УДК 539.3

ПРЯМЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

**А.В. Перельмутер, **С.Ю. Фиалко*
*(*SCAD Soft, Киев-Москва, Украина-Россия*
***Киевский национальный технический университет строительства и архитектуры, Киев, Украина)*

DIRECT AND ITERATIVE METHODS FOR ANALYSIS OF LARGE-SCALE FINITE ELEMENT PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS

**A.V. Perelmuter, **S.Yu.Fialko*
*(*SCAD Soft software company, Kiev-Moscow, Ukraine-Russia,*
*** National Technical University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine)*

Обсуждаются проблемы, возникающие при применении метода конечных элементов (МКЭ) к расчетным моделям зданий и сооружений. Приводится обзор вычислительных технологий, применяемых для анализа большеразмерных расчетных моделей в современных компьютерных МКЭ программах. На ряде числовых примеров из коллекции коммерческих МКЭ программ SCAD (www.scadgroup.com) и Robot Millennium (www.robot-structures.com/us/) проведено сопоставление эффективности различных методов.

1. Введение. Характерной особенностью современных конечно-элементных моделей зданий и сооружений является высокий порядок систем МКЭ уравнений, достигающий для моделей многоэтажных зданий 300 000 — 500 000 уравнений и выше. Одной из причин резкого возрастания размерности решаемых задач является разработка высокопроизводительных графических препроцессоров, наносящих сетку не на фрагмент конструкции, а на всю конструкцию целиком. Другой причиной является желание (не всегда оправданное) проектировщика работать с одной моделью, а не с множеством расчлененных подконструкций. Этот факт вынуждает применять в МКЭ программах эффективные методы решения больших систем МКЭ уравнений, которым посвящена данная работа.

2. Линейная статика. Обычно для задач порядка 100 000 — 300 000 уравнений, для которых структура уровней графа смежности с корнем в псевдопериферийном узле является вытянутой, эффективными оказываются прямые методы, тонко учитывающие разреженную структуру матрицы жесткости (sparse direct solvers) [1]. Эффективность решения задачи прямым методом существенно зависит от того, насколько удается уменьшить количество заполнений — ненулевых элементов, появляющихся в матрице жесткости в результате факторизации. Количество заполнений в свою очередь зависит от способа упорядочения. Таким образом, успешное решение задачи прямым методом обусловлено тем, удается ли найти эффективный способ упорядочения и способностью метода работать с большими объемами данных, выходящих за пределы оперативной памяти компьютера.

Одним из таких методов является многофронтальный метод, разработанный авторами в программе SCAD [2, 3, 5]. Характерными особенностями метода являются:

- Обычно в фронтальных и многофронтальных методах используется упорядочение элементов. В данном методе мы используем упорядочение узлов, что позволяет нам применять хорошо отработанные алгоритмы упорядочения. Только после этого определяется последовательность подачи КЭ на сборку.

- Автоматический выбор наиболее эффективного алгоритма упорядочения осуществляется на основе быстрой символической факторизации, определяющей количество ненулевых элементов в факторизованной матрице.
- Количество фронтов принимается равным количеству узлов МКЭ модели и количеству шагов исключения. Под фронтом мы понимаем объект класса C++, который инкапсулирует все данные для исключаемого узла: его номер, список узлов, образующих фронтальную матрицу, список предварительных фронтов (то есть фронтов, фронтальные матрицы которых вошли при сборке в текущую фронтальную матрицу) и список КЭ, поступающих на сборку при данном шаге исключения.
- Множество фронтов образует фронтальное дерево. Процесс исключения представляется как движение вдоль фронтального дерева снизу вверх.
- Гауссово исключение производится во фронтальной матрице — плотной матрице, состоящей из полностью собранных уравнений и незавершенной части.
- С целью уменьшения памяти, требуемой для хранения незавершенных фронтов, производится упорядочение фронтов.

Если же ширина структурыа уровней графа смежности достаточно велика или размерность задачи превышает ~500 000 уравнений, то продолжительность решения даже для прямых методов для разреженных матриц значительно возрастает. В этом случае могут оказаться очень полезными итерационные методы [2].

Обычно задачи строительной механики являются плохо обусловленными вследствие большого разброса значений жесткостей, сопряжения разнотипных конечных элементов, сложности геометрии контуров, приводящих в свою очередь к нерегулярным сеткам, и т. д. Плохая обусловленность приводит к плохой сходимости большинства итерационных методов. Поэтому главное внимание в работе уделяется разработке итерационных методов, обладающих высокой устойчивостью к плохой обусловленности. Эффективным способом борьбы с плохой обусловленностью является предобуславливание, идея которого состоит в переходе от исходной плохо обусловленной задачи к задаче с лучшей обусловленностью.

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Kx} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \qquad (1)$$

Если $\mathbf{B}$ — положительно определенная матрица, система уравнений относительно предобуславливания $\mathbf{Bz} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Kx}$, решается быстрее, чем исходная система уравнений $\mathbf{Kx} = \mathbf{b}$ и число обусловленности $C\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}\right) < C(\mathbf{K})$, то предобусловленная задача обладает лучшей сходимостью, чем исходная. Если же при этом $C\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}\right)$ удается существенно приблизить к 1, то мы получаем быстрый (или высокопроизводительный) итерационный метод.

В качестве такого метода предлагается метод сопряженных градиентов с агрегатным многоуровневым поэлементным предобуславливанием AMIS (aggregation multilevel iterative solver) [2 – 4, 7]. Метод объединяет достоинства метода сопряженных градиентов и многоуровневых методов. Многоуровневые методы используют модель грубого уровня для предсказания медленно сходящихся нижних мод решения (так называемая коррекция моделью грубого уровня). Сходимость по высоким модам обеспечивается за счет сглаживания быстроосциллирующих компонент вектора невязки, возникающих в результате интерполирования решения модели грубого уровня на уровень исходной МКЭ модели.

В агрегатном методе модель грубого уровня строится за счет наложения на исходную МКЭ модель системы локальных неперекрывающихся абсолютно жестких звезд-связей. Такой подход, в частности, использовался в [6].

Характерными особенностями метода AMIS является следующее.

- Четкая механическая интерпретация.
- В отличие от многосеточных методов позволяет анализировать не только континуальные системы, но и стержневые и комбинированные, а также системы, содержащие специфические КЭ – жесткие связи, совместимые узлы и т.д.
- Технология “элемент-по-элементу” дает возможность формировать матрицу жесткости агрегатной модели почти также быстро, как и матрицу жесткости МКЭ модели.
- Применение технологии разреженных матриц позволяет быстро факторизовать матрицу жесткости модели грубого уровня и обеспечить быстрые прямые-обратные подстановки в процессе итераций. Вместе с подходом «элемент-по-элементу» данная технология позволяет удерживать достаточно высокий порядок агрегатной модели (от 10 000 до 120 000 уравнений), что обеспечивает хорошее предсказание медленно сходящихся нижних мод и высокую устойчивость к плохой обусловленности**.**

Следующий пример (Рис.1, табл. 1) иллюстрирует возможности предлагаемых подходов.

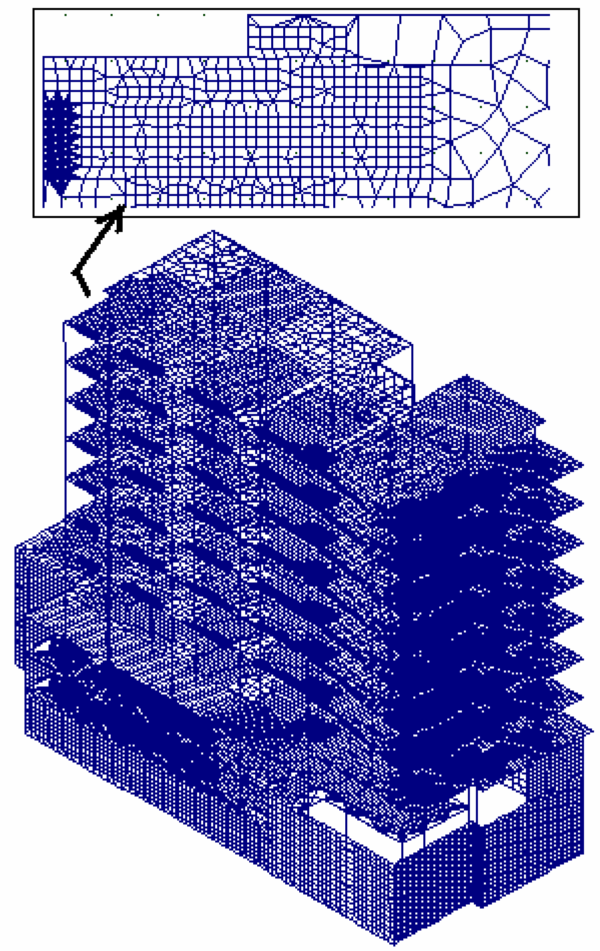

Рис. 1

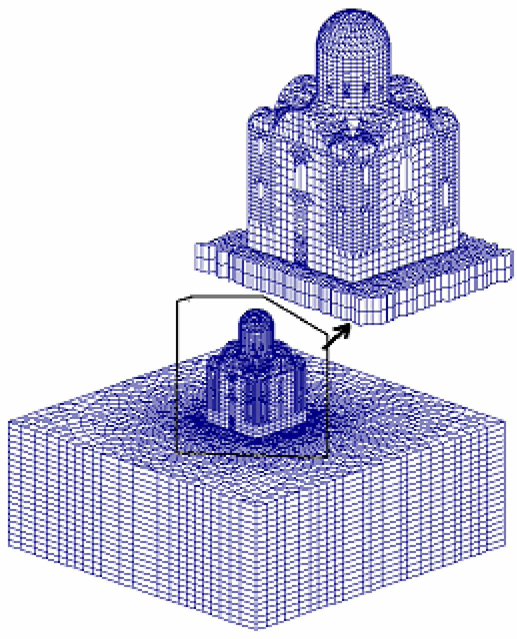

Рис. 2

МКЭ модель содержит 91 089 узлов, 96 656 конечных элементов и 544 410 уравнений. Сильно нерегулярная сетка приводит к плохой обусловленности задачи (количество итераций ICCF метода составило 6815 — см. Табл. 1). В таблице 1 приведены характеристики производительности следующих методов: профильного (упорядочение на основе обратного алгоритма Катхилла-Макки), метода сопряженных градиентов с предобуславливанием неполной факторизации Холецкого (ICCF), многофронтального (MFM) и агрегатного многоуровневого AMIS. Для итерационных

Таблица 1 Сравнение эффективности решения. Компьютер: Pentium-III (Intel 1000 МГц, оперативная память 512 МБ).

Метод	Продолжительность решения	Длина факторизованной матрицы жесткости, MB	Количество итераций
Профильный	23 ч 30 мин	5 830	—
ICCF	2 ч 58 мин 48 с	—	6815
MFM	35 мин 22 s	763	—
AMIS	16 мин 43 с	—	70

методов итерации продолжаются до достижения точности $\left(\|\mathbf{b}-\mathbf{Kx}\|_2/\|\mathbf{b}\|_2\right)\le 10^{-3} \wedge \left(\|\mathbf{b}-\mathbf{Kx}\|_\infty/\|\mathbf{b}\|_\infty \le 10^{-3}\right)$, которая является достаточной для подавляющего большинства практических приложений.

Применение прямого многофронтального метода для разреженных матриц MFM и устойчивого к плохой обусловленности агрегатного многоуровневого метода AMIS позволили существенно ускорить анализ по сравнению с традиционными методами.

3. Собственные колебания. В современных МКЭ программах для эффективного решения обобщенной проблемы собственных значений чаще всего используются либо метод блочной итерации подпространства, либо блочный метод Ланцоша [8]. Эти методы зарекомендовали себя как высоко эффективные надежные подходы.

В программе SCAD реализован блочный метод Ланцоша со сдвигами [8 — 10]. Блочность позволяет существенно уменьшить продолжительность операций ввода-вывода при чтении блоков факторизованной матрицы жесткости с диска в при прямых-обратных подстановках в процессе шагов Ланцоша за счет параллельной обработки пакета правых частей вместо одной правой части. Эффективность блочной версии алгоритма проявляется для задач большой размерности, когда размер факторизованной матрицы превышает возможности оперативной памяти компьютера.

Спектральные трансформации (сдвиги) позволяют разделить длинный частотный интервал на несколько коротких подинтервалов. Тем самым экспоненциальный рост вычислительной работы при возрастании количества требуемых собственных пар заменяется квазилинейным. Плата за это — многократное переразложение матрицы $\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K} - \sigma\mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ — матрица масс, при каждой модификации сдвига σ. Поэтому огромное значение имеет использование эффективного многофронтального метода для факторизации матрицы $\mathbf{K}_\sigma$.

Представляемая реализация метода Ланцоша предусматривает четыре режима вычислений: модальный, интервальный, сейсмический и режим верификации расчетной модели. Модальный режим предназначен для определения первых n собственных пар. Интервальный режим определяет все собственные пары, заключенные в интервале $[a,b]$. Сейсмический режим предназначен для решения задач сейсмики. Алгоритм определяет такое количество собственных пар, пока не будет обеспечена требуемая сумма модальных масс по каждому из направлений сейсмического входа. Заметим, что сумма модальных масс по данному направлению сейсмического воздействия является критерием того, достаточное ли количество собственных форм принято для анализа [8, 11]. Последний режим предназначен для выявления таких трудно обнаруживаемых ошибок моделирования, как наличие геометрической изменяемости. В отличие от традиционного метода контроля, анализирующего ведущий элемент при Гауссовом исключении, режим верификации модели позволяет не только обнаружить наличие геометрической изменяемости, но и показать на экране формы движения механизма (или механизмов), что позволяет не только локализацию ошибки, но и выработать способ ее устранения.

Согласно нашему опыту вычислений, предлагаемый блочный метод Ланцоша со сдвигами значительно превосходит по эффективности многие другие методы определения частот и форм собственных колебаний и позволяет определять сотни собственных пар для МКЭ моделей, содержащих 100 000 — 300 000 уравнений и более за реальное время, причем результаты можно считать практически точными для данной дискретной модели [8 — 11], так как погрешность решения составляет обычно $\left\|\varphi_i - \omega_i^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \varphi_i\right\| / \left\|\varphi_i\right\| \le 10^{-7}$. Метод гарантирует отсутствие пропущенных собственных пар в интересующем пользователя частотном интервале, а также позволяет анализировать собственные колебания незакрепленных систем, не искажая их собственного спектра наложением фиктивных связей.

Однако если структура уровней графа смежности не является вытянутой, то факторизация матрицы жесткости может быть очень трудоемкой или вообще невыполнимой на современных компьютерах класса ПК. К такому классу задач относятся задачи о взаимодействии конструкции с упругим основанием (рис.2). МКЭ модель содержит 104 048 узлов, 111 269 конечных элементов и 319 133 уравнений. Неоднородная сетка, нанесенная на массив грунта, сгущена в области фундамента сооружения, которое моделируется оболочечными и стержневыми элементами. Грунт рассматривается как упругое основание и моделируется объемными конечными элементами.

Исследования проведены на компьютере PC Pentium III (CPU Intel 1000 МГц, 512 МБ оперативная память — ОП). При попытке решить эту задачу методом Ланцоша оказалось, что требуемый минимальный размер оперативной памяти для факторизации матрицы жесткости многофронтальным методом при упорядочении по методу вложенных сечений (который более оптимален для данной задачи, чем алгоритм минимальной степени) составил 1292 МБ (18 403 уравнения для максимального фронта) — табл. 2. Это существенно превышает размер оперативной памяти нашего компьютера — 512 МБ. Профильный метод с упорядочением по обратному алгоритму Катхилла-Макки приводит к размеру матрицы жесткости (исходная матрица плюс заполнение) 20 309 МБ, что также делает его практически неприменимым. Таким образом, данная задача при решении методом, основанным на факторизации матрицы жесткости, требует компьютер с существенно большей производительностью, чем существующие сегодя компьютеры класса ПК.

Таблица 2. Определение 10 частот и форм собственных колебаний различными методами.

Метод	Размер $\mathbf{U}$, МБ	ОП, МБ	Время	К-во итераций
Многофронтальн. (NDM)	6 017	1 292 >> 512	Не решено	
Профильный (RCM)	20 309	179	Не решено	
PCG_ICCF	—		5 ч 20 мин 06 с	6 204
MPCG_AMIS	—	285 МБ	3 ч 26 мин 05 с	667

Поэтому представляют интерес методы, не требующие факторизации матрицы жесткости. Представляемый здесь обобщенный метод сопряженных градиентов с со сдвигами в агрегатном многоуровневом предобуславливании MPCG_AMIS [8, 12] позволяет решать такие задачи, не прибегая к дорогостоящей технологии параллельных вычислений. Этот метод оказался более эффективным, чем классический метод сопряженных градиентов с предобуславливанием типа неполной факторизации Холецкого PCG_ICCF.

4. Заключение. Каждый класс методов имеет как свои преимущества, так и недостатки. Определить заранее, каккой метод лучше для данной задачи, как правило, не удается. Поэтому современные МКЭ программы должны содержать как прямые методы, основанные на технологии разреженных матриц, так и устойчивые к плохой обусловленности итерационные методы.

Литература

1. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984.
2. Фиалко С.Ю. Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечно-элементных задач строительной механики. — В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И, Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. К.: Сталь, 2002, с. 552 - 569.
3. Фиалко С.Ю. Применение современных вычислительных технологий к расчету многоэтажных зданий.// Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури – 2003 - випуск 9 — С.189-193.
4. Фиалко С.Ю. Агрегатный многоуровневый метод конечных элементов для анализа больших задач — моделей строительных зданий и сооружений. Вісник Одеського національного морського університету, 10, 2003, с. 112 — 118.
5. Fialko S.Yu., Kriksunov E.Z. and Karpilovskyy V.S. A sparse direct multi-frontal solver in SCAD software. Proceedings of the CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics June 3-6, 2003, Gliwice, Poland. P. 131 – 132.
6. Bulgakov, V.E., Belyi, M.E., Mathisen, K.M. Multilevel aggregation method for solving large-scale generalized eigenvalue problems in structural dynamics.// Int. j. Numer. Methods Eng., 1997, 40, 453 – 471.
7. Fialko S.Yu. High-performance aggregation element-by-element iterative solver for large-scale complex shell structure problems. Archives of Civil Engineering, XLV, 2, 1999. P.193-207.
8. Фиалко С.Ю. О решении обобщенной проблемы собственных значений. — В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И, Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. К.: Сталь, 2002, с. 570-597.
9. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Фиалко С.Ю. Блочный метод Ланцоша со спектральными трансформациями для решения больших МКЭ задач собственных колебаний. Соавторы — В.С.Карпиловский, Э.З.Криксунов. Вісник Одеського національного морського університету, 10, 2003, с. 93 — 99.
10. Fialko S.Yu., Kriksunov E.Z. and Karpilovskyy V.S. A block Lanczos method with spectral transformations for natural vibrations and seismic analysis of large structures in SCAD software. Proceedings of the CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics June 3-6, 2003, Gliwice, Poland. P. 129 —130.
11. Фиалко С.Ю. Некоторые особенности анализа частот и форм собственных колебаний при расчете сооружений на сейсмические воздействия. — Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, випуск 8,2002г.,с 193-201.
12. Fialko S. Aggregation Multilevel Iterative Solver for Analysis of Large-Scale Finite Element Problems of Structural Mechanics: Linear Statics and Natural Vibrations**.** LNCS 2328, p. 663 ff, http://link.springer.de/link/service/series/0558/tocs/t2328.htm