



Научно-исследовательский институт автоматизированных  
систем планирования и управления в строительстве  
Госстроя УССР

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ И КОНСТРУИРОВАНИЮ  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Одобрены секцией автомати-  
зации строительного проек-  
тирования Ученого совета  
НИИАСС Госстроя УССР.  
Протокол № 2 от 3 августа  
1981 г.

Киев - 1981

В методических рекомендациях рассмотрены приемы теоретического обоснования известных и конструирования новых совместных и несовместных конечных элементов. Рассмотренные приемы проиллюстрированы примерами доказательства сходимости и конструирования конкретных конечных элементов.

Приведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты. Основное внимание уделено программе "МАКС", позволяющей автоматически в формальном виде получить матрицу жесткости конечного элемента по данным о его геометрии, аппроксимирующих функциях и дифференциальном операторе задачи.

Методические рекомендации разработаны в отделении систем автоматизированного проектирования докт. техн. наук А.С. Городецким и инж. В.С. Карниловским.

Работа предназначена для специалистов, проводящих численное исследование конструкций на основе метода конечных элементов, а также программистов, разрабатывающих новые или включающие в существующие комплексы дополнительные конечные элементы.

Методические рекомендации рассыпаются в научно-исследовательские и проектные институты, вычислительные центры и учебные институты, где разрабатываются вычислительные комплексы расчета строительных конструкций на основе метода конечных элементов /ЦНИИАСС, НИИСК, ПИ-Г, ТПИ-5, МИСИ, КИСИ, МИИТ и др./



Научно-исследовательский институт автоматизированных систем планирования и управления в строительстве /НИИАСС/. Госстрой УССР,  
1981 г.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время практически все программные комплексы, предназначенные для прочностного расчета сложных конструкций, реализуют метод конечных элементов /МКЭ/. Модульный принцип построения этих комплексов обуславливает выделение процедур построения различных типов конечных элементов в отдельную библиотеку. Это позволяет расширять класс решаемых задач только за счет достаточно простого включения в библиотеку новых типов элементов. Такое положение приводит к тому, что особое значение приобретает теоретически обоснованное и рационально организованное конструирование различных типов конечных элементов.

Конструирование конечного элемента в основном связано с формированием матрицы жесткости. Эта процедура в МКЭ достаточно хорошо formalизована при условии выбора координатных функций. Сам выбор этих функций является краеугольным камнем МКЭ, определяет не только его эффективность, но и правомерность вообще.

Практика использования МКЭ знает примеры неправильного выбора координатных функций, которые приводят к построению некорректных конечных элементов, т.е. элементов, не позволяющих получить решение задачи.

Приводимая методика дает возможность конструировать как совместные, так и несовместные конечные элементы. Последнее особенно важно, так как использование теоретически обоснованных несовместных конечных элементов выводит МКЭ за рамки известных вариационно-разностных методов и придает ему определенную математическую самостоятельность.

Построение матрицы жесткости на основе выбранных координатных функций хоть и хорошо formalизовано, однако в ряде случаев представляет достаточно громоздкую задачу (сложная геометрия

элемента, большое количество степеней свободы, высокий порядок аппроксимирующего полинома, сложный дифференциальный оператор задачи). В этом случае важное значение приобретают методы программного получения матрицы жесткости в формульном виде. При включении новых элементов в существующие программные комплексы программы "МАКЕТ" может использоваться по усмотрению разработчика двумя различными способами. Если матрица жесткости состоит из однотипных и достаточно простых элементов, то по программе "МАКЕТ" целесообразно получить матрицу жесткости в формульном виде и в библиотеку программного комплекса включить процедуру, реализующую эти формулы. Если элементы матрицы жесткости громоздки, то целесообразно процедуре построения матрицы жесткости оформить в виде упрощенной конструкции самой программы "МАКЕТ". В этом случае быстродействие процедуры будет снижено, зато сама процедура будет компактной.

Методика выбора координатных функций и программа "МАКЕТ" широко использовались при разработке пакета прикладных программ для автоматизированного проектирования железобетонных конструкций (ПП АПЖБК) и вычислительного комплекса "ЛИРА".

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Краевая задача.** Запишем основные уравнения линейной теории упругости в матричной форме [1]. В  $n$ -мерном пространстве упругое тело  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  описывается следующей системой уравнений в перемещениях:

$$(-1)^m B^T M B \vec{U}(x) = \vec{f}(x), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\vec{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  - вектор перемещений;

$\vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  - вектор объемных сил;

$B$  - матрица операций дифференцирования порядка  $m$ ;

$M$  - матрица упругости.

Векторы перемещений  $\vec{U}$ , напряжений  $\vec{\sigma}$  и деформаций  $\vec{\epsilon}$  связаны следующими матричными равенствами:

$$\vec{\sigma} = M \vec{\epsilon}, \quad \vec{E} = B \vec{U}. \quad (2)$$

На части поверхности  $\Omega$  могут быть заданы поверхностные силы, на части - перемещения. Без нарушения общности последующих рассуждений будем считать их равными нулю. Краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (1) можно записать в операторном виде

$$\mathcal{A} \vec{U} = \vec{f}. \quad (3)$$

Будем рассматривать такие краевые условия, чтобы система была геометрически неизменяемая и оператор  $\mathcal{A}$  задачи (3) положительно определен.

Метод конечных элементов основан на вариационных постановках задач математической физики, которые расширяют класс допустимых функций, применяемых для построения приближенных решений, и позволяют исключить из специального рассмотрения естественные граничные условия. Получаемые сеточные уравнения отражают интегральные энергетические свойства исходной непрерывной задачи. Функционал Лагранжа рассматриваемой задачи (3) имеет вид

$$\Pi(\vec{U}) = \frac{1}{2} [\vec{U}, \vec{U}]_{\Omega} - \int \int \vec{f} \vec{U} d\Omega, \quad (4)$$

где  $[\vec{U}, \vec{U}]_{\Omega} = \int \delta^*(\vec{U}) \vec{E}(\vec{V}) d\Omega = \int (\vec{B} \vec{U})^T M \vec{B} \vec{V} d\Omega = [\vec{V}, \vec{U}]_{\Omega}$ ,

$$\|\vec{U}\|_{\mathcal{A}} = [\vec{U}, \vec{U}]_{\Omega}^{1/2}$$

Условием стационарности функционала полной потенциальной энергии является вариационное уравнение Лагранжа  $\delta \Pi = 0$ . Вектор-функция  $\vec{U}^*(x)$ , удовлетворяющая данному уравнению на классе геометрически возможных векторов перемещений, доставляет стационарное значение функционалу (4) и является решением краевой задачи (3). Другими словами,  $\vec{U}^*$  минимизирует функционал (4) в классе функций  $W_m(\Omega)$  из пространства Соболева  $W_m(\Omega)$ , удовлетворяющих главным краевым условиям, т.к. для

$$[\vec{U}, \vec{U}]_{\Omega} \geq c \|\vec{U}\|_{m, \Omega}, \quad (5)$$

где  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$  - норма в  $W_m^m(\Omega)$ , а константа  $C$  не зависит от  $\vec{u}(x)$ .

Обозначим  $n$ -мерные векторы с целыми компонентами (мультиндексы) через  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Тогда

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!, \quad \vec{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

и можно записать, что

$$\|\vec{u}\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha u_i\|^2,$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \vec{u}^T \vec{u} d\Omega = (\vec{u}, \vec{u})$$

**Конечные элементы.** В МКЭ сплошная область с бесконечным числом степеней свободы аппроксимируется дискретной моделью

$$\Omega_k = \{\Omega = \bigcup \bar{\Omega}_i, \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset, i \neq j\}, \quad (6)$$

состоящей из совокупности подобластей  $\Omega_i$  (конечных элементов), имеющих конечное число степеней свободы и взаимодействующих между собой только в узловых точках. Множество всех узлов  $\mathcal{N}_k = \{x^{(k)}, k=1, 2, \dots, n\}$  называется сеткой, где  $n$  - число всех узлов сетки.

Каждый КЭ  $\Omega_i$  характеризуется следующими свойствами:  
а) физической задачей, для решения которой построен данный элемент;

б) геометрией. Обычно элементы имеют форму простейших геометрических фигур: прямоугольника, треугольника, тетраэдра, параллелепипеда и т. д.;

в) узлами  $x^{(k)}$  на линиях (поверхностях) раздела КЭ, общими для граничящих элементов;

г) степенями свободы каждого узла  $x^{(k)}$  элемента, в качестве которых берутся значения непрерывной величины и некоторых ее производных в данной точке;

д) системой функций, определенной на  $\Omega_i$  (законом аппроксимации).

В реальные вычислительные комплексы включаются несколько десятков различных конечных элементов, отличающихся геометрической формой, расположением узлов, степенями свободы узлов, для решения основных задач строительной механики и математической физики: разные стержни; прямоугольные и треугольные элементы балки-стенки, плиты и оболочки; параллелепипед и тетраэдр для пространственной задачи теории упругости и т. д.

Существенной характеристикой дискретной модели  $\Omega_k$  является максимальный диаметр элементов:

$$h = \max \sup_{x, y \in \Omega} |x-y|.$$

Теоретические исследования и опыт эксплуатации вычислительных комплексов показывают, что при разбиении области  $\Omega$  на конечные элементы нельзя включать элементы вырождающейся геометрической формы. Появление, например, в расчетной схеме призм и угольников с большим отношением сторон или треугольников с малыми углами приводит к неустойчивости вычислительного процесса из-за сильного увеличения числа обусловленности матрицы системы. Разбиение называется регулярным [2], если

$$|x^{(k)} - x^{(l)}| \geq ch, \quad k \neq l;$$

в каждый КЭ  $\Omega_i$  расчетной схемы можно при  $h \rightarrow 0$  вложить шар радиуса  $r \geq ch$ .

Данные условия не позволяют включать в расчетные схемы МКЭ вырождающиеся при  $h \rightarrow 0$  конечные элементы.

Степени свободы узла  $x^{(k)}$  являются значениями компонент функции  $\vec{u}$  и некоторых их производных. Если в  $k$ -м узле по компоненте  $i$  вектора перемещений  $\vec{u}(x)$  задано  $m_{kis}$  степеней свободы, то в данном узле определены следующие величины:

$$h_{kis} \vec{u}(x^{(k)}) = \sum_{|\beta|=m_{kis}} \lambda_{kis}^\beta D^\beta u_i(x^{(k)}), \quad \lambda_{kis}^\beta = \text{const}, \quad (7)$$

где  $h_{kis}$  - дифференциальный оператор степени свободы: перемещение, угол поворота, момент и т. д. ... с порядком дифференцирования  $m_{kis}$ ;

$s = 1, 2, \dots, s_{ki}; \quad i = 1, 2, \dots, s_l; \quad k = 1, 2, \dots, s_j$   
 $m_{ki} = \max_{k \in \Omega} m_{ki}$  максимальный порядок дифференцирования функции перемещений при вычислении степеней свободы;  
 $S_{ki} = \sum_{i=1}^n S_{ki}$  - общее число степеней свободы узла  $\chi^{(ki)}$ .

Разные степени свободы узла не могут иметь один и тот же физический смысл, и поэтому все операторы  $L_{kis}$  линейно-независимы. Для задачи в перемещениях (3) значения компонент вектора перемещений всегда являются степенями свободы узлов:  $L_{kit} = 1$ .

Система аппроксимирующих функций. Каждой степени свободы узла  $\chi^{(ki)}$  конечного элемента  $\Omega_z$  в методе конечных элементов соответствует функция, моделирующая перемещение точек элемента при единичном перемещении в направлении данной степени свободы и закреплении остальных степеней свободы элемента. Таким образом, на каждом КЭ вводится линейно-независимая система функций:

$$\{\vec{\varphi}_{kis} = \{\varphi_{kis1}, \varphi_{kis2}, \dots, \varphi_{kisn}\}, (kis) \in \bar{\Omega}_z\} \quad (8)$$

Все функции данной системы отличны от нуля и достаточное число раз дифференцируемы на  $\bar{\Omega}_z$ , а для каждой функции только одна степень свободы узлов элемента отлична от нуля и равна единице;

$$supp \vec{\varphi}_{kis} = \Omega_z, \quad L_{kis} \vec{\varphi}_{kis}(x^{(ki)}) = \delta_{kis}^{tjl}, \quad (9)$$

$\delta_{kis}^{tjl}$  - символ Кронекера.

В МКЭ систему аппроксимирующих функций (8) достаточно построить для любого элемента с единичными размерами в относительной системе координат, а затем отобразить линейным преобразованием на реальный КЭ  $\Omega_z$  расчетной схемы.

Пространство аппроксимирующих функций. Каждой степени свободы узла  $\chi^{(ki)}$  сетки  $\bar{\omega}_h$  в МКЭ можно поставить в соответствие функцию, моделирующую перемещение точек расчетной схемы при единичном перемещении в направлении данной степени свободы и закреплении всех остальных степеней свободы. Полученная система функций

$$\{\vec{\varphi}_{kis} = \sum_z \vec{\varphi}_{kis}^z, (kis) \in \Omega\} \quad (10)$$

имеет столько функций, сколько степеней свободы в расчетной схеме  $\bar{\omega}_h$ . Аналогично (9) функции данной системы обладают свойствами:

$$supp \vec{\varphi}_{kis} = \bigcup_{x^{(ki)} \in \bar{\Omega}_z} \bar{\Omega}_z - \text{функция отлична от нуля на звезде элементов узла } \chi^{(ki)};$$

$$L_{kis} \vec{\varphi}_{tjl}(x^{(ki)}) = \delta_{kis}^{tjl}, \quad (kis), (tjl) \in \Omega \quad (II)$$

Обозначим через  $H_{\gamma, h}$  пространство сеточных функций вида

$$\mathcal{T}(\gamma, x) = \sum_{(kis) \in \Omega} q_{kis} \vec{\varphi}_{kis}(x), \quad (12)$$

удовлетворяющих в граничных узлах главным краевым условиям задачи (3). Из (12) следует, что числовые коэффициенты  $q_{kis}$  - степени свободы функции  $\mathcal{T}(\gamma, x)$ :  $L_{kis} \mathcal{T}(\gamma, x) = q_{kis}$ .

Функции системы (10) непрерывны в узлах сетки  $\bar{\omega}_h$ : соответствующая степень свободы в центральном узле звезды конечных элементов равна единице, а все остальные степени свободы равны в узлах нулю. На линиях (поверхностях) между конечными элементами не наложено никаких ограничений на гладкость функций системы. Поэтому в  $H_{\gamma, h}$  вводится следующее скалярное произведение и соответствующая сеточная норма, определенные для любых  $\vec{u}_h, \vec{v}_h \in H_{\gamma, h}$ :

$$[\vec{u}_h, \vec{v}_h]_* = \sum_z [u_h, v_h]_{\Omega_z}, \quad \|\vec{u}_h\|_{\ell, *} = [\vec{u}_h, \vec{u}_h]_*^{1/2},$$

$$\|\vec{u}_h\|_{\ell, \Omega_z} = (\sum_z \|u_h\|_{\ell, \Omega_z}^2)^{1/2}.$$

Если все функции системы (10) принадлежат энергетическому пространству вариационной задачи (гладкая стыковка на поверхностях раздела конечных элементов), то введенные обозначения совпадают с общепринятыми.

Матрица жесткости составляется для каждого конечного элемента и имеет следующий вид:

$$\mathcal{K}_z = (\mathcal{K}_{\ell_i \ell_j})_{i,j=1}^n, \quad (13)$$

где  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  - номера узлов элемента;

$\mathcal{K}_{ij}^z$  - подматрицы, описывающие взаимодействие  $i$  и  $j$  узлов элемента в элементе;

$$\mathcal{K}_{ij}^* = (\mathcal{K}_{(ie)(jt)}^*)_{e,t=1}^n$$

$\mathcal{K}_{(ie)(jt)}^*$  - подматрица взаимодействия узла  $i$  по направлению перемещения  $u_e$  с узлом  $j$  по направлению перемещения  $u_t$ :

$$\mathcal{K}_{(ie)(jt)}^* = (\mathcal{K}_{(ies),(jts)}^*)_{s=j, -q=e}^{s_{ie}, s_{jt}}$$

где  $\mathcal{K}_{(ies),(jts)}^*$  - обобщенное усилие в узле  $i$  по направлению степени свободы  $s$  перемещения  $u_e$ , отвечающее единичному перемещению узла  $j$  по направлению степени свободы  $q$  перемещения  $u_t$ , при условии, что остальные перемещения всех узлов элемента равны нулю:

$$\mathcal{K}_{(ies),(jts)}^* = [\bar{\Psi}_{ies}^*, \bar{\Psi}_{jts}^*]_{\Omega_e} \quad (14)$$

Система разрешающих уравнений. Все степени свободы (узловые перемещения) дискретной схемы

$\Omega_h$  представим в виде вектора

$$\vec{q} = \{q_{ijs}\}_{(ijs) \in \Omega}$$

$q_{ijs}$  - обобщенное перемещение  $i$ -го узла по направлению  $s$ -й степени свободы перемещения  $u_j$ .

Вектор  $\vec{f}_h$  обобщенных узловых сил системы, соответствующий вектору степеней свободы  $\vec{q}$ , равен  $\vec{f}_h = \{f_{ijs}\}_{(ijs) \in \Omega}$ , где  $f_{ijs}$  - обобщенная узловая сила, приложенная к  $i$ -му узлу по направлению  $s$ -й степени свободы перемещения  $u_j$ .

Используя введенные обозначения, система разрешающих уравнений МКЭ примет вид [1]:

$$\mathcal{K}\vec{q} = \vec{f}_h, \quad (15)$$

где  $\mathcal{K}$  - матрица жесткости всей системы:

$$\mathcal{K} = \left( \sum_{i,j} \mathcal{K}_{ij}^* \right)_{i,j=1}^n, \quad (16)$$

где  $\sum_{i,j}$  означает суммирование по всем элементам, содержащим узлы  $i$  и  $j$ . Таким образом,

$$\sum_{i,j} \mathcal{K}_{ij}^* = \left( \sum_{i,j} \mathcal{K}_{(ies),(jts)}^* \right)_{e,t=1}^n$$

$$\sum_{i,j} \mathcal{K}_{(ies),(jts)}^* = (\mathcal{K}_{(ies)(jts)})_{s=e, q=t}^{s_{ie}, s_{jt}}$$

где  $\mathcal{K}_{(ies)(jts)}$  - суммарное обобщенное усилие в узле  $i$  по направлению степени свободы  $s$  перемещения  $u_e$ , отвечающее единичному перемещению узла  $j$  по направлению степени свободы  $q$  перемещения  $u_t$  при условии, что остальные перемещения всех узлов системы равны нулю:

$$\mathcal{K}_{(ies)(jts)} = \sum_s [\bar{\Psi}_{ies}^*, \bar{\Psi}_{jts}^*]_{\Omega_e} = [\bar{\Psi}_{ies}, \bar{\Psi}_{jts}]_* \quad (17)$$

Решив систему уравнений (15) и подставив полученные значения степеней свободы в (12), получим функцию  $\bar{U}_h(x)$  - решение по МКЭ.

Функционал дискретной задачи в МКЭ записывается в следующем виде:

$$I_h(\bar{U}_h) = \frac{1}{2} [\bar{U}_h, \bar{U}_h]_* - (\bar{f}, \bar{U}_h), \quad (18)$$

$\bar{U}_h \in H_{v,h}$  - функция вида (12).

Если искать минимум функционала относительно степеней свободы  $q_{mis}$ ,  $(mis) \in \Omega$ , функции  $\bar{U}_h$ , получим систему уравнений (15) с матрицей жесткости (16).

В функционале (18) не учитывается энергия взаимосвязи конечных элементов, которая компенсируется не во всех расчетных схемах. Для конструкций, состоящих из отдельных элементов с дискретным сочленением в узлах (фермы, рамы и т.д.), функционал описывает поведение исходной конструкции точно. Для элементов, имеющих ёдоль границы непрерывные связи со смежными элементами, дискретная модель лишь приближенно отражает поведение исходной конструкции, а характер приближения полностью определен системой аппроксимирующих функций (8). Функции данной системы могут быть даже разрывными на границе между элементами. Если потребовать непрерывность прогибов, совпадение углов наклона и т.д. во всех точках на границе между элементами для принадлежности системы функций (12) энергетическому пространству вариационной задачи (4), то получим "совместные" аппрокси-

мации, для которых энергия связи конечных элементов равна нулю, функционалы (4) и (18) совпадают, МКЭ является вариационно-разностным методом. Для "несовместных" элементов функционал (18) не учитывает работу, которую необходимо выполнить для устранения разрывности деформаций, что и обуславливает основную погрешность метода.

## 2. ВЫБОР СИСТЕМ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Если система аппроксимирующих функций (12) МКЭ совместна, то доказательство сходимости МКЭ – доказательство вариационного метода. В работе [3] установлены необходимые и достаточные условия сходимости вариационных методов в пространствах с вариационной нормой. Правильный порядок сходимости по перемещениям получают стандартным приемом Нитше [2,4].

**Теорема 1.** Если система аппроксимирующих функций (12) МКЭ принадлежит энергетическому пространству вариационной задачи (совместна) и удовлетворяет на каждом конечном элементе системе тождеств (критерию полноты порядка  $p \geq m$ ):

$$\sum_{(kis) \in \Omega_z} h_{kis} (R_i x^*) |_{x=x(k)} Y_{kis}^*(x) = x^* \delta_i^*, \quad (19)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; |\alpha| \leq p; x \in \Omega_z; L_i = \{0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0\}_{i-\ell},$$

то для регулярного разбиения  $\Omega$  на конечные элементы справедлива оценка погрешности при  $h \rightarrow 0$

$$\|\vec{U} - \vec{U}_h\|_{L^2} \leq C h^t \|\vec{U}\|_{p+\ell}, \quad (20)$$

где

$\vec{U}$  – решение задачи (3),  $0 \leq \ell \leq p$ ;

$\vec{U}_h$  – решение по МКЭ;

$$t = \min(p + \ell - \ell, 2(p + \ell - m)),$$

$C$  – константа, не зависящая от  $h$  и  $\vec{U}(x)$ .

**Доказательство** приведено в [4,5].

Критерий полноты (19) для КЭ произвольной геометрической формы предложен в работе [5] и является дальнейшим развитием соответствующих критериев работ [6,7], в которых исследо-

вались прямоугольные конечные элементы.

На вопрос о достаточных условиях сходимости МКЭ в несовместном случае отвечает:

**Теорема 2.** Пусть система аппроксимирующих функций (12) МКЭ удовлетворяет на каждом конечном элементе критерию полноты (19) порядка  $p \geq m$  и критерию несовместности порядка  $(p, p_\varepsilon)$ :

существует совместная система функций  $\{\tilde{\Psi}_{kis}\}$ , соответствующая тем же степеням свободы (7) и удовлетворяющая на каждом конечном элементе критерию полноты (19) порядка  $m - \ell \leq p_i \leq p$  и равенствам

$$\int_{\Omega_z} (h R_j x^*)^T (\tilde{\Psi}_{kis}^* - \tilde{\Psi}_{kis}) d\Omega = [R_j x^* \tilde{\Psi}_{kis}^* - \tilde{\Psi}_{kis}]_{\Omega_z}, \quad (21)$$

$p \geq \ell \geq m, \quad (kis) \in \Omega_z.$

Тогда для регулярного разбиения  $\Omega$  на конечные элементы при  $h \rightarrow 0$  справедлива следующая оценка скорости сходимости МКЭ:

$$\|\vec{U} - \vec{U}_h\|_{L^2} \leq C h^{p+\ell-m} \|\vec{U}\|_{p+\ell}, \quad (22)$$

$$\|\vec{U} - \vec{U}_h\| \leq C h^t \|\vec{U}\|_{p+\ell},$$

где константа  $C$  не зависит от  $h$  и  $\vec{U}(x)$ ,

$$t = \min(p_\varepsilon + \ell, p + p_\varepsilon + 2 - 2m).$$

**Доказательство** приведено в работах [5,8].

Критерий (21) для несовместных конечных элементов предложен в [8] и является дальнейшим развитием метода "кусочного тестирования" [4]. Условию (21) можно дать следующую физическую интерпретацию: совместной равновесной системе аппроксимирующих функций  $\{\tilde{\Psi}_{kis}\}$  можно дать такие несовместные приращения  $\{\tilde{\Psi}_{kis}^* - \tilde{\Psi}_{kis}\}$ , для которых работа внутренних сил на перемещениях, соответствующих постоянным, линейным и т.д. деформациям элемента, равна нулю, а полученная система функций  $\{\tilde{\Psi}_{kis}\}$  удовлетворяет условиям полноты.

Основываясь на доказанных теоремах, можно сформулировать методику исследования конечных элементов и доказательства сходимости МКЭ:

а) для каждого конечного элемента выписываются тождества критерия полноты (19) до порядка  $p \geq m$  и непосредственной подстановкой проверяется их выполнение для системы функций, определенной на элементе;

б) для несовместных аппроксимаций выбирается совместная система аппроксимирующих функций, соответствующая выбранным степеням свободы и удовлетворяющая условиям равновесия элемента при перемещении его как твердого тела ( $p_s \geq m-1$ ). В качестве такой системы можно, например, взять часть полной совместной системы функций с большим числом степеней свободы, отбросив не введенные на элементе;

в) проверяются условия критерия несовместности (21) до соответствующего порядка  $p \geq m$ .

Традиционное доказательство сходимости МКЭ основано на разложении в ряды степеней свободы в узлах элемента относительно произвольной точки. Предложенная выше методика исследования конечных элементов позволяет существенно облегчить данные исследования. Для несовместных систем аппроксимирующих функций, например, уже не надо анализировать все возможные в расчетной схеме звезды конечных элементов.

Прямоугольный конечный элемент Клафа [9] можно рассматривать как тестовый для исследования несовместных элементов. Большое число вычислений, проведенное с этим элементом, показало скорость сходимости  $\mathcal{O}(h^2)$ . В работах [8, 10 ...] данный порядок сходимости был доказан различными методами. Продемонстрируем для данного КЭ изложенную выше методику исследования конечных элементов.

Рассмотрим прямоугольный элемент плиты, лежащий в плоскости  $XOY$ , изображенный на рис. 1. Дифференциальное уравнение изгиба пластинки имеет вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{f}{D}, \quad (23)$$

где  $W$  - вертикальное смещение;

$f$  - нагрузка, распределенная по верхней стороне пластины и параллельная оси  $Ox$ ;

$D = E\delta^3/12(\xi-\eta^2)$  - цилиндрическая жесткость;

$E$  - модуль продольной упругости;

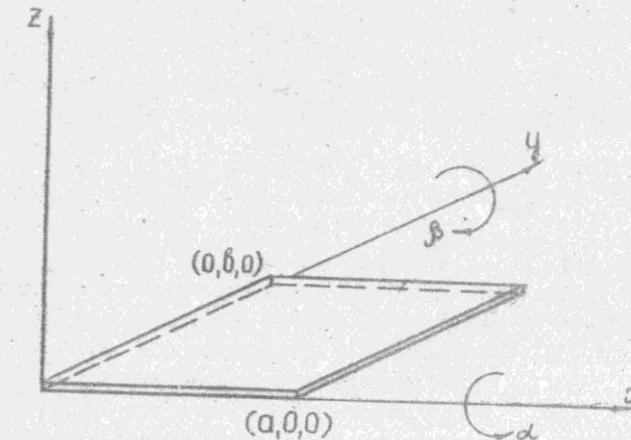


Рис. 1. Прямоугольный элемент плиты

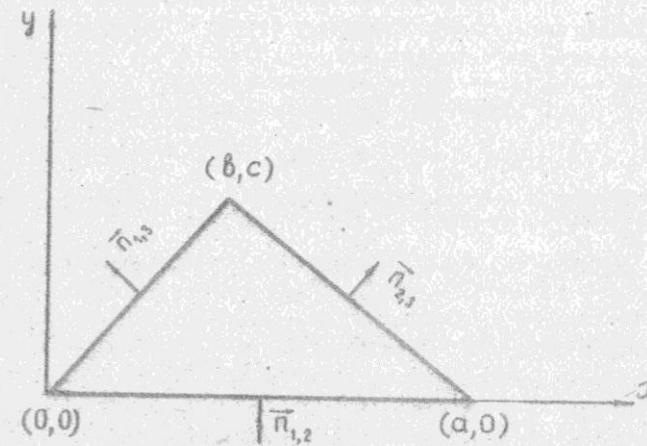


Рис. 2. Треугольный элемент плиты

$\gamma$  - коэффициент Пуассона;  
 $\delta$  - толщина пластинки.

Функционал Лагранжа при нулевых граничных условиях имеет следующий вид:

$$\Pi(W) = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2V \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\gamma) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega - \int f W d\Omega . \quad (24)$$

В каждом узле  $k=1,2,3,4$  элемента вводится по три степени свободы:

$W_{ik}$  - перемещение в направлении оси  $Ox$ ;

$\alpha_{ik}$  - угол поворота относительно оси  $Ox$ ;

$\beta_{ik}$  - угол поворота относительно оси  $OY$ .

Упругая поверхность пластины аппроксимируется неполным полиномом четвертой степени, содержащим 12 параметров по числу степеней свободы элемента:

$$W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 xy + C_6 y^2 + C_7 x^3 + C_8 x^2 y + C_9 xy^2 + C_{10} y^3 + C_{11} x^3 y + C_{12} xy^3 . \quad (25)$$

Выбранным закону аппроксимации и степеням свободы соответствует следующая система функций:

$$\{ \gamma_{kl}(x, y), k=1,2,3,4; l=1,2,3 \} \quad (26)$$

$$\gamma_{11} = 1 - 3\zeta^2 - \gamma\zeta - 3\zeta^3 + 2\zeta^5 + 3\zeta^2\zeta + 3\zeta^2\zeta^2 + 2\zeta^3\zeta^2 - 2\zeta^3\zeta^3 ,$$

$$\gamma_{12} = \theta(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)(1 - \gamma), \quad \gamma_{13} = -a(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)(1 - \zeta) ,$$

$$\gamma_{14} = 3\zeta^2 + \zeta\zeta^2 - 2\zeta^3 - 3\zeta\zeta^2 + 2\zeta^3\zeta + 2\zeta^3\zeta^2 - 3\zeta^2\zeta^2 ,$$

$$\gamma_{21} = \theta\zeta(2 - 2\zeta^2 + \zeta^3), \quad \gamma_{23} = a(\zeta^2 - \zeta^3)(1 - \zeta) ,$$

$$\gamma_{22} = 3\zeta^2 + \zeta\zeta^2 - 2\zeta^3 - 3\zeta\zeta^2 - 3\zeta^2\zeta + 2\zeta^3\zeta + 2\zeta^3\zeta^2 ,$$

$$\gamma_{24} = \theta(1 - \gamma)(-\zeta^2 + \zeta^3), \quad \gamma_{33} = -a(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)\zeta ,$$

$$\gamma_{31} = -\zeta\zeta^2 + 3\zeta^2\zeta + 3\zeta\zeta^2 - 2\zeta^3\zeta - 2\zeta^3\zeta^2 ,$$

$$\gamma_{32} = \theta\zeta(-\zeta^2 + \zeta^3), \quad \gamma_{43} = a(\zeta^2 - \zeta^3)\zeta ,$$

где  $\zeta = \frac{y}{a}$ ;  $\gamma = \frac{y}{b}$ .

Данный конечный элемент несовместен, так как на границе между элементами прогибы непрерывны, но не выполнено условие непрерывности углов поворота.

для исследования системы аппроксимирующих функций (26) запишем тождества критерия полноты (19) порядка  $p=3$ :

$$\gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_{41} \equiv 1 ,$$

$$a(\gamma_{12} + \gamma_{42}) - (\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{33} + \gamma_{43}) \equiv x ,$$

$$\theta(\gamma_{31} + \gamma_{41}) + \gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32} + \gamma_{42} \equiv y ,$$

$$\frac{a^2}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{41}) - a(\gamma_{23} + \gamma_{43}) \equiv \frac{x^2}{2} , \quad (27)$$

$$ab\gamma_{41} - b(\gamma_{33} + \gamma_{43}) + a(\gamma_{22} + \gamma_{42}) \equiv xy ,$$

$$\frac{b^2}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{41}) + b(\gamma_{32} + \gamma_{42}) \equiv \frac{y^2}{2} ,$$

$$\frac{a^2}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{41}) - \frac{a^2}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{43}) \equiv \frac{x^3}{6} ,$$

$$\frac{a^2b}{2}\gamma_{41} - ab\gamma_{43} + \frac{a^2}{2}(\gamma_{22} + \gamma_{42}) \equiv \frac{x^2y}{2} ,$$

$$\frac{ab^2}{2}\gamma_{41} - \frac{b^2}{2}(\gamma_{33} - \gamma_{43}) + ab\gamma_{42} \equiv \frac{xy^2}{2} ,$$

$$\frac{b^3}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{41}) + \frac{b^2}{2}(\gamma_{32} + \gamma_{42}) \equiv \frac{y^3}{6} .$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что данные тождества выполнены. Если бы система функций (26) была совместной, то доказательство сходимости МКЭ на этом было бы закончено и теорема I дала бы ответ о порядке сходимости. Для несовместных аппроксимаций необходимо проверить выполнение равенств (21) критерия несовместности. В [17] построена совместная система функций, соответствующая выбранным степеням свободы и удовлетворяющая первым трем тождествам (27) - критерию полноты (19) порядка  $p_s=1$

$$\{ \gamma_{kl}, k=1,2,3,4; l=1,2,3 \} \quad (28)$$

$$\Psi_{11} = X_1 Y_1 , \quad \Psi_{12} = X_1 Y_3 , \quad \Psi_{13} = -X_3 Y_1 ,$$

$$\Psi_{21} = X_2 Y_1 , \quad \Psi_{22} = X_2 Y_3 , \quad \Psi_{23} = -X_3 Y_2 ,$$

$$\Psi_{31} = X_3 Y_2 , \quad \Psi_{32} = X_3 Y_4 , \quad \Psi_{33} = -X_2 Y_2 ,$$

$$\Psi_{41} = X_4 Y_2 , \quad \Psi_{42} = X_4 Y_4 , \quad \Psi_{43} = -X_2 Y_4 ,$$

где

$$X_1 = 1 - 10\zeta^2 + 30\zeta^3 - 35\zeta^4 + 14\zeta^5 , \quad X_2 = 1 - X_1 ,$$

$$X_3 = a(-8\zeta^2 + 20\zeta^3 - 20\zeta^4 + 7\zeta^5) ,$$

$$X_4 = a(-2\zeta^2 + 10\zeta^3 - 15\zeta^4 + 7\zeta^5) .$$

Полиномы  $\Psi_i$  получаются из  $X_i$  заменой  $a$  на  $b$  и  $\zeta$  на  $\gamma$ .

Системы функций (26), (28) удовлетворяют равенствам критерия несовместности (21) порядка  $p=3$

$$\int \left\{ \begin{pmatrix} \zeta \\ \gamma \end{pmatrix} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\} (\Psi_{kl} - \Psi_{lc}) \right\} d\Omega = 0$$

$$k=1,2,3,4 ; \quad l=1,2,3 .$$

Таким образом, так как для задачи (24)  $m=2$ , несовместная система функций (26) удовлетворяет критериям полноты и несовместности порядка  $p=3$ , а для соответствующей совместной системы функций (28) выполнены тождества критерия полноты порядка  $p_r=1$ , то по теореме 2 справедливы следующие оценки погрешности

$$\|W - W_h\|_{L^2} \leq c h^2 \|W\|_4 ,$$

$$\|W - W_h\| \leq c h^2 \|W\|_4 ,$$

подтвержденные численными экспериментами во многих работах.

Большой выбор конечных элементов обеспечивает возможность расчета разнообразных строительных конструкций, реализующих МКЭ. Однако потребности инженерной практики требуют разработки конечных элементов новой геометрической формы для лучшей аппроксимации области, с другим расположением узлов для стяжения сетки в местах концентрации напряжений и новыми степенями свободы

для узлов при построении высокоточных элементов.

Если геометрическая форма элемента и степени свободы узлов назначаются при конструировании, то построение соответствующей системы аппроксимирующих функций – сложнейшая и важнейшая задача МКЭ, ибо остальные операции построения матрицы жесткости formalизованы. Одна и та же система аппроксимирующих функций может использоваться при построении матриц жесткости конечных элементов различных задач строительной механики и математической физики.

В методе конечных элементов построение систем аппроксимирующих функций производится по следующей стандартной методике:

а) выбирается аппроксимирующий многочлен порядка  $M > p$ :

$$u_i(x) = \sum_{|\alpha|=0}^M C_{i,\alpha} x^\alpha , \quad i = 1, 2, \dots, n ; \quad (29)$$

б) составляется система алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимирующих функций

$$h_{kis} \vec{U}(x^{(i)}) = \delta_{kis}^{tjd} , \quad (kis), (tjd) \in \Omega_z . \quad (30)$$

Базисный минор системы уравнений (30) получают обычно отбрасыванием в интерполяционном многочлене (29) одночленов по возможности наибольшего порядка, приравниванием коэффициентов при одночленах и т.д. После подстановки решений системы (30) в (29) получаем систему функций

$$\{ \vec{U}_{kis}^0 , (kis) \in \Omega_z \} , \quad (31)$$

удовлетворяющую условиям (9).

Такой подход приводит часто к несовместным аппроксимациям и не гарантирует сходимости метода. Именно так была получена система аппроксимирующих функций (26) прямоугольного Ю-плита Клафа. Достоинство критериев полноты (19) и несовместности (21) в том, что они дают возможность formalизовать выбор корректных аппроксимирующих функций и разработать методику конструирования конечных элементов;

а) выписывается система тождеств критерия полноты (19) порядка  $p \geq m$ ,  $p \leq M$ ;

г) если система функций (31) не удовлетворяет тождествам

(19), то рассматриваются отличные от нуля функции при  $|\lambda| \leq p$

$$\tilde{\Psi}_\lambda(x) = R_j x^\lambda - \sum_{(kis) \in \Omega_z} h_{kis}(R_j x^\lambda) \Big|_{x=x^{(k)}} \tilde{\Psi}_{kis}^o$$

- невязки критерия полноты.

Так как система функций (31) удовлетворяет условиям (9), то все заданные степени свободы функций  $\tilde{\Psi}_\lambda(x)$  в узлах элемента равны нулю. Уточненную систему аппроксимирующих функций  $\{\tilde{\Psi}_{kis}^e, (kis) \in \Omega_z\}$  можно искать в следующем виде:

$$\tilde{\Psi}_{kis}^e(x) = \tilde{\Psi}_{kis}^o(x) + \sum_\alpha C_{kis}^\alpha \tilde{\Psi}_\alpha(x), \quad (kis) \in \Omega_z. \quad (32)$$

Все функции данной системы при любых значениях констант  $C_{kis}^\alpha$  удовлетворяют условиям (9) и КЭ. Для удовлетворения системы тождеств (19) критерия полноты (19) данные константы должны являться решениями системы уравнений.

$$\sum_{(kis) \in \Omega_z} h_{kis}(R_j x^\beta) \Big|_{x=x^{(k)}} C_{kis}^\beta = \delta_j^\beta, \quad (33)$$

$$|\beta| \leq p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если полученная таким образом система аппроксимирующих функций (32) совместна, то построение можно считать завершенным и по теореме 1 метод конечных элементов будет сходиться по напряжениям с порядком  $O(h^{p+\ell-m})$ .

Для сходимости метода конечных элементов в случае несовместных аппроксимаций и выполнения критерия несовместности (21) к шагам "в"- "г" построения системы аппроксимирующих функций добавляется следующее:

д) строится совместная система функций  $\{\tilde{\Psi}_{kis}, (kis) \in \Omega_z\}$ , соответствующая тем же степеням свободы и удовлетворяющая критерию полноты (19) порядка  $p_e > m-f$ . В качестве такой системы можно взять часть совместной системы аппроксимирующих функций для конечного элемента, имеющего кроме выбранных еще степени свободы с порядком дифференцирования  $m_{kis} > p_e$ ;

е) проверяется критерий несовместности (21). Если данный критерий не выполнен или требуется повысить порядок его выполнения, то выбирается система функций

$$\{ \tilde{\chi}_t(x), \quad t=1, 2, \dots, T \},$$

определенная на данном элементе так, чтобы все выбранные степе-

ни свободы в узлах элемента для этих функций были равны нулю. В нее могут входить функции  $\tilde{\Psi}_\lambda(x)$ . Новая система функций ищется в таком виде

$$\tilde{\Psi}_{kis}^2 = \tilde{\Psi}_{kis}^o + \sum_{t=1}^T Q_{t,kis} \tilde{\chi}_t(x), \quad (34)$$

где константы  $Q_{t,kis}$  определяются из условия выполнения для системы функций (34) критерии полноты (19) и несовместности (21) порядка  $p$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант

$$\begin{aligned} \sum_{(kis) \in \Omega_z} h_{kis}(R_j x^\lambda) \Big|_{x=x^{(k)}} Q_{t,kis} &= 0, \\ \sum_{t=1}^T ((R_j x^\lambda, \tilde{\chi}_t(x))_{\Omega_z} - [R_j x^\lambda, \tilde{\chi}_t(x)]_{\Omega_z}) Q_{t,kis} &= \\ = (R_j x^\lambda, \tilde{\Psi}_{kis}^2 - \tilde{\Psi}_{kis}^o)_{\Omega_z} - [R_j x^\lambda, \tilde{\Psi}_{kis}^2 - \tilde{\Psi}_{kis}^o]_{\Omega_z} \end{aligned} \quad (35)$$

$$|\lambda| \leq p, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (kis) \in \Omega_z$$

После решения системы (35) построение аппроксимирующих функций конечного элемента можно считать завершенным и по теореме 2 метод конечных элементов будет сходиться по напряжениям с порядком  $O(h^{p+j-m})$ .

Примечание. При конструировании несовместных конечных элементов шаг "е" включает шаг "г".

Таким образом, конструирование каждого конкретного конечного элемента с заранее выбранными свойствами (геометрическая форма, степени свободы, физико-механические характеристики и порядок сходимости) сводится в несовместном случае к выбору корректирующих функций в (34). Все остальные действия - составление и решение простейших систем линейных алгебраических уравнений.

Данная методика была применена в [5] при конструировании треугольного конечного элемента плиты, изображенного на рис. 2, со степенями свободы узлов, как у КЭ Клафа:

$W_E$  - вертикальным перемещением;

$$\alpha_E = \frac{\partial W_E}{\partial Y}, \quad \beta_E = \frac{\partial W_E}{\partial X} - углами поворота вокруг осей OX и OY,$$

Такой элемент необходим для совместного применения с элементом Клафа при расчете пластин произвольной геометрической формы. Единственный теоретически обоснованный совместный треугольный конечный элемент с данными степенями свободы Клафа-Точера [4] сложен для реализации, требует решения системы уравнений 30-го порядка в программе составления матрицы жесткости, что существенно увеличивает время работы программы.

Построенный в [5] несовместный треугольный конечный элемент использует аппроксимацию упругой поверхности элемента полиномом четвертой степени, что позволяет легко получить матрицу жесткости в формульном виде. При более простом алгоритме построения данный элемент имеет такие же характеристики скорости сходимости, как и элемент Клафа-Точера.

Сделаем замену координат

$$\xi = \frac{1}{a}(x - \frac{b}{c}y), \quad \zeta = \frac{y}{c}, \quad (36)$$

преобразующую произвольный треугольник к равнобедренному прямоугольнику с катетом, равным единице. Вектор степеней свободы узла для данной системы координат будет иметь вид

$$q = \left\{ w_a, \frac{\partial}{\partial \xi} w_a, -\frac{\partial}{\partial \zeta} w_a \right\}. \quad (37)$$

а) Упругую поверхность пластины будем аппроксимировать неполным полиномом третьей степени

$$w(\xi, \zeta) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \zeta + C_4 \xi^2 + C_5 \xi \zeta + C_6 \zeta^2 + C_7 \xi^3 + C_8 \xi^2 \zeta + C_9 \xi \zeta^2 + C_{10} \zeta^3. \quad (38)$$

б) Все 9 коэффициентов в (38) определяются по значениям вектора перемещений (37) в узлах элемента и система аппроксирующих функций примет вид:

$$\begin{aligned} Y_{11}^0 &= \xi - 3\xi^2 - 3\xi^3 + 2\xi^4 + 2\xi^5, & Y_{11}^0 &= \zeta(1-\zeta)^2 - \xi^2 \zeta, \\ Y_{21}^0 &= -\xi(1-\xi)^2 + \xi^2, & Y_{21}^0 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ Y_{31}^0 &= \xi^2, & Y_{31}^0 &= \xi^2 - \xi^3, \\ Y_{41}^0 &= 3\xi^4 - 2\xi^5, & Y_{41}^0 &= -\zeta^2 + \zeta^3, \\ Y_{51}^0 &= -\xi^5. \end{aligned} \quad (39)$$

в) Система тождеств критерия полноты (19) порядка  $p=m=2$  для данного элемента имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} &\equiv 1, & \frac{Y_{11}}{2} - Y_{21} &\equiv \frac{\xi^2}{2}, \\ Y_{41} - Y_{11} - Y_{21} - Y_{31} &\equiv 0, & -Y_{21} + Y_{31} &\equiv \frac{\zeta^2}{2}, \\ Y_{31} + Y_{12} + Y_{22} + Y_{42} &\equiv 0, & \frac{Y_{11}}{2} + Y_{31} &\equiv \frac{\zeta^2}{2}. \end{aligned} \quad (40)$$

г) Система функций (39) не удовлетворяет в (40) только тождеству " $\zeta^2$ ". Рассмотрим невязку

$$J(\xi, \zeta) = Y_{21}^0 + Y_{31}^0 - Y_{41}^0 = \zeta^2 - \xi^2 \zeta - \xi^4,$$

у которой все степени свободы (37)' в узлах элемента равны нулю.

Система функций, удовлетворяющая тождествам (40), имеет вид

$$Y_{kl}^e = Y_{kl}^0 + C_{kl} J(\xi, \zeta), \quad k=1,2,3, \quad l=1,2,3. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40), получим относительно констант  $C_{kl}$  систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_{11} + C_{21} + C_{31} &\equiv 0, \\ C_{11} - C_{12} - C_{21} - C_{31} &\equiv 0, \\ C_{31} + C_{12} + C_{21} + C_{31} &\equiv 0, \\ \frac{1}{2} C_{11} - C_{21} &\equiv 0, \quad -C_{12} + C_{31} \equiv 1, \\ \frac{1}{2} C_{31} + C_{21} &\equiv 0, \end{aligned}$$

одно из частных решений которой

$$C_{11} = C_{21} = C_{31} = C_{12} = C_{32} = 0, \quad C_{13} = C_{23} = -\frac{1}{2}, \quad C_{23} = C_{33} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y_{11}^e &= Y_{11}^0, & Y_{12}^e &= Y_{12}^0 - 0.5Y, & Y_{13}^e &= Y_{13}^0 + 0.5Y, \\ Y_{21}^e &= Y_{21}^0, & Y_{22}^e &= Y_{22}^0 + 0.5Y, & Y_{23}^e &= Y_{23}^0, \\ Y_{31}^e &= Y_{31}^0, & Y_{32}^e &= Y_{32}^0 - 0.5Y, & Y_{33}^e &= Y_{33}^0, \end{aligned}$$

$$\gamma_{31}^e = \gamma_{31}^o, \quad \gamma_{32}^e = \gamma_{32}^o, \quad \gamma_{33}^e = \gamma_{33}^o - 0.5\gamma.$$

д) Система функций (41) несовместна: при стыковке на границе элементов функции непрерывны, а их нормальные производные имеют разрывы. Например, нормальная производная  $\gamma_{11}$  не равна нулю на стороне  $\xi-\zeta=0$ , противолежащей первому узлу.

Для проверки критерия несовместности (21) была выбрана часть совместной системы аппроксимирующих функций треугольного КЭ плиты Купера [4,5] с 6-ю степенями свободы узла: вертикальным перемещением, его первыми и вторыми частными производными по  $X$  и  $Y$ , соответствующая выбранным степеням свободы.

е) Равенства критерия несовместности (21) порядка  $p=2$ :

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \frac{\partial^2}{\partial Y\partial Z} \right\} (\gamma_{kl} - \gamma_{kl}^e) d\Omega = 0. \quad (42)$$

Выберем три функции:

$$x_1 = \gamma(\xi, \zeta), \quad x_2 = \gamma^2(\xi - \gamma - \zeta), \quad x_3 = \gamma^2(\xi - \gamma - \zeta).$$

Этот выбор, естественно, вытекает из условий равенства нулю всех степеней свободы (37) в узлах элемента и равенства нулю вертикальных перемещений на сторонах элемента при аппроксимации упругой поверхности полиномом четвертой степени.

Окончательно система аппроксимирующих функций для данного конечного элемента имеет вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{kl}^e(\xi, \zeta) = & \gamma_{kl}^o(\xi, \zeta) + a_{kl} x_1(\xi, \zeta) + b_{kl} x_2(\xi, \zeta) + \\ & + c_{kl} x_3(\xi, \zeta), \quad k=1,2,3, \quad l=1,2,3, \end{aligned} \quad (43)$$

где коэффициенты  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$ ,  $c_{kl}$  определяются из условий (35) выполнения критерия полноты и несовместности порядка  $p=2$ . Их значения приведены в табл. I [5], где использованы обозначения:

$$\lambda_1 = \frac{b}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{ab}{a^2+b^2}, \quad \lambda_3 = \frac{a(a-b)}{a^2+(a-b)^2}.$$

Таблица I  
ЗНАЧЕНИЯ ПОПРАВОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

$k$	$l$	$a_{kl}$	$b_{kl}$	$c_{kl}$
1	1	$6(\xi - \lambda_1 - \lambda_2)$	$12(\lambda_2 - \xi)$	$12(\lambda_1 - \xi)$
	2	$\xi - 3\lambda_2$	$-4 + 6\lambda_2$	-2
	3	$-\xi + 3\lambda_1$	2	$4 - 6\lambda_1$
2	1	$-6(\xi - \lambda_1 - \lambda_3)$	$12(\xi - \lambda_3)$	$12(\xi - \lambda_1 - \lambda_3)$
	2	$-\xi + 3\lambda_3$	$4 - 6\lambda_3$	$2 - 6\lambda_3$
	3	$-3(\xi - \lambda_1 - \lambda_3)$	$6(\xi - \lambda_3)$	$6(\xi - \lambda_1 - \lambda_3)$
3	1	$-6\lambda_3 + 6\lambda_1 - 12\lambda_2 + 12\lambda_3$	$12\lambda_3$	
	2	$3\lambda_3 - 3\lambda_2$	$6\lambda_2 - 6\lambda_3$	$-6\lambda_3$
	3	$-2 + 3\lambda_1$	$4 - 6\lambda_3$	$2 - 6\lambda_3$

Таблица 2

## КОЭФФИЦИЕНТЫ МАТРИЦЫ

$i$	$j$	$S_{ij}$	$i$	$j$	$S_{ij}$
1	1	$6A_{11} + 6A_{22}$	2	4	$-A_{11} - A_{12}$
1	2	$A_{11} + A_{12} + 4A_{22} + A_{23}$	2	5	$\frac{1}{6}(-2A_{11} - 2A_{12} - 2A_{13} - 5A_{23} - 2A_{33})$
1	3	$-4A_{11} - A_{12} - A_{22} - A_{13}$	2	6	$\frac{1}{6}(-A_{11} + 3A_{12} + 2A_{13})$
1	4	$-6A_{11}$	2	7	$-4A_{22} - A_{23}$
1	5	$-A_{11} - A_{23}$	2	8	$\frac{1}{6}(-2A_{12} + 6A_{22} + A_{23})$
1	6	$-2A_{11} + A_{12}$	2	9	$\frac{1}{6}(A_{12} + 5A_{22} + 4A_{23} + 2A_{13} + A_{33})$
1	7	$-6A_{22}$	2	10	$\frac{1}{6}(2A_{11} + 3A_{12} + 2A_{13} + 5A_{22} + 3A_{23} + A_{33})$
1	8	$-A_{12} + 2A_{22}$	2	11	$\frac{1}{6}(2A_{11} + 6A_{12} + 14A_{22} + 5A_{13} + 10A_{23} + 3A_{33})$
1	9	$A_{22} + A_{13}$	2	12	$\frac{1}{6}(6A_{11} + 5A_{12} + 5A_{13} + A_{22} + 3A_{23} + 2A_{33})$
1	10	$A_{11} + A_{22}$	3	13	$\frac{1}{3}(9A_{11} + 2A_{12} + 5A_{13} + A_{22} + A_{23} + A_{33})$
1	11	$\frac{1}{10}(-A_{11} - A_{12} + 6A_{22} - A_{13} + A_{23})$	3	4	$4A_{11} + A_{13}$
1	12	$\frac{1}{10}(6A_{11} - A_{12} - A_{22} + A_{13} - A_{23})$	3	5	$\frac{1}{6}(5A_{11} + A_{12} + 4A_{13} + 2A_{23} + A_{33})$
2	2	$\frac{1}{3}(A_{11} + 2A_{12} + A_{13} + 9A_{22} + 5A_{23} + A_{33})$	3	6	$\frac{1}{6}(6A_{11} + 2A_{12} + A_{13})$
2	3	$\frac{1}{6}(-5A_{11} - 10A_{12} - 4A_{13} - 5A_{22} - 4A_{23} - A_{33})$	3	7	$A_{12} + A_{22}$

Система функций (43) определена для степеней свободы (37) в системе координат  $\{\xi, \zeta\}$ . Система аппроксимирующих функций  $\{\mu_{kl}(x, y), k=1, 2, 3, l=1, 2, 3\}$ , соответствующая степеням свободы  $W_k, \alpha_k, \beta_k$  в системе координат  $XBY$ , имеет вид

$$\mu_{11}(x, y) = \gamma_{11}(\xi, \zeta),$$

$$\mu_{12}(x, y) = c\gamma_{12}(\xi, \zeta),$$

$$\mu_{13}(x, y) = \alpha\gamma_{13}(\xi, \zeta) - b\gamma_{22}(\xi, \zeta), \quad k=1, 2, 3.$$

Функционал Лагранжа (24) в системе координат  $\{\xi, \zeta\}$ :

$$\Pi(W) = \int_{\Omega} [A_{11} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \right)^2 + A_{33} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \zeta} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + 2A_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \zeta} + 2A_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \zeta}] d\xi d\zeta - \int_{\Omega} f W dx dy,$$

где константы  $A_{ij}$  равны

$$A_{11} = D \frac{c}{a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^2, \quad A_{12} = \frac{D}{ac} \left( \gamma + \frac{b^2}{c^2} \right),$$

$$A_{13} = -2D \frac{b}{a^2 c} \left( 1 + \frac{b^2}{c^2} \right), \quad A_{22} = D \frac{a}{c^2},$$

$$A_{23} = -2D \frac{b}{c^2}, \quad A_{33} = D \frac{a}{c^3} \left( \frac{4b^2}{c^2} + 2(1-\gamma) \right).$$

Матрицу жесткости построенного конечного элемента, изображенного на рис. 2, можно записать в следующем виде:

$$K_e = U_e S_e U_e^T,$$

где  $S_e = [S_{ij}]_{i,j=1}^{12}$  — матрица с коэффициентами из табл. 2;

$U_e = [U_{ij}]_{i=1, j=1}^{12, 9}$  — матрица преобразования, приведенная на рис. 3.

Так как по построению система аппроксимирующих функций (43) удовлетворяет критериям полноты и несовместности порядка  $p=2$ , а соответствующая совместная система функций удовлетворяет тождествам критерия полноты порядка  $p_e=1$ , то по теореме 2 при решении задачи об изгибе плиты справедливы оценки погрешности:

Продолжение табл.2.

<i>i</i>	<i>j</i>	<i>S<sub>ij</sub></i>
3	8	$\frac{1}{6}(3A_{12} - A_{22} + 2A_{23})$
3	9	$\frac{1}{6}(-2A_{12} - 2A_{22} - 2A_{23} - 5A_{13} - 2A_{33})$
3	10	$\frac{1}{6}(-5A_{11} - 3A_{12} - 3A_{13} - 2A_{22} - 2A_{23} - A_{33})$
3	11	$\frac{1}{30}(-A_{11} - 5A_{12} - 3A_{13} - 6A_{22} - 5A_{23} - 2A_{33})$
3	12	$\frac{1}{30}(-14A_{11} - 6A_{12} - 10A_{13} - 2A_{22} - 5A_{23} - 3A_{33})$
4	4	$6A_{11}$
4	5	$A_{11}$
4	6	$2A_{11}$
4	7	0
4	8	$A_{12}$
4	9	$-A_{13}$
4	10	$-A_{11}$
4	11	$\frac{1}{10}(A_{11} + 2A_{12} + A_{13})$
4	12	$\frac{1}{10}(-6A_{11} - A_{12} - A_{13})$
5	5	$\frac{1}{3}(A_{11} + A_{13} + A_{33})$
5	6	$\frac{1}{6}(A_{11} - 2A_{13})$
5	7	$A_{23}$
5	8	$\frac{1}{6}(2A_{12} - A_{23})$
5	9	$\frac{1}{6}(A_{12} - 2A_{23} - 2A_{13} - A_{33})$
5	10	$\frac{1}{6}(-2A_{11} - 2A_{13} - A_{12} - 2A_{23} - A_{33})$
5	11	$\frac{1}{30}(-2A_{11} - 5A_{13} - 2A_{12} - 6A_{23} - 3A_{33})$
5	12	$\frac{1}{30}(-6A_{11} - 5A_{13} - 3A_{12} - 2A_{23} - 2A_{33})$
6	6	$A_{11}$
6	7	$-A_{12}$
6	8	$\frac{1}{2}A_{12}$
6	9	$\frac{1}{6}(2A_{12} - A_{13})$
6	10	$\frac{1}{6}(-A_{11} + 2A_{12} + A_{13})$
6	11	$\frac{1}{10}(2A_{11} + 4A_{12} + 2A_{13})$

Продолжение табл.2

<i>i</i>	<i>j</i>	<i>S<sub>ij</sub></i>
6	12	$\frac{1}{30}(-4A_{11} + A_{12} + A_{13})$
7	7	$6A_{22}$
7	8	$-2A_{22}$
7	9	$-A_{22}$
7	10	$-A_{22}$
7	11	$\frac{1}{10}(-A_{12} - 6A_{22} - A_{23})$
7	12	$\frac{1}{10}(2A_{12} + A_{22} + A_{23})$
8	8	$A_{22}$
8	9	$\frac{1}{6}(A_{22} - 2A_{23})$
8	10	$\frac{1}{6}(-2A_{12} + A_{12} - A_{23})$
8	11	$\frac{1}{30}(-A_{12} + 4A_{22} - A_{23})$
9	9	$\frac{1}{3}(A_{22} + A_{23} + A_{33})$
9	10	$\frac{1}{6}(A_{12} + 2A_{13} + 2A_{22} + 2A_{23} + A_{33})$
9	11	$\frac{1}{30}(3A_{12} + 2A_{13} + 6A_{22} + 5A_{23} + 2A_{33})$
9	12	$\frac{1}{30}(2A_{12} + 6A_{13} + 2A_{22} + 5A_{23} + 3A_{33})$
10	10	$\frac{1}{6}(2A_{11} + 2A_{12} + 2A_{13} + 2A_{22} + 2A_{23} + A_{33})$
10	11	$\frac{1}{60}(4A_{11} + 10A_{12} + 9A_{13} + 12A_{22} + 12A_{23} + 5A_{33})$
10	12	$\frac{1}{60}(12A_{11} + 10A_{12} + 12A_{13} + 4A_{22} + 9A_{23} + 5A_{33})$
11	11	$\frac{1}{30}(6A_{11} + 10A_{12} + 9A_{13} + 12A_{22} + 12A_{23} + 5A_{33})$
11	12	$\frac{1}{10}(6A_{11} + 14A_{12} + 15A_{13} + 6A_{22} + 15A_{23} + 7A_{33})$
12	12	$\frac{1}{60}(12A_{11} + 10A_{12} + 12A_{13} + 6A_{22} + 9A_{23} + 5A_{33})$

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & C & & & & \\ & -\beta & Q & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & C & & \\ & & & -\beta & a & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ c_{12} & c\bar{b}_{12} & cC_{12} \\ a\bar{a}_{13} - \bar{b}a_{12} & a\bar{b}_{13} - \bar{b}b_{12} & ac_{13} - \bar{b}c_{12} \\ a_{21} & b_{21} & c_{21} \\ ca_{22} & c\bar{b}_{22} & cc_{22} \\ a\bar{a}_{23} - \bar{b}a_{22} & a\bar{b}_{23} - \bar{b}b_{22} & ac_{23} - \bar{b}c_{22} \\ 1 & a_{31} & b_{31} & c_{31} \\ C & ca_{32} & c\bar{b}_{32} & cc_{32} \\ -\beta & a & a\bar{a}_{33} - \bar{b}a_{32} & a\bar{b}_{33} - \bar{b}b_{32} & ac_{33} - \bar{b}c_{32} \end{bmatrix}$$

Рис.3. Матрица преобразования

$$\|w - w_h\|_{\mathcal{E}, s} \leq Ch \|w\|_4,$$

$$\|w - w_h\| \leq Ch^2 \|w\|_4.$$

Для демонстрации точности результатов, получаемых с помощью построенного конечного элемента, рассчитывалась прямоугольная шарнирно заделанная пластина под равномерной нагрузкой, изображенная на рис. 4. В табл. 3 приведены результаты численных экспериментов и приведено сравнение с результатами, полученными для КЭ Клафа-Точера.

### 3. АВТОМАТИЗАЦИЯ СОСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При разработке пакетов прикладных программ расчета строительных конструкций большой объем занимает создание библиотеки конечных элементов. Для многих конечных элементов вывод матрицы жесткости в формульном виде настолько сложен, что операции построения выполняют в соответствующей программе составления матрицы жесткости, это существенно увеличивает время работы данной программы.

Вывод матрицы жесткости состоит из большого числа однородных вычислительных операций и может быть легко автоматизирован. В НИИАСС создана программа "МАКЕТ", предназначенная для построения в формульном или численном виде матриц жесткости элементов произвольной геометрической формы с полиномиальной системой аппроксимирующих функций относительно  $x, y, z$  и параметров, описывающих геометрию элемента. Программа позволяет включать полученные формулы элементов матрицы жесткости непосредственно в программы вычисления этих матриц.

Так как одночлен полинома имеет следующий вид:

$$cx^{s1}y^{s2}z^{s3}\lambda_1^{t1}\lambda_2^{t2}\dots$$

то его можно записать в виде последовательности чисел

$$s1, s2, s3, t1, t2, \dots$$

При дифференцировании данного одночлена получится одночлен такого же вида. При интегрировании его по области конечного элемента получим сумму одночленов, у которых  $s1, s2, s3 = 0$ .

Все вышесказанное позволяет хранить исходные данные (полиномы) и результаты счета (элементы матрицы жесткости) в однотипном виде.

На рис.5 показана блок-схема программы "МАКЕТ", где  $K_S$  - число степеней свободы элемента. Алгоритм использует специфику задачи (1):

ввод исходных данных;

дешифровка матриц операций дифференцирования  $B$ , матрицы упругости  $M$  и полиномов, определенных на элементе: представление в виде последовательности степеней и коэффициентов всех одночленов;

дифференцирование аппроксимирующих функций: умножение на матрицу  $B$  согласно (2);

для вычисления элемента матрицы жесткости  $K_{ij}$  одна из продифференцированных функций умножается на матрицу упругости и вторую продифференцированную функцию;

полученный многочлен интегрируется по области конечного элемента с использованием библиотеки процедур интегрирования одночленов по различным геометрическим областям;

полученный элемент матрицы жесткости выводится на печать или на устройство долговременной памяти для использования в тексте программы составления матрицы жесткости.

Приведем пример использования данной программы для построения матрицы жесткости несовместного прямоугольного элемента балки-стенки, которая описывается системой двух дифференциальных уравнений.

$$D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\gamma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = X ,$$

$$D \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\gamma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = Y ,$$

где  $u, v$  - перемещения в направлении осей  $OX$  и  $OY$ ;

$X, Y$  - силы в направлении осей  $OX$  и  $OY$ ;

$$D = \frac{E\delta}{1-\gamma^2} ,$$

$E$  - модуль продольной упругости;

$\gamma$  - коэффициент Пуассона;

$\delta$  - толщина пластинки.

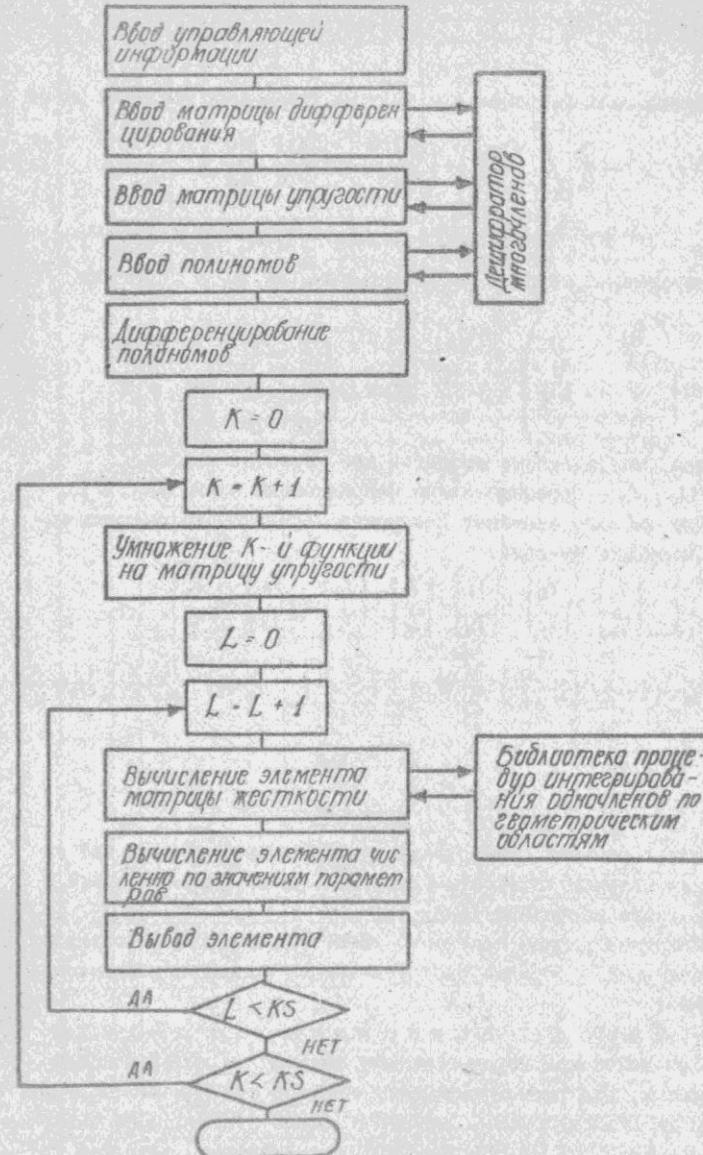


Рис.5. Блок-схема программы "Макет"

Функционал Лагранжа при нулевых граничных условиях имеет

$$\text{вид } \Pi(u, v) = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1-\Gamma}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Omega} (ux + vy) dx dy,$$

и, следовательно, матрицы дифференцирования  $B$  и упругости  $M$  равны

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad M = D \begin{pmatrix} 1 & \Gamma & 0 \\ \Gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\Gamma}{2} \end{pmatrix}$$

В каждом узле элемента вводятся две степени свободы:

$u_k, v_k$  — перемещения по направлениям осей  $\partial X, \partial Y$ .

Для данного элемента построена несовместная система аппроксимирующих функций:

$$\left\{ Y_1 \right\}, \left\{ Y_2 \right\}, \left\{ Y_3 \right\}, \left\{ Y_4 \right\}, \left\{ Y_5 \right\}, \left\{ Y_6 \right\}, \left\{ Y_7 \right\}, \left\{ Y_8 \right\},$$

где

$$Y_1 = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}), \quad Y_2 = \frac{x}{a}(1 - \frac{y}{b}), \quad Y_3 = (1 - \frac{x}{a})\frac{y}{b}, \quad Y_4 = \frac{xy}{ab},$$

$$Y_5 = \frac{1-\Gamma}{4} \frac{xy}{a^2} (1 - \frac{y}{b}), \quad Y_6 = -Y_5,$$

$$Y_7 = \frac{1+\Gamma}{4} \frac{xy}{b^2} (1 - \frac{x}{a}), \quad Y_8 = -Y_7.$$

Ниже приведен пример заполнения исходных данных для построения матрицы жесткости прямоугольного элемента плоского напряженного состояния /табл.4/ .

Исходные данные программы имеют вид отдельных массивов, расположенных в порядке, соответствующем последовательности их описания:

I. Массив с наименованием задачи содержит текстовую характеристику задачи для идентификации распечатки. Для рассматриваемого примера это фраза: "МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ (НЕСОВМЕСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ)". В конце фразы ставится ";".

Таблица 4

ОПЕРАЦИИ И КОММЕНТАРИИ	
42	5 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60
MATRICA	ЖЕСТКОСТЬ
	ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО
	(НЕСОВМЕСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ);
D(1, 1)	=DX;
(1, 5)	(7, 1)
(3, 6)	(8, 3)
D(1, 1)	=D;
M(1, 1)	=M(1, 2)
M(3, 3)	=0.5*D-%*D*NU;
P(1)	=I-I/A-Y/B+-%*Y/A/B;
P(2)	=L/A-J*Y/A/B;
P(3)	=Y/B-T*Y/A/B;
P(4)	=X*Y/A/B;
P(5)	=0.25*Y/A+phi*2.5*Y/A*NU-phi*2.5*Y**2/A/B-phi*2.5*Y**2/A/B*NU;
P(6)	=phi*2.5*Y/A-phi*2.5*Y/A*NU+phi*2.5*Y**2/A/B+phi*2.5*Y**2/A/B*NU;
P(7)	=phi*2.5*T/B+phi*2.5*X/B*NU-phi*2.5*X**2/A/B-phi*2.5*X**2/A/B*NU;
P(8)	=phi*2.5*X/B-phi*2.5*X**2/A/B+phi*2.5*X**2/A/B*NU;

2. Массив управляющих параметров.

Первый параметр:  $IPR$  - режим работы, равный:

- 0 - при получении формул элементов матрицы жесткости в виде распечатки;
- 1 - получение численной матрицы жесткости;
- 2 - вывод формул на промежуточный носитель для использования при дальнейшем программировании;
- 5 - распечатка и синтаксический контроль исходных данных.

Второй параметр:  $N^l$  - размерность пространства:

- 1 - стержень (ось  $OZ$ );
- 2 - плоскость  $XOY$ ;
- 3 - объемный элемент.

Третий параметр:  $NPL$  - номер области конечного элемента из библиотеки процедур интегрирования одночленов:

- 1 - стержень, прямоугольник или параллелепипед при соответствующих значениях  $N^l$ , характеризующиеся буквенными обозначениями размеров A, B и C по осям  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ;
- 2 - прямоугольный равнобедренный треугольник с единичным катетом;
- 3 - произвольный треугольник, изображенный на рис. 6а;
- 4 - треугольная прямая призма, рис. 6б;
- 5 - треугольная пирамида, рис. 6в и т.д.

Библиотека областей конечных элементов содержит программы интегрирования одночленов и может быть дополнена разработчиком.

Четвертый параметр:  $K$  - число аппроксимирующих полиномов, заданных на элементе.

Пятый параметр:  $KS$  - число степеней свободы элемента.

Шестой параметр:  $IP$  - число буквенных обозначений в задаче.

Параметры массива записываются через запятые или пробелы и в конце списка ставится ";".

Для рассмотренного примера:

- 0 - признак работы для вычисления матрицы жесткости;
- 2 - элемент лежит в плоскости  $XOY$ ;
- 1 - прямоугольник;
- 8 - число аппроксимирующих полиномов;
- 8 - число степеней свободы элемента.

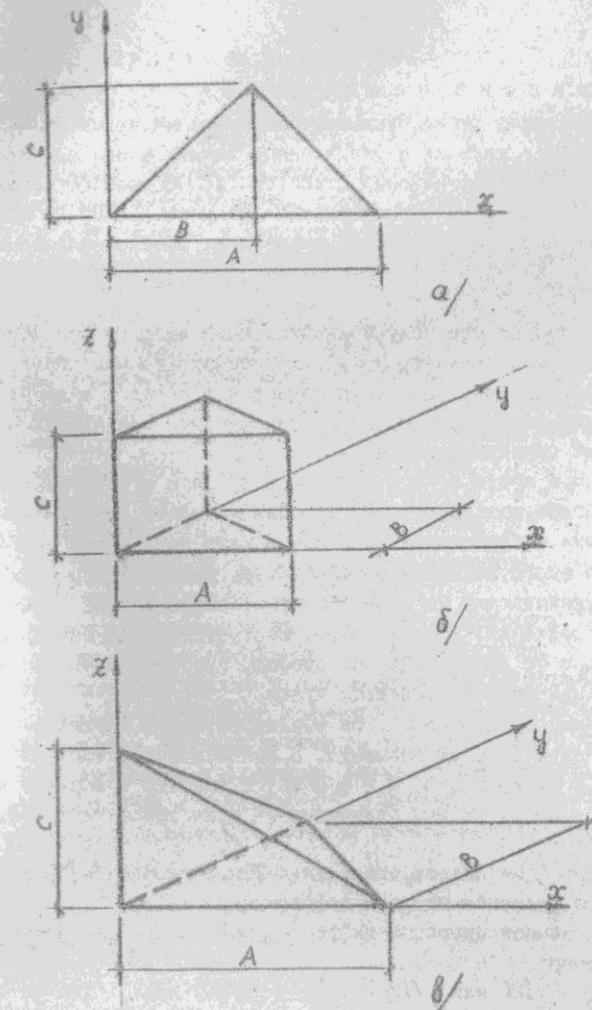


Рис. 6. Области конечных элементов:  
а) произвольный треугольник;  
б) треугольная прямая призма;  
в) треугольная пирамида.

3. Массив наименований параметров содержит имена буквенных обозначений, принятых в задаче, заключенные в кавычки и разделенные запятыми или пробелами. В конце списка обозначений ставится ";". В примере параметры "A" и "B" - размеры прямоугольника на рис. I, "D" и "U" - параметры системы уравнений, описывающих плоско-напряженное состояние (жесткость балки-стенки и коэффициент Пуассона).

4. Массив значений параметров задается только при получении численной матрицы жесткости, когда управляющий параметр  $IPR=1$ . В рассматриваемом примере этот массив отсутствует. Значения задаются в порядке задания наименований параметров, разделяются запятыми или пробелами и по окончании списка ставится ";".

5. Массив вектор-функций ставит в соответствие каждой степени свободы элемента вектор-функцию с различными аппроксимирующими полиномами по каждому из направлений. Для этого задается вектор  $(p_x, p_y, p_z) / p_x, p_y, p_z = 0, 1, 2, \dots, K$ , указывающий на номера аппроксимирующих полиномов каждого направления. Если  $p_i = 0$ , то соответствующее направление не зависит от данной степени свободы при выбранном законе аппроксимации-аппроксимируется нулем.

Данные векторы задаются последовательно согласно нумерации степеней свободы элемента. В конце списка ставится ";".

6. Матрица дифференцирования  $B$  из (I) задается своими отличными от нуля элементами в следующем виде:

" $D(i,j)$ " = список операций дифференцирования; ", где  $i, j$  - индексы элемента матрицы дифференцирования.

Для записи операций дифференцирования вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &- "DX" \text{ или } "/DX", \quad \frac{\partial}{\partial y} - "DY" \text{ или } "/DY" \\ \frac{\partial}{\partial z} &- "DZ" \text{ или } "/DZ" \end{aligned}$$

Между параметрами "DX", "DY", "DZ", элементами списка обозначений и константами допустимы операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. Так, например,

$$D(1,2)=2*x*B/DX^2/DY^2+5*DZ^2;"$$

эквивалентно записи

$$d_{12}=2ab\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y^2}+5\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

После завершения описания элементов матрицы дифференцирования необходимо поставить служебное слово "END;".

7. Матрица упругости  $M$  в (I) задается своими отличными от нуля элементами в следующем виде:

$$"M(i,j)=\{\text{полином}\};" \quad i, j - \text{индексы элемента.}$$

Элементы матрицы могут быть полиномами от "X", "Y", "Z".

Между параметрами "X", "Y", "Z", элементами списка обозначений и константами допустимы операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. После завершения описания элементов матрицы необходимо поставить служебное слово "END;".

8. Аппроксимирующие полиномы задаются последовательно один за другим в следующем виде:

$$"P(i)=\{\text{полином}\}" \quad i - \text{номер полинома.}$$

Полином оформляется аналогично пункту 7.

В приложении приведен листинг работы программы "МАКЕТ" при получении матрицы жесткости в формульном виде. Данная программа позволяет свести к минимуму работу по построению матрицы жесткости конечного элемента, когда известны аппроксимирующие функции. Матрица жесткости такого простого примера на ЭС 1022 вычислялась 1 минуту. Более сложная матрица  $S_2$ , приведенная в табл.2, считалась 1,5 минуты. При ручном счете это потребовалось бы 1-2 недели работы высококвалифицированного специалиста.

Приложение

ПРОГРАММА "МАКЕТ"

12.37.38 МИН.

07 СЕНТЯБРЯ 1981 Г.

МАТРИЦА ЧЕСТКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА  
ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
(НЕСОВМЕСТНЫЕ АПРОКСИМАЦИИ):

0 2 1 8 8 4;

РЕЖИМ РАБОТЫ.....0  
РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА.....2  
НОМЕР ОБЛАСТИ ЭЛЕМЕНТА.....1  
АПРОКСИМИРУЮЩИХ ГОЛЛИГМСов.....8  
СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ ЭЛЕМЕНТА.....8  
ПАРАМЕТРОВ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....4

НАИМЕНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ:

"A" "B" "D" "NU";

ВЕКТОР - ФУНКЦИИ:

(1,5) (7,1) (2,6) (9,2);  
(3,6) (8,3) (4,5) (17,4);

МАТРИЦА ДЕФОРМАЦИЙ:

D(1,1)=DX; D(2,2)=DY; D(3,1)=DX; END;

МАТРИЦА НАПРЯЖЕНИЯ:

M(1,1)=D; M(1,2)=0=NU; M(2,1)=0=NU; M(2,2)=D;

M(3,3)=0=D-B,5\*D=NU; END;

КООРДИНАТНЫЕ ФУНКЦИИ:

P(1)=1-X/A-Y/B+X/A=Y/B;

P(2)=X/A-X/A=Y/B;

P(3)=Y/B-X/A=Y/B;

P(4)=X/A+Y/B;

P(5)=Y/25\*B+0,25\*Y/A=NU-B,25\*Y=2/A/B=NU;

P(6)=0,25\*Y/A+0,25\*Y/A=NU+B,25\*Y=2/A/B=NU;

P(7)=0,25\*X/B+0,25\*X/B=NU-B,25\*X=2/A/B=NU;

P(8)=0,25\*X/B-B,25\*X/B=NU+B,25\*X=2/A/B=NU;

Приложение приложения

лист №808

МАТРИЦА ЧЕСТКОСТИ:

R(01,01)=+B,354166667/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU-B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,166666667\*A/B\*D-B,166666667\*A/B\*D\*NU;

R(12,12)=+B,125000002\*D+B,125000002\*D\*NU;

R(21,21)=-B,354106667/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU+B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,083333333\*A/B\*D-B,083333333\*A/B\*D\*NU;

R(11,01)=-B,125000002\*D+B,375000002\*D\*NU;

R(21,01)=-B,145833333/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU+B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,166666667\*A/B\*D-B,166666667\*A/B\*D\*NU;

R(01,06)=+B,125000002\*D-B,375000002\*D\*NU;

R(21,07)=-B,145833333/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU+B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,083333333\*A/B\*D-B,083333333\*A/B\*D\*NU;

R(01,08)=-B,125000002\*D-B,125000002\*D\*NU;

R(02,02)=+B,354166667/A/B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU-B,862500000/A/B\*D\*NU\*+2+B,166666667/A\*B\*D-B,166666667/A\*B\*D\*NU;

R(02,03)=+B,125000002\*D-B,375000002\*D\*NU;

R(02,04)=+B,145833333/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU+B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,166666667/A\*B\*D-B,166666667/A\*B\*D\*NU;

R(02,05)=-B,125000002\*D+B,375000002\*D\*NU;

R(02,06)=-B,354166667/A/B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU+B,862500000/A/B\*D\*NU\*+2+B,083333333/A\*B\*D-B,083333333/A\*B\*D\*NU;

R(02,07)=-B,125000002\*D-B,125000002\*D\*NU;

R(02,08)=-B,145833333/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU-B,862500000/A/B\*D\*NU\*+2+B,083333333/A\*B\*D-B,083333333/A\*B\*D\*NU;

R(03,03)=+B,354166667/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU-B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,166666667/A/B\*D-B,166666667/A/B\*D\*NU;

R(12,04)=-B,125000002\*D-B,125000002\*D\*NU;

R(03,05)=-B,145833333/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU-B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,166666667/A\*B\*D-B,166666667/A\*B\*D\*NU;

R(03,06)=-B,125000002\*D+B,125000002\*D\*NU;

R(03,07)=-B,145833333/A\*B\*D-B,841666667/B\*B\*D\*NU-B,862500000/A\*B\*D\*NU\*+2+B,083333333/A\*B\*D-B,083333333/A\*B\*D\*NU;

Продолжение приложения

ЛУСТ 88:83

$R(83,88) = -0.12580000e+0+B.37580000e+0+NU;$   
 $R(84,84) = +0.354106667*A/B*D-B.041666667*A/B*D+NU-0.36250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.166666667/A*B*D-B.166666667/A*B*D+NU;$   
 $R(84,85) = +0.12580000e+0+B.12580000e+0+NU;$   
 $R(84,86) = -0.1458333333*A/B*D-B.041666667*A/B*D+NU-0.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.0833333333/A*B*D-B.0833333333/A*B*D+NU;$   
 $R(84,87) = +0.12580000e+0-B.37580000e+0+NU;$   
 $R(84,88) = -0.354106667*A/B*D-B.041666667*A/B*D+NU+B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.0833333333/A*B*D-B.0833333333/A*B*D+NU;$   
 $R(85,85) = +0.354106667/A*B*D-B.041666667/A*B*D+NU-B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.166666667/A/B*D-B.166666667/A/B*D+NU;$   
 $R(85,86) = -0.12580000e+0-B.12580000e+0+NU;$   
 $R(85,87) = -0.354106667/A*B*D-B.041666667/A*B*D+NU+B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.0833333333/A/B*D-B.0833333333/A/B*D+NU;$   
 $R(85,88) = +0.12580000e+0-B.37580000e+0+NU;$   
 $R(86,86) = +0.354106667/A/B*D-B.041666667*A/B*D+NU-B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.166666667/A*B*D-B.166666667/A*B*D+NU;$   
 $R(86,87) = -0.12580000e+0+B.37580000e+0+NU;$   
 $R(86,88) = +0.1458333333*A/B*D-B.041666667*B/B*D+NU+B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.166666667/A*B*D-B.166666667/A*B*D+NU;$   
 $R(87,87) = +0.354106667/A*B*D-B.041666667/A*B*D+NU-B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.166666667/A/B*D-B.166666667/A/B*D+NU;$   
 $R(87,88) = +0.12580000e+0+B.12580000e+0+NU;$   
 $R(88,88) = +0.354106667*A/B*D-B.041666667*A/B*D+NU-B.06250000e$   
 $A/B*D+NU**2+B.166666667/A*B*D-B.166666667/A*B*D+NU;$

07 СЕНТЯБРЯ 1981 Г.

12.36.00 МИМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. -М.:Стройиздат, 1977.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. -М.:Мир, 1980.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. -М.:Наука, 1970.
4. Стренд Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. -М.:Мир, 1977.
5. Карпиловский В.С. Конструирование несовместных конечных элементов. -К.: деп. УкрНИИТИ, № 2153, 1980.
6. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация. Записки научных семинаров ЛОМИ. -Л.:1974.-т.48.
7. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. -М.:Мир, 1977.
8. Евзеров И.Д. Оценки погрешности несовместных конечных элементов плиты. -К.:деп. УкрНИИТИ, № 1467, 1979.
9. Постнов В.А., Хархурим И.Д. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. -Л.:Судостроение, 1974.
10. Nitsche J. Convergence of Nonconforming Methods.  
— Mathematical Aspects of Finite Element in Partial Differential Equations, New York, ed. de Boor, 1974.

ВФ 39284. Подп. к печ. II.II.81, Печ.л. 8,0.  
Форм.бум. 60x84 I/16. Заказ 394. Тираж 295. Цена 15 коп.

Ротапринт НИИАСС Госстроя УССР. Киев, М. Кривоноса, 2-а.