла 2 в зависимости от силы Р

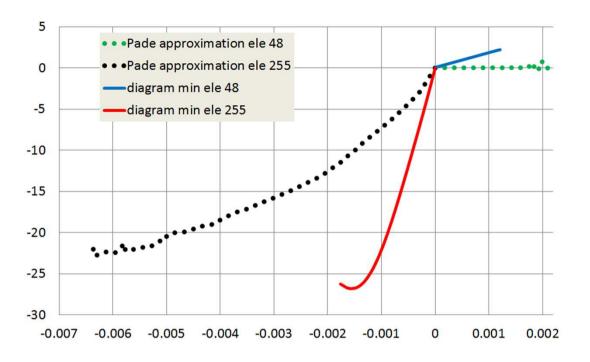


theory\_Truty – упруго-пластическая модель (теория пласт. течения) с деградацией.

Pade\_approx:  $ε_1 = 1.825 \cdot 10^{-6}$  ,  $σ_t = 0.00365$  MPa,  $ε_2 = 0.00134$ ,  $σ_c = 26.8$  Mpa

beton\_diagram\_min:  $\sigma_t$  = 0.00365 Mpa,  $\xi$  = 2,  $\alpha$  = 2,  $\beta$  = 0.07

Beton\_diagram\_max:  $\sigma_t = 3.65$  Mpa,  $\xi = 4$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.005$ 



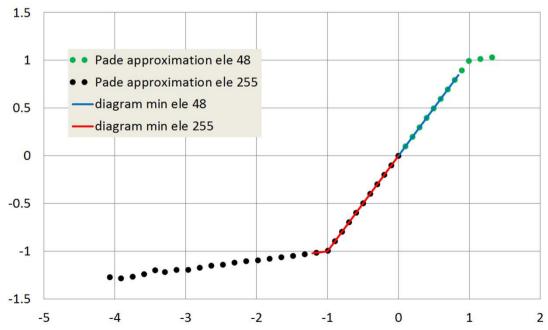


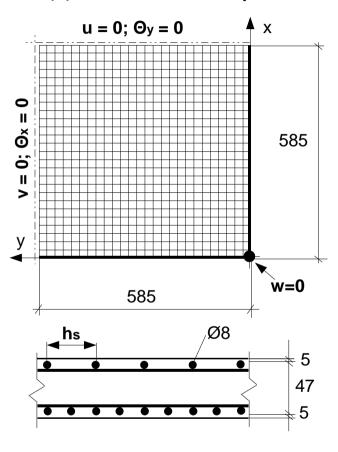
Диаграмма  $\sigma_i - \epsilon_i$  для бетона. Элементы 48 (растяжение) и 255 (сжатие)

- Pade approximation течет арматура растянутой и сжатой зон.
- Diagram min в сжатой зоне арматура течет, бетон разрушается.

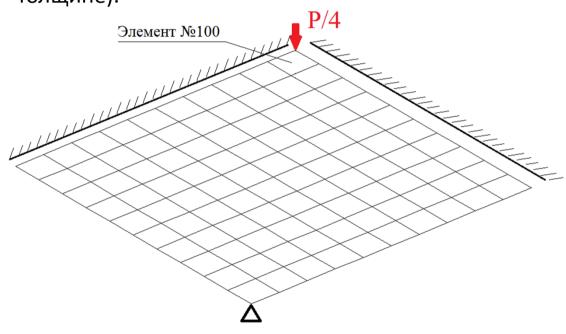
Диаграмма σ – ε для арматуры. Элементы 48 (растяжение) и 255 (сжатие)

#### Пример 3. Изгиб квадратной плиты.

Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. «Запорожье», 2009.

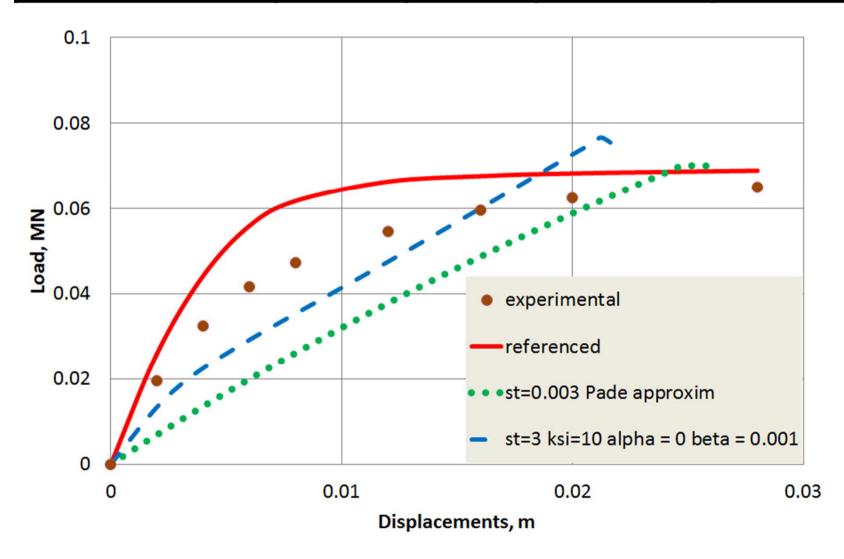


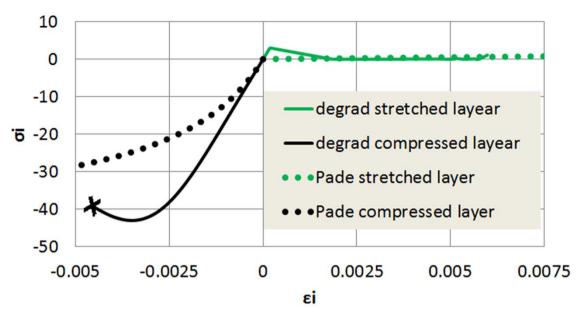
(Деформ. теория пластичн., слоистый трехмерный КЭ при линейном распределении дефомаций по толщине).

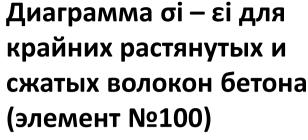


Бетон	E, Mpa	σ <sub>t</sub> , Mpa	σ <sub>c</sub> , Mpa	V	$\boldsymbol{\epsilon_1}$	ε <sub>c</sub>
	16400	3	43	0.2	0.000183	0.0035

Арматура	Es, Mpa	σу, Мра	A, m <sup>2</sup>	hs, m
Верхняя арматура	190 000	400	5.026·10-5	0.054
Нижняя арматура	190 000	400	5.026·10 <sup>-5</sup>	0.027

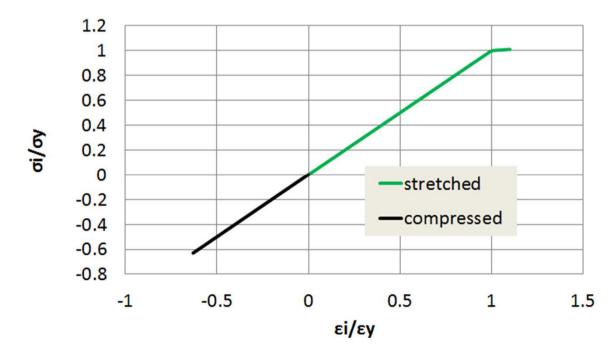




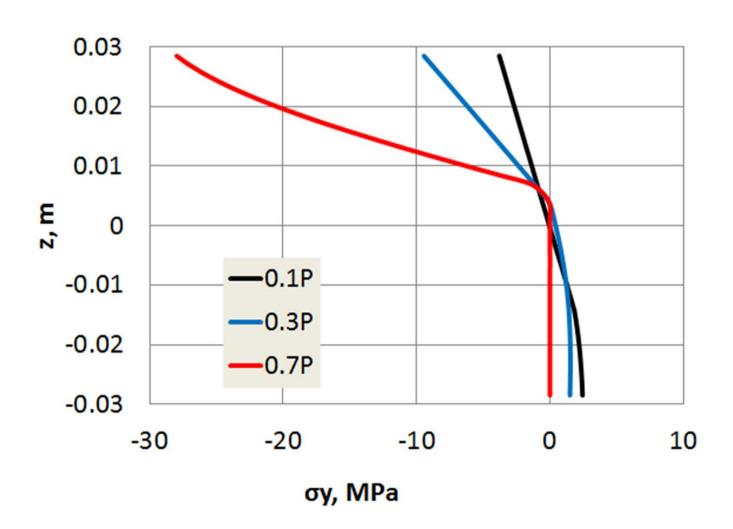


Бетон сжатой зоны разрушается (σt=3, ε=10), а арматура растянутой зоны течет.

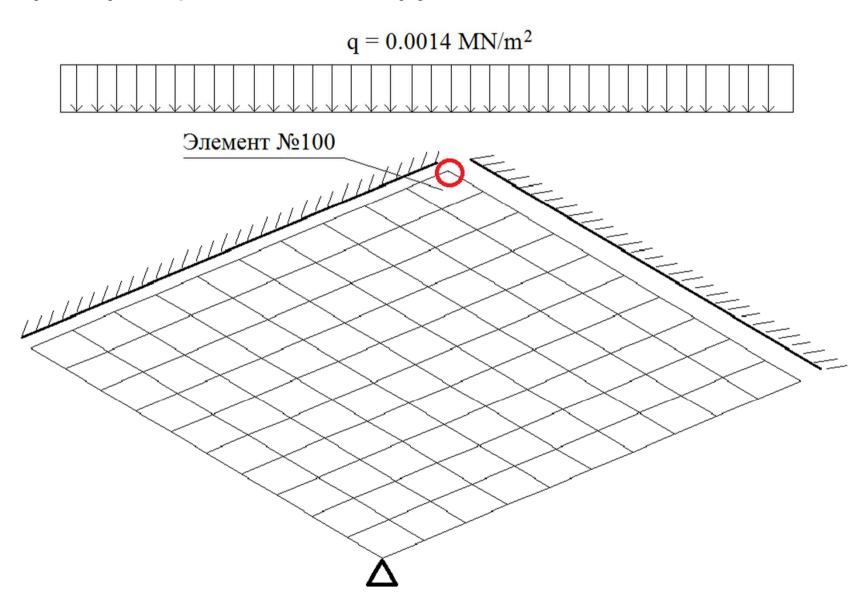
Диаграмма σі/σ<sub>У</sub> — εі/є<sub>У</sub> для растянутой и сжатой арматуры в направлении ОУ (элемент №100). Арматура в направлении ОХ работает в упругой области.



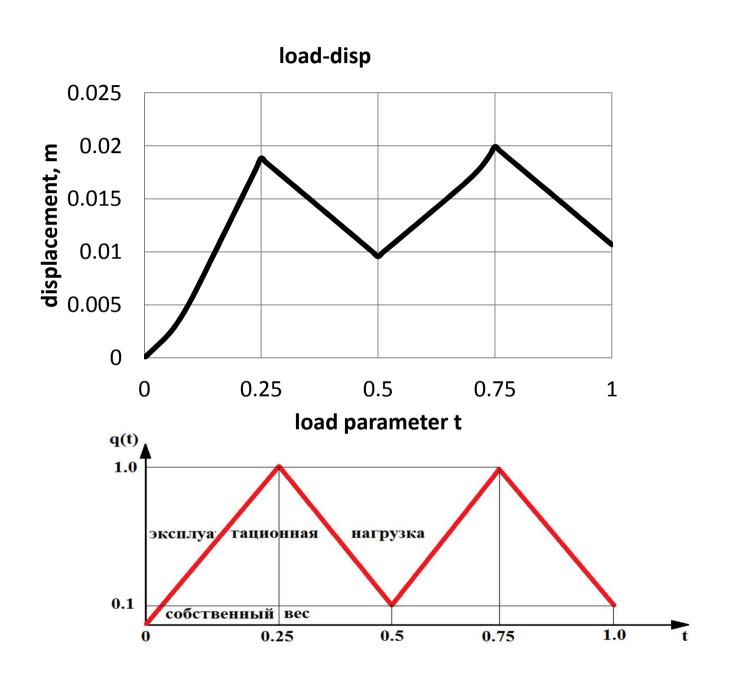
Распределение напряжений в бетоне по высоте сечения при различных уровнях нагружения. Элемент №100.  $\sigma t = 3$  MPa,  $\xi = 10$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.001$ .



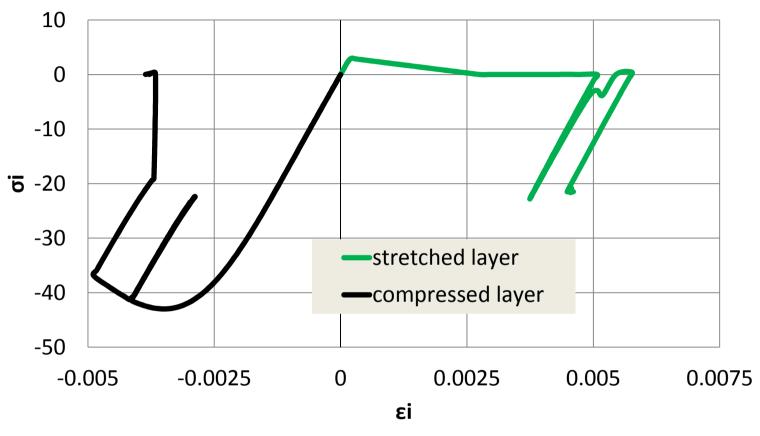
#### Пример 3. Циклическое нагружение.



#### Нагрузка – прогиб в центре пластины



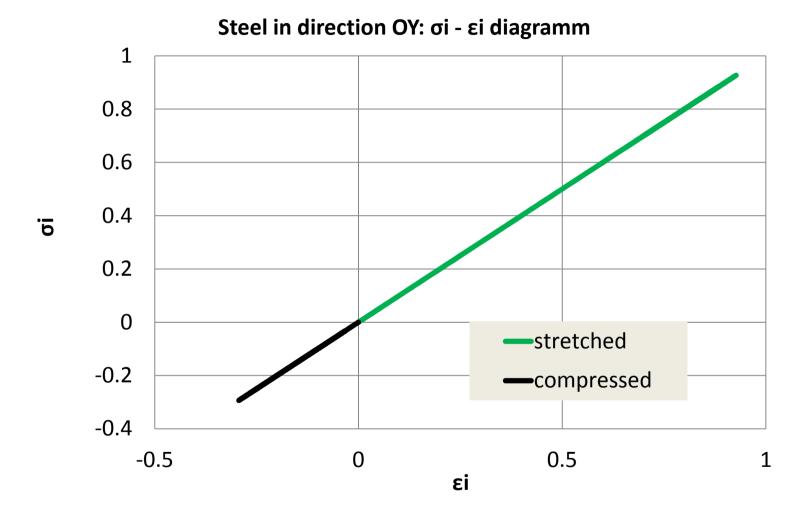
## Диаграмма σі – εі для бетона. Элемент 100. Наиболее растянутое и наиболее сжатое волокно.



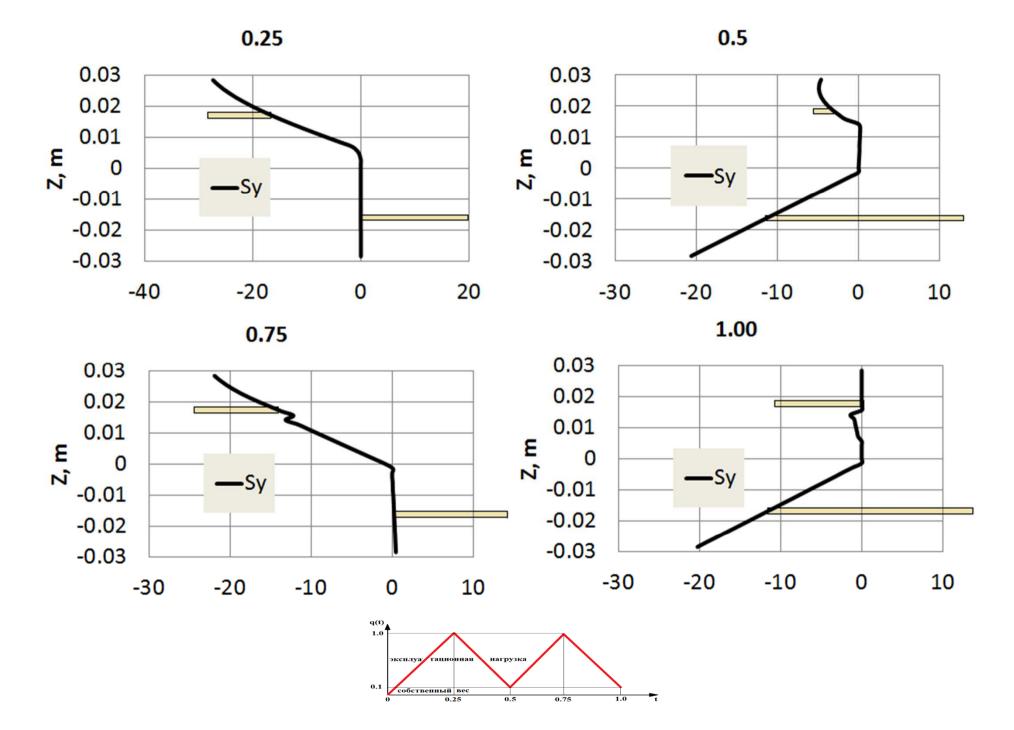


**Арматура работает в упругой области.** 

Диаграмма σі – εі для бетона. Элемент 100. Наиболее растянутое и наиболее сжатое волокно.



Арматура работает в упругой области.



#### Заключение

• Методы расчета железобетонных конструкций, построенные на определении внутренних усилий на основе линейного расчета и дальнейшем подборе арматуры по существующим нормах проектирования, не позволяют анализировать явления, протекающие в бетоне и арматуре. При таком подходе физическое содержание процесса деформирования существенно искажается, что в ряде случаев может привести к серьезным проблемам.

#### Заключение

- В процессе итераций метода Ньютона Рафсона механизм учета разгрузки позволяет сохранить сходимость на почти горизонтальных и ниспадающих участках диаграммы σ<sub>i</sub> ε<sub>i</sub>. При отключении разгрузки (нелинейная упругость) удавалось получить сходимость только при достаточно большом (не менее 10%) упрочнении как бетона, так и арматуры.
- Кроме того, учет разгрузки позволяет адекватно описать физическое поведение материала, особенно при циклическом нагружении.
- Поведение арматуры с достаточной точностью описывается деформационной теорией пластичности при билинейной диаграмме σ – ε.

### БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!