

**О постановке задачи интегрирования
уравнений движения при расчете на
сейсмику, реализованной в
программном комплексе SCAD.**

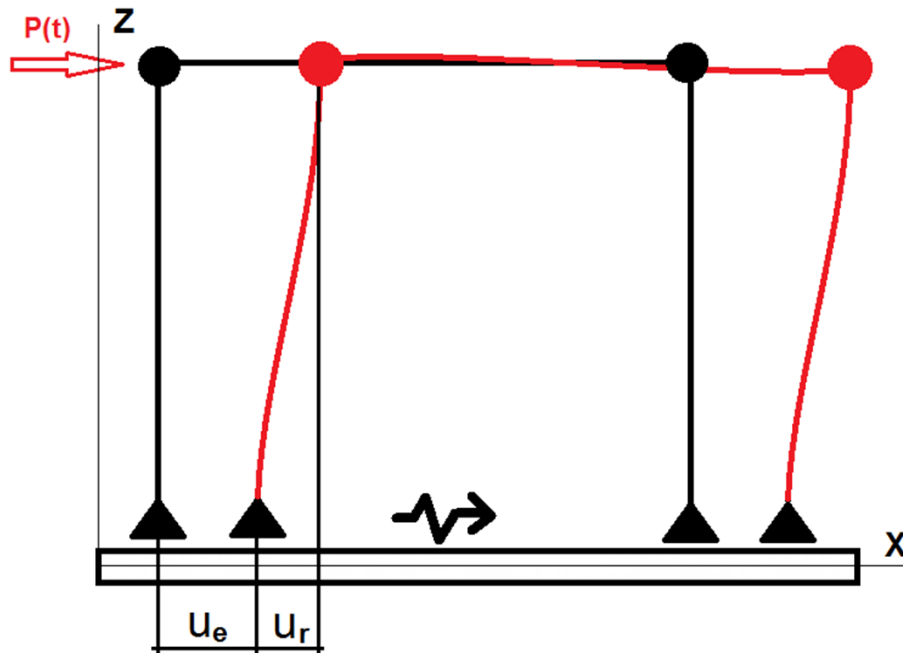
С. Ю. Фиалко

Cracow University of Technology & SCAD Soft IT company

sergiy.fialko@gmail.com

1. Интегрирование уравнений движения при вынужденном смещении опор. Классическая постановка задачи.

Все опоры двигаются синхронно.



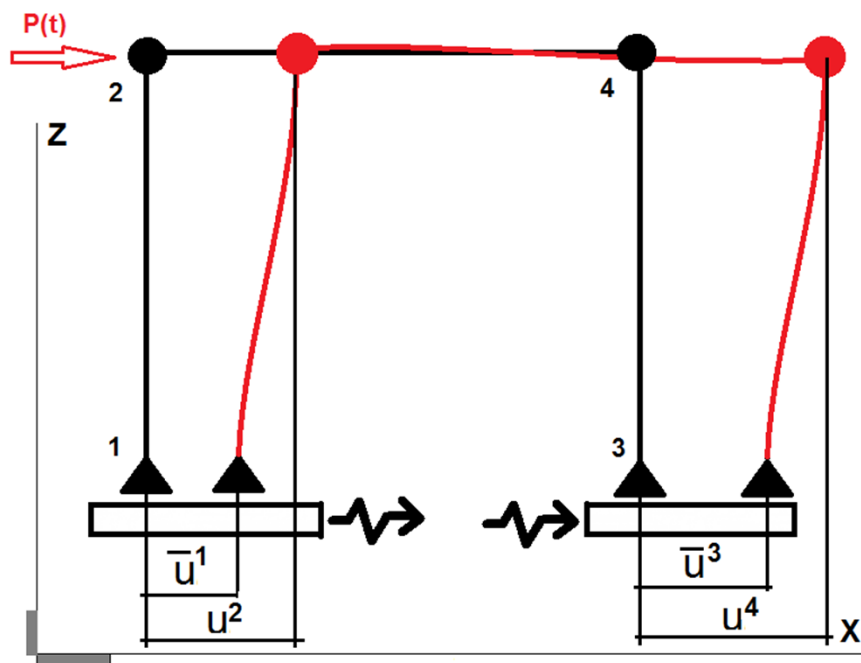
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r;$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_e + \dot{\mathbf{u}}_r;$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_e + \ddot{\mathbf{u}}_r;$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}\mathbf{u}_r = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{p}(t)$$

2. Постановка задачи в абсолютных координатах позволяет естественным образом сформулировать уравнения движения даже в том случае, если **каждая опора совершает свое собственное движение** – асинхронное движение опор.



$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^3 \end{pmatrix};$$

$\bar{\mathbf{u}}$ - Заданные перемещения

\mathbf{u} - Искомые перемещения

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^2 \\ w^2 \\ \theta^2 \\ u^4 \\ w^4 \\ \theta^4 \end{pmatrix};$$

Уравнения движения:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{M}}} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{12}\bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{C}_{12}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{p}(t), \quad (1.2)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_{s=1}^{M_s} \mu_s \cdot \mathbf{k}_s \cdot f_s(t - t_0^s), \quad \dot{\mathbf{u}} = \sum_{s=1}^{M_s} \mu_s \cdot \mathbf{k}_s \cdot \dot{f}_s(t - t_0^s), \quad \mathbf{p}(t) = \sum_{p=1}^{N_p} \mu_p \cdot \mathbf{k}_p \cdot f_p(t - t_0^p). \quad (1.3)$$

В классической формулировке входное воздействие представлено в виде акселерограммы

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \ddot{\mathbf{u}}_e(t).$$

В нашем подходе входное воздействие представлено в виде сейсмограммы и велосиграммы.

$$\bar{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t).$$

Матрица диссипации \mathbf{C} может быть задана:

- В виде линейной комбинации матрицы жесткости и матрицы масс (гипотеза Рэлея)

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} .$$

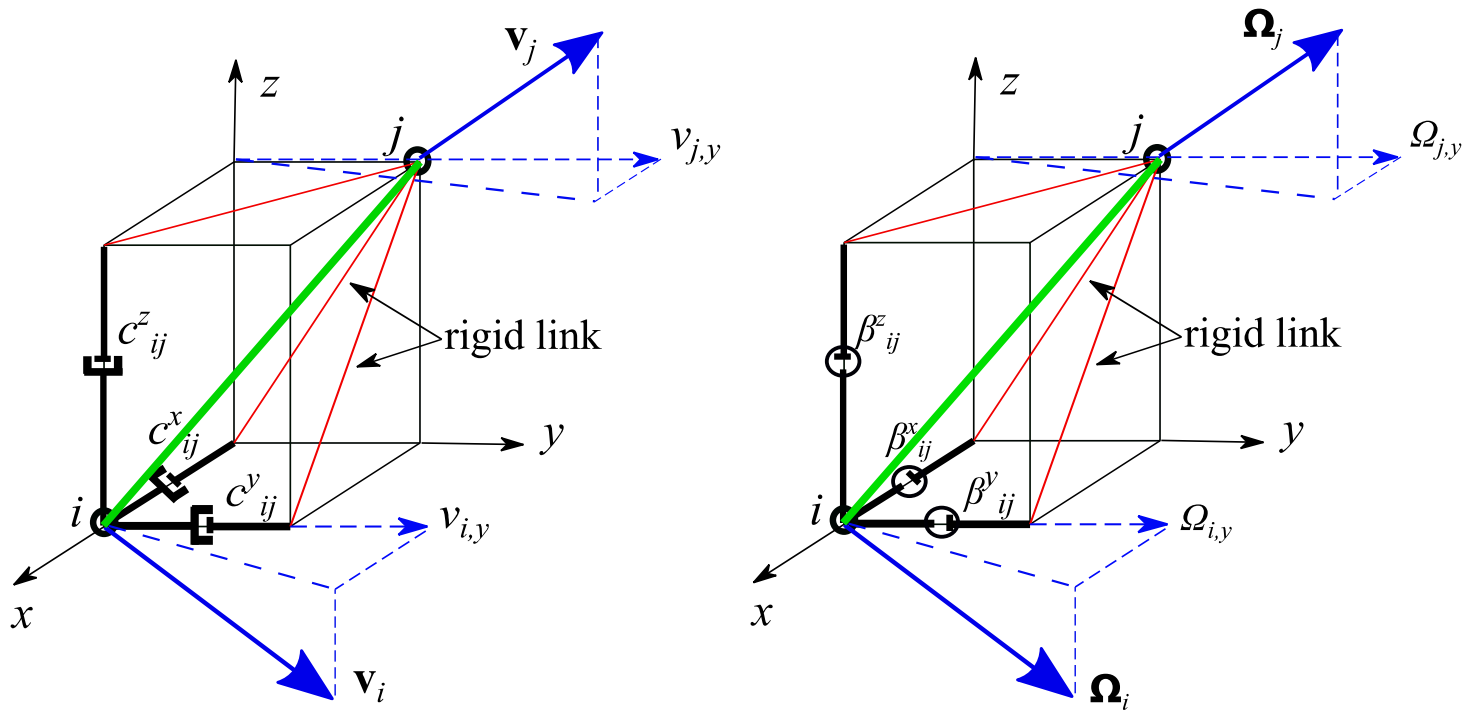
- В виде демпфирования материала

$$\mathbf{C} = \sum_{elem} \gamma_{elem} \mathbf{P}_{elem}^T \mathbf{K}_{elem} \mathbf{P}_{elem} ,$$

где \mathbf{K}_{elem} – матрица жесткости конечного элемента, \mathbf{P}_{elem} – матрица перестановок, γ_{elem} – коэффициент внутреннего неупругого сопротивления материала.

В последнем случае каждый материал может иметь свое демпфирование.

Кроме того, имеется возможность постановки локальных демпферов, как одноузловых, так и двухузловых:



$$F_{d,y} = c^y_{ij}(v_{j,y} - v_{i,y}), y \leftrightarrow x, z$$

$$M_{d,y} = \beta^y_{ij}(\Omega_{i,y} - \Omega_{j,y}), y \leftrightarrow x, z$$

Матрица диссипации локального двухузлового демпфера в глобальной системе координат:

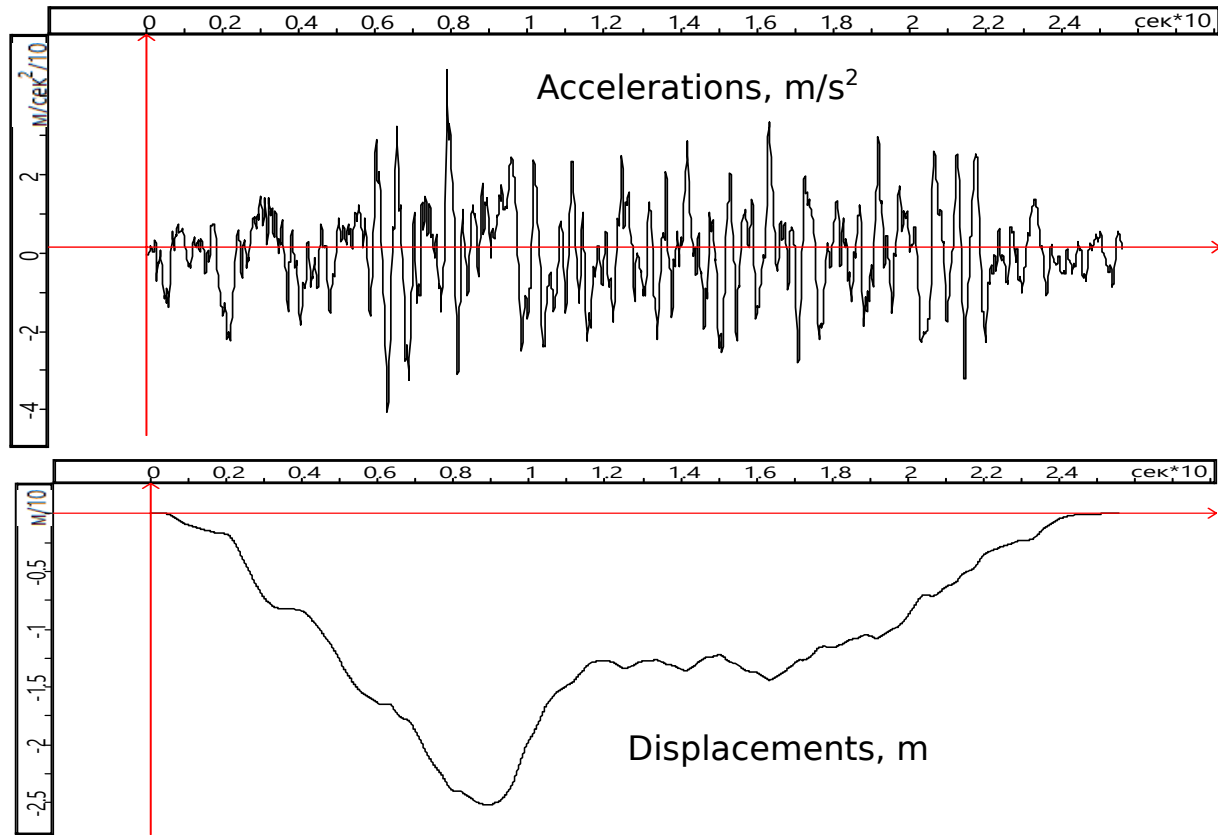
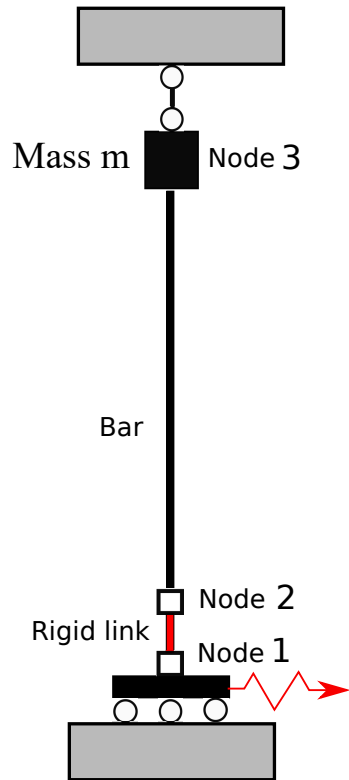
$$\mathbf{f}_{ij}^d = \mathbf{f}_e^d = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^d \\ \mathbf{f}_j^d \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\beta & -\mathbf{C}_\beta \\ -\mathbf{C}_\beta & \mathbf{C}_\beta \end{pmatrix}_e \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_j \end{pmatrix}_e = \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{q}}_e;$$

Здесь \mathbf{f}_i^d – вектор сил диссипации в узле i ($i \leftrightarrow j$), e – номер конечного элемента, соединяющего узлы i, j ,

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} c_{ij}^x & & & & & & \\ & c_{ij}^y & & & & & \\ & & c_{ij}^z & & & & \\ & & & \beta_{ij}^x & & & \\ & & & & \beta_{ij}^y & & \\ & & & & & \beta_{ij}^z & \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_i = \begin{pmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \\ \dot{\theta}_x^i \\ \dot{\theta}_y^i \\ \dot{\theta}_z^i \end{pmatrix}$$

Матрица диссипации одноузлового демпфера получается из матрицы диссипации двухузлового демпфера закреплением одного из узлов.

Test 1.



В горизонтальных ускорениях узла 2 появляется высокочастотная паразитная компонента:

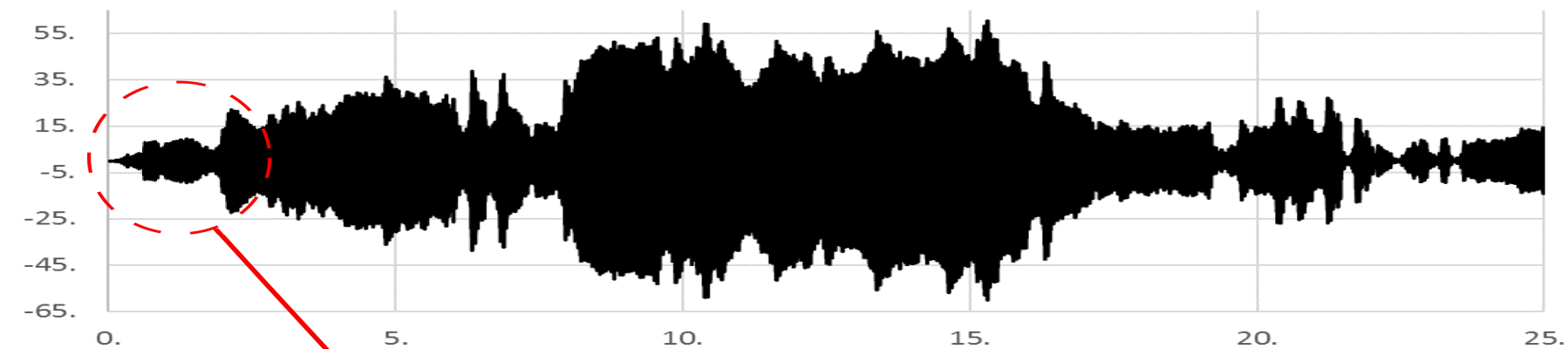
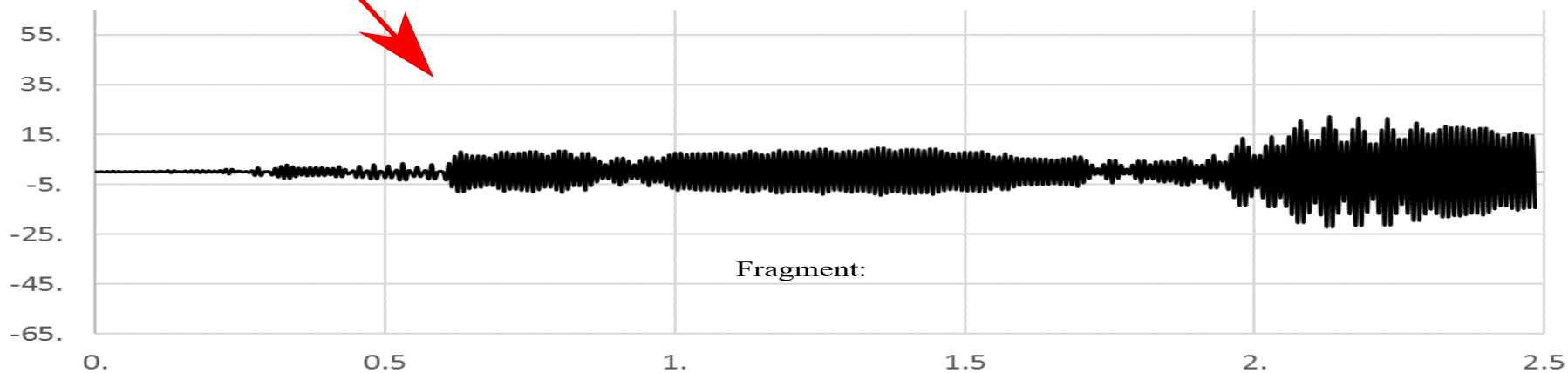


Fig. 1.1



Причина:

Использование линейной интерполяции заданных перемещений $\bar{\mathbf{u}}(t)$.

При этом скорость $\dot{\bar{\mathbf{u}}}(t)$ является кусочно-постоянной функцией на отрезке

$$t \in [t_i, t_{i+1}],$$

а ускорения $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}(t)$ всюду на отрезке равны нулю, а в узлах интерполяции $i, i+1$ представлены дельта-функциями Дирака.

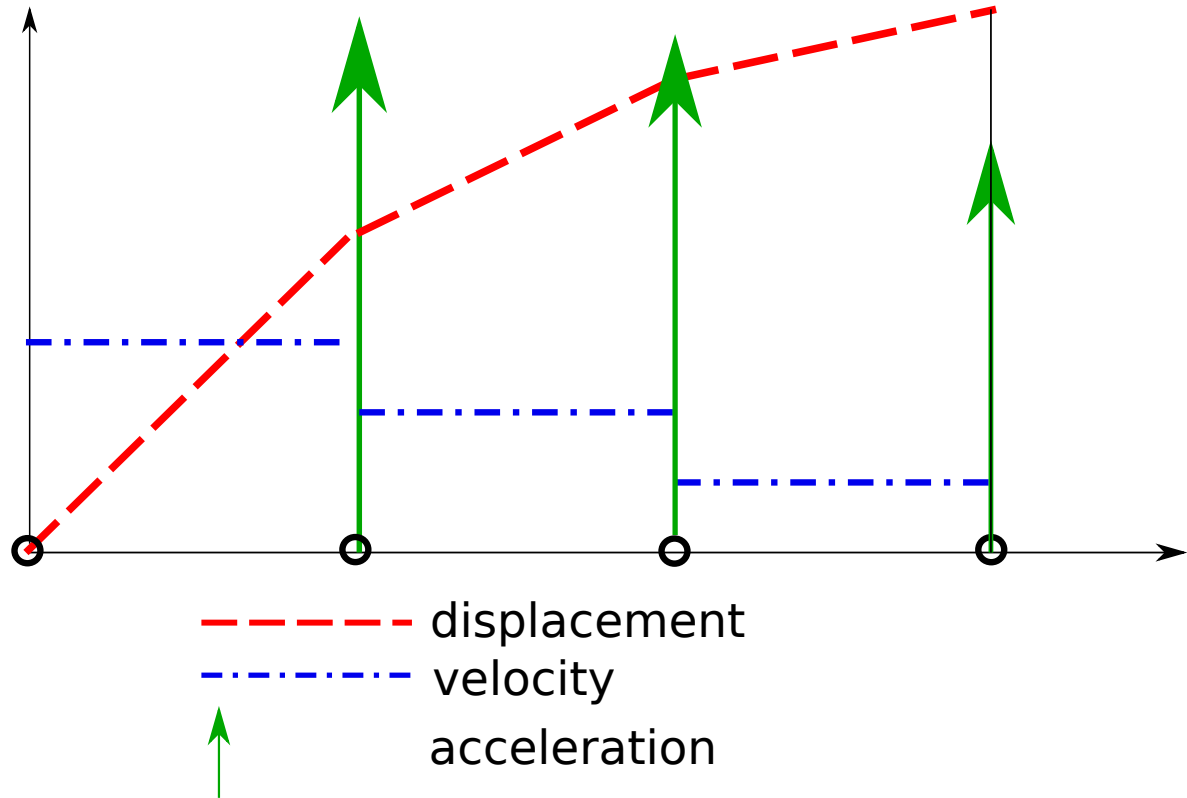


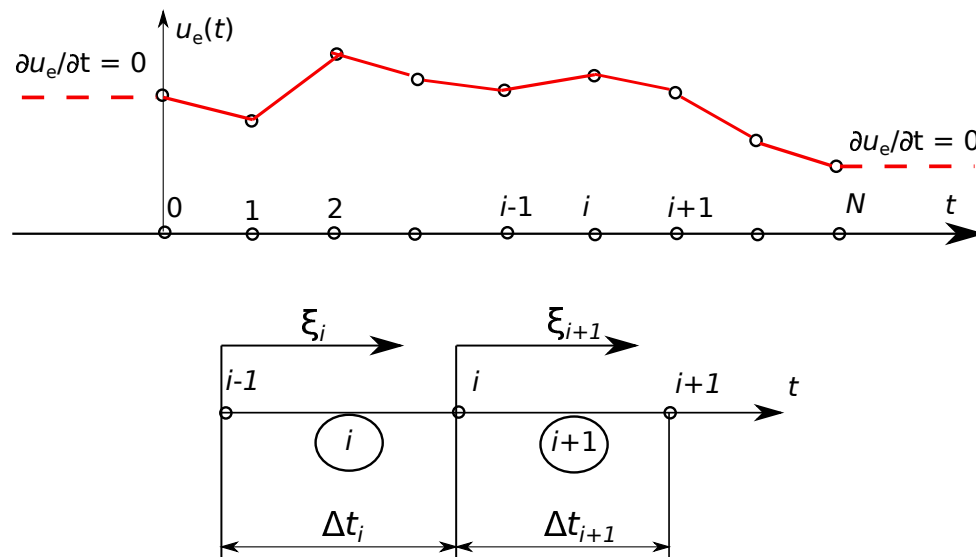
Fig. 1.2

Решение этой проблемы состоит в:

- Использовании кубической интерполяции заданных перемещений.
- Применении метода прямого интегрирования, гасящего частоты колебаний ω , для которых $\omega\Delta t > 1$ (Δt – шаг интегрирования), например, α – ННТ метод.

Использовании кубической интерполяции заданных перемещений.

Входное воздействие задано в виде перемещений $u_{e,0}, u_{e,1}, \dots, u_{e,N}$:



Аппроксимация полиномами Эрмита ($\xi_i = (t - t_{i-1}) / \Delta t_i$, индекс i для ξ_i и Δt_i опущен) :

$$u_e^i(\xi) = (N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad N_4(\xi)) \begin{pmatrix} d_{i-1} \\ v_{i-1} \\ d_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad \dot{u}_e^i(\xi) = \frac{1}{\Delta t} (\dot{N}_1(\xi) \quad \dot{N}_2(\xi) \quad \dot{N}_3(\xi) \quad \dot{N}_4(\xi)) \begin{pmatrix} d_{i-1} \\ v_{i-1} \\ d_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

$$N_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad N_2(\xi) = -\Delta t(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi),$$

$$N_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad N_4(\xi) = -\Delta t(\xi^3 - \xi^2).$$

$$\ddot{u}_e^i(\xi) = \frac{1}{\Delta t^2} (\ddot{N}_1(\xi) \quad \ddot{N}_2(\xi) \quad \ddot{N}_3(\xi) \quad \ddot{N}_4(\xi)) \begin{pmatrix} d_{i-1} \\ v_{i-1} \\ d_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

Здесь d , v – значения перемещений и скоростей в узлах интерполяции. Такая аппроксимация обеспечивает отсутствие разрывов перемещений и скоростей в узлах:

$$u_e^i(\xi_i = 1) = u_e^{i+1}(\xi_{i+1} = 0), \quad \dot{u}_e^i(\xi_i = 1) = \dot{u}_e^{i+1}(\xi_{i+1} = 0)$$

Подберем узловые значения скоростей так, чтобы обеспечить отсутствие разрывов ускорений в узлах:

$$\ddot{u}_e^i(\xi_i = 1) = \ddot{u}_e^{i+1}(\xi_{i+1} = 0)$$

Запишем это условие в каждой внутренней точке интервала. Дополняя условиями $v_0 = v_N = 0$, получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной симметричной матрицей, из решения которой определим узловые значения скоростей.

Гашение высокочастотных колебаний

Рассмотрим задачу о колебаниях линейного осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (*)$$

Система является консервативной, приток энергии и ее рассеяние отсутствует.

Применяя конечные разности второго порядка точности, получаем явную (a) и неявную (b) схемы решения:

$$x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} + \omega^2 \Delta t^2 x_k = 0 \quad (a)$$

$$x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} + \omega^2 \Delta t^2 \left(\frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{2} \right) = 0 \quad (b)$$

Схема (a) называется явной, так как x_{k+1} входит только в конечно-разностную аппроксимацию второй производной и, зная значения x_k , x_{k-1} , можно явно вычислить x_{k+1} . Явные разностные схемы просты, однако являются условно устойчивыми: для успешного их применения должно выполняться условие $\Delta t < T_{min}/k$, где Δt – шаг интегрирования, T_{min} – наименьший период собственных колебаний, k – числовой коэффициент, зависящий от типа явной разностной схемы.

Схема (b) называется неявной, поскольку для нахождения решения на шаге $k+1$ необходимо разрешить уравнение (b) относительно x_{k+1} . Для систем с конечным числом степеней свободы при этом следует решать систему линейных алгебраических уравнений.

Неявные схемы более трудоемки, однако среди них существуют такие, которые являются абсолютно устойчивыми при любых значениях Δt .

Какую схему выбрать? Явную или неявную? Это зависит от класса решаемых задач. Для задач нашего типа как правило используются неявные схемы, поскольку расчетные модели строительной механики содержат настолько высокие частоты собственных колебаний, что для получения устойчивого численного решения по явной разностной схеме потребовалось бы интегрировать уравнения движения с очень малым шагом Δt .

При использовании неявной разностной схемы второго порядка точности выбранный шаг Δt хорошо аппроксимирует моды, для которых $T \geq 2\pi \Delta t$, и плохо – моды, для которых $T < 2\pi \Delta t$. Если вклад мод колебаний, для которых $T < 2\pi \Delta t$ невелик, то решение будет получено скорее всего с достаточной точностью. В противном случае решение будет содержать значительную погрешность.

Поэтому перед тем, как решать задачу вынужденных колебаний, полезно выполнить модальный анализ и на основе его результатов принять шаг Δt .

Общее решение однородного разностного уравнения второго порядка ищется в виде: $x_k = r^k$. Соответственно получаем два характеристических уравнения:

$$r^2 - (2 - \omega^2 \Delta t^2)r + 1 = 0 \quad (aa)$$

$$(2 + \omega^2 \Delta t^2)r^2 - 4r + (2 + \omega^2 \Delta t^2) = 0 \quad (bb)$$

- А. Корни каждого из квадратных уравнений должны быть комплексными – решение должно носить колебательный характер.
- В. $|r| = 1$, иначе при $k \rightarrow \infty$ решение будет или затухать, или неограниченно возрастать, что противоречит консервативности системы.

Схема (a) является условно устойчивой, поскольку условие А выполняется только при $\Delta t < T/\pi$. Схема (b) является абсолютно устойчивой, поскольку условие А выполняется для любых значений Δt .

Если для схемы (a) выполняется условие А, то условие В также будет выполнено. Для схемы (b) условие В выполняется для любых значений Δt .

Вывод. Классические разностные схемы (a) при $\Delta t < T/\pi$ и (b) при любых Δt являются корректными в том смысле, что для консервативной задачи (*) не порождают ни нарастающего во времени решения, ни ложного затухания, поскольку для них выполняется условие $|r| = 1$.

Однако мы хотели бы построить такую разностную схему, которая бы подавляла частоты, плохо аппроксимируемые при выбранном шаге Δt .

Поступим так:

$$\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\Delta t^2} + (1 + \alpha) \frac{\omega^2}{2} x_{k+1} + (1 - \alpha) \frac{\omega^2}{2} x_{k-1} = 0 \quad (c)$$

Здесь α – параметр, задающий смещение. При $\alpha = 0$ мы получаем неявную разностную схему (b).

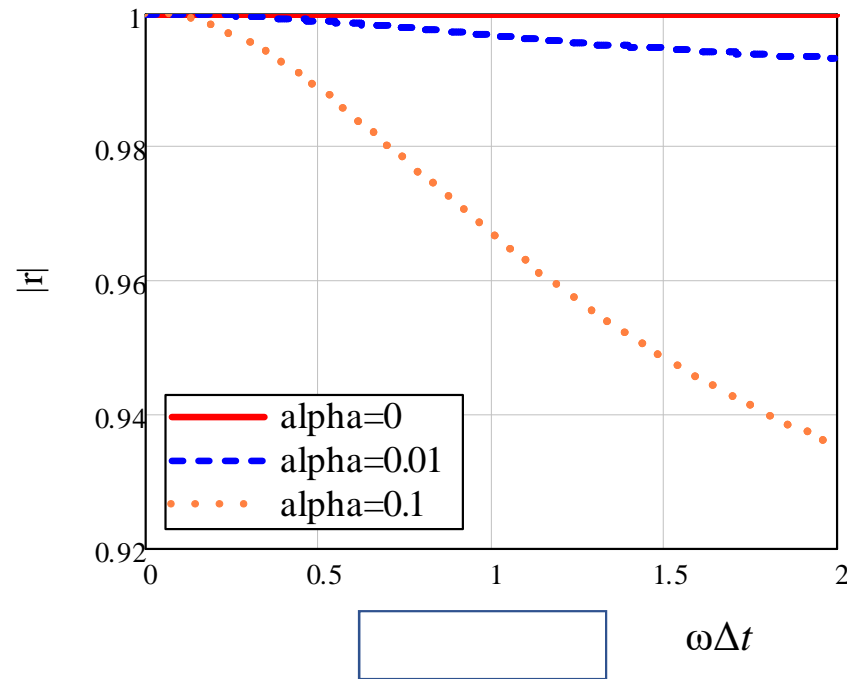
Характеристическое уравнение:

$$[1 + (1 + \alpha)a]r^2 - 2r + [1 + (1 - \alpha)a] = 0, \quad a = \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2}$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{(2+a)a - \alpha^2 a^2}}{1 + a + \alpha a},$$
$$|r| = \sqrt{1 - \frac{2\alpha a}{(1 + a + \alpha a)}}$$

Если $\alpha = 0$, то $|r| = 1$.



Строго говоря, мы получили некорректную схему, поскольку результатом численного решения консервативной задачи будут затухающие во времени колебания. Однако если параметр α мал по величине и продолжительность процесса составляет небольшое количество периодов основного тона, то полученная разностная схема вполне пригодна для практического применения.

α – ННТ метод.

Представим уравнение движения в форме

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{k+1} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\mathbf{v}_{k+1} - \alpha\mathbf{C}\mathbf{v}_k + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{u}_{k+1} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{u}_k = (1 + \alpha)\mathbf{f}_{k+1}^{ext} - \alpha\mathbf{f}_k^{ext},$$

где α – параметр смещения, \mathbf{f}^{ext} – правая часть уравнения.

Полагая $\mathbf{C} = \mathbf{f}^{ext} = 0$, получим задачу о свободных колебаниях недемпфированной системы (отсутствует приток энергии и ее рассеивание). Перемещения, скорости и ускорения системы на шаге k выразим через перемещения, скорости и ускорения в начальный момент времени с помощью матрицы амплификации:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_k \\ \Delta t \mathbf{v}_k \\ \Delta t^2 \mathbf{a}_k \end{pmatrix} = \mathbf{A}^k \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \Delta t \mathbf{v}_0 \\ \Delta t^2 \mathbf{a}_0 \end{pmatrix}$$

Имеем:

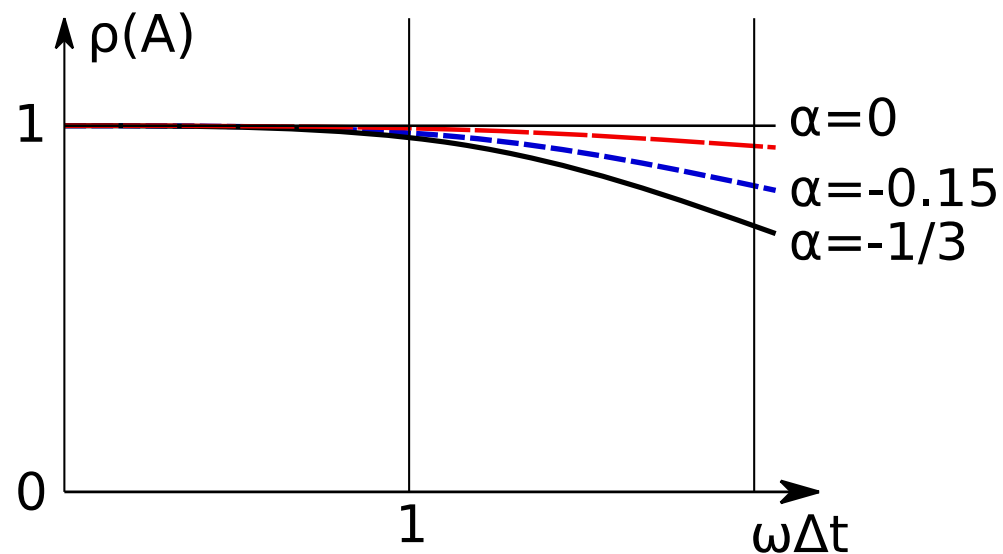
$$\|\mathbf{b}_k\|_2 = \|\mathbf{A}^k \mathbf{b}_0\|_2 \leq \|\mathbf{A}^k\|_2 \|\mathbf{b}_0\|_2 = \rho(\mathbf{A})^k \|\mathbf{b}_0\|_2, \quad \mathbf{b}_k = (\mathbf{u}_k \quad \Delta t \mathbf{v}_k \quad \Delta t^2 \mathbf{a}_k)^T.$$

Из условия консервативности системы и отсутствия притока энергии следует, что корректное решение будет тогда, когда

$$\rho(\mathbf{A}) = 1.$$

Такому условию удовлетворяет метод Ньюмарка, получаемый как частный случай α – ННТ метода при $\alpha = 0$.

При $0 < \alpha < -1/3$ спектральный радиус практически равен 1 при $\omega\Delta t < 1$, однако начинает интенсивно убывать при $\omega\Delta t > 1$. В результате частоты $\omega > 1/\Delta t$ ($T < 2\pi\Delta t$) гасятся даже при отсутствии диссипации энергии, причем чем ближе α к $-1/3$, тем интенсивнее это происходит.



Горизонтальное ускорение узла 2 после применения кубической интерполяции и α – ННТ метода при $\alpha = -0.3333$.

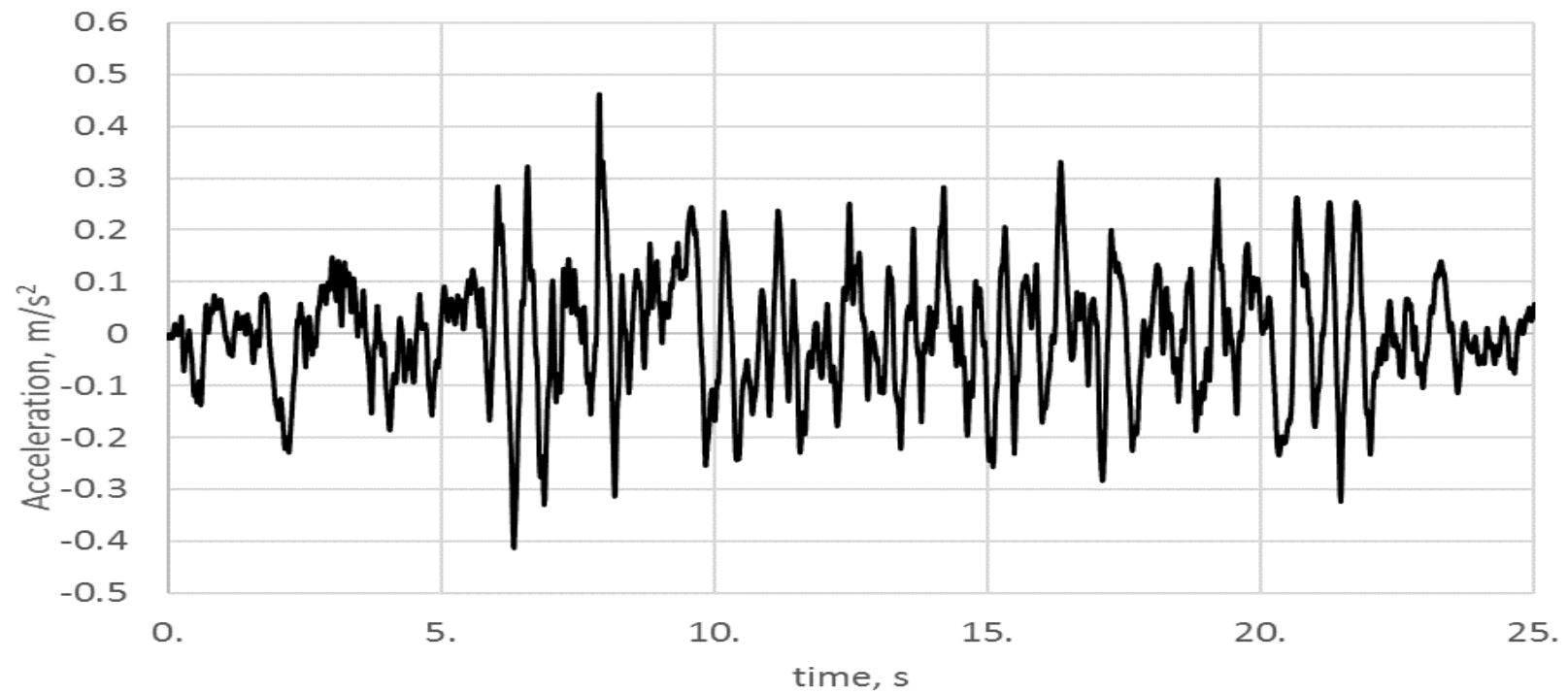


Fig. 1.3

Элементы интерфейса

Параметры динамических воздействий

Общие данные | **Прямое интегрирование уравнений движения**

Шаг интегрирования: сек

Продолжительность процесса: сек

Модальное демпфирование

Определение по первым двум частотам

Задание самостоятельно

1-я частота: (в долях от критического)

2-я частота:

Множитель при матрице масс: сек⁻¹

Множитель при матрице жесткостей: сек

Демпфирование материала (задается в жесткостях)

α-ННН параметр:

Моменты времени для выдачи результатов

	От, сек	До, сек	С шагом, в сек
1	0	4	0.001
2	4.001	7.999	0.001
3	8	8	4.e-004
4	8.001	16	0.001
5	16.001	31.999	0.001
6	32	39.999	0.001

+ Добавить | X Удалить

	№ статического нагружения	Множитель	Запаздывание, сек	Сглаживание	Имя файла	Просмотр графика	Открыть файл	Сохранить данные во внешнем файле
1	2. Смещение	1	0	Полине	???:\Мои документы			

Полине
 Линейная интерполяция
 Кубическая парабола
 Полином Эрмита

+ Добавить | X Удалить

OK | Отмена | Справка

Жесткость объемных элементов

Изотропия

Материал

Изотропия

Трансверсальная изотропия

Ортотропия

Типы жесткости

	Модуль упругости	Имя типа жесткости
1	2140000	

Материал:

Объемный вес: Т/М³

Параметры

Модуль упругости: Т/М²

Коефициент Пуассона:

Коеф. линейного расширения: 1/°C

Параметр затухания:

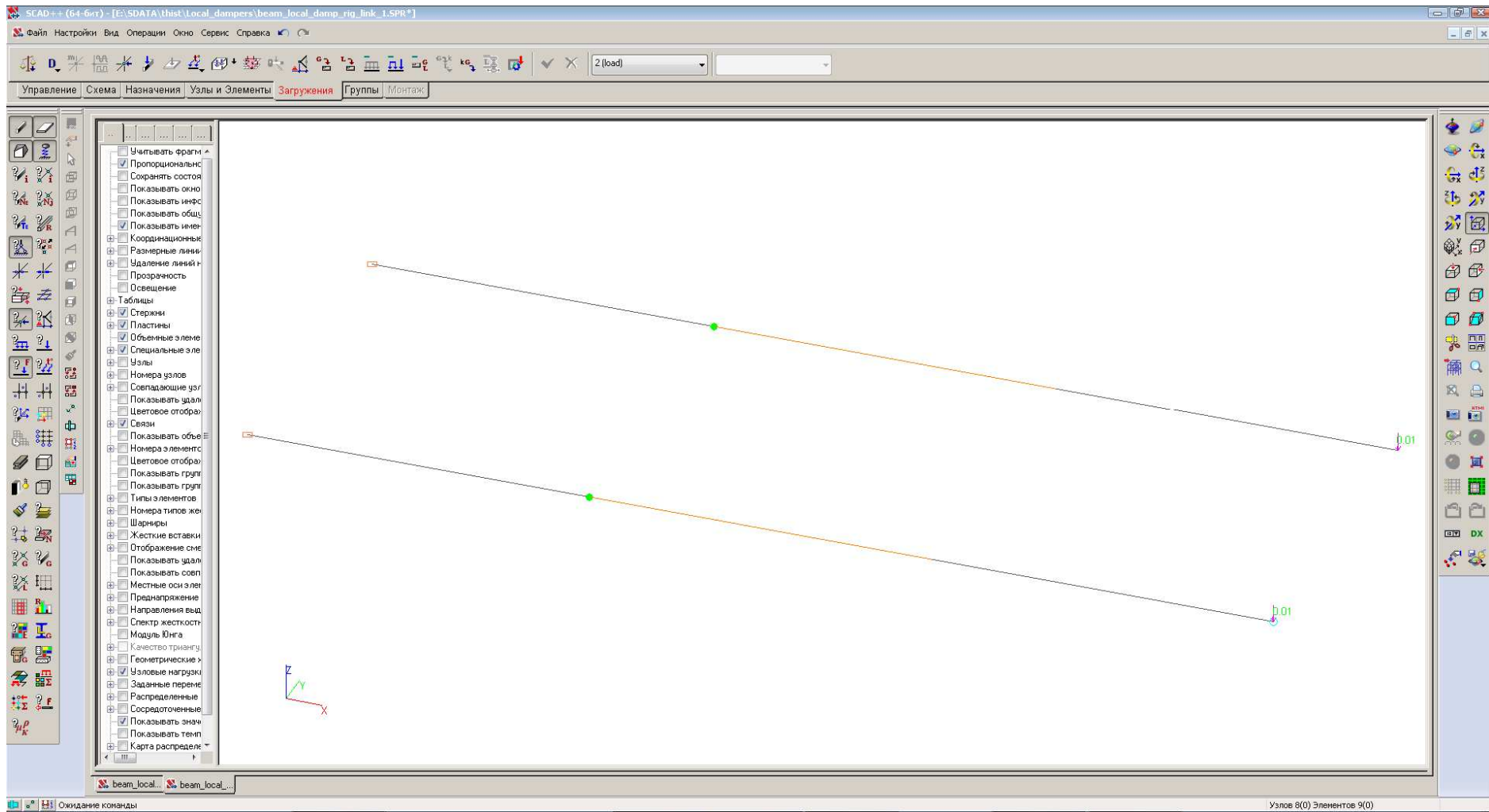
Имя типа жесткости:

Использовать описание в качестве имени

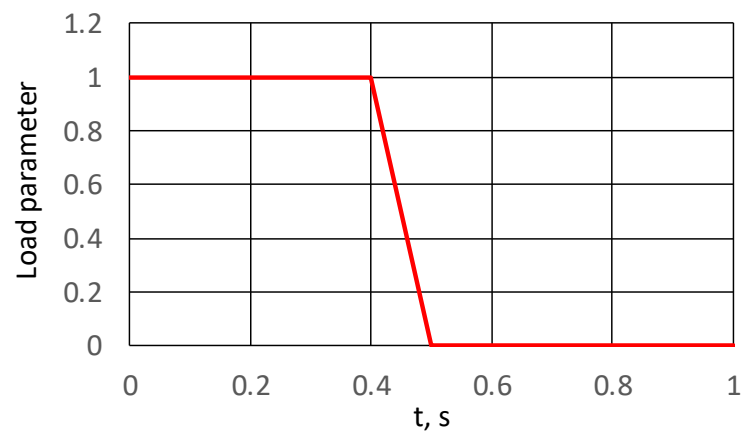
Заменить и выйти | Заменить и продолжить

OK | Отмена | Справка

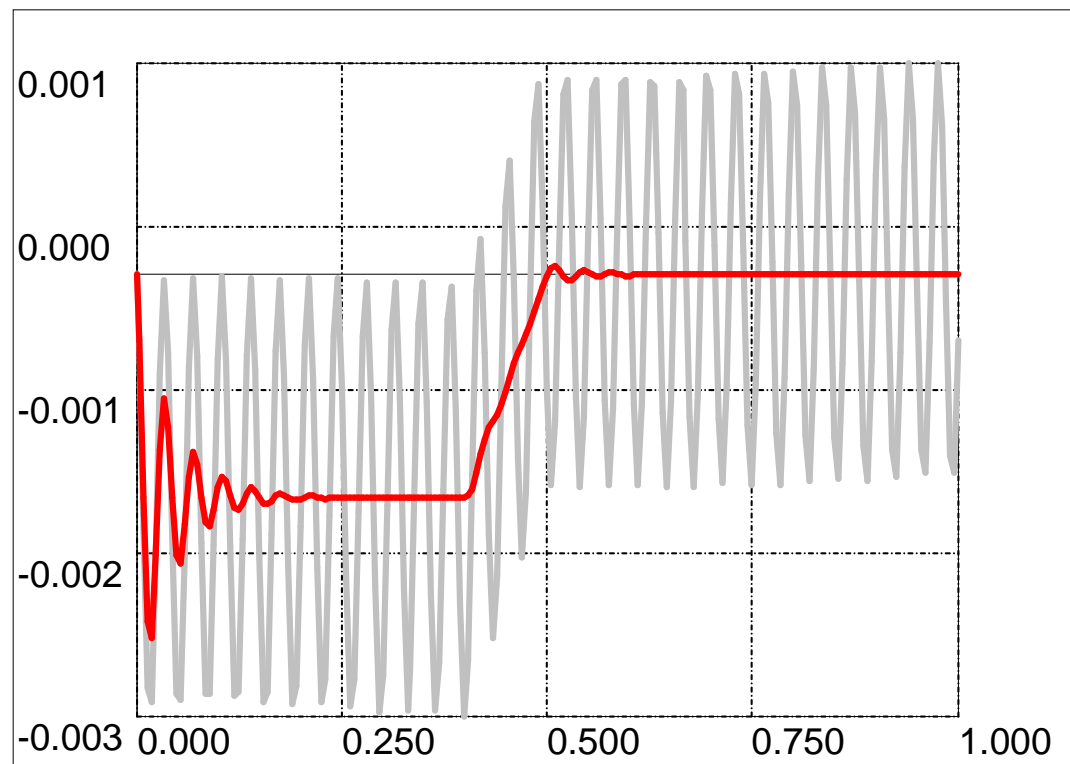
Локальный демпфер. Тест 1.



Нагрузка

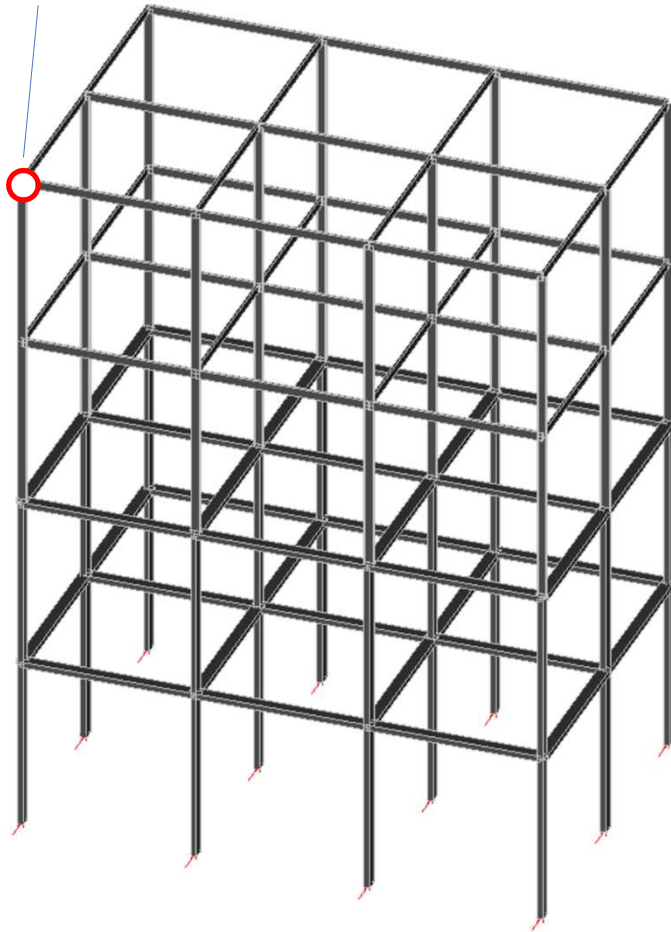


Решение



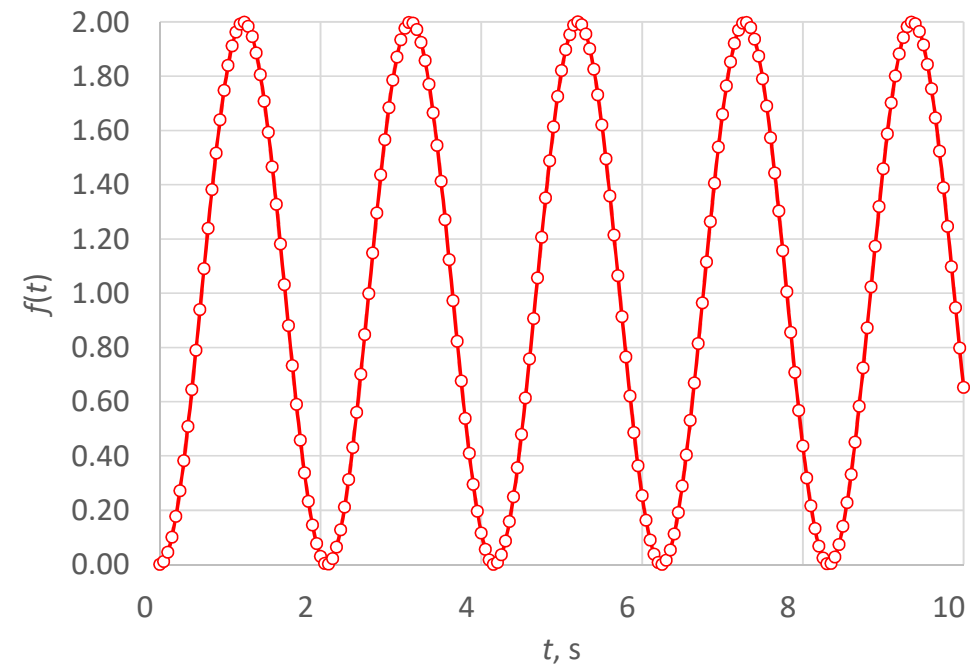
Многокомпонентное демпфирование. Тест 2.

Контрольная точка

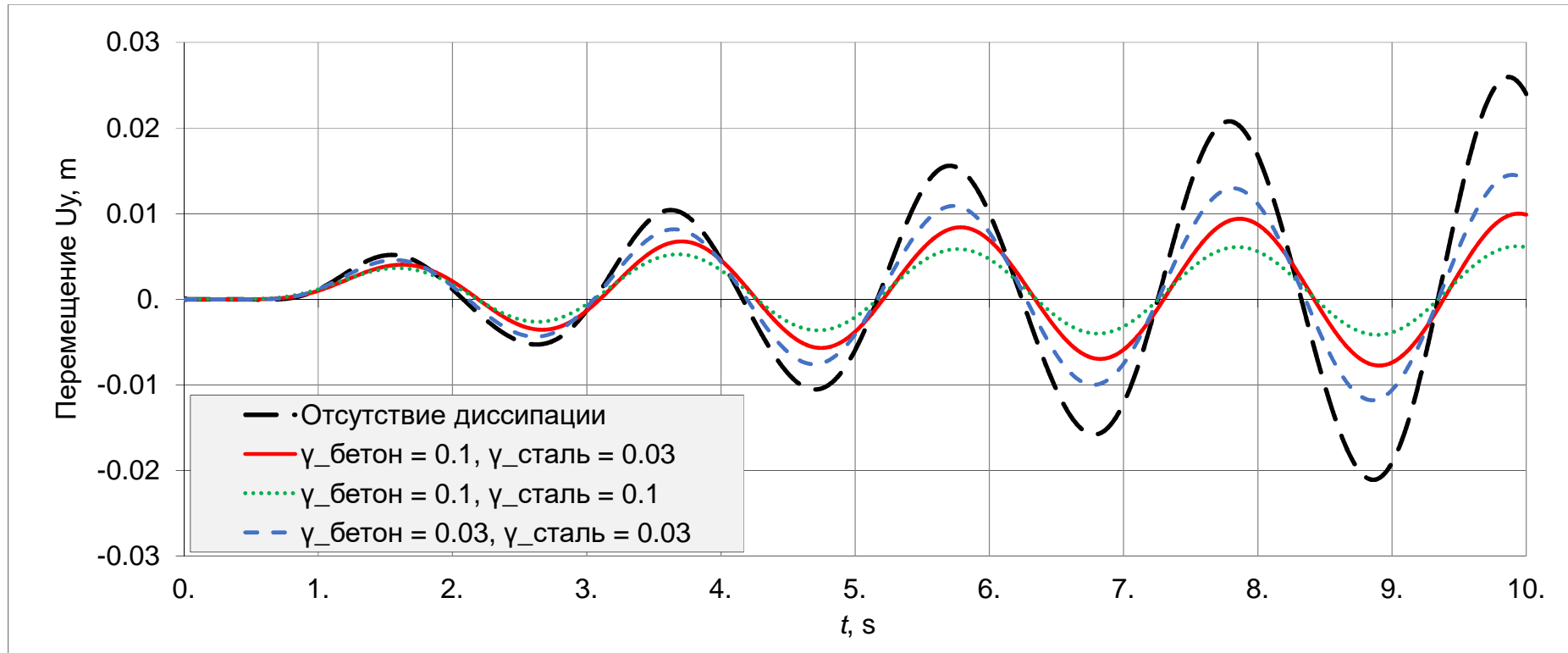


Задано вынужденное смещение опор
вдоль оси OY.

Функция времени: $f(t) = 1 - \cos(\Omega t)$,
 $\Omega = \omega_1$.



Перемещение контрольной точки в направлении вынужденных смещений.



$$\gamma = \frac{\delta}{\pi} = \frac{2\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

γ – коэффициент внутреннего неупругого сопротивления,
 δ – логарифмический декремент колебаний,
 ζ – параметр затухания в долях от критического.

Благодарю за внимание!