

**В.С. Карпиловский**

**Метод конечных элементов  
и задачи теории упругости**

**Киев – 2022**

УДК 519.6, 539.3, 624.04

ББК 22.251, 22.193

Рецензенты:

**Гордеев Вадим Николаевич**, доктор технич. наук, профессор,  
первый заместитель председателя правления  
ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им. В.Н.Шимановского»;

**Лизунов Петр Петрович**, доктор технич. наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Строительная механика»  
Киевского национального университета строительства и архитектуры.

**Карпіловський В.С.**

Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності. – Київ: «Софія А», 2022.  
– 275 с.

У книзі подано опис методу скінченних елементів на прикладі задач теорії пружності. Наведено достатні умови збіжності методу як для сумісних, так і для несумісних елементів. На основі цих умов представлено методіку побудови нових скінченних елементів апроксимацій.

Описано як відомі скінченні елементи, так і побудовані автором.

Подано різні тестові задачі, виконані на базі обчислювального комплексу SCAD21++.

**Karpilovskyi V.S.**

Finite Element Method and Problems of the Theory of Elasticity. – Kyiv: «Sofia A» Ltd, 2022. – 275 p.

The book describes the finite element method using the example of variational problems of the theory of elasticity. It provides sufficient conditions for the convergence of the method for both consistent and inconsistent elements. A technique for constructing new finite element approximations is given based on these conditions.

Both known finite elements and those created by the author are described here.

The book considers various test problems solved in SCAD21 ++.

**Карпиловский В.С.**

Метод конечных элементов и задачи теории упругости. – Киев: «София А», 2022. – 275 с.

В книге дано описание метода конечных элементов на примере вариационных задач теории упругости. Приведены достаточные условия сходимости метода как для совместных, так и для несовместных элементов. На основе данных условий дана методика построения новых конечноэлементных аппроксимаций.

Описаны как известные конечные элементы, так и построенные автором.

Приведены различные тестовые задачи, выполненные на базе вычислительного комплекса SCAD21++.

ISBN 978-617-7031-87-0

© Карпиловский В.С., 2022 г.

## Список обозначений

$\mathcal{R}^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство;

$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  – координаты точки в  $\mathcal{R}^n$ ;

$\{x, y, z\}^T$  – координаты точки в  $\mathcal{R}^3$ ;

$\mathcal{Z}$  – множество целых чисел;

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{Z}$ ;

$|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ;

$\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ ;

$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ;

$\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  – оператор дифференцирования;

$P_{i,\mathbf{a}}^s(\mathbf{x}) = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \mathbf{x}^\alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-i-1} \}$  – полином степени  $\mathbf{a}$  по направлению  $i$  в  $\mathcal{R}^s$ ;

$\Omega \subset \mathcal{R}^n$  – упругое тело в  $n$ -мерном пространстве;

$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}^T \in \mathcal{R}^s$  – вектор перемещений точки;

$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}^T \in \mathcal{R}^s$  – вектор объемных сил;

$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}^T \in \mathcal{R}^k$  – обобщенные напряжения;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}^T \in \mathcal{R}^k$  – обобщенные деформации;

$\varepsilon_i$  – деформации от температурных воздействий;

$\mathbf{D}$  – матрица упругости;

$\mathbf{A}$  – оператор геометрии;

$\mathbf{A}_u$  – оператор кинематических краевых условий;

$\mathbf{A}_\sigma$  – оператор статических краевых условий;

$\mathbf{B}$  – оператор равновесия;

$\Gamma$  – граница области  $\Omega$ ;

$\Gamma_u$  – область заданных кинематических краевых условий;

$\Gamma_\sigma$  – область заданных статических краевых условий;

$\mathcal{A}$  – оператор краевой задачи;

$\mathcal{A}_G$  – нелинейный оператор геометрической жесткости;

$\mathcal{M}$  – оператор массы системы;

$u_\Gamma$  – кинематические краевые условия;

$\sigma_\Gamma$  – статические краевые условия.

**Пространства:**

$W_2^m(\Omega)$  – Соболева;

$C_m(\Omega)$  – функций, непрерывных вместе с  $m$  производными;

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\Omega)$  – краевой задачи;

$\mathcal{L}_u(\Omega)$  – кинематически допустимых функций;

$\mathcal{L}_{u,0}(\Omega)$  – геометрически возможных вариаций перемещений, удовлетворяющих однородным кинематическим краевым условиям;

$\mathcal{L}_{\sigma}(\Omega)$  – статически допустимых напряжений;

$\mathcal{L}_{\sigma,0}(\Omega)$  – статически возможных вариаций напряжений, удовлетворяющих однородным статическим краевым условиям.

**Скалярные произведения:**

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega;$$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\Omega} = \int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega;$$

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Gamma.$$

**Нормы:**

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega}^{\frac{1}{2}};$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}} = [\mathbf{u}, \mathbf{u}]_{\Omega}^{\frac{1}{2}};$$

$\|\cdot\|_{m,\Omega}$  – норма в пространстве Соболева  $W_2^m(\Omega)$ .

**Функционалы:**

$\mathcal{E}(\mathbf{u})$  – работа внутренних сил;

$\Pi_{\sigma}(\mathbf{u})$  – потенциал статических воздействий;

$\Lambda(\mathbf{u})$  – функционал Лагранжа;

$K(\boldsymbol{\sigma})$  – функционал Кастельяно;

$R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  – функционал Рейсснера;

$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  – смешанный функционал;

$(\mathbf{f}, \mathbf{u})_{\Omega}$  – работа внешних объемных сил;

$\langle \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma}, \mathbf{A}_u \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_{\sigma}}$  – работа внешних поверхностных сил.

**Дискретная задача:**

$\Omega_h$  – сетка конечных элементов;

$\Omega_r$  – конечный элемент;

$\omega_h$  – сетка узлов;

$\mathcal{L}_h$  – пространство сеточных функций;

$\mathcal{P}_h = \{\mathcal{P}_{1,h}, \mathcal{P}_{2,h}, \dots, \mathcal{P}_{s,h}\}^T$  – оператор проектирования на  $\mathcal{L}_h$ ;

$\mathcal{P}_\varphi$  – оператор проектирования на  $\mathcal{L}_h(\Omega_r)$  функциями  $\varphi$ ;

$\Lambda_h$  – функционал Лагранжа на  $\Omega_h$ ;

$(j) \in \mathbf{x}_i$  – степени свободы узла  $\mathbf{x}_i$  сетки  $\omega_h$ ;

$(j) \in \omega_h$  – степени свободы  $\Omega_h$ ;

$(j) \in \Omega_r$  – степени свободы  $\Omega_r$ ;

$L_k$  – оператор степени свободы  $k$ ;

$\mathbf{q}_r = \{\mathbf{q}_i\}_{(i) \in \Omega_r}$  – вектор значений степеней свободы  $\Omega_r$ ;

$\mathbf{q}_h = \{\mathbf{q}_i\}_{(i) \in \Omega_h}$  – вектор значений степеней свободы  $\Omega_h$ ;

$\mathbf{K}_r$  – матрица жесткости (МЖ) конечного элемента;

$\mathbf{f}_r$  – приведенные узловые нагрузки на  $\Omega_r$ ;

$\mathbf{K}_h$  – матрица жесткости системы;

$\mathbf{F}_h$  – суммарный вектор приведенных узловых воздействий;

$\mathcal{A}_h$  – оператор дискретной задачи;

$\tilde{\mathbf{F}}_h$  – нагрузка дискретной задачи;

$[\mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \mathbf{v}_h(\mathbf{x})]_* = \sum_r [\mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \mathbf{v}_h(\mathbf{x})]_{\Omega_r}$  ;

$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{A}_h}^2 = [\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h]_*$  ;

$(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_h} = \sum_r (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_r}$  .

#### **Сокращения в именах элементов:**

*КЭ* – конечные элементы;

*МКЭ* – метод конечных элементов;

*БКЭ* – библиотека конечных элементов;

*МЖ* – матрица жесткости;

*SubAreas, SA* – метод подобластей;

*PL* – plate

*QRDF* – *Quasi-rotational degrees of freedom* (КЭ с квазивращательными степенями свободы);

*DDF* – *Drilling degrees of freedom* (КЭ с вращательными степенями свободы);

*JIDR* – *Joint interpolation of displacements and rotations* (совместная интерполяция перемещений и углов поворота);

*DSG* – *Discrete Shear Gap*;

*MITC* – *Mixed Interpolation of Tensorial Components*;

*IC* – *Incompatible* (несовместные);

*IP* – *Isoparametric* (изопараметрические);

*4R* – *прямоугольные*;

*A* – *Axisymmetric* (осесимметричные).

## Глава 1. Задачи теории упругости

### 1.1. Конструкция и ее расчетная схема

Расчетный анализ любой конструкции начинается с попытки установить, что именно в рассматриваемом случае является существенным, а чем можно пренебречь. Такого рода упрощение задачи производится всегда, поскольку выполнение расчета с учетом всех свойств реальной конструкции возможно лишь с определенной степенью приближения.

**Расчетная схема сооружения** представляет собой упрощенную схему реальной конструкции, отображающую только те параметры сооружения и действующие на неё нагрузки, которые имеют отношение к решению рассматриваемой задачи. При расчете строительных конструкций и их оснований, например, требования к расчетным схемам приведены в нормативных документах, где указано, что расчетные схемы должны отражать действительные условия работы здания или сооружения и соответствовать рассматриваемой расчетной ситуации с учетом их конструктивных особенностей.

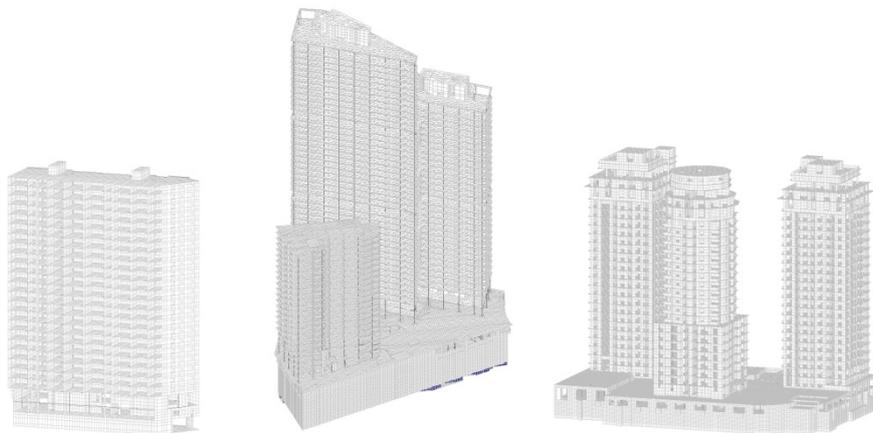


Рис. 1.1-1. Расчетные схемы зданий

Некоторые методы построения расчетных схем получили широкое распространение и имеют общий характер (идеализация материала в виде сплошной среды; предположение об однородности материала; приведение геометрической формы тела к таким стандартным схемам, как стержни, пластины или оболочки; схематизация внешних сил и др.). Другие методы схематизации вполне конкретны и связываются с каждой рассматриваемой задачей. Однако во всех случаях выбор расчетной схемы является важнейшим элементом анализа, одной из наиболее характерных черт инженерного искус-

ства и характеризует уровень профессионального мастерства расчетчика [66]. На рис 1.1-1 и 1.1-2 приведены примеры расчетных схем.



**Рис. 1.1-2.** Расчетные схемы оболочки, мачты и стержневой конструкции

Уже на ранних стадиях создания расчетной схемы следует принять решение о том, будет ли расчет выполняться как *линейный* или как *нелинейный*, следует ли учитывать силы инерции и выполнять *динамический расчет* или можно ограничиться *статическим анализом*. Все эти особенности ожидаемого поведения конструкции сказываются на выборе расчетной схемы, например, при определении возможных степеней свободы или при схематизации нагрузок, действующих на систему.

Если для анализа расчетной схемы используется метод перемещений, то при идеализации конструкции расчетная схема представляется в виде набора тел стандартного типа (стержней, пластин, оболочек и т.д.), которые называются *конечными элементами* (КЭ) и присоединены к узлам расчетной схемы. Чем больше библиотека конечных элементов (БКЭ) современного вычислительного комплекса, тем больше у расчетчика возможностей при моделировании конструкции.

*Узел* в расчетной схеме метода перемещений представляется в виде абсолютно жесткого тела исчезающе малых размеров. Положение узла в пространстве при деформациях системы определяется координатами центра и направлениями трех осей, жестко связанных с узлом. Иными словами, узел представляется как объект, обладающий для большинства задач шестью степенями свободы – тремя линейными смещениями, определяемыми как разности координат в деформированном и недеформированном состояниях, и тремя углами поворота. В некоторых случаях узлу расчетной схемы приписываются дополнительные степени свободы, которые уже не отождествляются с компонентами линейных или угловых перемещений узла как бесконечно малого жесткого тела в точке, совпадающей с центром узла. Это могут быть кручение деформированной поверхности плиты или компоненты деформаций поперечного сдвига и обжатия в слоистых кусочно-неоднородных пологих оболочках.

*Неизвестными* метода перемещений являются значения степеней свободы узлов расчетной схемы. Т.к. *элементы* системы считаются присоединен-

ными только к ее узлам, то континуальная задача приводится к дискретной как система уравнений равновесия по степеням свободы узлов (их направлениям).

В силу особенностей конструктивного решения на некоторые из узловых перемещений могут быть наложены ограничения (*связи*). Говорят, что на систему наложена *моносвязь*, если она запрещает одну из компонент узлового перемещения (например, перемещением по оси ОХ). Если же в силу наложенной на систему связи равна нулю некоторая линейная комбинация компонент узловых перемещений, то говорят о *полисвязи*. Моносвязь и полисвязь, наложенные на компоненты узловых перемещений одного и того же узла, являются внешними. Полисвязи, где фигурируют компоненты перемещений различных узлов, являются внутренними и чаще всего обусловлены наличием в системе (в ее расчетной схеме) абсолютно жестких элементов. Учет внешних связей достаточно просто можно провести на этапе формирования разрешающих уравнений метода: исключением из числа основных неизвестных для моносвязей и введением специальных систем координат узлов для полисвязей. Внутренние полисвязи, как правило, реализуются специальными конечными элементами.

Опасностью при создании расчетной схемы является пропуск связи – отсутствие запрета на перемещение, приводящее к появлению *геометрической изменяемости*.

Каждый конечный элемент можно рассматривать как отдельную подконструкцию. Возможен вариант, когда узлы конечного элемента и узлы расчетной схемы не совпадают. Узел элемента, например, геометрически может располагаться в некотором удалении от узла схемы, т.е. имеет место эксцентриситет примыкания. В этом случае считается, что узел (концевое сечение) элемента соединен с узлом схемы бесконечно жесткой вставкой, и эта вставка является частью конечного элемента. Естественно, что при наличии упомянутой бесконечно жесткой вставки перемещение концевого сечения элемента не равно перемещению узла схемы, а их углы поворота совпадают.

Несовпадение перемещений (поворотов) узла и связанного с узлом схемы концевого сечения элемента может иметь место и в силу особенностей конструкции примыкания. Если считать, что элементы могут быть прикреплены своими узлами к центрам узлов схемы шестью связями, каждая из которых препятствует одному из шести возможных взаимных перемещений, то можно представить себе и отсутствие любой из этих шести связей. Отсутствие одной связи между угловыми перемещениями соответствует *цилиндрическому шарниру*, отсутствие трех связей для всех взаимных угловых перемещений – *сферическому шарниру*, отсутствие связи между линейными смещениями – «*ползуну*» и т.п. Для краткости в дальнейшем все такие случаи называются «*шарнирами*», хотя тут имеется и определенная неточность.

Следует заметить, что возможность введения неполного совпадения перемещений узла элемента и узла схемы, равно как и возможность эксцен-

тричного примыкания, предусмотрена только для некоторых типов элементов.

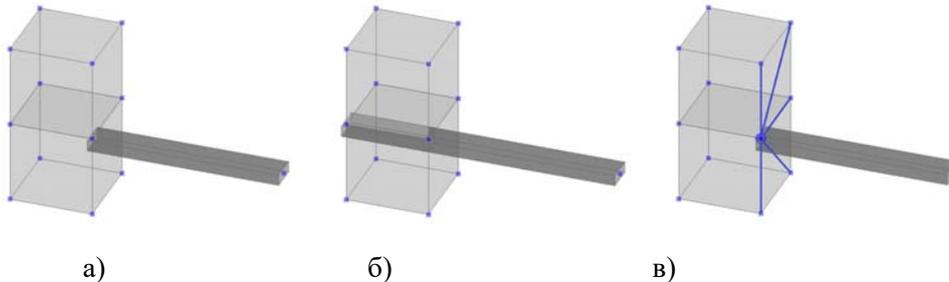


Рис. 1.3-2. Варианты примыкания элементов

Особое внимание необходимо обратить на стыковку разнотипных элементов. На рис. 1.3-2 приведены различные варианты стыковки пространственного стержня и объемных элементов:

- шарнирное (рис. 1.3-2а), т.к. многие элементы для решения пространственной задачи теории упругости не учитывают углы поворота;
- заделка (рис. 1.3-2б), когда стержень заделан на соответствующую длину в тело;
- применение жесткого тела, изображенного в виде паука (рис. 1.3-2в).

Совокупность нагрузок и воздействий, одновременно приложенных к системе и рассматриваемых совместно, называется ее *загрузением*. Взаимодействие системы с окружающей средой представляется обычно в виде нагрузок или воздействий, приложенных к узлам системы (*узловых нагрузок*) или к внутренним точкам ее конечных элементов (*местных нагрузок*). Местные нагрузки могут быть силами и моментами, сосредоточенными или распределенными по линиям, площадям и объемам. Воздействия могут быть не только *силовыми*, но и *кинематическими*: в форме температурных воздействий на элементы или заданными смещениями в узлах. Если воздействия меняются во времени, то вызванные ими ускорения системы приводят к появлению инерционных сил. В тех случаях, когда силами инерции пренебречь нельзя, говорят о *динамическом* характере воздействия, но всегда следует помнить, что отнесение воздействий к виду статических или динамических связано не только с их собственными свойствами, но и с *инерционными характеристиками системы*. Очевидно, что любая нагрузка моделируется эквивалентной статической узловой. Возможность задания разнообразных местных нагрузок на конечные элементы значительно облегчает создание расчетной схемы.

Все узлы и элементы расчетной схемы нумеруются. Номера, присвоенные им, следует трактовать как имена, которые позволяют делать необходимые ссылки. Например, можно указать узел, где приложена некоторая нагрузка, перечислить узлы, к которым присоединен вполне конкретный элемент, перечислить элементы для задания местной нагрузки и т.п. Выдача результатов

расчета также производится по номерам узлов (перемещения, реакции) или элементов (внутренние усилия). Вычислительный комплекс нумерует сам все степени свободы расчетной схемы таким образом, чтобы оптимизировать число операций при решении получаемой системы уравнений.

Существующую расчетную схему можно уточнить, раздробив включенные в нее конечные элементы на элементы меньшего размера. Однако чрезмерно мелкое дробление приводит к увеличению времени расчета и связано с запросом на использование больших ресурсов памяти компьютера для хранения и обработки данных. Могут при этом проявляться и эффекты неустойчивости самого процесса расчета. Слишком грубое дробление может привести к потере точности результатов, особенно в тех случаях, когда рассчитываются пластинчатые или оболочечные конструкции. Общих рекомендаций по выбору оптимального уровня дробления системы на конечные элементы не существует.

В теории метода конечных элементов большое внимание уделяется оценке точности получаемого приближенного решения при неограниченном сгущении сетки конечных элементов.

*«Оценки скорости сходимости»* имеют асимптотический характер и являются слишком абстрактными для конструктивного использования в конкретном случае расчета (в том числе и в данной работе). Поэтому приходится полагаться, главным образом, на опыт и результаты некоторых контрольных расчетов, выполняемых для одной и той же конструкции при различных системах разбиения на конечные элементы. Могут быть также рекомендованы приемы последовательной серии расчетов некоторых фрагментов системы с введением на этих фрагментах более детального разбиения на конечные элементы.

## 1.2. Гипотезы

Как сформулировал С.П.Тимошенко в [92] «основная задача теории упругости заключается в том, чтобы по заданным действующим на твердое тело внешним силам находить те изменения формы, которое тело претерпевает, и те внутренние силы упругости, которые при этих изменениях формы возникают между частями тела».

При рассмотрении «гипотетически идеального упругого тела» предполагается, что:

- среда заполняет тело сплошным образом и не меняет свою непрерывность в процессе деформирования при приложении нагрузок;
- выделенный из тела элемент любой малости имеет те же свойства, что и тело в целом. Атомистическая структура вещества не учитывается, а механические свойства тела в любой его точке считаются одинаковыми;
- начальные деформации и напряжения в теле равны нулю;

- деформации и перемещения малы по сравнению с размерами тела и являются непрерывными функциями координат. Перемещения тела как твердого, при котором не изменяются его форма и размер, происходит при отсутствии деформаций;
- перемещения точек конструкции в упругой стадии работы материала прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения;
- линейная зависимость между деформациями и напряжениями (закон Гука).

Из гипотез следует:

- идеальная упругость, когда происходит полное исчезновение деформаций после снятия нагрузки. Т.е. тело способно восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших его деформацию;
- напряженно деформированное состояние тела не зависит от порядка приложения нагрузок;
- *аддитивность действия нагрузок* – напряженно-деформированное состояние тела от суммы нагрузок равно сумме напряжений и деформаций от составляющих нагрузок. Данное свойство называют еще *принципом суперпозиции*;
- при заданных внешних нагрузках и краевых условиях тело находится в равновесии – существует единственная равновесная система напряжений и перемещений;
- справедлив принцип Сен-Венана: уравновешенная система сил, приложенная к некоторой части твердого тела, вызывает в нём напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от этой части и на расстояниях, существенно превышающих наибольший линейный размер области приложения нагрузок, напряжения и деформации оказываются пренебрежимо малыми. Это позволяет силы, приложенные на небольшом участке, заменить действующей на том же участке статически эквивалентной системой сил, что приводит лишь к изменению напряженно-деформированного состояния в малой окрестности данного участка.

Нелинейность – то это может быть:

- *геометрическая нелинейность* при больших деформациях [61] при сохранении закона Гука;
- *физическая нелинейность*, которую изучают *теория пластичности* о свойствах тел сохранять деформированную форму после снятия нагрузки и *теория ползучести* об изменениях под действием нагрузки с течением времени [30, 51, 81];
- *конструктивная нелинейность* — изменение расчетной схемы сооружения в процессе его нагружения, связанное с взаимными смещениями (например, раскрытием швов и трещин, проскальзыванием) отдельных частей сооружения и основания, свойством отдельных элементов конструк-

ции включаться в работу в зависимости от различных факторов напряженно-деформированного состояния;

- *генетическая нелинейность* при изменении расчетной схемы сооружения в процессе его загрузки или монтажа: добавление/исключение элементов конструкции, изменение жесткостных характеристик у части сооружения и т.п.

При этом перемещения точек конструкции уже не прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения, и напряженно деформированное состояние тела может зависеть от порядка приложения нагрузок: нет *суперпозиции* действия нагрузок.

Материал считается в зависимости от своих физико-механических свойств [50]:

- *изотропным*, когда они одинаковы по всем направлениям;
- *трансверсально-изотропным*, когда они одинаковы по двум направлениям (плоскость изотропии);
- *ортотропным*, когда они переменны по разным направлениям, а главные направления упругости совпадают с направлениями рассматриваемой системы координат;
- *анизотропным*, когда свойства материала зависят от направления, в котором они определяются, а главные направления упругости не совпадают с направлениями рассматриваемой системы координат.

Дерево, пластики, композиты и некоторые другие материалы являются ортотропными и даже анизотропными.

Часто рассматривается также *конструктивная ортотропия/анизотропия*, когда определяют обобщенные жесткостные характеристики конструктивных элементов. Например, плит, подкрепленных ребрами.

Из-за сложности решения *трехмерной (пространственной) задачи теории упругости* рассматривают более простые задачи с пониженной размерностью пространства.

### **Стержень(брус)**

Стержнем (брусом) называется тело удлиненной формы, два размера которого значительно меньше третьего. Стержень может сопротивляться только усилиям сжатия-растяжения, или работать преимущественно на изгиб (т.н. балка), или воспринимать и то и другое.

Стержни могут иметь прямую и кривую оси, постоянное и переменное поперечное сечение, сплошное (массивное) или тонкостенное с открытым или закрытым контуром сечение, и другие особенности, которые учитываются при построении разрешающих уравнений.

### **Плоская задача теории упругости**

Объединяет два типа тел, описываемых одинаковыми системами математических уравнений на плоскости:

- плоская деформация. Реализуется в призматическом или цилиндрическом теле, у которых один из размеров существенно превышает два других, а возникающие перемещения не зависят от направления этого размера;
- плоское напряженное состояние. Характеризуется отсутствием нормальных напряжений на площадках, параллельных одной из координатных плоскостей. Представляет собой тонкую пластинку, нагруженную только в своей плоскости.

### Пластины

Упругие тела, ограниченные двумя плоскостями или близкими к ним поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими его размерами. В общем случае это расстояние может быть переменным.

В дальнейшем будем рассматривать только *пластины постоянной толщины*, когда тело ограничено параллельными плоскостями (основаниями, гранями). Расстояние между данными плоскостями  $h$  называют высотой или толщиной пластины, а равноудаленную от оснований плоскость, – *срединной плоскостью*. Контур пластины представляет собой линию пересечения срединной поверхности с ее боковыми гранями.

На пластину могут действовать как внешние нагрузки, так и объемные силы. Все нагрузки считаются приложенными к точкам срединной поверхности. Пластина, нагруженная перпендикулярно её срединной поверхности и работающая преимущественно на изгиб из собственной плоскости, называется *плитой*. Если нагрузки действуют в плоскости пластины, то она находится в *плоском напряженном состоянии* или *плоской деформации*.

В зависимости от отношения толщины  $h$  к минимальному размеру  $a$  в плане пластины квалифицируют как:

- $h \leq \frac{a}{80}$  – мембраны. Обладают незначительной изгибной жесткостью и работают в основном на растяжение;
- $\frac{a}{80} \leq h \leq \frac{a}{10}$  – тонкие пластины;
- $\frac{a}{10} \leq h \leq \frac{a}{5}$  – пластины средней толщины;
- $\frac{a}{5} \leq h$  – толстые пластины.

В некоторых работах к толстым относятся пластины, у которых  $h \geq a/3$ .

В зависимости от величины прогиба под нагрузкой, рассматривают пластины:

- *жесткие*, когда прогиб не превосходит  $0.2h$  и можно без заметной погрешности считать срединный слой свободным от напряжений;
- *гибкие*, когда прогибы не малы (обычно от  $0.2h$  до  $5h$ ) по сравнению с толщиной и при расчете на действие поперечной нагрузки наряду с изги-

бающими и крутящими моментами необходимо учитывать нормальные усилия;

- *абсолютно гибкие (мембраны)*, когда преобладающими являются напряжения в срединной поверхности, и напряжениями собственно изгиба можно пренебречь.

Практически для всех типов пластин их расчет можно значительно упростить за счет введения дополнительных гипотез.

### **Оболочки**

Упругие тела, ограниченные двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими его размерами. В общем случае это расстояние может быть переменным. Уравнения теории оболочек выводятся для ее *срединной поверхности*, которая равноудалена от наружной и внутренней поверхностей оболочки.

### **Осесимметричные тела**

Если рассматривается тело вращения, у которого краевые условия и приложенные к нему нагрузки тоже симметричны относительно оси вращения этого тела, то очевидно, что трехмерную задачу теории упругости можно свести как минимум к двумерной.

### **Упругое основание**

При расчете сооружения во многих случаях необходимо учитывать деформируемость упругого основания, на которое оно опирается. Как правило, вместо трехмерного моделирования всех слоев грунтов под конструкцией, в соответствующих расчётах используют различные теоретические положения, описывающие свойства грунтов и сводящие задачу к двумерной, когда вводятся коэффициенты жёсткости основания (коэффициенты постели) по теориям Пастернака, Винклера и др.

## **1.3. Основные задачи**

### **Упругое тело**

Рассмотрим находящееся в  $n$ -мерном пространстве  $\mathcal{R}^n$  упругое тело  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ :

$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_s(\mathbf{x})\}^T \in \mathcal{R}^s$  – вектор-функция перемещений точек

тела в  $s$ -мерном пространстве;

$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \in \Omega \subset \mathcal{R}^n$  – координаты точки,

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_s(\mathbf{x})\}^T \in \mathcal{R}^s$  – вектор объемных сил.

Напряженно-деформированное состояние тела  $\Omega$  описывается векторами напряжений<sup>1</sup> и деформаций [49, 54, 60, 92] размерности  $k$ :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \{ \sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \dots, \sigma_k(\mathbf{x}) \}^T \in \mathcal{R}^k,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \{ \varepsilon_1(\mathbf{x}), \varepsilon_2(\mathbf{x}), \dots, \varepsilon_k(\mathbf{x}) \}^T \in \mathcal{R}^k,$$

которые для линейной задачи теории упругости связаны соотношениями:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x})) - \text{физические уравнения}; \quad (1.3.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^k - \text{геометрические уравнения}; \quad (1.3.2)$$

где:  $\mathbf{C}$  – матрица упругости порядка  $k$ , зависящая только от жесткостных характеристик материала конструкции. Она симметрична и положительно определена;

$\mathbf{A}$  – линейный матричный дифференциальный оператор, в котором порядок дифференцирования не выше  $m$ , и который называют также *оператором геометрии*<sup>2</sup>;

$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x})$  – деформации от температурных воздействий, зависящие от коэффициентов температурного расширения, температуры в пространственных и плосконапряженных телах, разности температур на поверхностях для оболочек<sup>3</sup>.

Тело рассматривается в равновесном состоянии. Уравнения равновесия в точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.3.3)$$

где  $\mathbf{B}$  – дифференциальный оператор, связывающий напряжения и внешние воздействия, который называют также *оператором равновесия*. Если все элементы оператора  $\mathbf{A}$  имеют порядок дифференцирования  $m$ , то

$$\mathbf{B} = (-1)^m \mathbf{A}^T \quad (1.3.4)$$

На части границы  $\Gamma_u \subseteq \Gamma$  ( $\Gamma_u \neq \emptyset$ ) рассматриваются *кинематические (главные)*, а на части  $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$  *статические (естественные)* краевые условия<sup>4</sup>:

$$\mathbf{A}_u \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{u}_\Gamma, \quad \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^l, \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{A}_\sigma \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_\sigma} = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \quad \boldsymbol{\sigma}_\Gamma(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^l \quad (1.3.6)$$

где:

<sup>1</sup> Это могут быть как напряжения трехмерной задачи теории упругости, так и усилия в стержнях, моменты в плитах и оболочках, отпор грунта ....

<sup>2</sup> Если в  $\mathbf{A}$  входят также члены с порядком дифференцирования ниже  $m$ , то это может быть суперпозиция разных задач. Например, изгиб и упругое основание.

<sup>3</sup> Это, как правило, изменение температуры, соответствующей замыканию конструкции или ее части в законченную систему в теплое или холодное время года.

<sup>4</sup> *Смешанные граничные условия*, когда усилия связаны с перемещениями, рассматриваются, например, в контактных задачах.

- $\mathbf{A}_\sigma$  и  $\mathbf{A}_u$  – матричные дифференциальные операторы краевых условий степени не выше  $m-1$ ;
- $\mathbf{u}_\Gamma$  и  $\boldsymbol{\sigma}_\Gamma$  – векторы с соответствующими друг другу компонентами, размерность которых  $l$  зависит от числа рассматриваемых деформаций на границе  $\Omega^1$ .

В точке  $\Gamma$  может быть задано несколько кинематических (перемещения, углы поворота) или статических (поверхностные силы и моменты) краевых условий. Причем, если задано, например, кинематическое краевое условие, то не может быть задано соответствующее ему статическое краевое условие и наоборот. Если  $m > 1$  или  $k > 2$ , то на одном и том же участке границы могут быть заданы и кинематические и статические краевые условия и тогда  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma \neq \emptyset$ . Например, на контуре пластины могут быть заданы одновременно и перемещения и моменты или углы поворота и перерезывающие силы.

Объединяя дифференциальные уравнения условий равновесия (1.3.3) с краевыми условиями (1.3.5) и (1.3.6), задачу определения напряженно-деформированного состояния тела можно записать в операторном виде [11, 56, 75, 78, 83]:

$$\mathcal{A}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1.3.7)$$

где  $\mathcal{A}$  – самосопряженный оператор краевой задачи.

Будем рассматривать только геометрически неизменяемые системы, для которых оператор  $\mathcal{A}$  положительно определен.

#### **Динамическая задача**

Если нагрузки на систему меняются во времени  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , то, соответственно, меняются во времени перемещения, деформации и усилия:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  и  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ . Обозначим точками сверху дифференцирование по времени, а  $\mathcal{M}$  – оператор, описывающий массу системы. Если возникающие при изменении нагрузок во времени инерционные силы  $\mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}}$  не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с нагрузками на систему и силами упругости, то их следует учесть при формировании условий равновесия, которые примут вид без учета внутреннего трения [21, 41, 87]:

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathcal{A}u = f(t), \quad (1.3.8)$$

где  $\mathcal{A}$  – оператор краевой задачи (1.3.7).

Задача определения характеристик собственных колебаний системы (модальный анализ) заключается в нахождении условий, при которых ненагруженная система совершает гармонические колебания по закону

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.3.9)$$

<sup>1</sup> Значение  $l$  зависит от порядка операций дифференцирования в операторе геометрии  $\mathbf{A}$ , размерностей пространств  $\mathcal{R}^n$  и  $\mathcal{R}^s$ .

где вектор  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$  характеризует форму собственных колебаний (соотношения между смещениями узлов) и не зависит от времени;  $\omega$  – их частоту;  $\varphi$  – начальную фазу (смещение).

Подставляя представление (1.3.8) в (1.3.9) и учитывая, что начальная нагрузка  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0)$ , получаем уравнение для собственных колебаний

$$(\mathcal{A} - \omega^2 \mathcal{M})\boldsymbol{\psi} = 0. \quad (1.3.10)$$

Так как оператор  $\mathcal{A}$  положительно определен, то нетривиальное решение данного уравнения существует лишь при дискретных значениях величин  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), называемых собственными частотами. Если рассматривается задача с конечным числом степеней свободы, то  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{M}$  имеют вид матриц и можно сказать, что эти значения обращают в нуль детерминант матрицы  $\mathcal{A} - \omega^2 \mathcal{M}$ . Очевидно, что соответствующие им формы собственных колебаний  $\boldsymbol{\psi}_i$  вычисляются лишь с точностью до произвольного множителя. Следует также отметить свойство ортогональности собственных векторов как в пространстве операторов  $\mathcal{A}$ , так и  $\mathcal{M}$ :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}))^T \mathcal{D}\mathcal{A}\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})^T \mathcal{M}\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad i \neq j. \quad (1.3.11)$$

Представим решение динамической задачи (1.3.10) в виде разложения по формам колебаний

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i y_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}). \quad (1.3.12)$$

В силу свойств ортогональности (1.3.11) получаем систему независимых дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат  $y_i(t)$ . Эти уравнения с учетом дополнительного члена, пропорционального скорости (с его помощью учитывается сопротивление движению), имеют вид:

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = f_i(t) / M_i, \quad (1.3.13)$$

где  $f_i(t) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma}^T \mathcal{A}_i \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}) d\Gamma$  – обобщенные силы;

$M_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_i^T(\mathbf{x}) \mathcal{M} \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}) d\Omega$  – обобщенные массы;

$\xi_i$  – параметр затухания.

Начальные условия для уравнения (1.3.13) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_i(0) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_i^T(\mathbf{x}) \mathcal{M} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) d\Omega, \\ \dot{y}_i(0) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_i^T(\mathbf{x}) \mathcal{M} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Решение задачи (1.3.13), (1.3.14) имеет вид:

$$y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left( \frac{y_i(0) \xi_i \omega_i + \dot{y}_i(0)}{\bar{\omega}_i} \sin(\bar{\omega}_i t) + y_i(0) \cos(\bar{\omega}_i t) \right) + \frac{1}{\bar{\omega}_i M_i} \int_0^t f_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\bar{\omega}_i (t-\tau)) d\tau, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (1.3.15)$$

в котором первое слагаемое учитывает начальные условия, а второе – носит название интеграла Дюамеля. Входящая в данное выражение частота демпфированных колебаний  $\bar{\omega}_i$  мало отличается от  $\omega_i$  при обычных значениях  $\xi_i$ .

### Геометрическая нелинейность

Уравнения классической линейной теории упругости получены при предположении, что:

- удлинения и сдвиги значительно меньше единицы;
- можно пренебречь квадратами углов поворота по сравнению с удлинениями и сдвигами;
- напряжения и деформации связаны законом Гука (1.3.1).

Геометрически нелинейная работа упругой системы связана уже с необходимостью учитывать большие изменения геометрии системы при ее деформации под нагрузкой [61]. Могут рассматриваться геометрические искажения различной величины, но в большинстве расчетов рассматривается учет только так называемого «приближения Кармана», когда предполагается, что квадраты углов поворота элементов рассматриваемой расчетной схемы являются величинами того же порядка малости, что и относительные удлинения в материале, которые в свою очередь считаются малыми по сравнению с единицей.

Будем рассматривать равновесие системы, у которой деформации уже геометрически нелинейно зависят от перемещений, но выполнены физические уравнения (1.3.1).

Тогда вместо (1.3.7) получаем краевую задачу

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}_G) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.3.16)$$

где  $\mathcal{A}$  – оператор линейной задачи, а  $\mathcal{A}_G$  – нелинейная составляющая (геометрическая жесткость).

### Устойчивость равновесия

Будем рассматривать равновесие системы, потенциальная энергия которой геометрически нелинейно зависит от перемещений. Если перемещения относительно невелики, но все же требуют геометрически нелинейного анализа, то необходимо решать задачу (1.3.16). При этом при каких-то значениях нагрузки уже нельзя гарантировать, что оператор задачи  $\mathcal{A} + \mathcal{A}_G$  будет положительно определенным. Поиск, при каких значениях нагрузки система теряет устойчивость в нелинейной постановке, является достаточно тяжелой и трудозатратной работой. Поэтому вводятся различные упрощения постановки задачи [14, 67, 94].

Допустим, что  $\sigma_*$ ,  $\epsilon_*$ ,  $u_*$  – решение линейной задачи (1.3.7) при значении нагрузки  $f$ ,  $\sigma_r$ ,  $u_r$ ,  $\epsilon_t$ . Будем менять нагрузку с коэффициентом пропорциональности  $\lambda$  и считать, что пропорциональны  $\lambda$ :

- изменение деформаций;
- изменение усилий (напряжений) при сохранении физических соотношений (1.3.1) закона Гука;
- перемещения (или их производные).

Разложим  $\mathcal{A}_G$  в ряд таким образом, чтобы оставить только члены, линейные относительно  $\lambda$  и квадратичные относительно перемещений. Получим, что необходимо определить такие значения  $\lambda$ , чтобы имела нетривиальное решение задача

$$(\mathcal{A} + \lambda \tilde{\mathcal{A}}_G) \psi = 0, \quad (1.3.17)$$

где  $\tilde{\mathcal{A}}_G$  – линеаризованный оператор геометрической жесткости, зависящий от  $\sigma_*$ ,  $\epsilon_*$ ,  $u_*$  и не зависящий от  $\lambda$ .

Наименьшее собственное значение этого уравнения  $\lambda_1$  определяет критическую нагрузку как  $\lambda_1 f$ ,  $\lambda_1 \sigma_r$ ,  $\lambda_1 u_r$ ,  $\lambda_1 \epsilon_t$ , а сама величина  $\lambda_1$  называется **коэффициентом запаса устойчивости**,  $\psi_1$  является формой потери устойчивости с точностью до константы, а  $\lambda_1 \sigma_*$ ,  $\lambda_1 \epsilon_*$ ,  $\lambda_1 u_*$  определяют поле напряженно-деформированного состояния в системе при потере устойчивости.

Как правило, поиск решения уравнения (1.3.17) производится методом деления пополам интервала возможных значений  $\lambda$ , когда определяется число перемен знаков в линеаризованной системе уравнений. Следовательно, условие линеаризации уравнений (1.3.17) по  $\lambda$  не является обязательным, ибо не приводит к упрощению вычислительного процесса, а отказ от него позволяет более точно определить условия потери устойчивости. При этом можно отказаться и от условия пропорциональности  $\lambda$  перемещений или их производных, которые входят в уравнения (1.3.17) наравне с деформациями и напряжениями (усилиями).

Можно выполнить поиск нескольких наименьших собственных значений уравнения (1.3.17). Например, в случае их кратности.

По сути, предполагается пропорциональность распределения внутренних усилий в системе при увеличении интенсивности нагрузки с коэффициентом  $\lambda$ . Это свойство не всегда выполняется, в особенности для нелинейно деформирующихся систем.

Можно рассмотреть также устойчивость при увеличении интенсивности только временной нагрузки  $f$ ,  $\sigma$  и неизменном значении постоянной нагрузки  $f_0$ ,  $\sigma_{r,0}$ ,  $u_{r,0}$ ,  $\epsilon_{t,0}$ :

$$(\mathcal{A} + \lambda \tilde{\mathcal{A}}_G)(u_0 + \lambda \delta u) = f_0(x) + \lambda \delta f(x), \quad (1.3.18)$$

$u_0$  – соответствующее постоянной нагрузке решение, которое может быть результатом и нелинейного расчета.

## 1.4. Вариационные задачи

Вариационный подход в механике твердого деформируемого тела используется как универсальное средство описания физических закономерностей при простоте алгоритмизации и, соответственно, как источник построения и обоснования численных методов.

Существуют разные вариационные постановки задач теории упругости: Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера и другие [11, 56, 75, 78, 83]. Наибольшее применение из них получил функционал Лагранжа, минимизация которого лежит в основе метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений строительной механики.

### Пространства функций

Введем скалярные произведения:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega, \quad [\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\Omega} = \int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{R}^s, \quad (1.4.1)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{R}^l. \quad (1.4.2)$$

Считаем, что интегралы в (1.4.1) всегда существуют, и функция обобщенных перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , как минимум, принадлежит обобщенному Гильбертову пространству функций  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{R}^s. \quad (1.4.3)$$

Рассмотрим также энергетическое пространство [56]  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\Omega)$  краевой задачи (1.3.7) с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}} = [\mathbf{u}, \mathbf{u}]_{\Omega}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{R}^s. \quad (1.4.4)$$

Положительная определенность оператора краевой задачи (1.3.7)  $\mathcal{A}$  означает, что

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A}} \geq C \sum_{i=1}^s \|u_i\|_{m_i, \Omega} \geq C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}, \quad (1.4.5)$$

где:  $\|\cdot\|_{m_i, \Omega}$  – норма в пространстве Соболева  $W_2^{m_i}(\Omega)$  [53, 85];

$m_i$  – максимальный порядок дифференцирования компоненты  $i$  вектора перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в операторе  $\mathcal{A}$

$C, C_1$  – константы, не зависящие от  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\Omega)$ .

Если  $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\Omega)$ , то справедливы следующие интегральные тождества, связывающие операторы  $\mathbf{A}, \mathbf{A}_{\sigma}, \mathbf{A}_u$ , и  $\mathbf{B}$  согласно формуле Остроградского-Гаусса:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\Omega} = [\mathbf{v}, \mathbf{u}]_{\Omega} = (\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v})_{\Omega} = (\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + \langle \mathbf{A}_{\sigma}\mathbf{u}, \mathbf{A}_u\mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \quad (1.4.6)$$

Введем следующие подпространства пространства  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ :

- $\mathcal{L}_u(\Omega)$  – кинематически допустимых функций  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , которые удовлетворяют физическим (1.3.1), геометрическим уравнениям (1.3.2) и кинематическим краевым условиям (1.3.5)

$$\mathcal{L}_u(\Omega) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_u, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{u}|_{x \in \Gamma_u} = \mathbf{u}_\Gamma \right\}; \quad (1.4.7)$$

- $\mathcal{L}_{u,0}(\Omega)$  – геометрически возможных вариаций вектора перемещений  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , которые удовлетворяют физическим (1.3.1), геометрическим уравнениям (1.3.2) и однородным кинематическим краевым условиям (1.3.5)

$$\mathcal{L}_{u,0}(\Omega) = \left\{ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_{u,0}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A}_\varepsilon \delta\mathbf{u}|_{x \in \Gamma_u} = 0 \right\}. \quad (1.4.8)$$

Если  $\mathbf{u}_\Gamma \equiv 0$  на  $\Gamma_u$ , то  $\mathcal{L}_u(\Omega) = \mathcal{L}_{u,0}(\Omega)$ ;

- $\mathcal{L}_\sigma(\Omega)$  – статически допустимых напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , которые удовлетворяют уравнениям равновесия (1.3.3) и статическим краевым условиям (1.3.6)

$$\mathcal{L}_\sigma(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_\sigma, \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \mathbf{A}_\sigma \boldsymbol{\sigma}|_{x \in \Gamma_\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\Gamma \right\}; \quad (1.4.9)$$

- $\mathcal{L}_{\sigma,0}(\Omega)$  – статически возможных вариаций вектора напряжений  $\delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , которые удовлетворяют однородным уравнениям равновесия (1.3.3) и однородным статическим краевым условиям (1.3.6)

$$\mathcal{L}_{\sigma,0}(\Omega) = \left\{ \delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_{\sigma,0}, \mathbf{B}\delta\boldsymbol{\sigma} = 0, \mathbf{A}_\sigma \delta\boldsymbol{\sigma}|_{x \in \Gamma_\sigma} = 0 \right\} \quad (1.4.10)$$

Если  $\boldsymbol{\sigma}_\Gamma \equiv 0$  на  $\Gamma_\sigma$  и  $\mathbf{f} \equiv 0$ , то  $\mathcal{L}_\sigma(\Omega) = \mathcal{L}_{\sigma,0}(\Omega)$ .

При ненулевых краевых условиях пространства функций  $\mathcal{L}_u$  и  $\mathcal{L}_\sigma$  можно сделать *линеалами*, переопределив в них операции сложения и умножения на константу так, чтобы сохранялись заданные значения на границе области.

### Функционал Лагранжа

Запишем функционал Лагранжа для полной потенциальной энергии тела, включающий соответственно работу внутренних сил, внешних объемных и поверхностных сил :

$$A(\mathbf{u}) = \mathcal{E}(\mathbf{u}) - \Pi_\sigma(\mathbf{u}), \quad (1.4.11)$$

где:  $\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_t), \mathbf{A}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_t)_\Omega$  – работа внутренних сил; (1.4.12)

$\Pi_\sigma(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega + \langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_\sigma \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_\sigma}$  – потенциал статических воздействий;

$(\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega$  – работа внешних объемных сил;

$\langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_\sigma \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_\sigma}$  – работа внешних поверхностных сил.

Функционал (1.4.11) определен на пространстве кинематически допустимых функций  $\mathcal{L}_u$  если выполнены физические (1.3.1), геометрические уравнения (1.3.2) и кинематические краевые условия (1.3.5).

Положим в (1.4.11)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}_* \in \mathcal{L}_u$  – решение краевой задачи (1.3.7), а  $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{u,0}$  – пространству геометрически возможных вариаций вектора перемещений.

С учетом интегрального тождества (1.4.6) получаем:

$$\Lambda(\mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) = \mathcal{E}(\mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) - \Pi_\sigma(\mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) = \Lambda(\mathbf{u}_*) + \frac{1}{2}[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}]_\Omega \geq \Lambda(\mathbf{u}_*) \quad (1.4.13)$$

т.к.  $(\mathbf{A}\mathbf{u}_* - \boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{D}\mathbf{A}\delta\mathbf{u}) - \Pi_\sigma(\delta\mathbf{u}) = (\mathbf{B}\mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{u}_* - \boldsymbol{\varepsilon}_t) - \mathbf{f}, \delta\mathbf{u})_\Omega = 0$ .

Из (1.4.13) следует принцип возможных перемещений: если  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_u$  и для любой функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_{u,0}$  выполнено равенство

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_\Omega = (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{A}\mathbf{v})_\Omega + \Pi_\sigma(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{A}\mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega + \langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_v \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_\sigma}, \quad (1.4.14)$$

то функция  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$  является точкой минимума рассматриваемого функционала Лагранжа (1.4.11).

Очевидно, что для функционала Лагранжа кинематические краевые условия (1.3.5) являются *главными*, а статические (1.3.6) – *естественными*, т. к. будут выполнены автоматически в точке его минимума при равенстве их нулю.

#### Функционалы Кастильяно

Если вариационный принцип Лагранжа основан на возможных перемещениях, то функционал Кастильяно использует принцип возможных изменений напряжений:

$$K(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \Pi_u(\boldsymbol{\sigma}), \quad (1.4.15)$$

где  $\Pi_u(\boldsymbol{\sigma}) = \langle \mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{A}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Gamma_u}$  – потенциал кинематических воздействий, работа на заданных смещениях.

Функционал (1.4.15) определен на энергетическом пространстве статически допустимых напряжений  $\mathcal{L}_\sigma$ , когда  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  удовлетворяют уравнениям равновесия (1.3.3) и статическим краевым условиям (1.3.6).

Положим в (1.4.15)  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}$ , где  $\boldsymbol{\sigma}_* \in \mathcal{L}_\sigma$  – решение краевой задачи (1.3.7), а  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  принадлежит пространству  $\mathcal{L}_{\sigma,0}$  статически возможных вариаций вектора напряжений.

Но в силу основного интегрального тождества (1.4.6):

$$K(\boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}) = K(\boldsymbol{\sigma}_*) + \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{-1}\delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_*, \delta\boldsymbol{\sigma}) - \Pi_u(\delta\boldsymbol{\sigma}) = K(\boldsymbol{\sigma}_*) + \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{-1}\delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\sigma}),$$

т.к.  $\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_* = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{u}_*$ , где  $\mathbf{u}_*$  – решение краевой задачи (1.3.7).

Следовательно, на решении краевой задачи (1.3.7) функционал Кастильяно принимает минимальное значение.

Для функционала Кастильяно кинематические краевые условия (1.3.5) являются *естественными*, т. к. будут выполнены автоматически в точке его минимума, а статические (1.3.6) – *главными*.

### Функционал Рейсснера

В функционале Рейсснера напряженно деформированное состояние тела описывается уже одновременно функциями напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  и перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ :

$$R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})_{\Omega} - (\mathbf{A}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\sigma})_{\Omega} + \Pi_{\sigma}(\mathbf{u}) - \Pi_u(\mathbf{u}) + \langle \mathbf{A}_u \mathbf{u}, \mathbf{A}_{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Gamma_u}. \quad (1.4.16)$$

Рассмотрим в окрестности решения краевой задачи (1.3.7)  $\mathbf{u}_*$  и  $\boldsymbol{\sigma}_*$  их возмущения  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\boldsymbol{\sigma}$ . Используя основную интегральную формулу (1.4.6), получаем первую вариацию функционала (1.4.16):

$$\delta R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = (\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \delta\boldsymbol{\sigma})_{\Omega} - (\delta\mathbf{u}, \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f})_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma} - \mathbf{A}_{\sigma}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_u \delta\mathbf{u} \rangle_{\Gamma_{\sigma}} + \langle \mathbf{A}_{\sigma} \delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_u \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_u}.$$

Но  $\mathbf{u}_*$  и  $\boldsymbol{\sigma}_*$  удовлетворяют уравнениям (1.3.1), (1.3.2), (1.3.5) и (1.3.6), и тогда  $\delta R(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*) \equiv 0$  для любых вариаций  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\boldsymbol{\sigma}$ . Следовательно, решение краевой задачи (1.3.7) является *стационарной* точкой функционала (1.4.16). При этом оно не обеспечивает экстремум функционала, а является *седловой* точкой, потому что:

$$R(\boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) = R(\boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{u}_*) \leq R(\boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_*) = R(\boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{u}_*) + \frac{1}{2}(\mathbf{D}^{-1}\delta\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\sigma})_{\Omega}.$$

*И кинематические и статические краевые условия являются при решении вариационной задачи Рейсснера естественными.*

### Смешанный функционал

Широкому распространению численных методов на основе функционала Рейсснера мешает:

- отсутствие экстремума в точке стационарности;
- функционал не определен положительно, и поэтому получаемые системы уравнений тоже не определены положительно. А это приводит к усложнению алгоритмов, особенно при решении задач динамики и устойчивости.

Смешанный функционал записывается в следующем виде:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \kappa \mathcal{E}(\mathbf{u}) + \frac{1-\kappa}{2}(\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})_{\Omega} - (1-\kappa)(\mathbf{A}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\sigma})_{\Omega} - (2\kappa-1)\Pi_{\sigma}(\mathbf{u}), \quad (1.4.17)$$

где  $\kappa$  – произвольный числовой параметр.

Данное выражение можно представить в следующем виде как линейную комбинацию функционалов Лагранжа и Рейсснера:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \kappa \Lambda(\mathbf{u}) + (1-\kappa)R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}). \quad (1.4.18)$$

Функционал (1.4.18) определен на функциях  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  из энергетического пространства  $\mathcal{L}_u(\Omega)$ , все элементы которого удовлетворяют кинематическим краевым условиям (1.3.5) и при достаточно гладких  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ .

Положим в (1.4.18)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}$ , и  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}$ , где  $\mathbf{u}_*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_*$  – решение краевой задачи (1.3.7), а  $\delta\mathbf{u}$  принадлежит пространству  $\mathcal{L}_{u,0}$  геометрически возможных вариаций вектора перемещений. Получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) &= \kappa\Lambda(\mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) + (1 - \kappa)R(\boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u}) = \\ &= \Phi(\boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{u}_*) + \frac{1 - \kappa}{2}(\mathbf{D}(\mathbf{A}\delta\mathbf{u} - \mathbf{D}^{-1}\delta\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{A}\delta\mathbf{u} - \mathbf{D}^{-1}\delta\boldsymbol{\sigma})_{\Omega} + \frac{2\kappa - 1}{2}[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}]_{\Omega}. \end{aligned}$$

Т.е. при любых ненулевых  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  при  $0.5 < \kappa < 1$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{u}_*) < \Phi(\boldsymbol{\sigma}_* + \delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_* + \delta\mathbf{u})$$

Следовательно, обобщенное решение краевой задачи (1.3.7) доставляет минимум смешанному функционалу (1.4.18).

Как и для функционала Лагранжа, кинематические краевые условия (1.3.5) являются для данной вариационной задачи *главными*, а статические (1.3.6) *естественными*.

Смешанный функционал в записи (1.4.18) преобразуем к виду [83], удобному для реализации в вычислительных комплексах:

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2\kappa - 1}(\kappa\Lambda(\mathbf{u}) + (1 - \kappa)R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})) = \Lambda(\mathbf{u}) + \tilde{\kappa}(\Lambda(\mathbf{u}) + R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})) = \\ &= \Lambda(\mathbf{u}) + \frac{\tilde{\kappa}}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_t), \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}_t)_{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

где коэффициент  $\tilde{\kappa} = \frac{1 - \kappa}{2\kappa - 1}$ ,  $0 < \tilde{\kappa} < \infty$  можно уже рассматривать как весовой коэффициент, учитывающий погрешность аппроксимации усилий.

При записи функционала (1.4.19) приведение статических нагрузок к узловым полностью совпадает с МКЭ, основанном на функционале Лагранжа.

## Глава 2. Метод конечных элементов

### 2.1. Конечные элементы метода перемещений

В МКЭ упругое тело  $\Omega$ , представляющее собой открытую связную область с бесконечным числом степеней свободы, аппроксимируется дискретной моделью:

$$\Omega_h = \left\{ \bigcup_r \bar{\Omega}_r, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j \right\}, \quad (2.1.1)$$

где  $\Omega_h$  представляется как совокупность открытых областей  $\Omega_r$ , называемых конечными элементами (КЭ)<sup>1</sup>.

Каждый конечный элемент  $\Omega_r$  характеризуется следующими свойствами:

- размерностью используемого пространства (одномерное, двумерное, трехмерное и т.д.);
- геометрической формой, которая чаще всего является одной из простейших геометрических фигур (отрезок прямой, треугольник, прямоугольник, четырехугольник, тетраэдр и т.п.);
- набором узлов, располагаемых, как правило, на линиях (поверхностях) раздела элементов и являющихся общими для граничащих друг с другом элементов;
- набором используемых степеней свободы, отнесенных чаще всего к узлам (что не обязательно) – перемещения, углы поворота и т.п.;
- правилами, определяющими зависимость между перемещениями узлов конечного элемента и узлами системы. Узлы элемента, например, могут быть прикреплены к узлам системы жестко или шарнирно;
- системой аппроксимирующих функций, определенных внутри области  $\Omega_r$  и позволяющих приближенно выразить компоненты перемещений в любой точке элемента через его степени свободы;
- физическим законом, определяющим зависимость между внутренними усилиями и перемещениями;
- классом задач, к которым применим данный тип конечного элемента: пластины плоского напряженного состояния, плиты Кирхгофа-Лява, плиты Рейсснера, стержень Тимошенко для пространственной задачи и т.д.;
- набором допустимых нагрузок и воздействий, которые могут быть приложены непосредственно к конечному элементу, и способом их задания;
- сохранением или не сохранением симметрии при расчете симметричной расчетной схемы;

<sup>1</sup> Условия разбиения на конечные элементы (2.1.1) идеализируют расчетную схему. Например, при расчете пологих оболочек плоскими конечными элементами  $\Omega_{hi} \neq \Omega$  ребра жесткости пластин могут моделироваться стержнями, лежащими на поверхности плоских элементов и т.п.

- зависимостью или независимостью результатов расчета от порядка нумерации узлов элемента в расчетной схеме;
- и последним (по списку, но не по значимости!) – перечнем ограничений и рекомендаций по применению.

В вычислительных комплексах реализованы, как правило, следующие *местные* нагрузки на конечные элементы:

- *сосредоточенные*, которые приложены к точке  $\mathbf{x}$  элемента. Очевидно, что в реальной жизни такие нагрузки не существуют, т.к. это идеализация силовых воздействий, приложенных на малые площадки. В общем случае в точке приложения нагрузки получаем особенность решения;
- *равномерно распределенные*, интенсивность которых постоянна во всех точках элемента. Например, собственный вес;
- *трапециевидные*<sup>1</sup>, интенсивность которых меняется на элементе по заданному закону. Например, давление воды на подпорную стенку;
- *равномерно распределенные по грани элемента*. Это может быть как давление на грань объемного элемента, так и нагрузка по ребру пластины;
- *трапециевидные по грани (стороне) элемента*;
- температурное воздействие как в виде общего нагрева (охлаждения) по отношению к температуре замыкания, вызывающее растяжение (сжатие), так и как разность температур на внешних поверхностях, вызывающая изгиб элемента.

В МКЭ рассматривается сетка узлов расчетной схемы:

$$\omega_h = \{ \mathbf{x}_i, i=1,2,\dots,N \}, \quad N - \text{число всех узлов сетки.} \quad (2.1.2)$$

Конечные элементы взаимодействуют между собой только в точках сетки  $\omega_h$ . Будем считать, что узлы расчетной схемы геометрически совпадают с узлами элементов, соединены с ними жестко и имеют одинаковые имена (номера). Элементы могут иметь и не включенные в сетку дополнительные узлы для реализации жестких вставок, шарнирного соединения и т.п.

Теоретические исследования и опыт эксплуатации вычислительных комплексов показывают, что при разбиении области  $\Omega$  на конечные элементы появление элементов вырождающейся геометрической формы: прямоугольников с большим соотношением длин сторон, вытянутых треугольников с малыми углами (так называемых “*игольчатых*” элементов) приводит к неустойчивости вычислительного процесса из-за сильного увеличения числа обусловленности матрицы системы уравнений [80].

Поэтому одной из важнейших характеристик конечноэлементной модели является максимальный диаметр элементов  $h$  – минимальный диаметр шара, в который можно вложить любой конечный элемент расчетной схемы:

<sup>1</sup> Нагрузка получила название от стержневых конечных элементов, на которых она при графическом отображении имеет вид трапеции.

$$h = \max_r (\sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (2.1.3)$$

с которым часто связывают оценки погрешности метода.

Будем рассматривать только *регулярные* [89] разбиения области  $\Omega$  на конечные элементы, когда предполагается, что при бесконечном уменьшении диаметра, т.е. при  $h \rightarrow 0$ , соблюдаются следующие условия:

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \geq C_1 h, \quad i \neq j, \quad \Omega_\rho \subseteq \Omega_r \subseteq \Omega_h, \quad \rho \geq C_2 h, \quad (2.1.4)$$

где  $\Omega_\rho$  – шар радиуса  $\rho$ , а константы  $C_1$ , и  $C_2$  не зависят от  $h$ .

Условия (2.1.4) означают, что расстояние между любыми узлами элемента сравнимо по величине с  $h$ , в каждый КЭ  $\Omega_r$  расчетной схемы можно вложить шар радиуса  $\rho$ , а вокруг него описать шар радиуса  $h$ .

В общем случае в расчетной схеме могут быть узлы с совпадающими координатами для реализации связей конечной жесткости (специальные элементы), или т. н. "шарнирного" соединения элементов конструкции. Но тогда матрицы жесткости элементов при наличии таких узлов не зависят от расстояния между ними.

**Степени свободы** расчетной схемы МКЭ в форме метода перемещений являются значения компонент функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и некоторых их производных<sup>1</sup> в узлах сетки  $\omega_h$ . Поставим в соответствие каждой степени свободы оператор  $\mathbf{L}_k$ , которому соответствует дифференциальный оператор  $\mathbf{A}_k$ :

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{u} = \mathbf{A}_k \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} = \sum_{j=1}^s \mathbf{A}_{k,j} u_j(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}. \quad (2.1.5)$$

Если степень свободы – перемещение по направлению  $i$ , то  $A_{k,i}=1$  при равенстве нулю остальных компонент.

Операторы  $\mathbf{L}_k$  определены следующим образом:

- при равенстве нулю всех степеней свободы конечный элемент не может превращаться в механизм – быть геометрически изменяемым, если его рассматривать в отдельности от расчетной схемы;
- разные степени свободы не могут иметь один и тот же физический смысл и, следовательно, операторы  $\mathbf{L}_k$  линейно независимы;
- для степени свободы  $\mathbf{q}_k$  все соответствующие ей отличные от нуля дифференциальные операторы  $\mathbf{A}_{k,j}$  имеют один и тот же порядок дифференцирования  $m_k, j=1, \dots, s$ .

Введем следующие обозначения:

( $j$ )  $\in \mathbf{x}_i$  – все степени свободы узла  $\mathbf{x}_i$  сетки  $\omega_h$ ;

( $j$ )  $\in \Omega_r$  – все степени свободы КЭ  $\Omega_r$ , степени свободы всех принадлежащих ему узлов;

<sup>1</sup> Это могут быть значения углов поворота, деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  или напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  для гибридной схемы метода.

$(i) \in \Omega_h$  – все степени свободы расчетной схемы.

Соответственно:

$\mathbf{q}_r = \{q_i\}_{(i) \in \Omega_r}$  – вектор значений степеней свободы КЭ  $\Omega_r$ ;

$\mathbf{q}_h = \{q_i\}_{(i) \in \Omega_h}$  – вектор значений степеней свободы всей расчетной схемы.

Каждой  $i$ -ой степени свободы КЭ соответствует функция, моделирующая перемещения по области элемента при единичном перемещении (прогибе, угле поворота, деформации и т.д.) в направлении данной степени свободы и закреплении (нулевых значениях) остальных степеней свободы элемента. Т. е. на каждом элементе  $\Omega_r$  определена линейно-независимая система функций

$$\{\varphi_i^r(\mathbf{x}), \varphi_i^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^s, \text{supp } \varphi_j^r = \overline{\Omega}_r, (i) \in \Omega_r\}. \quad (2.1.6)$$

Все функции этой системы отличны от нуля и достаточное число раз дифференцируемы на  $\Omega_r$ , только одна степень свободы от каждой из них отлична от нуля и равна единице:

$$\mathbf{L}_r \varphi_j^r = \delta_j^i, (i), (j) \in \Omega_r, \delta_k^i - \text{символ Кронекера.} \quad (2.1.7)$$

Существуют конечные элементы, у которых условие (2.1.7) не выполняется для некоторых специальных или, даже, всех степеней свободы. В этом случае получаем более общий вариант вариационного метода с конечноэлементной реализацией.

Система функций (2.1.6) определяет перемещения (деформации) в любой точке элемента по значениям его степеней свободы:

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega_r} q_i \varphi_i^r(\mathbf{x}), \quad \mathbf{L}_r \mathbf{u}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_r, (i) \in \Omega_r. \quad (2.1.8)$$

Как правило, в методе конечных элементов (МКЭ) аппроксимирующие функции являются полиномиальными или кусочно-полиномиальными (метод подобластей, *SubAreas*, *SA*), дробно-рациональными (так называемые изопараметрические элементы), тригонометрическими, логарифмическими и другими аппроксимациями поля перемещений. Выбор степеней свободы элемента и соответствующих аппроксимирующих функций полностью определяет точность решения метода.

Считаем, что аппроксимирующие функции системы (2.1.6) достаточно гладкие, а их производные удовлетворяют следующим неравенствам<sup>1</sup>:

$$|\mathcal{D}^\alpha \varphi_{i,j}(\mathbf{x})| \leq Ch^{m_i - |\alpha|}, \quad \alpha \in \mathcal{Z}, \quad C = \text{const}, \quad (2.1.9)$$

где  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{Z}$  – попространству векторов с целочисленными компонентами, размерность которого совпадает с размерностью  $\Omega$ ;

<sup>1</sup> Условиям (2.1.9) всегда удовлетворяют полиномиальные аппроксимации. В данной книге не рассматриваются специальные элементы для определения напряженно-деформированного состояния в особых точках.

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!;$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} - \text{полиномом степени } \alpha: \mathbf{x}, \alpha \in \mathcal{R}^n;$$

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} - \text{оператор дифференцирования};$$

$$\mathbf{P}_{i,\alpha}^s(\mathbf{x}) = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \mathbf{x}^\alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-i-1} \right\} - \text{полином степени } \alpha \text{ по направлению } i \text{ в } \mathcal{R}^s.$$

Рассмотрим потенциальную энергию элемента  $\Omega_r$  при введении закона аппроксимации (2.1.6):

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}_r) = \frac{1}{2} \sum_{(i),(j) \in \Omega_r} q_i q_j \left[ \boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_j^r(\mathbf{x}) \right]_{\Omega_r} - \sum_{(i) \in \Omega_r} q_i (\mathbf{D}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_i^r, \boldsymbol{\varepsilon}_t)_{\Omega_r} + \tilde{\mathcal{E}}_t(\Omega_r),$$

или в матричном виде

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}(\mathbf{u}_r) = \mathbf{q}_r^T \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r - \mathbf{f}_{r,t}^T \mathbf{q}_r + \tilde{\mathcal{E}}_t(\Omega_r), \quad (2.1.10)$$

где:

$$\mathbf{K}_r = \left[ K_{ij}^r \right]_{(i),(j) \in \Omega_r} - \text{матрица жесткости (МЖ) конечного элемента,}$$

$$K_{ij}^r = K_{ji}^r = \left[ \boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_j^r(\mathbf{x}) \right]_{\Omega_r} = \int_{\Omega_r} (\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x}))^T \mathbf{D}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_j^r(\mathbf{x}) d\Omega; \quad (2.1.11)$$

$\mathbf{f}_{r,t}$  – приведенные к узловым нагрузки от температурного воздействия:

$$\mathbf{f}_{r,t} = \left\{ f_{i,t}^r \right\}_{(i) \in \Omega_r}, \quad \mathbf{f}_{i,t}^r = (\mathbf{D}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_i^r, \boldsymbol{\varepsilon}_t)_{\Omega_r}. \quad (2.1.12)$$

Коэффициенты  $K_{ij}^r$  имеют физический смысл усилий (реакций), возникающих по направлению свободы  $i$  от единичного перемещения степени свободы  $j$  при равенстве нулю всех остальных степеней свободы элемента. По направлениям всех остальных степеней свободы элемента накладываются связи, в которых возникают реакции. Для того, чтобы их найти, используется принцип возможных перемещений: если система находится в равновесии, то на любых возможных для нее перемещениях работа внешних сил равна работе внутренних сил.

Если не учитывать силы, возникающие при взаимодействии конечных элементов расчетной схемы, то работу  $\Pi_{\sigma,r} = \Pi_\sigma(\mathbf{u}_r)$  внешних статических воздействий на конечном элементе  $\Omega_r$  можно записать в следующем виде

$$\Pi_{\sigma,r} = \sum_{(i) \in \Omega_r} q_i \left( (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_i^r) + \left\langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_u \boldsymbol{\varphi}_i^r \right\rangle_{\Gamma_\sigma \cap \Omega_r} \right) = \sum_{(i) \in \Omega_r} q_i \mathbf{f}_i^r = \mathbf{f}_r^T \mathbf{q}_r, \quad (2.1.13)$$

где  $\mathbf{f}_r$  – приведенные к узловым нагрузки от внешних статических воздействий на элемент:

$$\mathbf{f}_r = \left\{ f_i^r \right\}_{(i) \in \Omega_r}, \quad f_i^r = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_i^r)_{\Omega_r} + \left\langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_u \boldsymbol{\varphi}_i^r \right\rangle_{\Gamma_\sigma \cap \Omega_r} \quad (2.1.14)$$

В МКЭ выбор степеней свободы и, соответственно, построение матрицы жесткости и приведенных узловых внешних воздействий производится, как правило, в местной системе координат элемента, выбранной из соображений удобства соответствующих построений и проведения вычислений. В дальнейшем будем считать, что степени свободы всех узлов расчетной схемы, матрицы жесткости и приведенные узловые нагрузки для всех конечных элементов получены в глобальной системе координат.

Полная потенциальная энергия тела функционала Лагранжа (1.4.11) в МКЭ рассматривается без учета энергии взаимосвязи элементов между собой:

$$A_h = \sum_r (\mathcal{E}_r - \Pi_{\sigma,r}) = \frac{1}{2} \sum_r \mathbf{q}_r^T K_r \mathbf{q}_r - \sum_r (\mathbf{f}_{r,t}^T + \mathbf{f}_r^T) \mathbf{q}_r + \sum_r \tilde{\mathcal{E}}_t(\Omega_r). \quad (2.1.15)$$

Или в матричном виде

$$A_h = \frac{1}{2} \mathbf{q}_h^T \mathbf{K}_h \mathbf{q}_h - \mathbf{F}_h^T \mathbf{q}_h + \tilde{\mathcal{E}}_t(\Omega), \quad (2.1.16)$$

где  $\mathbf{K}_h$  называется матрицей жесткости всей системы. Ее коэффициенты вычисляются следующим образом<sup>1</sup>:

$$\mathbf{K}_h = [K_{ij}]_{(i),(j) \in \Omega}, \quad K_{ij} = \sum_r K_{ij}^r = \sum_r [\boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_j^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r}, \quad (2.1.17)$$

$\mathbf{F}_h = \{f_i\}_{(i) \in \Omega}$  – суммарный вектор приведенных узловых воздействий:

$$f_i = \sum_r (f_i^r + f_{i,t}^r) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma}, \mathbf{A}_u \boldsymbol{\varphi}_i \rangle_{\Gamma_{\sigma}} + \sum_r (\mathbf{D} \mathbf{A} \boldsymbol{\varphi}_i^r, \boldsymbol{\varepsilon}_t)_{\Omega_r}. \quad (2.1.18)$$

Систему алгебраических уравнений МКЭ для определения значений степеней свободы дискретной схемы получаем из условия минимума функционала (2.1.16):

$$\left\{ \frac{\partial A_h}{\partial q_i} \right\}_{(i) \in \Omega} = \mathbf{K}_h \mathbf{q}_h - \mathbf{F}_h = 0. \quad (2.1.19)$$

Как правило, учет краевых условий в МКЭ сводится к приравнению к заданным значениям  $\mathbf{u}_{\Gamma}$  значений соответствующих степеней свободы  $q_i$  в узлах, принадлежащих границе области  $\Gamma$ .

Дополнив уравнения (2.1.19) уравнениями, учитывающими краевые условия, получаем дискретную задачу

$$\mathcal{A}_h \mathbf{q}_h = \tilde{\mathbf{F}}_h, \quad (2.1.20)$$

где  $\mathcal{A}_h$  – ее оператор,  $\tilde{\mathbf{F}}_h$  – нагрузка.

<sup>1</sup> Сохраняется поэлементное суммирование, т.к. не наложены никакие ограничения на гладкость функций на границах элементов.

## 2.2. О связи с проекционно-сеточными методами

Поставим в соответствие каждой степени свободы  $q_i$  узла  $\mathbf{x}_k$  сетки  $\omega_h$  функцию, моделирующую перемещения точек расчетной схемы при единичном перемещении в направлении данной степени свободы и закреплении всех остальных степеней свободы системы:

$$\{ \varphi_i(\mathbf{x}), \varphi_i^r(\mathbf{x}) = \sum_{r, (i) \in \Omega_r} \varphi_i^r(\mathbf{x}), (i) \in \Omega \}. \quad (2.2.1)$$

Т.к. функции  $\varphi_i^r(\mathbf{x})$  определены на  $\Omega_r$ , то каждая из функций системы (2.2.1) отлична от нуля на так называемой звезде конечных элементов  $\Theta_i = \text{supp } \varphi_i$  узла  $\mathbf{x}_k$ , в котором определена  $i$ -ая степень свободы.

Как правило, степень свободы определена на всех конечных элементах, которые примыкают к узлу, и тогда можно сказать, что звезда конечных элементов не зависит от степени свободы узла. Но в случае примыкания к узлу разнотипных элементов (например, пространственного тела и изгибаемой плиты) это неверно. На рис. 2.2-1 даны примеры плоских звезд конечных элементов.

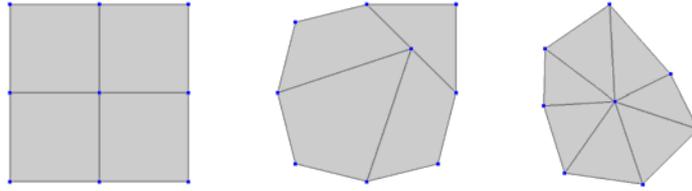


Рис. 2.2-1. Плоские звезды конечных элементов

Введем пространство сеточных функций  $\mathcal{L}_h$ , элементы которого определены на  $\Omega_h$  и удовлетворяют в граничных узлах главным краевым условиям задачи (1.3.7):

$$\{ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_h, \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega} q_i \varphi_i(\mathbf{x}) \}, \mathbf{L}_i \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = q_i. \quad (2.2.2)$$

Т.к. на линиях (поверхностях) между элементами не накладывается никаких ограничений на гладкость функций системы (2.2.2), то в  $\mathcal{L}_h$  вводятся следующие скалярное произведение и норма, определенные для любых функций  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_h$ :

$$[\mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \mathbf{v}_h(\mathbf{x})]_* = \sum_r [\mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \mathbf{v}_h(\mathbf{x})]_{\Omega_r}, \quad \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{L}_h}^2 = [\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h]_* \\ (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_h} = \sum_r (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_r}.$$

Функционал (2.1.16), компоненты матрицы жесткости (2.1.17) и приведенных узловых сил (2.1.18) с использованием введенных обозначений для любой функции  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_h$  принимают вид:

$$A_h(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h]_* - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h)_{\Omega_h} - \langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_u \mathbf{u}_h \rangle_{\Gamma_\sigma}, \quad (2.2.3)$$

$$K_{ij} = [\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x})]_*, \quad (2.2.4)$$

$$F_i = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega_h} + \langle \boldsymbol{\sigma}_\Gamma, \mathbf{A}_u \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) \rangle_{\Gamma_\sigma} + (D\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_t)_{\Omega_h}. \quad (2.2.5)$$

Таким образом, МКЭ сформулирован уже в терминах проекционно-сеточных методов [55]. Очевидно, что он представляет собой обобщение метода Ритца–Галеркина: пространство сеточных функций  $\mathcal{L}_h$  может не принадлежать энергетическому пространству  $\mathcal{L}_\mathcal{A}$  вариационной задачи (1.4.11).

Для того, чтобы подчеркнуть совпадение или несовпадение рассмотренной конечно-элементной модели с методом Ритца, в МКЭ вводятся понятия **совместных (конформных) элементов**, когда система аппроксимирующих функций (2.2.1), определенная на звездах элементов, принадлежит энергетическому пространству вариационной задачи, и **несовместных (неконформных)**, когда она ему не принадлежит. Так, например, в прямоугольных элементах, моделирующих тонкие плиты по теории Кирхгофа–Лява (Клафа [42], полусовместном [36]), существуют разрывы нормальных производных аппроксимирующих функций на границах элементов и, следовательно, они не принадлежат соответствующему энергетическому пространству решаемой задачи  $W_2^2(\Omega)$ .

Для несовместных аппроксимаций не равна нулю энергия взаимосвязи конечных элементов. В функционале (2.1.16) не учтена работа, которую необходимо выполнить для устранения разрывности деформаций. А это может обуславливать основную погрешность метода.

### 2.3. Гибридная схема МКЭ

Рассмотрим смешанный функционал (1.4.18) и разбиение области  $\Omega$  на конечные элементы (2.1.1).

На каждом конечном элементе введем дополнительно к степеням свободы (2.1.5) еще значения степеней свободы напряжений в точках элемента и соответствующие им аппроксимирующие функции:

$$\{\boldsymbol{\psi}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\psi}_i^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^s, \text{supp } \boldsymbol{\psi}_i^r = \overline{\Omega}_r, (i) \in \Omega_{r,\sigma}\}, \quad (2.3.1)$$

где  $(i) \in \Omega_{r,\sigma}$  – степени свободы для определения напряжений конечного элемента.

$$\mathbf{L}_{i,\sigma} \boldsymbol{\psi}_j^r = \delta_i^j, \quad (i), (j) \in \Omega_{r,\sigma}, \quad (2.3.2)$$

$\mathbf{L}_{i,\sigma}$  – оператор степени свободы, соответствующий напряжениям;

$q_{i,\sigma} = \mathbf{L}_{i,\sigma} \mathbf{u} = \mathbf{A}_{i,\sigma} \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$  – значение степени свободы.

Система функций (2.3.1) определяет напряжения в любой точке элемента по значениям его степеней свободы:

$$\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega_{r,\sigma}} q_{i,\sigma} \boldsymbol{\psi}_i^r(\mathbf{x}). \quad (2.3.3)$$

Т.к. в смешанный функционал (1.4.18) напряжения входят без операций дифференцирования, то можно не накладывать никаких условий гладкости на функции (2.3.1) при стыковке конечных элементов<sup>1</sup>.

Подставим представления (2.1.6) и (2.3.1) в (1.4.19) и получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_r(\boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{u}_r) = & (1 + \tilde{\kappa}) \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_r^T \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r - \mathbf{f}_r^T \mathbf{q}_r + \tilde{\mathcal{E}}_r(\Omega_r) \right) + \\ & \tilde{\kappa} \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_{r,\sigma}^T \tilde{\mathbf{K}}_{r,\sigma} \mathbf{q}_{r,\sigma} - \tilde{\kappa} \mathbf{q}_r^T \mathbf{Z}_r \mathbf{q}_{r,\sigma} + \mathbf{f}_{r,t,\sigma}^T \mathbf{q}_{r,\sigma} \right) - \mathbf{f}_r^T \mathbf{q}_r, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где:  $\mathbf{K}_r$  – матрица жесткости элемента (2.1.11);

$\mathbf{q}_r = \{q_i\}_{(i) \in \Omega_r}$  – вектор всех степеней свободы КЭ  $\Omega_r$  для перемещений;

$$\mathbf{K}_{r,\sigma} = \left[ K_{ij}^{r,\sigma} \right]_{(i),(j) \in \Omega_{r,\sigma}}, \quad K_{ij}^{r,\sigma} = (\boldsymbol{\psi}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\psi}_j^r(\mathbf{x}))_{\Omega_r}, \quad (i),(j) \in \Omega_{r,\sigma};$$

$\mathbf{q}_{r,\sigma} = \{q_{i,\sigma}\}_{(i) \in \Omega_{r,\sigma}}$  – вектор всех степеней свободы КЭ  $\Omega_r$  для напряжений;

$\mathbf{Z}_r = \left[ Z_{ij}^r \right]_{(i) \in \Omega_r, (j) \in \Omega_{r,\sigma}}$  – матрица, связывающая степени свободы перемещений и напряжений;

$$Z_{ij}^r = (\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\psi}_j^r(\mathbf{x}))_{\Omega_r}, \quad (i) \in \Omega_r, \quad (j) \in \Omega_{r,\sigma};$$

$$\mathbf{f}_{r,t,\sigma} = \{f_{i,t,\sigma}^r\}_{(i) \in \Omega_{r,\sigma}}, \quad f_{i,t,\sigma}^r = (\boldsymbol{\psi}_i^r, \boldsymbol{\varepsilon}_t)_{\Omega_r}.$$

Неизвестные  $\mathbf{q}_{r,\sigma}$  определены только на  $r$ -ом КЭ. Получаем уравнения для их определения из условия минимума функционала:

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{\Phi}_r}{\partial q_{i,\sigma}} \right\}_{(i) \in \Omega_{r,\sigma}^*} = \mathbf{K}_{r,\sigma} \mathbf{q}_{r,\sigma} - \mathbf{Z}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{f}_{r,t,\sigma} = 0. \quad (2.3.5)$$

Т.к. степени свободы  $\mathbf{L}_{i,\sigma}$  должны быть линейно независимыми, матрица упругости  $\mathbf{C}$  положительно определена, то и матрица  $\mathbf{K}_{r,\sigma}$  тоже положительно определена. Она может быть интерпретирована как *матрица податливости* конечного элемента по отношению к его статическим степеням свободы.

Из (2.3.5) следует, что

$$\mathbf{q}_{r,\sigma} = \mathbf{K}_{r,\sigma}^{-1} (\mathbf{Z}_r \mathbf{q}_r - \mathbf{f}_{r,t,\sigma}). \quad (2.3.6)$$

Подставляя (2.3.6) в (2.3.4) получаем, что

$$\tilde{\Phi}_r = \frac{1}{2} \mathbf{q}_r^T \tilde{\mathbf{K}}_r \mathbf{q}_r - (\mathbf{f}_r^T + \tilde{\mathbf{f}}_{r,t}^T) \mathbf{q}_r + \Phi_{r,t}, \quad (2.3.7)$$

где  $\tilde{\mathbf{K}}_r$  – "откорректированная" новая матрица жесткости элемента:

<sup>1</sup> Например, систему функций (2.3.1) можно определить как набор одночленов некоторой степени, приписав каждому из них «абстрактные» степени свободы.

$$\tilde{\mathbf{K}}_r = (1 + \tilde{\kappa})\mathbf{K}_r - \tilde{\kappa}\mathbf{Z}_r^T \mathbf{K}_{r,\sigma}^{-1} \mathbf{Z}_r, \quad (2.3.8)$$

$\Phi_{r,t}$  – константа, зависящая от температурной нагрузки.

Вектор приведенных узловых воздействий  $\mathbf{f}_r$  совпадает с (2.1.12), а температурные нагрузки приводятся к узловым:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{r,t} = (1 + \tilde{\kappa})\mathbf{f}_{r,t} + \tilde{\kappa}\mathbf{Z}_r^T \mathbf{K}_{r,\sigma}^{-1} \mathbf{f}_{r,t,\sigma}. \quad (2.3.9)$$

Формирование суммарной матрицы жесткости, приведенных узловых нагрузок и дальнейшие действия по решению задачи полностью совпадают со стандартной схемой МКЭ.

Гибридную схему имеет смысл применять при учете естественных краевых условий (1.3.6). Пусть пространство аппроксимирующих функций (2.3.1) содержит пространство функций, полученного из системы (2.1.5) применением оператора дифференцирования  $\mathbf{A}$  из (1.3.2). Тогда без дополнительных краевых уравнений минимума функционала Лагранжа (1.4.11) и Смешанного функционала (1.4.18) совпадают.

## 2.4. О погрешности решения

В МКЭ дискретная схема  $\Omega_h$  зависит от размеров конечных элементов (параметр  $h$ ), положения узлов в элементах, типов степеней свободы в узлах, вида аппроксимаций. Меняя  $h$  и зафиксировав остальные параметры расчетной схемы  $\Omega_h$ , получим последовательность решений  $\{\mathbf{u}_h\}$  дискретной задачи (2.1.20).

Один из основных вопросов любого численного метода, и МКЭ не исключение, – точность приближения точного решения  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$  задачи (1.3.7) последовательностью решений МКЭ  $\{\mathbf{u}_h\}$  при  $h \rightarrow 0$ .

Основными источниками ошибок в МКЭ являются<sup>1</sup>:

- математическая точность конечных элементов;
- аппроксимация геометрии, когда, например, в пологую оболочку вписывают многогранник;
- задание связей и нагрузок.

Очень важен выбор шага сетки. Теоретические исследования показывают только так называемый порядок сходимости результатов к аналитическим решениям при  $h \rightarrow 0$ . Практически рекомендуется рассчитывать несколько расчетных схем для задачи с уменьшением шага сетки в два раза для оценки реальной точности расчета. При этом возможна экспериментальная оценка скорости сходимости. Пусть есть некоторая ненулевая величина  $H$ , значение которой вычислено на сетках  $h$ ,  $h/2$  и  $h/4$ . Тогда порядок сходимости можно оценить по формуле:

<sup>1</sup> Не рассматриваются ошибки в расчетной схеме, связанные с недостоверными жесткостными характеристиками, неправильным использованием конечных элементов, некорректной подготовкой исходных данных и т.п.

$$\log_2 \left( \left| \frac{H_h - H_{h/2}}{H_{h/2} - H_{h/4}} \right| \right).$$

МКЭ начал развиваться как метод расчета стержневых систем. При этом удавалось получать в простейших случаях точные значения перемещений узлов и усилий в элементах.

#### **Теорема 2.4.1.**

Пусть в расчетной схеме задействованы только одномерные конечные элементы (стержни), у которых системы аппроксимирующих функций (2.1.6) совпадают с точным решением соответствующих однородных уравнений равновесия<sup>1</sup>. Тогда МКЭ в форме метода перемещений позволяет получить точные значения перемещений и усилий в узлах расчетной схемы при выполнении статического расчета<sup>2</sup>.

#### **Доказательство**

Рассмотрим задачу минимизации функционала Лагранжа (1.4.11)  $A(\mathbf{u})$ , положив  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}$ , где  $\mathbf{u}_h$  – конечно-элементное решение, а  $\tilde{\mathbf{u}}$  – решение на каждом конечном элементе краевой задачи (1.3.7) с жестким защемлением всех степеней свободы узлов (концов стержней). Тогда

$$A(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) = A(\mathbf{u}_h) + A(\tilde{\mathbf{u}}), \text{ т.к. } [\mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x})]_* = 0.$$

Следовательно, если аппроксимации (2.2.1) представляют на каждом КЭ полное решение однородного уравнения равновесия, то функция  $\mathbf{u}_h$  доставляет минимум функционалу Лагранжа на множестве всех возможных аппроксимаций и представляет точное значение перемещений в узлах расчетной схемы, т.к.  $L_k(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) = L_k(\mathbf{u}_h)$ ,  $(k) \in \Omega$ . ■

МКЭ в форме метода перемещений позволяет получить точные значения перемещений и усилий в узлах расчетной схемы при статическом расчете некоторых стержневых систем и систем, состоящих из других специальных одномерных конечных элементов<sup>3</sup>. Но уже двумерные задачи теории упругости имеют бесконечный базис в пространстве решений однородных уравнений равновесия, и поэтому МКЭ в общем случае не может обеспечить абсолютную точность их решения.

Говорят, что решение  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$  сходится к точному решению  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$  задачи (1.3.7)

- по напряжениям (деформациям) с порядком  $l_1$ , если

<sup>1</sup> Например, это полиномы Эрмита для стержня Бернулли, трансцендентные функции Корноухова при учете сдвига.

<sup>2</sup> Это не касается задач динамики и устойчивости.

<sup>3</sup> У «одноузловых» элементов, моделирующих упругие связи, второй узел формально не включается в  $\omega_h$ , ибо все значения его степеней свободы всегда равны нулю (закреплены).

$$\|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},*} < C_1 h^1; \quad (2.4.1)$$

- *по перемещениям* с порядком  $l_2$ , если

$$\|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2} < C_2 h^{1/2}. \quad (2.4.2)$$

При этом константы  $C_1$  и  $C_2$  должны не зависеть от  $h$ .

Для *совместных* аппроксимаций МКЭ является проекционно-сеточным методом Ритца-Галеркина, и система функций (2.2.1) для сходимости метода должна удовлетворять следующим условиям:

- все функции системы принадлежат энергетическому пространству  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  рассматриваемой задачи (1.3.7);
- система функций линейно независима;
- система функций полна в энергетическом пространстве: для любого элемента энергетического пространства  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  и любого числа  $\varepsilon$  при достаточно малом  $h \leq h_0$  выполняется неравенство

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon, \quad (2.4.3)$$

где  $\mathcal{P}_h = \{\mathcal{P}_{1,h}, \mathcal{P}_{2,h}, \dots, \mathcal{P}_{s,h}\}^T$  – оператор проектирования на  $\mathcal{L}_h$ :

$$\mathcal{P}_h \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) L_i \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_r \mathcal{P}_\varphi^r \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2.4.4)$$

$$\mathcal{P}_\varphi^r \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{\mathcal{P}_{1,\varphi}^r, \mathcal{P}_{2,\varphi}^r, \dots, \mathcal{P}_{s,\varphi}^r\}^T = \begin{cases} \sum_{(i) \in \Omega_r} \boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) L_i \mathbf{u}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega}_r \end{cases}.$$

При выполнении данных условий при  $h \rightarrow 0$  последовательность приближенных решений  $\{\mathbf{u}_h\}$  сходится к точному решению вариационной задачи (1.4.11)  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$  по энергии (напряжениям) и в метрике исходного пространства  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  (перемещениям). Т.к. рассматривается положительно определенный оператор  $\mathcal{A}$  краевой задачи (1.3.7) геометрически неизменяемой системы, то для погрешности схемы  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0, \quad \|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.4.5)$$

Для *несовместных* конечных элементов система функций (2.2.1) не принадлежит энергетическому пространству рассматриваемой задачи, и выполнения перечисленных условий уже недостаточно для сходимости метода. Из системы уравнений (2.1.19) получаем, что

$$\|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*\|_{\mathcal{A},h}^2 = [\mathbf{u}^* - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*]_* + \Pi_\sigma(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*) - [\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*]_*$$

Согласно [88, 89] несовместная дискретная схема аппроксимирует задачу (1.3.7), если система функций (2.2.1) полна в энергетическом пространстве в норме  $\|\cdot\|_{\mathcal{A},h}$  и последовательность

$$\Theta_h = \frac{|\Pi_\sigma(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*) - [\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*]|}{\|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*\|_{\mathcal{A},h}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (2.4.6)$$

Тогда, если выполнено условие (2.4.3):

$$\|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},h} \leq \|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},h} + \|\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},h} \rightarrow 0.$$

Для совместных аппроксимаций  $\Theta_h=0$ .

Расчетная схема называется устойчивой [80], если оператор дискретной задачи (2.1.20) положительно определен: для любой  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h$  при любых достаточно малых  $h \leq h_0$  существует независящая от  $h$  и  $\mathbf{v}_h$  постоянная  $C$ , что

$$\|\mathbf{v}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},h} \geq C \|\mathbf{v}_h(\mathbf{x})\|_{\Omega_h}. \quad (2.4.7)$$

Для совместных аппроксимаций условие (2.4.7) следует из условия положительной определенности оператора  $\mathcal{A}$  задачи (1.3.7).

## 2.5. Критерий полноты

Самым простым при доказательстве сходимости МКЭ является проверка условия полноты (2.4.3) системы аппроксимирующих функций метода. Обычно оно проверяется следующим образом [11, 57]:

- для произвольной достаточно гладкой функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  строится функция  $\mathcal{P}_h \mathbf{u}(\mathbf{x})$  – проекция на пространство аппроксимирующих функций  $\mathcal{L}_h$ ;
- значения степеней свободы функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  раскладываются в ряды Тейлора до порядка  $p$  относительно произвольной точки элемента;
- компоненты функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  раскладываются в ряды Тейлора до этого же порядка в этой же точке;
- если аппроксимации не являются полиномами, то они тоже представляются в виде рядов;
- исследуется разность  $\mathbf{u} - \mathcal{P}_h \mathbf{u}$  после подстановки соответствующих разложений и определяется порядок аппроксимации функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  проекцией  $\mathcal{P}_h \mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

Недостатком выше приведенной методики доказательства полноты системы аппроксимирующих функций является невозможность применить ее на этапе построения конечного элемента, когда система функций (2.1.6) еще не определена. В [32, 36] был предложен новый метод доказательства полноты и порядка аппроксимации при полиномиальной аппроксимации. Он был сформулирован и доказан для любых областей конечных элементов многомерных задач и применен при построении новых элементов.

Разложим компоненты функции перемещений  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  в ряды Тейлора до порядка  $p$  в произвольной точке  $\mathbf{y}$ :

$$v_j(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha v_j(\mathbf{y}) + \Upsilon_p(v_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (2.5.1)$$

где остаток разложения в ряд равен

$$Y_p(v_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} \frac{\partial^{p+1}}{\partial t^{p+1}} v_j((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x}) dt. \quad (2.5.2)$$

При этом справедливо равенство:

$$\mathcal{D}^\alpha Y_p(v_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = Y_{p-|\alpha|}(\mathcal{D}^\alpha v_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (2.5.3)$$

Введем обозначение для остатка от разложения в ряды Тейлора всех компонент функции перемещений:

$$Y_p(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \{ Y_p(v_1, \mathbf{y}, \mathbf{x}), \dots, Y_p(v_s, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \}^T.$$

Используя разложения (2.5.1), получаем для значений степеней свободы в узлах с учетом равенств (2.5.3):

$$L_i \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^s \left( \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} A_{i,j} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \mathcal{D}^\alpha u_j(\mathbf{y}) + Y_{p-m_i}(A_{i,j} u_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}_i) \right),$$

где  $m_i$  – порядок дифференцирования в операторе степени свободы  $\mathbf{A}_i$  из (2.1.5).

Тогда при  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r$

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_{j,h} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= u_j(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_{j,\varphi}^r \mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{x}) - \sum_{(i) \in \Omega_r} \varphi_{i,j}^r(\mathbf{x}) L_i \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \mathcal{D}^\alpha u_j(\mathbf{y}) + Y_p(u_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}) - \\ &= \sum_{(i) \in \Omega_r} \varphi_{i,j}^r(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^s \left( \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha u_k(\mathbf{y}) A_{i,k} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + Y_{p-m_i}(A_{i,k} u_k, \mathbf{y}, \mathbf{x}_i) \right) = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha u_j(\mathbf{y}) \left( (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha - \sum_{(i) \in \Omega_r} A_{i,j} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \varphi_{i,j}^r(\mathbf{x}) \right) - \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s \mathcal{D}^\alpha u_k(\mathbf{y}) \sum_{(i) \in \Omega_r} A_{i,k} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \varphi_{i,j}^r(\mathbf{x}) + \\ &= Y_p(u_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}) - \sum_{(i) \in \Omega_r} \varphi_{i,j}^r(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^s Y_{p-m_i}(A_{i,k} u_k, \mathbf{y}, \mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Пусть выполнены на конечном элементе  $\Omega_r$  тождества

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} A_{i,j} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \varphi_{i,k}(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\alpha \delta_k^j, \quad |\alpha| \leq p, \quad j, k=1, 2, \dots, s. \quad (2.5.5)$$

Тогда при  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r$  получаем, согласно (2.5.4), что для любой достаточно гладкой функции

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_\varphi^r \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (1 - \mathcal{P}_h) Y_{p,r}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (2.5.6)$$

Несложно доказать, что если условия (2.5.5) выполнены хотя бы для одной точки элемента, то они выполнены и для любой другой точки этого элемента. Поэтому запишем их в окончательном виде:

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} A_{ij}(\mathbf{x}^\alpha)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \varphi_{i,k}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}^\alpha \delta_k^j, \text{ или } \sum_{(i) \in \Omega_r} \varphi_i(\mathbf{x}) L_i P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}) \equiv P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \quad (2.5.7)$$

$|\alpha| \leq \rho, j, k=1, 2, \dots, s.$

Тождества (2.5.7) назовем **критерием полноты** системы аппроксимирующих функций (2.1.6) элемента. Их выполнение означает, что степень пространства аппроксимирующих функций равна  $\rho$ : любой полином степени  $\rho$  точно представляется как их линейная комбинация.

Для упрощения выкладок будем в дальнейшем считать, что в операторе **A** геометрических уравнений (1.3.2) входят только производные порядка  $m$ . Тогда при  $p < m$  условия (2.5.7) известны как **условия смещения конечного элемента как твердого тела**, когда при ненулевых перемещениях деформации и, соответственно, напряжения в точках элемента равны нулю. При решении задач с более чем одним неизвестным к данным условиям относятся также некоторые комбинации условий (2.5.7) при  $p = m$ .

### Теорема 2.5.1

Будем рассматривать такую границу  $\Gamma$  области тела  $\Omega$ , что любую функцию из пространства Соболева  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in W_2^{p+1}(\Omega)$  можно продолжить на все пространство  $\mathcal{R}^s$  с сохранением класса, а расчетная схема удовлетворяет условиям:

- разбиение (2.1.1) области  $\Omega$  на конечные элементы **регулярно** – выполнены условия (2.1.4);
- системы аппроксимирующих функций (2.1.6) на каждом конечном элементе  $\Omega_r$  удовлетворяют критерию полноты (2.5.7) порядка  $\rho$  и условиям (2.1.9).

Тогда существует функция  $\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_h$ , что

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})\|_{l,*} \leq Ch^{p+1-l} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{p+1,\Omega}, \quad 0 \leq l \leq p, \quad (2.5.8)$$

где константа  $C$  не зависит от  $h$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

### Доказательство

В работе [18] доказано, что для любой функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in W_2^{p+1}(\Omega)$  всегда существует бесконечное число раз дифференцируемая функция  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \{\hat{v}_1(\mathbf{x}), \hat{v}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{v}_s(\mathbf{x})\}^T$ , для которой при  $0 \leq l \leq p, |\alpha| \leq l$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\|_{l,*} &\leq Ch^{p+1-l} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{p+1,\Omega} \\ |\mathcal{D}^\alpha \hat{v}_j(\mathbf{x})| &\leq Ch^{\frac{n}{2}} \|v_j(\mathbf{x})\|_{l,\Omega_{x,h}} \leq Ch^{\frac{n}{2}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{l,\Omega_{x,h}}, \quad j=1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

где  $\Omega_{x,h}$  – шар радиуса  $h$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ , а константы не зависят от  $h$  и функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

Из выражения (2.5.2) для остатка ряда следует, согласно (2.5.9), что при  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r$

$$|Y_{p-|\alpha|}(\mathcal{D}^\alpha \hat{v}_j, \mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq Ch^{p+1-|\alpha|} \max_{\mathbf{x} \in \hat{\Omega}_r} \sum_{|\beta|=p+1} |\mathcal{D}^\beta \hat{v}_j(\mathbf{y})| \leq Ch^{p+1-|\alpha|-\frac{n}{2}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{p+1, \hat{\Omega}_{r,h}}, \quad (2.5.10)$$

где  $\hat{\Omega}_{r,h} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \hat{\Omega}_r} \Omega_{\mathbf{x},h}$  – объединение всех шаров радиуса  $h$  с центрами в точках элемента.

Расчетная схема удовлетворяет условиям регулярности (2.1.4) и, следовательно:

- $mes \hat{\Omega}_{r,h} \leq Ch^m$ ; (2.5.11)

- число элементов, примыкающих к каждому узлу расчетной схемы, ограничено.

Т.к. выполнены условия критерия полноты (2.5.7) порядка  $p$ , из оценок (2.1.9) и (2.5.9):

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^\alpha (\hat{v}_j(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_{j,h} \hat{v}(\mathbf{x}))| &= |(1 - \mathcal{P}_{j,h}) \mathcal{D}^\alpha Y_\rho(\hat{v}, \mathbf{y}, \mathbf{x})| = \\ |\mathcal{D}^\alpha (Y_\rho(u_j, \mathbf{y}, \mathbf{x}) - \sum_{(i) \in \Omega} \varphi_{i,j}(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^s Y_{\rho-m_j}(A_{i,k} u_{k,r}, \mathbf{y}, x_i))| &\leq \end{aligned}$$

$$|Y_{p-|\alpha|}(\mathcal{D}^\alpha \hat{v}_j, \mathbf{y}, \mathbf{x})| + \sum_{(i) \in \Omega} |\mathcal{D}^\alpha \varphi_{i,j}(\mathbf{x})| \sum_{k=1}^s |Y_{\rho-m_j}(A_{i,k} u_{k,r}, \mathbf{y}, x_i)| \leq Ch^{p+1-|\alpha|-\frac{n}{2}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{p+1, \hat{\Omega}_{r,h}}$$

Т.е.  $\|\hat{v}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \hat{v}(\mathbf{x})\|_{l,*} = (\sum_r \|\hat{v}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \hat{v}(\mathbf{x})\|_{l, \Omega_r}^2)^{\frac{1}{2}} \leq$

$$Ch^{p+1-l-\frac{n}{2}} (\sum_r \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{l, \hat{\Omega}_{r,h}}^2 mes \Omega_r)^{\frac{1}{2}} \leq C'h^{p+1-l} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{p+1, \Omega}. \quad (2.5.12)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \hat{v}(\mathbf{x})\|_{l,*} &\leq \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \hat{v}(\mathbf{x}) + \hat{v}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \hat{v}(\mathbf{x})\|_{l,*} \leq \\ &\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \hat{v}(\mathbf{x})\|_{l,*} + \|\hat{v}(\mathbf{x}) - \mathcal{P}_h \hat{v}(\mathbf{x})\|_{l,*}. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Согласно (2.5.9) и (2.5.12) из (2.5.13) получаем, что выполнено (2.5.8). ■

### Следствие

Для полноты системы аппроксимирующих функций (2.2.1) в  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  достаточно, чтобы на каждом конечном элементе  $\Omega_r$  были выполнены тождества критерия полноты порядка  $p \geq m$  для систем аппроксимирующих функций (2.1.6).

### Доказательство

Согласно теореме (2.5.1) выполнено (2.5.8) и существует функция  $\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_h$ , что

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},*} \leq C \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})\|_{m,*} \leq C'h^{p+1-m} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{p+1, \Omega} \rightarrow 0 \quad (2.5.14)$$

при  $h \rightarrow 0$  и  $p \geq m$ . ■

Критерий полноты (2.5.7) согласно теореме 2.5.1 отвечает на вопрос об условиях полноты системы аппроксимирующих функций (2.2.1) и позволяет перевести анализ на отдельные конечные элементы для систем функций (2.1.6).

## 2.6. Устойчивость дискретной задачи

Если система аппроксимирующих функций (2.2.1) совместна, то условие устойчивости дискретной расчетной схемы (2.4.7) вытекает из условий (1.4.5) положительной определенности оператора  $\mathcal{A}$  краевой задачи (1.3.7). Константа в (2.4.7) ограничена наименьшим собственным числом оператора  $\mathcal{A}$ .

Рассмотрим теперь несовместные аппроксимации. В [32, 36] доказан подход, позволяющий свести анализ всей расчетной схемы к анализу конкретных элементов с проверкой тождеств критерия полноты.

### Теорема 2.6.1

Для устойчивости дискретного оператора  $\mathcal{A}_h$  достаточно выполнения следующих условий:

- разбиение на конечные элементы регулярно и удовлетворяет (2.1.4);
- на каждом конечном элементе с несовместными аппроксимациями (2.2.1) существует вспомогательная совместная система функций, соответствующая тем же степеням свободы элементов

$$\{\psi_i^r(\mathbf{x}), \psi_i^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^s, L_j \psi_i^r = L_j \varphi_i^r, (i),(j) \in \Omega_r\}; \quad (2.6.1)$$

- системы функции (2.1.6) и (2.6.1) на каждом конечном элементе расчетной схемы удовлетворяют неравенствам (2.1.9);
- для систем функций (2.1.6) и (2.6.1) выполнены все тождества критерия полноты, обеспечивающие перемещение тела как жесткого целого. Для уравнений с одной неизвестной функцией и порядком операций дифференцирования в (1.3.2)  $m$ , это, как минимум, тождества порядка  $p=m-1$ . Т.е., если  $\mathbf{K}_{r,\varphi} \mathbf{q}_{r,0} = 0$ , где  $\mathbf{q}_{r,0}$  – собственный вектор, соответствующий нулевому собственному числу матрицы жесткости<sup>1</sup>, то

$$\mathbf{K}_{r,\psi} \mathbf{q}_{r,0} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} q_{i,0} \varphi_i^r(\mathbf{x}) \equiv \sum_{(i) \in \Omega_r} q_{i,0} \psi_i^r(\mathbf{x}). \quad (2.6.2)$$

### Доказательство

Т.к., по определению, собственные векторы, соответствующие нулевому собственному числу в обеих матрицах совпадают, то:

<sup>1</sup> Т.к.  $\mathbf{A} \mathbf{P}_{i,\alpha}^s(\mathbf{x}) = 0$  при  $|\alpha| < m$ , то соответствующими собственными векторами будут коэффициенты комбинаций критерия полноты порядка  $m-1$ , которым обе системы функций удовлетворяют по определению. Возможны и другие векторы при  $|\alpha_i| \geq m$ , соответствующие нулевому собственному числу. Например, моделирующие чистый сдвиг в пространственной и плоской задачах теории упругости.

$$\sum_{(i),(j) \in \Omega_r} q_i q_j [\varphi_i^r(\mathbf{x}), \varphi_j^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r} \geq C_r \sum_{(i),(j) \in \Omega_r} q_i q_j [\psi_i^r(\mathbf{x}), \psi_j^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r}, \quad C_r > 0. \quad (2.6.3)$$

Докажем, что константа  $C_r$  не зависит от  $h$ . Поставим в соответствие элементу  $\Omega_r$  однотипный элемент  $\Omega'$  с коэффициентом подобия областей  $\zeta$ . Если элементы расположить соответствующим образом в пространстве, то систему аппроксимирующих функций  $\Omega'$  можно представить в следующем виде согласно (2.1.9):

$$\widehat{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) = \zeta^{m_i} \varphi_i^r\left(\frac{\mathbf{x}}{\zeta}\right). \quad (2.6.4)$$

Но тогда:

$$\sum_{(i),(j) \in \Omega_r} q_i q_j [\varphi_i^r(\mathbf{x}), \varphi_j^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r} = \zeta^{n-2m} \sum_{(i),(j) \in \Omega'_r} \zeta^{m_i+m_j} q_i q_j [\varphi_i^r\left(\frac{\mathbf{x}}{\zeta}\right), \varphi_j^r\left(\frac{\mathbf{x}}{\zeta}\right)]_{\Omega'_r}$$

$$\text{и} \quad \sum_{(i),(j) \in \Omega_r} q_i q_j [\psi_i^r(\mathbf{x}), \psi_j^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r} = \zeta^{n-2m} \sum_{(i),(j) \in \Omega'_r} \zeta^{m_i+m_j} q_i q_j [\psi_i^r\left(\frac{\mathbf{x}}{\zeta}\right), \psi_j^r\left(\frac{\mathbf{x}}{\zeta}\right)]_{\Omega'_r}.$$

Сделаем замену  $q_i' = h^{-m_i} q_i$  и получим, что неравенство (2.6.3) не зависит от коэффициента пропорциональности  $\zeta$ . Из этого следует, что при регулярности разбиения области на конечные элементы существует коэффициент  $C_r$  в (2.6.3), который не зависит от  $h$ , и для матриц жесткости элемента (2.1.11), построенных по системам функций (2.1.6) и (2.6.1), выполнено неравенство  $K_{r,\varphi} \geq C_r K_{r,\psi}$ .

Таким образом:

$$\|\mathbf{v}_h(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},*} \geq C \left( \sum_r [\mathbf{v}_{h,\psi}(\mathbf{x}), \mathbf{v}_{h,\psi}(\mathbf{x})]_{\Omega_r} \right)^{\frac{1}{2}} \geq C_1 \|\mathbf{v}_{h,\psi}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A}}, \quad (2.6.5)$$

где  $\mathbf{v}_{h,\psi}(\mathbf{x})$  – совместная функция, построенная по аппроксимациям (2.6.1), для которой устойчивость дискретной схемы при геометрически неизменяемой системе выполнена. ■

## 2.7. Критерий несовместности

Если система функций (2.2.1) несовместна, то для сходимости МКЭ, кроме условий полноты (2.5.7), при  $p \geq m$  требуется также доказать условие (2.4.6). Для его доказательства Б.М. Айронс [101] предложил метод "*кусочного тестирования*", заключающийся в проверке равенств

$$[P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \varphi_k(\mathbf{x})]_* = 0, \quad |\alpha| = m, \quad j=1,2,\dots,s; \quad (k) \in \Omega, \quad (2.7.1)$$

с помощью которого в [62, 88] проанализировано большое число известных несовместных конечных элементов.

Большим недостатком кусочного тестирования является необходимость анализа каждой функции системы (2.2.1) на соответствующей звезде конеч-

ных элементов, что является довольно трудоемкой задачей уже для обычного треугольника.

Предложенный в [23, 24] "критерий несовместности" и обобщенный в [32, 36] подход позволил свести анализ к отдельным элементам.

### Теорема 2.7.1

Будем рассматривать такую границу  $\Gamma$  области тела  $\Omega$ , что любую функцию из пространства Соболева  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in W_2^{p+1}(\Omega)$  можно продолжить на все пространство  $\mathcal{R}^s$  с сохранением класса.

Пусть при  $h \rightarrow 0$  разбиение области на конечные элементы регулярно, а на каждом конечном элементе:

- функции системы (2.1.6) удовлетворяют критерию полноты (2.5.7) порядка  $p$ ,  $m \leq p < 2m$ ;
- существует совместная система функций

$$\{ \psi_i^r(\mathbf{x}), \psi_i^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^s, L_j \psi_i^r = L_j \varphi_i^r, (i), (j) \in \Omega_r \}, \quad (2.7.2)$$

соответствующая тем же степеням свободы, что и функции системы (2.1.6), и удовлетворяющая на каждом КЭ  $\Omega_r$  критерию полноты порядка  $m-1$  и равенствам:

$$[P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \varphi_k(\mathbf{x}) - \psi_k(\mathbf{x})]_{\Omega_r} = 0 \quad (2.7.3)$$

при  $m \leq |\alpha| \leq p$ ,  $j=1,2,\dots,s$ ;  $(k) \in \Omega_r$ .

- системы функции (2.1.6) и (2.7.2) на каждом конечном элементе расчетной схемы удовлетворяют условиям (2.6.2) и неравенствам (2.1.9).

Тогда существует функция  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_h$ , и справедлива оценка  $\Theta_h$  в выражении (2.4.6):

$$\Theta_h = \frac{|\Pi_\sigma(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*) - [\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*]|}{\|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*\|_{\mathcal{A},h}} \leq Ch^{p+1-m} \|\mathbf{u}_*(\mathbf{x})\|_{p+1,\Omega}, \quad (2.7.4)$$

где константа  $C$  не зависит от  $h$ .

### Доказательство

Для упрощения доказательства будем считать, что заданы однородные главные краевые условия рассматриваемой задачи, что не нарушает общности доказательства.

Т.к. система функций (2.7.2) совместна, выполнены условия несовместности (2.7.3) порядка  $m \leq p < 2m$ , то получаем, что для произвольного вектор-полинома  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  степени  $p$ :

$$\begin{aligned} \Theta_h \|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*\|_{\mathcal{A},h} &= |(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*)_{\Omega} - [\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*]| = \\ &= |(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_* - \mathcal{P}_\psi(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*))_{\Omega_r} - [\mathbf{u}_* - \mathbf{P}(\mathbf{x}), \mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_* - \mathcal{P}_\psi(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*)]| \leq \\ &= \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_* \|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_* - \mathcal{P}_\psi(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*)\|_* + \\ &= \|\mathbf{u}_* - \mathbf{P}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A},h} \left( \|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*\|_{\mathcal{A},h} + \|\mathcal{P}_\psi(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*)\|_{\mathcal{A},h} \right), \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

где  $\mathcal{P}_\psi$  – оператор проектирования на пространство совместных аппроксимаций  $\mathcal{L}_{h,\psi} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ .

Но т.к.  $\mathcal{P}_h \mathcal{P}_{h,\psi} = \mathcal{P}_h$ , то из теоремы 2.5.1 следует, что

$$\|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_* - \mathcal{P}_\psi(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*)\|_* \leq Ch^m \|\mathcal{P}_\psi(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_\varphi \mathbf{u}_*)\|_{m,*}. \quad (2.7.6)$$

Из положительной определенности оператора  $\mathcal{A}$  краевой задачи (1.3.7) и теоремы об устойчивости расчетной схемы 2.6.1 следует:

$$\|\mathcal{P}_{h,\psi}(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*)\|_{m,*} \leq C \|\mathcal{P}_{h,\psi}(\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*)\|_{\mathcal{A},*} \leq C_1 \|\mathbf{u}_h - \mathcal{P}_h \mathbf{u}_*\|_{\mathcal{A},*}. \quad (2.7.7)$$

Т.к.  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  – полином степени  $p$ , то по теореме 2.5.1 для любой функции  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$  его можно выбрать таким, чтобы

$$\|\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})\|_{l,*} \leq Ch^{p+1-l} \|\mathbf{u}_*(\mathbf{x})\|_{p+1,\Omega}, \quad 0 \leq l \leq p. \quad (2.7.8)$$

Из (2.7.5) – (2.7.8) следует (2.7.4). ■

Будем говорить, что несовместная система функций (2.2.1) удовлетворяет **критерию несовместности порядка  $p$** , если на каждом конечном элементе для системы функций (2.1.6) выполнены условия теоремы 2.7.1.

В **критерии несовместности** (2.7.3) путем введения совместной, но не полной в энергетическом пространстве системы функций (2.7.2), удастся свести анализ несовместности системы функций (2.2.1) на подсистемы (2.1.6), определенные на конкретных элементах. При этом по теореме 2.6.1 обеспечивается также и устойчивость дискретной схемы.

Условиям теоремы можно дать следующую интерпретацию: совместной равновесной системе аппроксимирующих функций  $\boldsymbol{\psi}_i^r(\mathbf{x})$  можно дать такие несовместные приращения  $\boldsymbol{\psi}_i^r(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x})$ , для которых работа внутренних сил на перемещениях, соответствующих постоянным, линейным и т.д. деформациям элемента, равна нулю. При этом система функций  $\boldsymbol{\varphi}_i^r(\mathbf{x})$  удовлетворяет равенствам критерия полноты, обеспечивающим соответствующий порядок аппроксимации.

## 2.8. Оценки скорости сходимости метода

Для совместных аппроксимирующих функций (2.2.1) МКЭ является вариационным методом, для которого давно установлены необходимые и достаточные условия сходимости. При несовместности аппроксимаций задача усложняется, т.к. требуется доказать устойчивость расчетной схемы (2.4.7) и условие аппроксимации (2.4.6) задачи (1.3.7).

Будем рассматривать такую границу  $\Gamma$  области тела  $\Omega$ , что любую функцию из пространства Соболева  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in W_2^{p+1}(\Omega)$  можно продолжить на все пространство  $\mathcal{R}^s$  с сохранением класса.

**Теорема 2.8.1**

Пусть при  $h \rightarrow 0$ :

- разбиение области на конечные элементы  $\Omega_h$  регулярно;
- системы аппроксимирующих функций МКЭ (2.2.1) совместны – принадлежат энергетическому пространству вариационной задачи (1.4.11);
- на каждом конечном элементе  $\Omega_r$  схемы выполняются тождества критерия полноты (2.5.7) порядка  $p \geq m$ .

Тогда справедлива оценка погрешности МКЭ:

$$\| \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \|_{l,*} \leq Ch^\tau \| \mathbf{u}(\mathbf{x}) \|_{p+1,\Omega}, \quad (2.8.1)$$

где  $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$  – решение задачи (1.3.7),  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$  – решение задачи (2.1.20) и  $\tau = \min(p+1-l, 2(p+1-m))$ ,  $0 \leq l \leq p$ .

**Доказательство**

Доказательство следует из теоремы 3.7 работы [88]. ■

Рассмотрим теперь несовместные аппроксимации.

**Теорема 2.8.2**

Пусть при  $h \rightarrow 0$ :

- разбиение области на конечные элементы  $\Omega_h$  регулярно;
- система аппроксимирующих функций МКЭ (2.2.1) удовлетворяет тождествам критерия полноты (2.5.7) и несовместности (2.7.3) порядка  $p$ ,  $m \leq p < 2m$ ;
- системы функции (2.1.6) и (2.7.2) на каждом конечном элементе расчетной схемы удовлетворяют условиям (2.6.2) и неравенствам (2.1.9).

Тогда согласно [32, 36] обеспечивается устойчивость дискретной схемы и справедлива оценка погрешности метода:

$$\| \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \|_{\mathcal{A},*} \leq C_1 h^{p-m+1} \| \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) \|_{p+1,\Omega}, \quad (2.8.2)$$

$$\| \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \|_* \leq C_2 h^\tau \| \mathbf{u}_*(\mathbf{x}) \|_{p+1,\Omega}, \quad (2.8.3)$$

где константы  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $h$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,

$$\tau = \min(p+1-l, 2(p+1-m)), \quad 0 \leq l \leq p.$$

**Доказательство**

Выполнены условия теорем 2.5.1, 2.6.1 и 2.7.1. Поэтому система аппроксимирующих функций МКЭ (2.2.1) полна в энергетическом пространстве, дискретная схема устойчива и согласно оценок (2.5.8) и (2.7.4) получаем, что выполнено неравенство (2.8.2).

Порядок сходимости по перемещениям в неравенстве (2.8.3) получим стандартным приемом Нитше [88], который состоит в рассмотрении вспомогательной задачи (1.3.7) с правой частью – невязкой решения.

$$\mathcal{A}\chi = \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_h \quad (2.8.4)$$

Для решения  $\chi$  задачи (2.8.4) и произвольной функции  $\chi_h \in \mathcal{L}_h$ :

$$\begin{aligned} \|u_* - u_h\|_*^2 &= (\mathcal{A}\chi, u_* - u_h) = \\ &[\chi - \chi_h, u_* - u_h] + [\chi_h, u_*] - (f, \chi_h)_* + [\chi, u_h] - (\mathcal{A}\chi, u_h)_*. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Если считать  $\chi_h$  функцией наилучшего приближения, то по теореме 2.5.1 для любой совместной функции  $\chi_{\psi, h}$ , построенной по системе (2.7.2):

$$\|\chi - \chi_h\|_{\mathcal{A},*}^2 \leq Ch^{p+1-m} \|\chi\|_{p+1,*}^2.$$

Выберем  $\chi_{\psi, h}$  как функцию наилучшего приближения  $\chi$ . Тогда по теореме 2.7.1 и оценке (2.7.4)

$$|[\chi_h, u_*] - (f, \chi_h)_*| \leq Ch^{p+1-m} \|u_*\|_{p+1,*} \|\chi_h - \chi_{\psi, h}\|_{\mathcal{A},*} \leq Ch^{p+p_1+2-2m} \|u_*\|_{p+1,*} \|\chi\|_{2m, \Omega},$$

$$|[\chi, u_h] - (\mathcal{A}\chi, u_h)_*| \leq Ch^{p+1-m} \|\chi\|_{2m, \Omega} \|u_h - u_{\psi, h}\|_{\mathcal{A},*} \leq Ch^{p+p_1+2-2m} \|u_*\|_{p+1,*} \|\chi\|_{2m, \Omega}.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что

$$\|\chi\|_{2m, \Omega} \leq C \|u_* - u_h\|_*.$$

Применив полученные оценки в (2.8.5), получаем (2.8.3). ■

Если при построении гибридных конечных элементов использовать одни и те же системы аппроксимирующих функций и для перемещений и для напряжений, то для них будут справедливы полученные оценки погрешности для решения вариационной задачи Лагранжа обычными элементами. Но при этом можно получить меньшие значения констант  $C_1$  и  $C_2$ .

Для каждого конечного элемента рассматриваются так называемые **патологические (rash) тесты**. Идея rash-теста состоит в том, что для «хорошей» задачи с известным аналитическим решением специально применяется крайне хаотично сконструированная расчетная модель. Они предназначены для проверки правильности программной реализации в вычислительном комплексе соответствующих алгоритмов его построения. Как правило, это тесты: проверяющие смещение конечного элемента как жесткого тела, наличие постоянных деформаций (усилий) при заданных воздействиях. Т.е. это фактически проверка соответствующих тождеств критерия полноты. Но надо помнить, что согласно доказанным в данном разделе теоремам, выполнение патологических тестов *не гарантирует сходимость метода*.

## 2.9. Внутренние степени свободы конечных элементов

Часто конечный элемент представляет собой некоторую мини-конструкцию. Так, например, реализуются шарниры/ползуны в стержневых элементах.

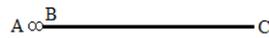


Рис. 2.9-1. Шарнир в стержневом элементе

Рассмотрим элемент на рис. 2.9-1. Узлы A и C элемента принадлежат расчетной схеме, а узел B, соединенный шарнирно с A является «внутренним» узлом элемента. В систему уравнений МКЭ вводятся уравнения, связывающие неизвестные значения степеней свободы узлов A и C, а неизвестные значения степеней свободы узла B можно исключить уже на этапе построения матрицы жесткости элемента.

Существуют конечные элементы с целой сетью внутренних узлов, примеры которых приведены на рис. 2.9-2.

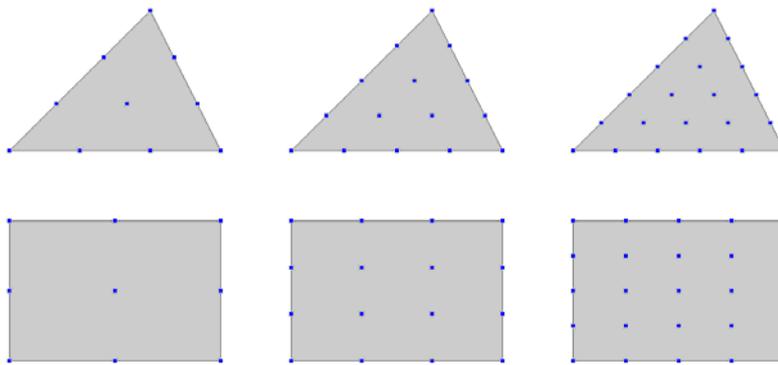


Рис. 2.9-2. Примеры плоских серендиповых элементов

Если данные узлы имеют такие же степени свободы, как и узлы в вершинах области, то элементы со специальными методами построения аппроксимаций<sup>1</sup> называются *серендиповыми* [27, 28]. Т.к. внутренние узлы не связаны с узлами других конечных элементов, то их степени свободы тоже можно исключить на этапе построения систем аппроксимирующих функций.

Пусть на конечном элементе  $\Omega_r$  введены дополнительные  $K$  степеней свободы, которые могут интерпретироваться, например, как значениями перемещений, деформаций или усилий во внутренних узлах элемента:

$$\hat{\omega}_r = \{ \hat{q}_{r,k}, k = 1, 2, \dots, K \}. \quad (2.9.1)$$

<sup>1</sup> Элементами серендипового типа называется последовательность элементов полученная повышением степени полинома аппроксимаций с увеличением числа узлов на сторонах/гранях элемента. При этом не обязательно возникают показанные на рис. 2.9-2 внутренние узлы сеток.

Внутренние степени свободы могут и не иметь реальное физическое содержание и им необязательно должен соответствовать определенный дифференциальный оператор.

Матрицу жесткости (2.1.11) элемента запишем в блочном виде

$$\widehat{\mathbf{K}}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r,A} & \mathbf{K}_{r,B} \\ \mathbf{K}_{r,B}^T & \mathbf{K}_{r,C} \end{bmatrix}, \quad (2.9.2)$$

$$\mathbf{K}_{r,A} = [K_{ij,A}^r]_{(i),(j) \in \Omega_r},$$

$$\mathbf{K}_{r,B} = [K_{ij,B}^r]_{(i) \in \Omega_r, (j) \in \widehat{\omega}_r},$$

$$\mathbf{K}_{r,C} = [K_{ij,C}^r]_{(i),(j) \in \widehat{\omega}_r}.$$

Подматрицы  $\mathbf{K}_{r,B}$  и  $\mathbf{K}_{r,C}$  могут быть построены, например, с помощью дополнительных аппроксимирующих функций. При этом матрица  $\mathbf{K}_{r,C}$  должна быть невырожденной.

Аналогично для нагрузки получаем

$$\widehat{\mathbf{f}}_r = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{f}_{r,A} \\ \mathbf{f}_{r,C} \end{matrix} \right\}, \text{ где } \mathbf{f}_{r,A} = \{ \widehat{f}_{r,i} \}_{(i) \in \Omega_r}^T, \quad \mathbf{f}_{r,C} = \{ \widehat{f}_{r,j} \}_{(j) \in \widehat{\omega}_r}^T. \quad (2.9.3)$$

Уравнения, связывающие дополнительные степени свободы, имеют вид:

$$\mathbf{K}_{r,B}^T \{q_i\}_{(i) \in \Omega_r \setminus \widehat{\omega}_r} + \mathbf{K}_{r,C} \{q_i\}_{(i) \in \widehat{\omega}_r} = \mathbf{f}_{r,C}. \quad (2.9.4)$$

Поэтому,

$$\{q_i\}_{(i) \in \widehat{\omega}_r} = \mathbf{K}_{r,C}^{-1} \left( \mathbf{f}_{r,C} - \mathbf{K}_{r,B}^T \{q_i\}_{(i) \in \Omega_r} \right). \quad (2.9.5)$$

Следовательно, матрица жесткости (2.1.11) конечного элемента  $\Omega_r$  и откорректированный вектор нагрузки (2.1.18) имеют вид<sup>1</sup>:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{r,A} - \mathbf{K}_{r,B} \mathbf{K}_{r,C}^{-1} \mathbf{K}_{r,B}^T, \quad \mathbf{f}_r = \mathbf{f}_{r,A} - \mathbf{K}_{r,B} \mathbf{K}_{r,C}^{-1} \mathbf{f}_{r,C}. \quad (2.9.6)$$

Допустим, что всем дополнительным степеням свободы элемента из  $\widehat{\omega}_r$  можно поставить в соответствие некоторые функции. Тогда полную систему аппроксимирующих функций можно представить как:

$$\{ \widetilde{\varphi}_i^r(\mathbf{x}), \widehat{\varphi}_k^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^S, \mathbf{L}_i \widetilde{\varphi}_j^r = \delta_j^i, \mathbf{L}_i \widehat{\varphi}_k^r = 0, (i),(j) \in \Omega_r, (k) \in \widehat{\omega}_r \}. \quad (2.9.7)$$

Функции системы (2.1.6) можно выразить через (2.9.7):

$$\{ \varphi_i^r(\mathbf{x}) \}_{(i) \in \Omega_r} = \{ \widetilde{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) \}_{(i) \in \Omega_r} + \sum_{(j) \in \widehat{\omega}_r} a_{ij} \{ \widehat{\varphi}_j^r(\mathbf{x}) \}_{(j) \in \widehat{\omega}_r}, \quad (2.9.8)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  в (2.9.8) находятся из условия ортогональности функций  $\varphi_i^r, (i) \in \Omega_r$  функциям  $\widehat{\varphi}_j^r, (j) \in \widehat{\omega}_r$  в норме  $\| \cdot \|_A$ :

<sup>1</sup> Данный процесс называют еще конденсацией дополнительных степеней свободы.

$$\{\varphi_j^r(\mathbf{x})\}_{(j) \in \Omega_r} = \{\tilde{\varphi}_j^r(\mathbf{x})\}_{(j) \in \Omega_r} - \mathbf{K}_{r,B} \mathbf{K}_{r,C}^{-1} \{\tilde{\varphi}_j^r(\mathbf{x})\}_{(j) \in \hat{\Omega}_r}. \quad (2.9.9)$$

Представленные алгоритмы позволяют значительно упростить построение расчетных схем, включив некоторые действия внутрь конечного элемента и уменьшив при этом порядок системы уравнений метода.

При определении внутренних усилий в конечном элементе требуется при наличии дополнительных степеней свободы/уравнений решить обратную задачу: определить значения дополнительных степеней свободы элемента  $\Omega_r$  по значениям «внешних» степеней свободы. Это часто используют в случае, если определена система функций (2.9.7), то при этом используется формула (2.9.5).

## 2.10. О системах координат

При решении задачи МКЭ используются различные системы координат как для описания самой расчетной схемы и выдачи результатов вычислений, так и для упрощения реализации самих вычислений.

### **Система координат расчетной схемы**

При описании задачи нам необходимо задать ее систему координат. Это может быть:

- трехмерная задача теории упругости в пространстве  $XYZ$ ;
- плоская задача теории упругости в произвольной плоскости;
- изгибаемая плита в плоскости  $XOY$ ;
- комбинированная система в трехмерном пространстве  $XYZ$ , включающая в себя стержни, плиты, оболочки и пространственные тела;
- плоскость, на которую отображена рассматриваемая пологая оболочка.

Очевидно, что возможны и другие, не перечисленные выше, варианты задания систем координат расчетной схемы.

### **Система координат жесткостных характеристик**

Уже для ортотропного материала удобнее задавать направления главных осей, чем пересчитывать жесткости, например, в систему координат расчетной схемы, получая при этом анизотропию. Даже для плоской задачи в самом общем случае проще задать *девять* чисел, чем *двадцатьодно*.

### **Системы координат узлов**

Как правило, перемещения являются степенями свободы узлов расчетной схемы. Часто необходимо задать косую связь. Если не вводить дополнительно систему координат узла, то для ее реализации необходимо использовать специальные конечные элементы.

### **Системы координат конечных элементов**

При построении конечного элемента часто вводится местная система, определенная только на нем и выбранная из соображений удобства соответ-

вующих построений и проведения вычислений. Очевидно, что первоначально все степени свободы элемента рассматриваются в этой системе координат и в ней же выполняются соответствующие вычисления (построения).

Запишем преобразование местной системы координат элемента в систему координат расчетной схемы в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}'). \quad (2.10.1)$$

И, следовательно:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right\}^T = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}') \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x'_s} \right\}^T. \quad (2.10.2)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial x'_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'_s} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_s} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial x'_s} \end{bmatrix} - \text{матрица Якоби преобразования.} \quad (2.10.3)$$

Рассматриваются только такие невырожденные преобразования (2.10.1), для которых Якобиан  $J = |\mathbf{J}(\mathbf{x}')| > 0$  в любой точке элемента.

Интегралы преобразуются таким образом:

$$\int_{\Omega} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |J(\mathbf{x}')| F(\mathbf{x}(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}'. \quad (2.10.4)$$

Из (2.10.2) следует, что в интегралах для вычисления элементов матрицы жесткости якобиан (2.10.3) будет стоять в степени  $1-2m$ , где  $m$  – порядок дифференцирования при вычислении деформаций.

Векторы степеней свободы, матрицы жесткости и приведенные узловые нагрузки в общей (глобальной) и местной системах координат связаны равенствами:

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{S}_r^T \mathbf{q}'_r, \quad K_r = \mathbf{S}_r^T K'_r \mathbf{S}_r, \quad \mathbf{f}_r = \mathbf{S}_r^T \mathbf{f}'_r, \quad \mathbf{s}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r^1 & & & 0 \\ & \mathbf{s}_r^2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \mathbf{s}_r^{N_r} \end{bmatrix}, \quad (2.10.5)$$

где матрица  $\mathbf{S}_r$  имеет блочно-диагональную структуру, а прямоугольные подматрицы  $\mathbf{S}_r^i$  имеют размерность числа степеней свободы узла элемента, которая может быть меньше числа степеней свободы узла расчетной схемы.

В большинстве случаев преобразование (2.10.1) – линейное, и, даже, ортогональное. В этом случае Якобиан является константой и выносится из под знака интеграла. Если при этом в узлах конечного элемента определены только значения всех  $s$  линейных степеней свободы узла, а преобразование (2.10.1) ортогонально, то подматрицы  $\mathbf{S}_r^i$  совпадают с матрицей Якоби (2.10.3).

Если преобразование (2.10.1) нелинейно, то такие конечные элементы называются *изопараметрическими*, если преобразование производится на правильный многогранник (квадрат, куб, ...). При нелинейности преобразования (2.10.1), как правило, достаточно сложно получить точные значения элементов матрицы жесткости, но данная проблема решается использованием более точных кубатурных формул. (см. Приложение). Надо помнить, что для элементов, не являющихся правильными многогранниками (многоугольниками) в общем случае изопараметрические элементы *не гарантируют* сохранение симметрии расчетной схемы в результатах расчета и инвариантность расчетов при изменении порядка нумерации узлов.

Как правило, в преобразовании (2.10.1) используют аппроксимации других конечных элементов, имеющих только линейные степени свободы в тех же узлах. При этом преобразование выполняется на *мастер элемент* – элемент «правильной» геометрической формы: квадрат, квадрат с узлами в серединах сторон, прямоугольный треугольник с единичными катетами, куб и т.п.

#### **Система координат задания нагрузок**

Задание нагрузок в современных вычислительных комплексах возможно:

- в глобальной системе координат – в системе координат основной схемы;
- в специальных системах координат: цилиндрической, сферической и т.п. В этом случае производится автоматическое разложение, например, радиальной нагрузки на ее составляющие;
- в местной системе координат элемента: нагрузка по нормали к поверхности оболочки и др.

#### **Система координат выдачи усилий**

При расчете часто необходимо получать усилия и напряжения в элементах расчетной схемы в специальных системах координат, которые обусловлены конструктивными особенностями: например, расположением арматуры.

#### **Особенности преобразований**

Все выше перечисленные системы координат необходимо учитывать при построении конечных элементов:

- преобразование жесткостных характеристик в систему координат построения матрицы жесткости элемента;
- преобразование матрицы жесткости в систему (системы) координат узлов расчетной схемы;
- преобразование нагрузок, заданных в общей системе координат, к системе координат элемента;
- приведение местных нагрузок на элемент к узловым в их системах координат;
- преобразование вычисленных значений степеней свободы узлов в системы координат элементов;

- преобразование вычисленных характеристик напряженно-деформированного состояния к заданным системам координат.

### 2.11. Построение систем аппроксимирующих функций

При построении систем аппроксимирующих функций МКЭ наиболее простым в реализации является использование полиномов, для которых можно легко получить аналитические выражения для элементов матрицы жесткости или использовать точные формулы численного интегрирования.

Основываясь на доказанных теоремах, можно сформулировать методику исследования и построения новых конечных элементов с полиномиальными аппроксимациями:

- строится некоторое приближение – система функций (2.9.7), в которой определены как основные аппроксимации, так и аппроксимации внутренних степеней свободы

$$\{ \check{\varphi}_i^r(\mathbf{x}), \widehat{\varphi}_k^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^s, L_i \check{\varphi}_j^r = \delta_j^i, L_i \widehat{\varphi}_k^r = 0, (i), (j) \in \Omega_r, (k) \in \widehat{\Omega}_r \}; \quad (2.11.1)$$

- для каждого конечного элемента рассматриваются тождества критерия полноты (2.5.7) до порядка  $p \geq m$ , и непосредственной подстановкой проверяется их выполнение для системы аппроксимирующих функций (2.11.1), определенной на элементе;
- если критерий полноты не выполнен, то рассмотрим ненулевые невязки:

$$\lambda_j^r(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega} \check{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) L_i(P_{\alpha_j}^r) - P_{\alpha_j}^r, \quad \alpha_j = \{ \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk} \} \in \mathcal{Z}, \quad (2.11.2)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  – соответствующие степени полиномов.

Несложно проверить, что  $L_i \lambda_j^r = 0, (i) \in \Omega_r, j=1, 2, \dots, k$ .

Возможны два варианта использования функций (2.11.2):

а) ввести как внутренние степени свободы без привязки к конкретным «внутренним узлам». Тогда

$$\widehat{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) = \lambda_{\alpha_i}^r(\mathbf{x}), \quad i=1, 2, \dots, k. \quad (2.11.3)$$

Система функций (2.11.1) будет удовлетворять критерию полноты соответствующего порядка;

б) определить функции (2.1.6):

$$\varphi_i^r(\mathbf{x}) = \check{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k b_{ij} \lambda_j^r(\mathbf{x}), \quad (2.11.4)$$

где константы  $b_{ij}$  будут заданы из условия выполнения соответствующих тождеств критерия полноты.

Подставим (2.11.4) в тождества критерия полноты:

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} (\check{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^k b_{in} \lambda_n^r(\mathbf{x})) L_i(P_{\alpha_j}^r) - P_{\alpha_j}^r = \lambda_j^r(\mathbf{x}) - \sum_{(i) \in \Omega} \sum_{n=1}^k b_{in} \lambda_n^r(\mathbf{x}) L_i(P_{\alpha_j}^r). \quad (2.11.5)$$

Получаем  $k$  систем уравнений для определения  $b_{ij}$ :

$$\sum_{(i) \in \Omega} b_{ij} L_i(P_\alpha^r) = \begin{cases} 1, & \alpha = \alpha_j \\ 0, & \alpha \neq \alpha_j \end{cases}, \quad |\alpha| \leq p. \quad (2.11.6)$$

Полученные системы уравнений могут быть не определены, если число аппроксимирующих функций больше числа тождеств критерия полноты.

Функции  $\lambda_j^r$ , как правило, несовместны;

- для несовместных аппроксимаций выбирается совместная система функций, соответствующая тем же степеням свободы и удовлетворяющая критерию полноты (2.5.7) порядка  $p$  и условиям (2.6.2):

$$\left\{ \chi_i^r(\mathbf{x}), \chi_i^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^s, L_j \chi_i^r = L_j \check{\varphi}_i^r, (i), (j) \in \Omega_r \right\}. \quad (2.11.7)$$

Такой системой может быть, например, часть полной совместной системы функций с большим числом степеней свободы без учета функций, соответствующих некоторым степеням свободы;

- проверяются условия критерия несовместности (2.7.3) порядка  $p \geq t$ . Если он не выполнен, то выполняется корректировка аппроксимаций.

Введем дополнительные функции по числу уравнений  $k_p$  критерия несовместности (2.7.3):

$$\left\{ \mu_k^r(\mathbf{x}), k = 1, 2, \dots, k_p, L_i \mu_k^r(\mathbf{x}) = 0, (i) \in \Omega_r \right\}. \quad (2.11.8)$$

Корректировку функций  $\check{\varphi}_i^r(\mathbf{x})$  и  $\widehat{\varphi}_i^r(\mathbf{x})$  выполним следующим образом:

$$\psi^r(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{k_p} r_k \mu_k^r(\mathbf{x}). \quad (2.11.9)$$

Коэффициенты в (2.11.9) получаем как решения систем ненулевых уравнений из критерия несовместности (2.7.3) при  $|\alpha| \leq p$ :

$$\begin{aligned} [P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \sum_{k=1}^{k_p} r_{ik} \mu_k^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r} &= [P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \check{\varphi}_i^r(\mathbf{x}) - \chi_i^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r}, (i) \in \Omega_r, \\ [P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \sum_{k=1}^{k_p} r_{ik} \mu_k^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r} &= [P_{j,\alpha}^s(\mathbf{x}), \widehat{\varphi}_i^r(\mathbf{x})]_{\Omega_r}, (i) \in \widehat{\Omega}_r, \\ \alpha &= \{\alpha_j, \alpha_j, \dots, \alpha_{k_p}\} \in \mathcal{Z}. \end{aligned} \quad (2.11.10)$$

Функции  $\mu_k^r(\mathbf{x})$  должны обеспечивать невырожденность матрицы систем уравнений (2.11.10).

Покажем, что для системы функций (2.11.9) сохраняется порядок выполнения критерия полноты (2.5.7).

### Теорема 2.11.1

Пусть система функций (2.11.1) удовлетворяет критерию полноты (2.5.7) порядка  $p$ . Тогда корректировка ее по формулам (2.11.9) и (2.11.10) не понижает порядок критерия.

**Доказательство**

Пусть существует ненулевая функция в (2.11.2)

$$\zeta(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega} \psi_i(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{P}_{j_0, \alpha_0}^S) - \mathbf{P}_{j_0, \alpha_0}^S. \quad (2.11.11)$$

Но тогда функция  $\zeta(\mathbf{x})$  является линейной комбинацией функций (2.11.9), потому что

$$\zeta(\mathbf{x}) = \sum_{(i) \in \Omega} \varphi_i^r(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{P}_{j, \alpha}^S) - \sum_{(i) \in \Omega} \sum_{k=1}^{k_p} r_{ik} \mu_k^r(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{j, \alpha}^S = - \sum_{(i) \in \Omega} \sum_{k=1}^{k_p} r_{ik} \mu_k^r(\mathbf{x}).$$

Следовательно, при ненулевых коэффициентах не будут выполнены условия несовместности, т.к. матрица уравнений (2.11.10) невырождена. ■

**2.12. Метод подобластей (SubAreas, SA)**

Если полиномиальный закон определен на всем конечном элементе, то уже для реализующего теорию тонких плит Кирхгоффа-Лява прямоугольного элемента с тремя степенями свободы в узле невозможно построить совместную систему аппроксимирующих функций, представляющую собой просто определенные на всей области элемента полиномы. А, как известно, несовместность приводит к значительной потере точности метода.

Существует методика построения совместных элементов для решения таких задач путем введения кусочно-полиномиальных аппроксимаций.

В работе [110] при построении треугольных КЭ плиты с 9-ю и 12-ю степенями свободы был предложен метод подобластей, позволяющий значительно расширить область применения полиномиальных аппроксимаций. В ней треугольник разбивается медианами на три треугольника, на каждом из которых используются полиномы третьей степени. Так как двумерный полином третьей степени имеет 10-ть одночленов, то 30-ть коэффициентов однозначно определяются из:

- условий МКЭ (2.1.7):  $L_k \varphi_i = \delta_k^i$ ;
- условий совместности на границах элементов;
- дополнительных условий, обеспечивающих совместность на границах между областями.

В [37] данный прием был применен при построении треугольных КЭ плиты с 18-ю степенями свободы. На каждой из подобластей задавались полиномы 4-й степени.

В работе [114] аналогичный прием был применен при построении системы аппроксимирующих функций выпуклых четырехугольных конечных элементов плиты с 12-ю и 16-ю степенями свободы, где элемент разбивался диагоналями на четыре треугольника. На каждой из областей использовались также полиномы третьей степени и, соответственно, решалась система 40-го порядка. В [38] данный прием был использован при построении четырех-

угольных элементов с 24-мя степенями свободы с использованием полиномов 5-й степени. В [39, 117] приведены кусочные полиномы второго порядка для четырехугольного элемента плоской задачи теории упругости.

Будем считать, что все рассмотренные на рис. 2.12-1 КЭ лежат в пл. **XOY**. При этом первыми всегда нумеруются их вершины, а только потом промежуточные узлы на сторонах.

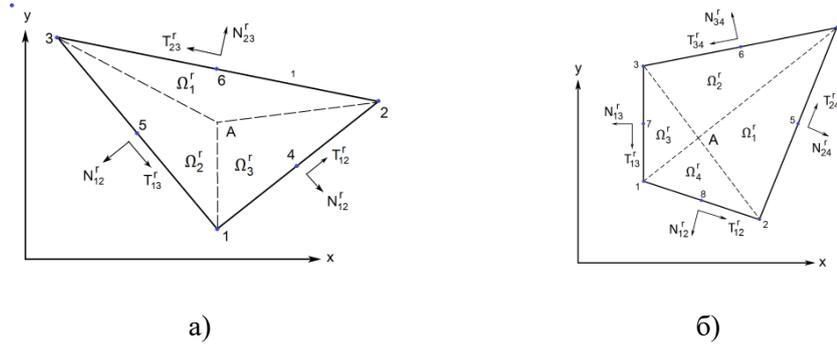


Рис. 2.12-1. Треугольный и четырехугольный элементы

Воспользуемся преобразованием системы координат **XOY** в специальную систему координат **ξOη**:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_2 - x_A)\xi + (x_4 - x_A)\eta \\ y = y_A + (y_2 - y_A)\xi + (y_4 - y_A)\eta \end{cases} \quad (2.12.1)$$

где:  $x_A, y_A$  для треугольных КЭ – точка пересечения медиан, для четырехугольных – точка пересечения диагоналей.

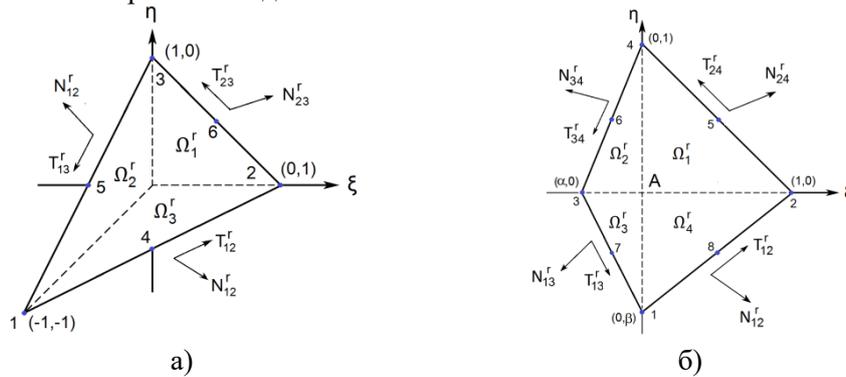


Рис. 2.12-2. Треугольный и четырехугольный элементы в специальных системах координат

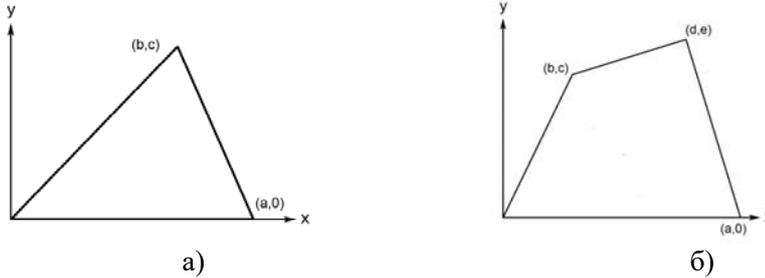
На рис. 2.12-2 изображены треугольный и четырехугольный элементы, преобразованные в специальные системы координат. На этих рисунках приведены используемые в дальнейшем нумерация узлов и подобластей, координаты узлов после преобразования (их значения или обозначения).

Запишем (2.12.1) в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = S_r \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}, \quad S_r = \begin{bmatrix} x_i - x_A & x_j - x_A \\ y_i - y_A & y_j - y_A \end{bmatrix} \quad (2.12.2)$$

Преобразование вектора нормали  $N_k$  к стороне элемента тогда запишется в следующем виде:

$$\mathbf{n}_k = S_r^{-1} N_k = \{n_{\xi_k}, n_{\eta_k}\}^T. \quad (2.12.3)$$



**Рис. 2.12-3.** Треугольный и четырехугольный элементы в местных системах координат

Преобразование можно значительно упростить, если расположить элементы так, как это показано на рис. 2.12-3.

Для треугольного элемента тогда:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}((2a-b)\xi + (2b-a)\eta + a + b) \\ y = \frac{c}{3}(-\xi + 2\eta + 1) \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = \frac{2}{a}x + \frac{1}{c}(1 - \frac{2b}{a})y - 1 \\ \eta = \frac{1}{a}x + \frac{1}{c}(2 - \frac{b}{a})y - 1 \end{cases}, \quad (2.12.4)$$

или 
$$\begin{cases} \xi = r_{11}x + r_{12}y - 1 \\ \eta = r_{21}x + r_{22}y - 1 \end{cases}, \quad r_{11} = \frac{2}{a}, \quad r_{21} = \frac{1}{a}, \quad r_{12} = \frac{a-2b}{ac}, \quad r_{22} = \frac{2a-b}{ac}. \quad (2.12.5)$$

Для четырехугольного элемента:

$$\begin{cases} x = (a - \frac{d\beta}{\beta-1})\xi - \frac{d}{\beta-1}(\eta - \beta) \\ y = \frac{e}{\beta-1}(-\xi\beta - \eta + \beta) \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{ae}(ex - dy) \\ \eta = \frac{cx + (a-b)y - ac}{cd + (a-b)e - ac} \end{cases}, \quad (2.12.6)$$

или 
$$\begin{cases} \xi = r_{11}x + r_{12}y \\ \eta = r_{21}x + r_{22}y + \beta \end{cases}, \quad (2.12.7)$$

где  $r_{11} = \frac{1}{a}$ ,  $r_{12} = -\frac{d}{ae}$ ,  $r_{21} = \frac{c}{cd + (a-b)e - ac}$ ,  $r_{22} = \frac{a-b}{cd + (a-b)e - ac}$ ,

$$\alpha = \frac{eb - dc}{ac}, \quad \beta = -\frac{ac}{cd + (a-b)e - ac}$$

Возможен такой подход к построению аппроксимаций:

- представим одномерные функции на каждой из подобластей  $\Omega_j^r$  полиномами соответствующей степени (не обязательно полными):

$$\varphi_i(\xi, \eta) = C_{j1}^i + C_{j2}^i \xi + C_{j3}^i \eta + C_{j4}^i \xi^2 + C_{j5}^i \xi \eta + C_{j6}^i \eta^2 + \dots; \quad (2.12.8)$$

- составим уравнения совместности на границах между подобластями;
- составим уравнения МКЭ (2.1.7);
- добавим, при необходимости, условия совместности на сторонах элемента или уравнения критерия несовместности (2.11.10).

Пусть теперь известны функции  $\psi_i(\xi, \eta)$ , которые являются на каждой из подобластей  $\Omega_j^r$  полиномами требуемой степени, удовлетворяют условиям МКЭ (2.1.7) и обеспечивают необходимую гладкость на границе элемента. Но у них могут быть нарушены условия совместности на границах подобластей.

Аппроксимирующие функции системы (2.1.6) для рассматриваемых элементов будем искать в виде:

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \psi_i(\xi, \eta) + \lambda_i(\xi, \eta). \quad (2.12.9)$$

Дополнительные условия для обеспечения требуемой гладкости в  $\Omega_r$  и сходимости МКЭ обеспечим за счет корректирующих функций  $\lambda_i(\xi, \eta)$ . Представим их на каждой из подобластей  $\Omega_j^r$  в следующем виде:

$$\lambda_i(\xi, \eta) = \left(1 - \frac{\xi}{a_j} - \frac{\eta}{b_j}\right)^m (C_{j1}^i + C_{j2}^i \xi + C_{j3}^i \eta + C_{j4}^i \xi^2 + C_{j5}^i \xi \eta + C_{j6}^i \eta^2 \dots), \quad (2.12.10)$$

где:  $m$  – индекс рассматриваемого пространства вариационной задачи  $W_2^m$ ;

$a_j, b_j$  – координаты вершин подобласти  $\Omega_j^r$  в системе координат  $\xi O \eta$ :

- для треугольных элементов  $a_3=b_2=1, b_3=a_2=0, a_2=b_3=-1$ ;
- для четырехугольных –  $a_3=b_4=1, b_3=a_4=b_2=a_1=0, a_1=\alpha, b_2=\beta$ .

Коэффициенты  $C_{kj}^i$  в (2.12.10) могут быть найдены как решения систем линейных алгебраических уравнений, полученных из условий гладкости функции  $\varphi_n(\xi, \eta)$  в точке  $A$  – условий равенства для различных подобластей  $\Omega_j^r$  значений функций и их производных (или их комбинаций):

$$\zeta_{ij}^k(\varphi_n) = \lim_{\xi, \eta \rightarrow 0, \xi, \eta \in \Omega_r^k} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \varphi_n(\xi, \eta), \quad (n) \in \Omega_r. \quad (2.12.11)$$

Условия выбираются таким образом, чтобы обеспечить гладкость аппроксимирующих функций и условия сходимости МКЭ. Конкретный вид данных условий и соответствующих им уравнений будет приведен при построении соответствующих конечных элементов.

Существует и другой способ применения функций  $\lambda_i(\xi, \eta)$ , если их добавить в качестве внутренних степеней свободы.

Применение метода подобластей несколько усложняет построение аппроксимаций, но это плата за совместность. А в случае элементов сложной формы этот метод предпочтительнее, например, изопараметрических элемен-

тов, использование которых приводит к появлению погрешности численного интегрирования.

## Глава 3. Трехмерная задача теории упругости

### 3.1. Основные уравнения

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в произвольной точке трехмерного тела  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}^T$ , на которую действуют внешние объемные нагрузки  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_x, f_y, f_z\}^T$ , под действием которых вызываются перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u, v, w\}^T$ .

Выделим вокруг этой точки элементарный параллелепипед, изображенный на рис. 3.1-1. На гранях параллелепипеда приложены напряжения, которые статически эквивалентны действию отброшенных частей тела:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальные напряжения, параллельные осям  $X, Y$  и  $Z$ ;

$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$  – касательные напряжения в соответствующих плоскостях.

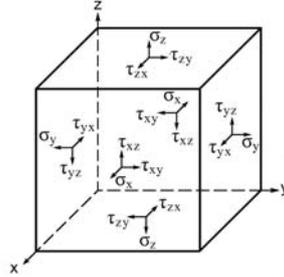


Рис. 3.1-1. Напряжения в трехмерном теле

Если объем параллелепипеда стремится к нулю, то напряженное состояние в точке  $\mathbf{x}$  характеризуется вектором нормальных и касательных напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \}^T. \quad (3.1.1)$$

С учетом закона парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

В рассматриваемой точке уравнения равновесия Навье имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

### Деформации

Деформация точки  $\mathbf{x}$  трехмерного тела описывается вектором

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \}^T, \quad (3.1.3)$$

где:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – линейные деформации,

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – сдвиговые.

При линейной постановке соотношения между перемещениями  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u, v, w\}^T$  и деформациями Коши (1.3.2) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

В линейном случае деформации и перемещения связаны между собой дополнительными шестью равенствами, т. н. уравнениями совместности деформаций Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

### Обобщенный закон Гука

При линейной зависимости деформации и изотропии материала напряжения и деформации связаны законом Гука в следующем виде без учета температурных деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z), & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Или, после обращения:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\vartheta, & \sigma_{xy} &= G\tau_{xy}, \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\vartheta, & \sigma_{yz} &= G\tau_{yz}, \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\vartheta, & \sigma_{xz} &= G\tau_{xz}.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

где:  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  
 $\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – объемная деформация,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ – коэффициенты Ляме.} \tag{3.1.8}$$

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  в (1.3.1) и (1.3.2):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix}. \tag{3.1.9}$$

В самом общем случае для анизотропного тела матрица  $\mathbf{C}$  связи напряжений и деформаций в (1.3.1) имеет вид [1,50]:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{yz,x}}{E_x} \\ \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_y} \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} & \frac{\eta_{xz,z}}{E_z} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_z} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} & 1 & \frac{\mu_{xz,xy}}{G_{xy}} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,xz}}{G_{xz}} & \frac{\mu_{xy,xz}}{G_{xz}} & 1 & \frac{\mu_{yz,xz}}{G_{xz}} \\ \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xz,yz}}{G_{yz}} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.1.10}$$

И, следовательно:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_{yx}\sigma_y - \nu_{zx}\sigma_z + \eta_{xy,x}\tau_{xy} + \eta_{xz,x}\tau_{xz} + \eta_{yz,x}\tau_{yz}), \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_y}(-\nu_{xy}\sigma_x + \sigma_y - \nu_{zy}\sigma_z + \eta_{xy,y}\tau_{xy} + \eta_{xz,y}\tau_{xz} + \eta_{yz,y}\tau_{yz}), \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E_z}(-\nu_{xz}\sigma_x - \nu_{yz}\sigma_y + \sigma_z + \eta_{xy,z}\tau_{xy} + \eta_{xz,z}\tau_{xz} + \eta_{yz,z}\tau_{yz}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} (\eta_{x,xy} \sigma_x + \eta_{y,xy} \sigma_y + \eta_{z,xy} \sigma_z + \tau_{xy} + \mu_{xz,xy} \tau_{xz} + \mu_{yz,xy} \tau_{yz}), \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} (\eta_{x,xz} \sigma_x + \eta_{y,xz} \sigma_y + \eta_{z,xz} \sigma_z + \mu_{xy,xz} \tau_{xy} + \tau_{xz} + \mu_{yz,xz} \tau_{yz}), \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} (\eta_{x,yz} \sigma_x + \eta_{y,yz} \sigma_y + \eta_{z,yz} \sigma_z + \mu_{xy,yz} \tau_{xy} + \mu_{xz,yz} \tau_{xz} + \tau_{yz}), \quad (3.1.11)
\end{aligned}$$

где:

- $E_x, E_y$  и  $E_z$  – модули упругости материала по осям X, Y и Z;
- $G_{xy}, G_{xz}$  и  $G_{yz}$  – модули сдвига в соответствующих плоскостях, характеризующие изменение угла;
- $\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$  – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сокращение при сжатии или расширение при растяжении в направлении соответствующих осей координат;
- $\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}, \eta_{xy,z}, \eta_{xz,x}, \eta_{xz,y}, \eta_{xz,z}, \eta_{yz,x}, \eta_{yz,y}, \eta_{yz,z}$  – коэффициенты взаимовлияния первого рода, характеризующие удлинения в направлении осей координат под действием касательных напряжений, действующих в координатных плоскостях;
- $\eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}, \eta_{z,xy}, \eta_{x,xz}, \eta_{y,xz}, \eta_{z,xz}, \eta_{x,yz}, \eta_{y,yz}, \eta_{z,yz}$  – коэффициенты взаимовлияния второго рода, характеризующие сдвиги в координатных плоскостях от нормальных напряжений, действующих в направлении осей координат;
- $\mu_{xy,yz}, \mu_{xy,xz}, \mu_{yz,xy}, \mu_{xz,xy}, \mu_{xz,yz}, \mu_{yz,xz}$  – коэффициенты, характеризующие сдвиги в плоскостях, параллельных координатным, вызванные касательными напряжениями, действующими в других плоскостях.

При этом выполняются условия симметрии:

$$\begin{aligned}
E_x \nu_{xy} &= E_y \nu_{yx}, & E_x \nu_{xz} &= E_z \nu_{zx}, & E_y \nu_{yz} &= E_z \nu_{zy}, \\
E_x \eta_{x,xy} &= G_{xy} \eta_{xy,x}, & E_x \eta_{x,xz} &= G_{xz} \eta_{xz,x}, & E_x \eta_{x,yz} &= G_{yz} \eta_{yz,x}, \\
E_y \eta_{y,xy} &= G_{xy} \eta_{xy,y}, & E_y \eta_{y,xz} &= G_{xz} \eta_{xz,y}, & E_y \eta_{y,yz} &= G_{yz} \eta_{yz,y}, \\
E_z \eta_{z,xy} &= G_{xy} \eta_{xy,z}, & E_z \eta_{z,xz} &= G_{xz} \eta_{xz,z}, & E_z \eta_{z,yz} &= G_{yz} \eta_{yz,z}, \\
G_{xy} \mu_{xy,xz} &= G_{xz} \mu_{xz,xy}, & G_{xy} \mu_{xy,yz} &= G_{yz} \mu_{yz,xy}, & G_{xz} \mu_{xz,yz} &= G_{yz} \mu_{yz,xz}. \quad (3.1.12)
\end{aligned}$$

Существуют три инварианта, связывающие перечисленные упругие постоянные. Таким образом, получаем из 36-ти всего 18-ть независимых величин.

Рассматриваются частные случаи анизотропии:

- **ортотропия**, когда три плоскости упругой симметрии совпадают с координатными осями, и обобщенный закон Гука упрощается из-за равенства нулю всех дополнительных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_z, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} z_{xy}, \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{yz}}{E_z} \sigma_z, & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} z_{xz}, \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} z_{yz};
\end{aligned} \quad (3.1.13)$$

- **трансверсальная ортотропия** является частным случаем ортотропии, когда жесткости по двум направлениям совпадают. Например,

$$E_x = E_y = E, \quad \nu_{xy} = \nu_{yx}, \quad G_{xz} = G_{yz} = G. \quad (3.1.14)$$

Для изотропного тела уравнения равновесия Навье (3.1.2) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений Ляме:

$$\begin{cases}
G\Delta u + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} + f_x = 0 \\
G\Delta v + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} + f_y = 0, \\
G\Delta w + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial z} + f_z = 0
\end{cases} \quad (3.1.15)$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ,

$\lambda, G$  – коэффициенты Ляме (3.1.8).

### Усредненные углы поворота

В [61] рассматриваются величины, которые можно интерпретировать как усредненные углы поворота вокруг соответствующих осей:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.1.16)$$

Существует большое число элементов, в которых вводятся степени свободы, соответствующие (3.1.16).

### Преобразования систем координат

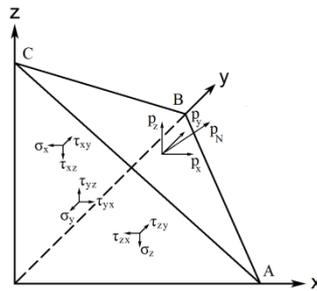


Рис. 3.1-2. Напряжения на наклонной площадке

Пусть в рассматриваемой точке уже известны напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям. Рассмотрим тетраэдр, изображенный на рис. 3.1-2 с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и определим напряжения на наклонной площадке ABC.

Составляя уравнения равновесия, получаем, что проекции напряжения  $\mathbf{p}_N = \{p_x, p_y, p_z\}^T$  по нормали  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  к данной площадке равны:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ p_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ p_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Но  $\sigma_N$ , как равнодействующая, равна сумме проекций  $\mathbf{p}_N$  на нормаль:

$$\sigma_N = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{xz} n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z. \quad (3.1.18)$$

Формулы для остальных компонент напряженно деформированного состояния получаем аналогично.

Выведем формулы (3.1.18) как преобразование систем координат. Рассмотрим две системы прямоугольных координат XYZ и X'Y'Z', начала которых совпадают и пусть матрица ортогонального преобразования (матрица косинусов) имеет вид:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1.19)$$

Т.к.  $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$ , то в (2.10.2) матрица Якоби  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$ , и

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right\}^T = \mathbf{S}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T. \quad (3.1.20)$$

Тогда:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + m_1 \frac{\partial}{\partial y'} + n_1 \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \frac{\partial}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial}{\partial y'} + n_2 \frac{\partial}{\partial z'} & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \frac{\partial}{\partial x'} + m_3 \frac{\partial}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial}{\partial z'} \\ l_2 \frac{\partial}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial}{\partial y'} + n_2 \frac{\partial}{\partial z'} & l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + m_1 \frac{\partial}{\partial y'} + n_1 \frac{\partial}{\partial z'} & 0 \\ l_3 \frac{\partial}{\partial x'} + m_3 \frac{\partial}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + m_1 \frac{\partial}{\partial y'} + n_1 \frac{\partial}{\partial z'} \\ 0 & l_3 \frac{\partial}{\partial x'} + m_3 \frac{\partial}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial}{\partial z'} & l_2 \frac{\partial}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial}{\partial y'} + n_2 \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \mathbf{u}',$$

где  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \{u', v', w'\}^T$  – перемещения точки в системе координат X'Y'Z'.

После соответствующих преобразований получаем для деформаций и напряжений следующие зависимости:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{S}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{S}_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{S}_\varepsilon - \text{матрица преобразования}, \quad (3.1.21)$$

$$\mathbf{S}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & l_2 n_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & l_3 n_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.22)$$

Так как преобразование ортогонально, то  $\mathbf{S}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{S}_\varepsilon^T$ .

Матрица связи деформаций и напряжений  $\mathbf{C}$  в физических уравнениях (1.3.1) при  $\mathbf{S}_\varepsilon$  – матрица преобразования перехода к новой системе координат:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}', \quad \mathbf{C}' = \mathbf{S}_\varepsilon^T \mathbf{C} \mathbf{S}_\varepsilon. \quad (3.1.23)$$

Если материал тела изотропный, то зависимости (3.1.6) и (3.1.7) для ортогонального преобразования (3.1.19) инвариантны относительно преобразования:  $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$ .

Для вектора усредненных углов поворота преобразование совпадает с (3.1.19):

$$\boldsymbol{\omega}' = \begin{Bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}. \quad (3.1.24)$$

### Краевые условия

Краевыми условиями в точках на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$  могут быть:

- **кинематические**, когда заданы значения перемещений. Если на части поверхности заданы все три нулевые компоненты перемещений, то говорят о жестком защемлении. Данные краевые условия являются главными при решении вариационной задачи минимизации функционала Лагранжа;
- **статические граничные условия** – равенство внутренних усилий поверхностным нагрузкам в точках границы. Данные краевые условия являются естественными при решении вариационной задачи минимизации функционала Лагранжа.

Пусть площадка  $ABC$  на рис 3.1-2 – касательная плоскость в точке  $\mathbf{x}$  на границе  $\Gamma$ ,  $\{n_x, n_y, n_z\}^T$  – нормаль к ней. Если  $\mathbf{p}_N = \{p_x, p_y, p_z\}^T$  – внешняя поверхностная нагрузка, то (3.1.17) являются условиями равновесия в точке границы.

Очевидно, что в точке на границе могут быть заданы одновременно и статические, и кинематические краевые условия. Например, закрепление по оси  $Ox$  и нагрузка, действующая по оси  $Oy$ .

### Температурные воздействия

В процессе эксплуатации конструкции температурные напряжения при ее нагреве или охлаждении могут быть определяющими при оценке напряженно деформированного состояния. Для зданий и сооружений является обязательным учет изменения температуры по отношению к температуре в момент замыкания конструкции или ее части в законченную систему<sup>1</sup>.

Если рассмотреть элементарный параллелепипед из изотропного материала и нагреть его на  $\delta t^\circ$ , то в результате нагревания элемент длины  $ds$  получает новую длину  $(1+\alpha\delta t)ds$ , где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала. Т.е.

$$\varepsilon_{x,t} = \alpha\delta t, \quad \varepsilon_{y,t} = \alpha\delta t, \quad \varepsilon_{z,t} = \alpha\delta t, \quad \gamma_{xy,t} = \gamma_{xz,t} = \gamma_{yz,t} = 0.$$

Если элемент не имеет возможности свободно расширяться, то возникают температурные/тепловые напряжения, которые необходимо учесть в физических уравнениях (1.3.1), где:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}) = \{\alpha t, \alpha t, \alpha t, 0, 0, 0\}^T \in \mathcal{R}^6. \quad (3.1.25)$$

Для ортотропного материала коэффициенты температурного расширения могут быть разными по главным осям инерции:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}) = \{\alpha_x \delta t, \alpha_y \delta t, \alpha_z \delta t, 0, 0, 0\}^T. \quad (3.1.26)$$

Подставив (3.1.25) или (3.1.26) в (1.4.12) получим учет температурных деформаций в потенциальной энергии.

### Главные напряжения

При выборе системы координат вычисления усилий существует такая система координат, в которой касательные напряжения равны нулю. Площадки, лежащие в координатных плоскостях этой системы координат, называются главными. Для вычисления направляющих косинусов преобразования (3.1.19) к системе координат главных площадок рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0 \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0, \quad i=1,2,3, \\ \tau_{xz}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0 \end{cases} \quad (3.1.27)$$

ненулевое решение которой существует при равенстве нулю ее определителя:

$$|\mathbf{T}_g - \sigma_i \mathbf{E}| = 0 \quad (3.1.28)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица  $3 \times 3$ , а

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \text{тензор напряжений.} \quad (3.1.29)$$

<sup>1</sup> Т.н. «температура замыкания».

Уравнение (3.1.28) в общем случае является уравнением третьего порядка, его решения  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , называются *главными напряжениями*, а значение определителя  $\mathbf{T}_g$  является инвариантом преобразований систем координат – не зависит от их выбора.

### Главные деформации

При выборе системы координат существует такая система координат, в которой сдвиговые деформации равны нулю. Площадки, лежащие в координатных плоскостях этой системы координат, называются *главными направлениями*. Для вычисления направляющих косинусов преобразования (3.1.19) к системе координат главных направлений рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} 2(\varepsilon_x - \varepsilon_i)l_i + \gamma_{xy}m_i + \gamma_{xz}n_i = 0 \\ \gamma_{xy}l_i + 2(\varepsilon_y - \varepsilon_i)m_i + \gamma_{yz}n_i = 0, \quad i=1,2,3, \\ \gamma_{xz}l_i + \gamma_{yz}m_i + 2(\varepsilon_z - \varepsilon_i)n_i = 0 \end{cases} \quad (3.1.30)$$

ненулевое решение которой существует при равенстве нулю ее определителя:

$$|\mathbf{T}_\varepsilon - \varepsilon_i \mathbf{E}| = 0, \quad (3.1.31)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} - \text{матрица тензора деформаций.} \quad (3.1.32)$$

Уравнение (3.1.31) в общем случае является уравнением третьего порядка, его решения  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2,3$ ,  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ , называются *главными деформациями*.

### Функционалы

Запишем уравнения равновесия (3.1.2) в матричной форме, используя представление (3.1.9) дифференциального матричного оператора  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{где } \mathbf{B} = -\mathbf{A}^T. \quad (3.1.33)$$

Заменяя физические уравнения (1.3.1) на (3.1.7), геометрические уравнения (1.3.2) на (3.1.4), уравнения равновесия (1.3.3) на (3.1.6) или (3.1.11), учитывая при этом температурные воздействия, получим для трехмерной задачи теории упругости функционалы Лагранжа (1.4.11), Кастельяно (1.4.15), Рейсснера (1.4.16) и смешанный функционал (1.4.18).

В функционал Лагранжа входят только производные первого порядка функций перемещений, и, следовательно, энергетическое пространство задачи совпадает с пространством Соболева  $W_2^1(\Omega)$ .

### 3.2. Степени свободы трехмерных конечных элементов

Для решения трехмерной задачи теории упругости используются, как правило, конечные элементы, имеющие геометрическую форму тетраэдра, параллелепипеда, треугольной призмы. Если можно конформно отобразить область элемента на них, то говорят об изопараметрических элементах.

Простейшие элементы имеют узлы, совпадающие с вершинами многогранников. В элементах с повышенной аппроксимацией добавляются узлы, лежащие на их ребрах.

#### Элементы с тремя степенями свободы в узле

Классические конечные элементы в каждом узле имеют по три степени свободы:  $u_i, v_i, w_i, i=1,2,\dots,N_r$ , где  $N_r$  – число узлов элемента.

При построении большинства элементов перемещения для трехмерной задачи теории упругости аппроксимируются независимо по каждой координате. Т.е. вводится система функций

$$\{\varphi_1^f(x,y,z), \varphi_2^f(x,y,z), \dots, \varphi_{N_r}^f(x,y,z)\}^T, \quad (3.2.1)$$

а поле перемещений представляется в виде:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N_r} \begin{Bmatrix} u_i \varphi_i^f(x,y,z) \\ v_i \varphi_i^f(x,y,z) \\ w_i \varphi_i^f(x,y,z) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_r} (u_i \boldsymbol{\varphi}_{i,x}^f + v_i \boldsymbol{\varphi}_{i,y}^f + w_i \boldsymbol{\varphi}_{i,z}^f), \quad (3.2.2)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^f = \begin{Bmatrix} \varphi_{i,x^i}^f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{i,y}^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{i,z}^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_i \end{Bmatrix}.$$

Конечные элементы имеют  $3N_r$  степеней свободы, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{u_1, v_1, w_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, w_{N_r}\},$$

и, соответственно, порядок следования аппроксимаций в (2.1.6):

$$\{\varphi_{1,x}^f, \varphi_{1,y}^f, \varphi_{1,z}^f, \dots, \varphi_{N_r,x}^f, \varphi_{N_r,y}^f, \varphi_{N_r,z}^f\}.$$

#### Элементы с вращательными степенями свободы

Более сложными являются элементы с шестью степенями свободы в узле:

- к значениям перемещений  $u_i, v_i, w_i$  добавляются **усредненные углы поворота** (3.1.16):  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Построение элементов с такими степенями свободы, как правило, приводит к несовместным аппроксимациям или нарушениям существующей симметрии расчетной схемы;
- к значениям перемещений  $u_i, v_i, w_i$  добавляются **аналоги углов поворота** (3.1.16):  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ . Особенностью этих аппроксимаций является то, что ра-

венства (2.1.7) для данных степеней свободы заменяются условиями непрерывности на ребрах и гранях.

Элементы с вращательными степенями свободы имеют  $6N_r$  степеней свободы, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{u_1, v_1, w_1, \omega_{x,1}, \omega_{y,1}, \omega_{z,1}, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, w_{N_r}, \omega_{x,N_r}, \omega_{y,N_r}, \omega_{z,N_r}\}, \quad (3.2.3)$$

$$\text{или} \quad \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x,1}, \theta_{y,1}, \theta_{z,1}, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, w_{N_r}, \theta_{x,N_r}, \theta_{y,N_r}, \theta_{z,N_r}\}. \quad (3.2.4)$$

Соответствующая им система аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), (i) \in \Omega_r, j = 1 \div 6\}. \quad (3.2.5)$$

Поле перемещений представляется в виде:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r + w_i \varphi_{i,3}^r + \omega_{i,x} \varphi_{i,4}^r + \omega_{i,y} \varphi_{i,5}^r + \omega_{i,z} \varphi_{i,6}^r), \quad (3.2.6)$$

$$\text{или} \quad u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r + w_i \varphi_{i,3}^r + \theta_{i,x} \varphi_{i,4}^r + \theta_{i,y} \varphi_{i,5}^r + \theta_{i,z} \varphi_{i,6}^r), \quad (3.2.7)$$

где функции  $\varphi_{ij}^r = \{\varphi_{ij,u}^r, \varphi_{ij,v}^r, \varphi_{ij,w}^r\}^T$ ,  $i=1, 2, \dots, N_r$ ,  $j=1 \div 6$  могут иметь все ненулевые компоненты.

### 3.3. Конечные элементы с полиномиальными аппроксимациями

Для упрощения дальнейших выкладок воспользуемся вспомогательной системой координат. Выделим четыре любых узла элемента с номерами  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , которые не лежат в одной плоскости, а вектора  $n_1n_2, n_1n_3$  и  $n_1n_4$  являются ребрами и образуют правую тройку.

Выполним в общем случае не ортогональное преобразование, чтобы центр системы координат  $\xi\eta\zeta$  находился в первом узле, а узлы  $n_2, n_3, n_4$  – на соответствующих осях в точке с единичной координатой:

$$\begin{cases} x = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1})\xi + (x_{n_3} - x_{n_1})\eta + (x_{n_4} - x_{n_1})\zeta \\ y = y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1})\xi + (y_{n_3} - y_{n_1})\eta + (y_{n_4} - y_{n_1})\zeta, \\ z = z_{n_1} + (z_{n_2} - z_{n_1})\xi + (z_{n_3} - z_{n_1})\eta + (z_{n_4} - z_{n_1})\zeta \end{cases} \quad (3.3.1)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T = J^{-1}(\xi, \eta, \zeta) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\}^T. \quad (3.3.2)$$

Матрица Якоби (2.10.3)

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} x_{n_2} - x_{n_1} & y_{n_2} - y_{n_1} & z_{n_2} - z_{n_1} \\ x_{n_3} - x_{n_1} & y_{n_3} - y_{n_1} & z_{n_3} - z_{n_1} \\ x_{n_4} - x_{n_1} & y_{n_4} - y_{n_1} & z_{n_4} - z_{n_1} \end{bmatrix}. \quad (3.3.3)$$

### 3.3.1. Тетраэдр с узлами в вершинах

Простейший элемент, имеющий четыре узла, изображен на рис. 3.3-1а. Все его четыре грани считаются плоскими.

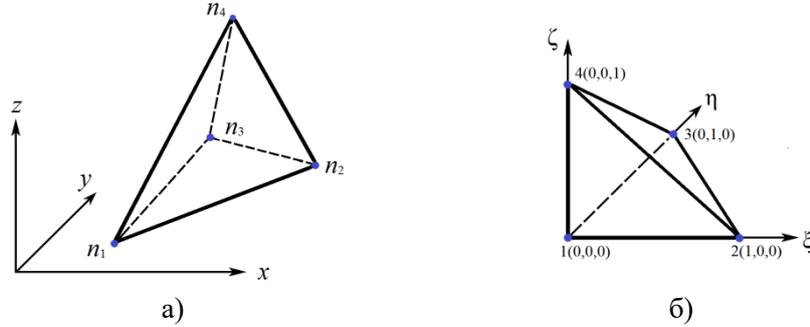


Рис. 3.3-1. Тетраэдр и его мастер-элемент

При построении системы аппроксимирующих функций (2.1.6) поле перемещений аппроксимируется по линейному закону:

$$\varphi_j(x, y, z) = C_1^j + C_2^j x + C_3^j y + C_4^j z. \quad (3.3.4)$$

На основании свойств (2.1.7) составляем систему уравнений

$$C_1^j + C_2^j x_j + C_3^j y_j + C_4^j z_j = \delta_j^j, \quad j=1,2,3,4, \quad (3.3.5)$$

которая однозначно определяет все коэффициенты  $C_j^i$ .

Если воспользоваться вспомогательным преобразованием (3.3.1), то тетраэдр преобразуется к форме, представленной на рис. 3.3-1б, система уравнений (3.3.5) для него упрощается, а ее решение имеет вид:

$$\varphi_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad \varphi_2 = \xi, \quad \varphi_3 = \eta, \quad \varphi_4 = \zeta. \quad (3.3.6)$$

Номера узлов, соответствующие аппроксимирующим функциям, приведены на рис. 3.3-1б.

### 3.3.2. 10-ти узловой тетраэдр

Более сложным является элемент тетраэдр, имеющий дополнительно точки на всех ребрах – элемент с 10-ю узлами, изображенный на рис. 3.3-2а.

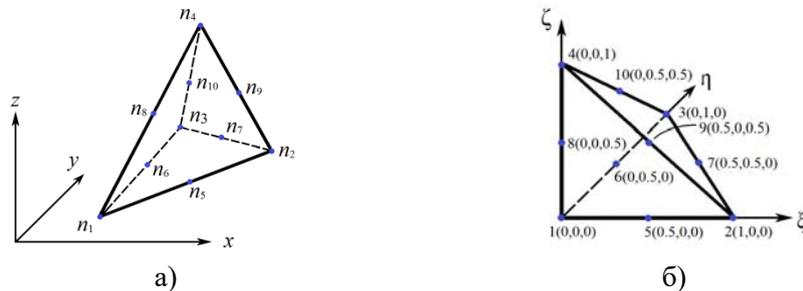


Рис. 3.3-2. 10-ти узловой тетраэдр и его мастер-элемент

При построении его системы аппроксимирующих функций (2.1.6) поле перемещений аппроксимируется по квадратичному закону:

$$\varphi_i(x, y, z) = C_1^i + C_2^i x + C_3^i y + C_4^i z + C_5^i x^2 + C_6^i y^2 + C_7^i z^2 + C_8^i xy + C_9^i xz + C_{10}^i yz, \quad (3.3.7)$$

где коэффициенты  $C_j^i$  однозначно определены как решения систем на основании свойств (2.1.7).

Воспользуемся заменой системы координат (3.3.1) и преобразуем тетраэдр к форме, представленной на рис. 3.3-2б. Если считать, что точки на ребрах тетраэдра делят их пополам, то систему функций для него можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 - \xi - \eta - \zeta)(1 - 2\xi - 2\eta - 2\zeta), & \varphi_6 &= 4\eta(1 - \xi - \eta - \zeta), \\ \varphi_2 &= \xi(2\xi - 1), & \varphi_7 &= 4\xi\eta, \\ \varphi_3 &= \eta(2\eta - 1), & \varphi_8 &= 4\zeta(1 - \xi - \eta - \zeta), \\ \varphi_4 &= \zeta(2\zeta - 1), & \varphi_9 &= 4\xi\zeta, \\ \varphi_5 &= 4\xi(1 - \xi - \eta - \zeta), & \varphi_{10} &= 4\eta\zeta. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Номера узлов и их координаты, соответствующие аппроксимирующим функциям, приведены на рис. 3.3-2б.

### 3.3.3. Прямой параллелепипед с узлами в вершинах

Параллелепипед, имеющий восемь узлов, изображен на рис. 3.3-3а. Если воспользоваться вспомогательным преобразованием (3.3.1), то он преобразуется к форме, представленной на рис. 3.3-3б.

Используется полилинейная аппроксимация поля перемещений по области мастер-элемента.

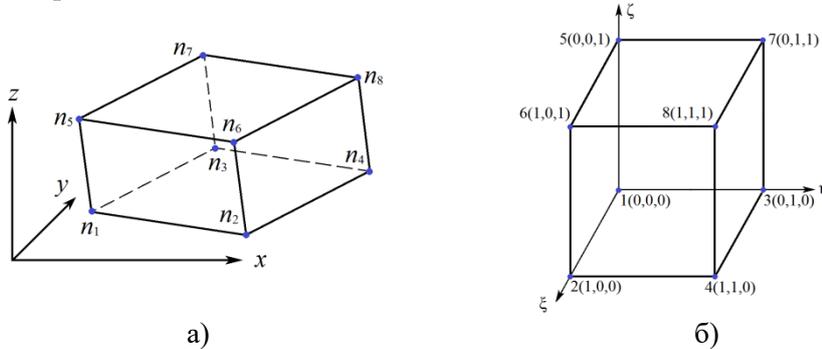


Рис. 3.3-3. Параллелепипед и его мастер-элемент

Система функций (3.2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), & \varphi_2 &= \xi(1 - \eta)(1 - \zeta), \\ \varphi_3 &= (1 - \xi)\eta(1 - \zeta), & \varphi_4 &= \xi\eta(1 - \zeta), \\ \varphi_5 &= (1 - \xi)(1 - \eta)\zeta, & \varphi_6 &= \xi(1 - \eta)\zeta, \\ \varphi_7 &= (1 - \xi)\eta\zeta, & \varphi_8 &= \xi\eta\zeta. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

### 3.3.4. Прямой 20-ти узловой параллелипипед

Рассмотрим прямой параллелипипед с гранями, имеющими дополнительно точки на серединах всех ребер – элемент с 20-ю узлами, изображенный на рис. 3.3-4.

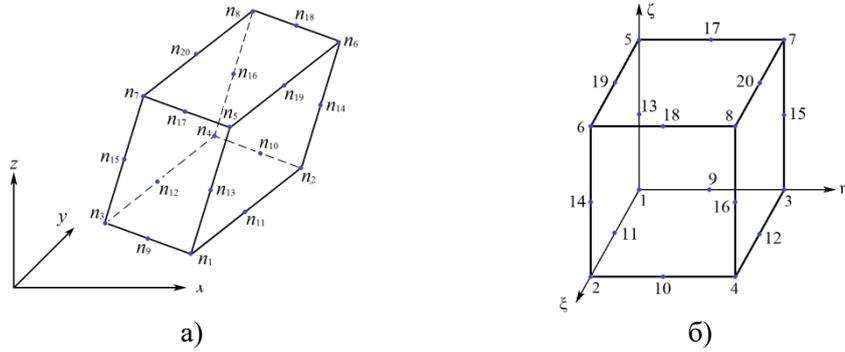


Рис. 3.3-4. 20-ти узловой параллелипипед и его мастер-элемент

При построении системы аппроксимирующих функций (2.1.6) поле перемещений аппроксимируется по области мастер-элемента неполным полиномом 4-й степени:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, \zeta) = & c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\zeta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\zeta^2 + c_8\xi\eta + \\ & c_9\xi\zeta + c_{10}\eta\zeta + c_{11}\xi^2\eta + c_{12}\xi^2\zeta + c_{13}\xi\eta^2 + c_{14}\xi\zeta^2 + c_{15}\eta^2\zeta + \\ & c_{16}\eta\zeta^2 + c_{17}\xi\eta\zeta + c_{18}\xi^2\eta\zeta + c_{19}\xi\eta^2\zeta + c_{20}\xi\eta\zeta^2. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Используемая нумерация узлов показана на рис. 3.3-4б, а их приведенные координаты приведены в таблице 3.3-1:

Таблица 3.3-1. Приведенные координаты узлов параллелипипеда

Узел	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	Узел	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	Узел	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
1	0	0	0	8	1	1	1	15	0	1	0.5
2	1	0	0	9	0	0.5	0	16	1	1	0.5
3	0	1	0	10	1	0.5	0	17	0	0.5	1
4	1	1	0	11	0.5	0	0	18	1	0.5	1
5	0	0	1	12	0.5	1	0	19	0.5	0	1
6	1	0	1	13	0	0	0.5	20	0.5	1	1
7	0	1	1	14	1	0	0.5				

Решение системы уравнений (2.1.7) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(1-2\xi-2\eta-2\zeta), & \varphi_{11} &= 4\xi(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ \varphi_2 &= \xi(1-\eta)(1-\zeta)(2\xi-2\eta-2\zeta-1), & \varphi_{12} &= 4\xi(1-\xi)\eta(1-\zeta), \\ \varphi_3 &= (1-\xi)\eta(1-\zeta)(-2\xi+2\eta-2\zeta-1), & \varphi_{13} &= 4(1-\xi)(1-\eta)\zeta(1-\zeta), \\ \varphi_4 &= \xi\eta(1-\zeta)(2\xi+2\eta-2\zeta-3), & \varphi_{14} &= 4\xi(1-\eta)\zeta(1-\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= (1-\xi)(1-\eta)\zeta(-1-2\xi-2\eta+2\zeta), & \varphi_{15} &= 4(1-\xi)\eta\zeta(1-\zeta), \\
\varphi_6 &= \xi(1-\eta)\zeta(2\xi-2\eta+2\zeta-3), & \varphi_{16} &= 4\xi\eta\zeta(1-\zeta), \\
\varphi_7 &= (1-\xi)\eta\zeta(-2\xi+2\eta+2\zeta-3), & \varphi_{17} &= 4(1-\xi)\eta(1-\eta)\zeta, \\
\varphi_8 &= \xi\eta\zeta(2\xi+2\eta+2\zeta-5), & \varphi_{18} &= 4\xi\eta(1-\eta)\zeta, \\
\varphi_9 &= 4(1-\xi)\eta(1-\eta)(1-\zeta), & \varphi_{19} &= 4\xi(1-\xi)(1-\eta)\zeta, \\
\varphi_{10} &= 4\xi\eta(1-\eta)(1-\zeta), & \varphi_{20} &= 4\xi(1-\xi)\eta\zeta
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

### 3.3.5. Прямая треугольная призма с узлами в вершинах

Если воспользоваться вспомогательным преобразованием (3.3.1), то треугольная призма на рис. 3.3-5а преобразуется к форме, представленной на рис. 3.3-5б, где показаны используемые порядковые номера узлов и их координаты.

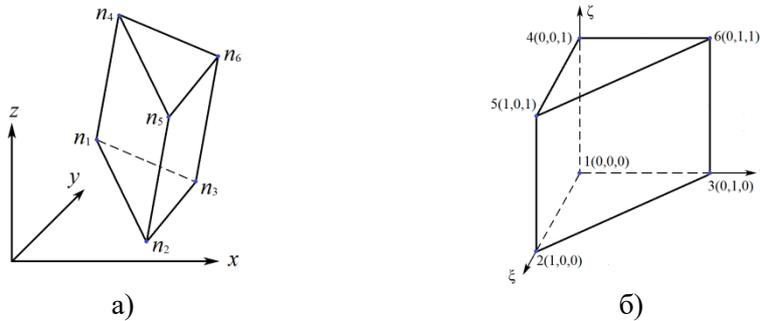


Рис. 3.3-5. Треугольная призма и ее мастер-элемент

При построении системы аппроксимирующих функций (2.1.6) поле перемещений аппроксимируется по области мастер-элемента неполным полиномом 2-й степени:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = (c_1 + c_2\xi + c_3\eta)(c_4 + c_5\zeta). \tag{3.3.12}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (1-\xi-\eta)(1-\zeta), & \varphi_2 &= \xi(1-\zeta), & \varphi_3 &= \eta(1-\zeta), \\
\varphi_4 &= (1-\xi-\eta)\zeta, & \varphi_5 &= \xi\zeta, & \varphi_6 &= \eta\zeta.
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

### 3.3.6. Прямая треугольная 15-ти узловая призма

Треугольная призма с 15-ю узлами изображена на рис. 3.3-6. Она имеет дополнительно точки на серединах всех ребер. Используемая нумерация узлов показана на рис. 3.3-6б, а их приведенные координаты приведены в таблице 3.3-2:



$$\begin{aligned}
x &= \Phi_x(\xi, \eta, \zeta) = x_1 + \sum_{i=1}^{N_x} (x_i - x_1) \varphi_i(\xi, \eta, \zeta), \\
y &= \Phi_y(\xi, \eta, \zeta) = y_1 + \sum_{i=1}^{N_y} (y_i - y_1) \varphi_i(\xi, \eta, \zeta), \\
z &= \Phi_z(\xi, \eta, \zeta) = z_1 + \sum_{i=1}^{N_z} (z_i - z_1) \varphi_i(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

где функции  $\varphi_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_i^j$  – аппроксимирующие функции соответствующих конечных элементов.

Производные в этих системах координат связаны соотношением (2.10.2), где матрица Якоби (2.10.3) имеет вид:

$$\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_x & \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_y & \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_z \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi_x & \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi_y & \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi_z \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_x & \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_y & \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi_z \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

Рассматриваются только такие области  $\Omega$  и преобразования (3.4.1), для которых якобиан  $|\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| > 0$  в любой точке элемента.

Введем вспомогательные вектора производных:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}^T. \tag{3.4.3}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\mathbf{u}) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right\}^T \tag{3.4.4}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}_0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{xyz} \mathbf{u} = \mathbf{A}_0 \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_0 \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} \mathbf{A}_{\xi\eta\zeta} \mathbf{u}, \tag{3.4.5}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{xyz}, \tag{3.4.6}$$

где вспомогательная матрица дифференцирования

$$\mathbf{A}_{xyz}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{3.4.7}$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.4.8)$$

Используя представление (3.4.5), получаем из (2.10.4) следующую формулу для вычисления коэффициентов матрицы жесткости<sup>1</sup>:

$$K_{ij}^r = \int_{\Omega_r^*} |\mathbf{J}| (\mathbf{A}_0 \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} \mathbf{A}_{\xi\eta\zeta} \boldsymbol{\varphi}_i^r(\xi, \eta, \zeta))^T \mathbf{D} \mathbf{A}_0 \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} \mathbf{A}_{\xi\eta\zeta} \boldsymbol{\varphi}_j^r(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.4.9)$$

Очевидно, что чем более искажен относительно идеала изопараметрический элемент, то тем более точную схему численного интегрирования приходится применять (см. Приложение).

#### Четырехгранник

Рассматривается четырехгранник, имеющий дополнительно точки на всех ребрах – элемент с 10-ю узлами, изображенный на рис. 3.4-1.

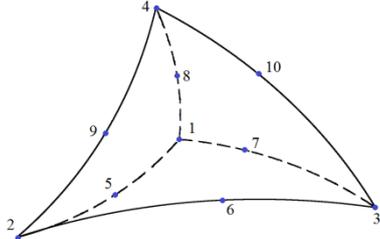


Рис. 3.4-1. 10-ти узловой четырехгранник

Преобразование (3.4.1) с использованием аппроксимаций (3.3.8) приводит его к мастер-элементу, изображенному на рис. 3.3-2б.

#### Шестигранники

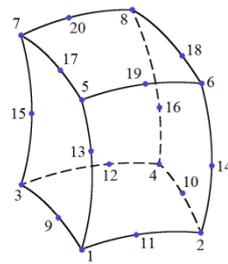
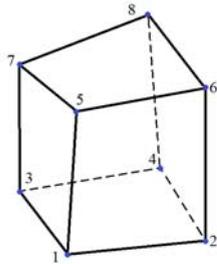


Рис. 3.4-2. Шестигранники

Рассматриваются шестигранники, изображенные на рис. 3.4-2, имеющие соответственно 8 и 20 узлов.

<sup>1</sup> Данную формулу можно применить и при построении обычных конечных элементов пространственной задачи теории упругости для упрощения соответствующих вычислений.

Преобразования (3.4.1) с использованием аппроксимаций (3.3.9) и (3.3.11) приводят соответствующие шестигранники к мастер-элементам, изображенным на рис. 3.3-3б или 3.3-4б.

### Пятигранники

Рассматриваются пятигранники, изображенные на рис. 3.4-3, имеющие соответственно 6 и 15 узлов.

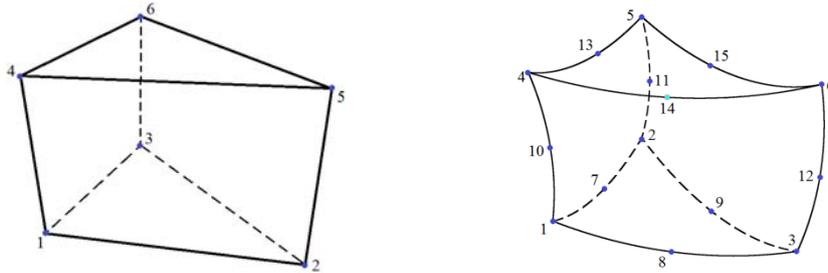


Рис. 3.4-3. Пятигранники

Преобразования (3.3.1) с использованием аппроксимаций (3.3.13) и (3.3.14) приводят соответствующие пятигранники к мастер-элементам, изображенным на рис. 3.3-5б или 3.3-6б.

## 3.5. О точности элементов

Все описанные ранее конечные элементы используют полиномиальные аппроксимации поля перемещений по всему телу. Поэтому, согласно правилам построения аппроксимаций, выполнены условия критерия полноты (2.5.7) порядка  $p \geq 1$  для всех рассмотренных элементов, ибо учтены все одночлены полиномов первой степени. Следовательно:

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} \varphi_i \equiv 1, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i \varphi_i \equiv x, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i \varphi_i \equiv y, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} z_i \varphi_i \equiv z. \quad (3.5.1)$$

Таким образом, аппроксимации обеспечивают **перемещения конечных элементов как твердых** тел, т.к. существуют линейные комбинации функций, тождественно равные

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{Bmatrix}, \quad (3.5.2)$$

где последние три вектора соответствуют сдвиговым деформациям.

Легко проверяется, что если в расчетной схеме только элементы одного вида, то обеспечивается их совместность при стыковке граней – непрерывность перемещений. Для пространственной задачи теории упругости в геометрические уравнения (3.1.4) входят только производные от перемещений первого порядка:  $m=1$  в (1.3.2) в линейном матричном дифференциальном операторе  $A$ . Тогда, согласно теореме 2.8.1 для всех рассмотренных конечных

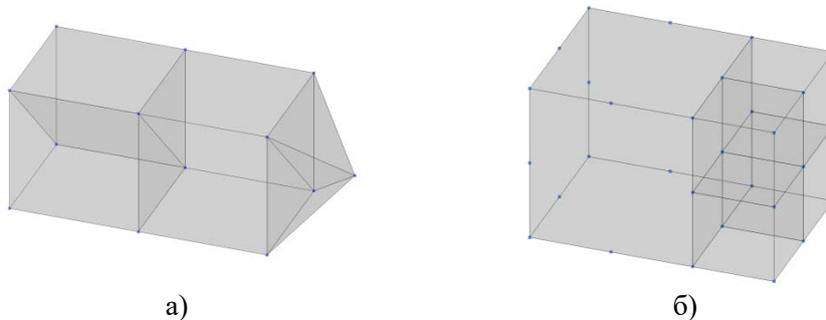
элементов обеспечивается сходимость метода, порядок которой приведен в табл. 3.5-1.

Как видно из таблицы, все рассмотренные элементы обеспечивают, как минимум, первый порядок сходимости по напряжениям и второй по перемещениям. Для элементов с промежуточными узлами на сторонах порядки увеличиваются всего на единицу, т.к. во всех аппроксимациях отсутствуют одноклены  $\xi^3$ ,  $\eta^3$  и  $\zeta^3$ .

**Таблица 3.5-1.** Оценки порядка сходимости конечных элементов пространственной задачи теории упругости.

Число узлов	Степень полинома	Порядок критерия полноты	Порядок сходимости	
			перемещения	напряжения
4	1	1	2	1
6	2	1	2	1
8	3	1	2	1
10	2	2	3	2
15	3	2	3	2
20	4	2	3	2

На рис. 3.5-1а приведены стыковки пространственных элементов, которые приводят к несовместности аппроксимаций при переходе от параллелепипеда к треугольной призме и тетраэдру. На рис. 3.5-1б приведена некорректная стыковка, когда один из узлов не принадлежит элементу, на боковой грани которого он находится.



**Рис. 3.5-1.** Стыковки пространственных элементов

Полиномиальный вид аппроксимаций позволяет применить кубатурные формулы, приведенные в *Приложении*, позволяющие без потери точности выполнить соответствующие построения.

### 3.6. Тесты

В таблице 3.6-1 приведены цифровые коды типов элементов, которые используются в вычислительном комплексе *SCAD* [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

**Таблица 3.6-1.** Типы элементов для решения пространственной задачи

Тип элемента	Число узлов	Описание
31	8	прямоугольная прямая призма
32	4	тетраэдр
33	6	треугольная прямая призма
34	6	пятигранник, изопараметрический (IP)
35	15	пятигранник, изопараметрический (IP)
36	6	шестигранник, изопараметрический (IP)
37	20	шестигранник, изопараметрический (IP)
38	10	четырёхгранник, изопараметрический (IP)

### 3.6.1. Патологические (patch) тесты

Данные тесты предназначены для проверки правильности реализации конечных элементов в программных комплексах. Полученные конечно-элементные решения рассматриваемых задач должны совпадать с аналитическими решениями на всех сетках, обеспечивающих совместность аппроксимаций.

Для всех элементов Таблицы 3.6-1 ниже приведенные тесты выполнены с точностью до вычислительной погрешности.

#### **Куб в условиях постоянных напряжений по объему**

Единичный куб подвергается воздействию смещений наружных поверхностей по направлениям осей общей системы координат, обеспечивающих условия постоянных напряжений по объему:

$$u = 10^{-3} \cdot (2x + y + z) / 2 - \text{вдоль оси X};$$

$$v = 10^{-3} \cdot (x + 2y + z) / 2 - \text{вдоль оси Y};$$

$$w = 10^{-3} \cdot (x + y + 2z) / 2 - \text{вдоль оси Z}.$$

Тест проверяет точность вычисления нормальных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и касательных напряжений  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , которые должны быть постоянными по всему объему куба в независимости от:

- значений жесткостных характеристик материала (изотропных, ортотропных, анизотропных);
- при любой совместной сетке конечных элементов<sup>1</sup>.

Данная задача была предложена в [120], где рассматривалась крупная нерегулярная сетка с внутренними узлами с координатами ( $m$ ):

$$(0.35, 0.35, 0.35), (0.75, 0.25, 0.25), (0.85, 0.85, 0.15), (0.25, 0.75, 0.25),$$

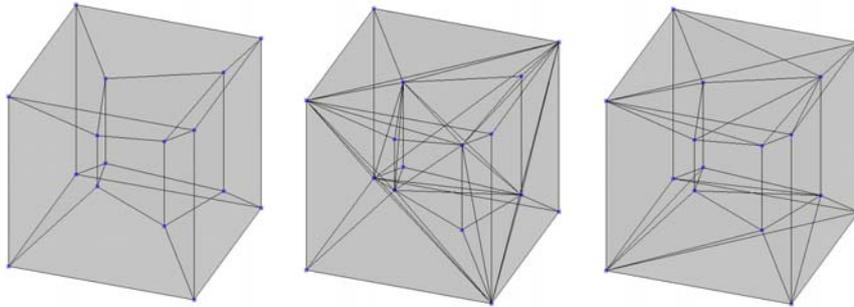
$$(0.35, 0.35, 0.65), (0.75, 0.25, 0.75), (0.85, 0.85, 0.85), (0.25, 0.75, 0.75).$$

Для изотропного материала при модуле упругости материала  $E = 10^6$  кПа, коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.25$  и размере ребра куба  $a = 1$  м значения нормальных и касательных напряжений равны в любой точке куба соответственно:

<sup>1</sup> Т.е. все грани элементов и узлы на них должны совпадать.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2000 \text{ кПа}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 400 \text{ кПа}.$$

На рис. 3.6-1 даны примеры расчетных схем, построенные на заданных узлах, обеспечивающие совместность перемещений. Расчет производится на заданные смещения вершин куба.



**Рис. 3.6-1.** Примеры расчетных схем из 4-х узловых, 6-ти и 8-и узловых изопараметрических элементов

Добавив узлы на ребрах элементов расчетных схем, представленных на рис. 3.6-1, получим расчетные схемы для 10-ти, 15-ти и 20-ти узловых изопараметрических элементов. Для порожденных узлов, находящихся на гранях наружных поверхностях куба, задаются указанные выше смещения.

#### **Смещение куба как твердого тела**

Рассмотрим единичный куб<sup>1</sup>, которому принадлежат точки A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0) и D(0,0,1), в которых задаются значения смещений, приведенные в табл. 3.6-2.

**Таблица 3.6-2.** Значения задаваемых смещений в узлах единичного куба и соответствующие им перемещения.

Загрузка	Значения заданных смещений				Перемещения точек тела (m)
	Точка	X	Y	Z	
1	A, B, C, D	0.001	0	0	$u_i = 0.001, v_i = w_i = 0$
2	A, B, C, D	0	0.001	0	$v_i = 0.001, u_i = w_i = 0$
3	A, B, C, D	0	0	0.001	$w_i = 0.001, u_i = v_i = 0$
4	A, D	0	0	0	$u_i = 0.001y_i,$ $v_i = -0.001x_i,$ $w_i = 0$
	B	0	-0.001	0	
	C	0.001	0	0	
5	A, C	0	0	0	$u_i = 0.001z_i,$ $v_i = 0,$ $w_i = -0.001x_i$
	B	0	0	-0.001	
	D	0.001	0	0	
6	A, B	0	0	0	$u_i = 0,$ $v_i = 0.001z_i,$ $w_i = -0.001y_i$
	C	0	0	-0.001	
	D	0	0.001	0	

<sup>1</sup> В общем случае это может быть пространственное тело любой формы, которому принадлежат точки A, B, C и D.

В результате расчета во всех точках тела все нормальные и касательные напряжения равны нулю. Причем результат не зависит от разбиения тела на конечные элементы при условии их совместности.

### Температурные деформации

Рассмотрим единичный куб, в вершинах которого  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C(0,1,0)$  и  $D(0,0,1)$  заданы следующие граничные условия:

$u=0$  – точки  $A$ ,  $C$  и  $D$ ,

$v=0$  – точки  $A$ ,  $B$  и  $D$ ,

$w=0$  – точки  $A$ ,  $C$  и  $B$ .

Зададим коэффициент температурного линейного расширения материала куба  $\alpha=1e-5 \text{ K}^{-1} (\text{°C}^{-1})$ .

Если куб нагрет до температуры  $t=100\text{°C}$ , то перемещения точек куба равны:

$$u = \alpha t x, \quad v = \alpha t y, \quad w = \alpha t z,$$

т.к. крайвые условия не препятствуют деформации тела, и, соответственно, нормальные и касательные напряжения равны нулю.

### 3.6.2. Расчет толстой прямоугольной плиты

Рассмотрим параллелепипед, изображенный на рис. 3.6-2 со сторонами  $a=b=2\text{m}$  и высотой  $h=0.9\text{m}$ , модулем Юнга  $E = 2000 \text{ кПа}$  и коэффициентом Пуассона материала  $\nu = 0.3$ , нагруженный нормальной равномерно распределенной нагрузкой  $p=10 \text{ кН}$  по верхней грани, с крайвыми условиями

$v=w=0$  при  $x=0$  и  $x=a$ ,

$u=w=0$  при  $y=0$  и  $y=a$ .

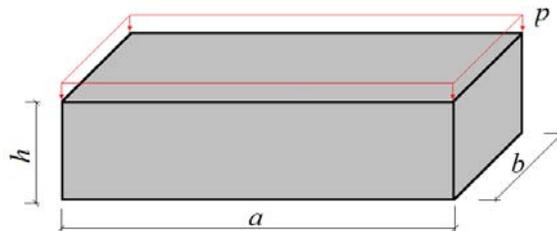


Рис. 3.6-2. Параллелепипед, нагруженный по верхней плоскости

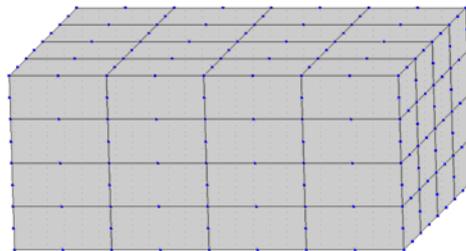


Рис. 3.6-3. Расчетная схема А для толстой плиты

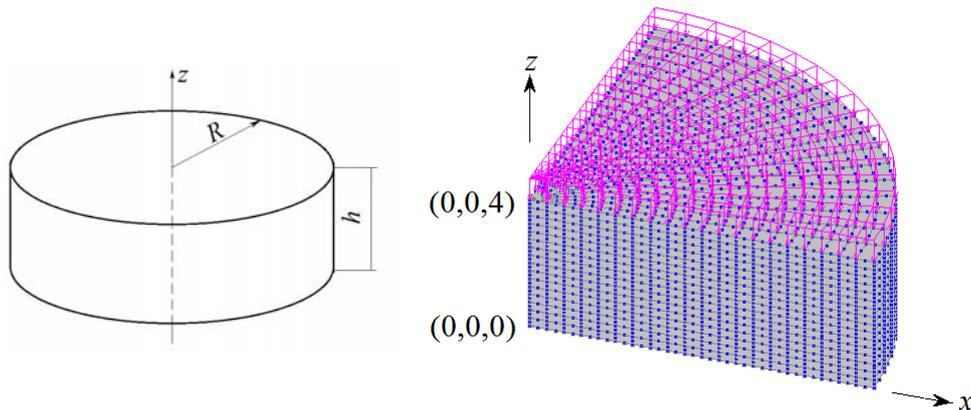
**Таблица 3.6-3.** Расчет толстой плиты 20-и узловыми изопараметрическими элементами (*мм, кПа*)

Точка	Величина	Теория [74]	Сетка			
			A	A2	A4	A8
(1,1,0)	w	-7.862	-7.834	-7.860	-7.862	-7.862
	$\sigma_x = \sigma_y$	15.403	16.281	15.595	15.450	15.416
	$\sigma_z$	0	0.542	0.192	0.054	0.014
(1,1,0.6)	w	-9.213	-9.187	-9.212	-9.213	-9.213
	$\sigma_x = \sigma_y$	-0.677	-1.048	-0.744	-0.693	-0.681
	$\sigma_z$	-5.299	-5.505	-5.343	-5.310	-5.302
(1,1,1.2)	w	-9.973	-9.910	-9.970	-9.973	-9.973
	$\sigma_x = \sigma_y$	-17.073	-17.516	-17.200	-17.107	-17.082
	$\sigma_z$	-10.000	-10.626	-10.177	-10.042	-10.011
(0,1,0)	u	-3.788	-3.804	-3.790	-3.788	-3.788
(0,1,0.6)	u	-0.734	-0.721	-0.735	-0.734	0.734
(0,1,1.2)	u	3.816	3.656	3.742	3.779	3.779

Данная задача имеет аналитическое решение [74]. На рис. 3.6-3 приведен пример расчетной схемы. Схемы A2, A4, A8 получены из схемы A уменьшением шага сетки соответственно в 2, 4 и 8 раз. В табл. 3.6-3 даны результаты расчетов.

### 3.6.3. Расчет толстой круглой плиты

Толстая круглая в плане плита толщиной  $h$ , изображенная на рис. 3.6-4, жестко защемлена по боковой поверхности и находится под воздействием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки  $q$ .



**Рис. 3.6-4.** Круглая плита и ее расчетная схема

Зададим:

$E = 1.0 \cdot 10^7$  кПа – модуль упругости материала;

$\nu = 0.25$  – коэффициент Пуассона;

$R=10m$ ,  $h = 4m$ ,  $q = 1000$  кПа.

Расчетная схема задачи представлена на рис. 3.6-4. Краевые условия с учетом плоскостей симметрии:

$v=w=0$  – на боковой поверхности;

$u=0$  при  $x=0$  – плоскость  $YOZ$ ;

$v=0$  при  $y=0$  – плоскость  $XOZ$ .

**Таблица 3.6-4.** Перемещения и напряжения в толстой плите

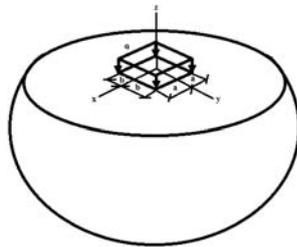
Величина	Точка	Точное решение	Приближенное аналитическое решение [86]	SCAD
$w(mm)$	(0,0,4)	-4.5434	-4.36	-4.538
	(0,0,2)	-4.5503	-4.24	-4.54
	(0,0,0)	-4.3748	-4.11	-4.364
$\sigma_r = \sigma_\theta$ (кПа)	(0,0,4)	-3369.37	-3451	-3378
	(0,0,2)	-156.95	-166.67	-150.47
	(0,0,0)	3055.77	3117.19	3062

Сетка конечных элементов разбита по радиусу с шагом  $0.5 m$  и по толщине – на 16-ть слоев, как показано на рис. 3.6-4. Расчетная схема содержит 20866 узлов, 4384 объемных 20-ти узловых изопараметрических элементов типа 37 (параллелепипед) и 400 объемных 15-ти узловых элементов изопараметрических типа 35 (треугольная призма).

Точные значения перемещений и напряжений в точках (0,0,4), (0,0,2) и (0,0,0) для данной задачи получены сгущением сетки как для пространственной задачи<sup>1</sup>, так и в осесимметричной постановке (см.р.8.5.2). В [86] получено приближенное аналитическое решение данной задачи.

В табл. 3.6-4 приведены результаты расчетов.

### 3.6.4. Задача Лява

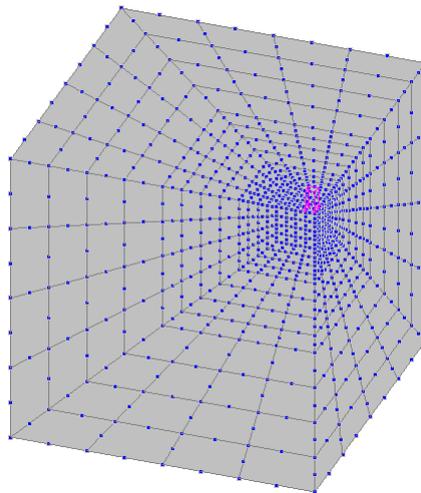


**Рис. 3.6-5.** Задача Лява

<sup>1</sup> Одна из расчетных схем пространственной задачи содержала 1222501 узлов, 280576 20-ти узловых элементов типа 37 и 25600 15-ти узловых элементов типа 35.

Упругое полупространство находится под действием равномерно распределенной по его поверхности прямоугольной в плане  $4 \times 4 \text{ м}$  поперечной нагрузки интенсивности  $100 \text{ кПа}$  (рис. 3.6-5).

Модуль упругости материала полупространства  $E=30000 \text{ кПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ . Решение для данной задачи впервые было получено Ф.Лява [54].



**Рис. 3.6-6.** Расчетная схема типа *A* для задачи Лява

Рассчитывался параллелепипед со сторонами  $128 \times 128 \times 64 \text{ (м)}$ . Особенностью расчетных схем для данной задачи является то, что невозможно элементами конечных размеров описать бесконечную область. Поэтому, определив размеры рассчитываемой области, мы тем самым уже получаем некоторую погрешность расчета относительно аналитического решения.

Представленная на рис. 3.6-6 расчетная схема составлена из 20-и узловых изопараметрических конечных элементов и представляет собой  $\frac{1}{4}$  часть параллелепипеда, отсеченную плоскостями симметрии  $XOZ$  и  $YOZ$ .

Краевые условия были определены следующим образом:

$$u(0,y,z) = v(x,0,z) = 0 \text{ – условия симметрии;}$$

$u(-64,y,z) = v(x,64,z) = w(x,y,-64) = 0$  – запрещены перемещения по нормали к боковым поверхностям на большом расстоянии от исследуемой области.

При ее построении использовался стандартный подход сгущения сетки в интересующей нас области. Схемы *A2*, *A4* и *A8* получены из схемы *A* уменьшением шага сетки соответственно в 2, 4 и 8 раз.

Приведенные в табл. 3.6-5 результаты расчетов показывают хорошую сходимость к величинам, которые незначительно отличаются от аналитических значений из-за ограничения размеров расчетной схемы.

Таблица 3.6-5. Перемещения и напряжения при решении задачи Лява

Точка	Параметр	Теория	Сеть КЭ			
			A	A2	A4	A8
(0,0,0)	w, mm	-13.616	-13.017	-13.271	-13.286	-13.309
	$\sigma_x = \sigma_y$ , кПа	-80.0	-95.685	-83.215	-80.125	-79.965
	$\sigma_z$ , кПа	-100.0	-123.12	-101.96	-100.45	-100.079
(0,0,-2)	w, mm	-9.017	-8.795	-8.676	-8.685	-8.708
	$\sigma_x = \sigma_y$ , кПа	-8.29	-2.943	-7.721	-8.136	-8.228
	$\sigma_z$ , кПа	-70.09	-67.905	-71.628	-70.207	-70.108
(-2,2,-2)	u, mm	-0.488	-0.47	-0.49	-0.4903	0.4901
	w, mm	-5.704	-5.364	-5.368	5.573	-5.3953
	$\sigma_x = \sigma_y$ , кПа	-7.56	-8.207	-7.719	-7.566	-7.496
	$\sigma_z$ , кПа	-23.25	-24.319	-23.557	-23.326	-23.267
	$\tau_{xy}$ , кПа	5.27	6.628	5.295	5.329	-5.288
	$\tau_{xz} = \tau_{yz}$ , кПа	-12.11	-14.889	-12.816	-12.313	12.166

### 3.6.5. Задача Бусинеска о действии на упругое полупространство нормальной силы

На упругое полупространство  $z \leq 0$  действует в точке (0,0,0) нормальная сила  $p$ . Зададим:

$E = 30000$  кПа – модуль упругости материала;

$\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона;

$p = 1000$  кН.

В [54, 74] дано аналитическое решение данной задачи.

Воспользуемся расчетными схемами задачи Лява на рис. 3.6-6, считая, что в центре координат на полупространство действует нормальная сила  $p$ . Т.к. расчетная схема представляет собой  $1/4$  часть параллелепипеда, отсеченную плоскостями симметрии  $XOZ$  и  $YOZ$ , то в узел, соответственно, задается сила  $p/4$ .

Таблица 3.6-6. Перемещения и напряжения при решении задачи Бусинеска

Точка	Параметр	Теория	Сеть КЭ		
			A2	A4	A8
(0,0,-4)	w, mm	-4.13803	-3.888	-3.929	-3.9438
	$\sigma_z$ , кПа	-29.8116	-28.059	-29.333	-29.717
(4,0,0)	w, mm	-2.41385	-2.274	-2.208	-2.2218
	$\sigma_x$ , кПа	3.97887	2.248	3.94	3.9905
	$\sigma_y$ , кПа	-3.97887	-7.213	-4.043	-3.9685

В табл. 3.6-6 даны результаты расчетов.

## Глава 4. Плоская задача теории упругости

### 4.1. Плоское напряженное состояние

Обобщенное плоское напряженное состояние характеризуется отсутствием нормальных напряжений на площадках, параллельных одной из координатных плоскостей  $XOY$ . Такое напряженное состояние появляется в тонких пластинках, у которых нагрузка приложена только силами, параллельными основаниям и равномерно распределенными по толщине пластинки (рис. 4.1-1). Пластинку можно рассматривать как призматическое тело, высота которого (толщина пластинки) мала по сравнению с размерами основания.



Рис.4.1-1. Плосконапряженное состояние

Будем считать, что толщина пластинки  $h=const$ , плоскость  $XOY$  равно удаленна от оснований и является ее срединной поверхностью.

Поскольку основания пластинки свободны от нагрузки, то на них  $\sigma_z = 0$ . Из-за малой толщины пластинки можно полагать, что  $\sigma_z \equiv 0$ . По тем же причинам можно считать  $\tau_{xz} \equiv \tau_{yz} \equiv 0$  по всему объему пластинки. Остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки и являющимися функциями только координат  $x$  и  $y$ :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \quad (4.1.1)$$

Из третьей формулы закона Гука для изотропного тела следует, что

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (4.1.2)$$

и, следовательно, будут деформироваться основания пластинки.

Подставляя (4.1.2) в (3.1.6), окончательно получаем закон Гука для изотропного материала:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (4.1.3)$$

$$\text{или} \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (4.1.4)$$

Для ортотропного тела закон Гука примет вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_y, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}. \quad (4.1.5)$$

Для анизотропного материала:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \nu_{yx} \sigma_y + \eta_{xy,x} \tau_{xy}), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} (-\nu_{xy} \sigma_x + \sigma_y + \eta_{xy,y} \tau_{xy}), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} (\eta_{x,xy} \sigma_x + \eta_{y,xy} \sigma_y + \tau_{xy}). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

В рассматриваемой точке уравнения равновесия Навье (3.1.2) для данной задачи имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}. \quad (4.1.7)$$

Из шести формул Коши (2.1.4) остаются три:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.1.8)$$

Рассмотрим напряжения на наклонной линии на рис. 4.1-2. На боковых поверхностях проекция направляющего косинуса нормали на ось  $OZ$  равна нулю, и из трех уравнений равновесия на поверхности (3.1.17) остаются два:

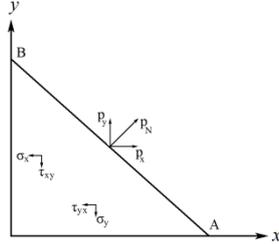


Рис. 4.1-2. Напряжения на наклонной линии

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= p_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y &= p_y \end{aligned}, \quad (4.1.9)$$

$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$  – нормаль к линии,  $\mathbf{p}_N = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$  – проекции напряжения.

Шесть условий уравнений совместности деформаций (3.1.5) сводятся к одному:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.1.10)$$

Из трех усредненных углов поворота (3.1.16) остается только один

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.1.11)$$

Уравнения равновесия Навье (4.1.7) записываются в виде системы двух дифференциальных уравнений Ляме относительно перемещений  $u$  и  $v$ :

$$\begin{cases} G\Delta u + (G + \lambda_*) \frac{\partial \theta}{\partial x} + f_x = 0 \\ G\Delta v + (G + \lambda_*) \frac{\partial \theta}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}, \quad (4.1.12)$$

где  $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа;

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \lambda_* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ – модуль сдвига (3.1.8).}$$

Запишем соотношения для плоской задачи в матричной форме:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})\}^T \in \mathcal{R}^2, \quad \mathbf{x} = \{x, y\}^T \in \mathcal{R}^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.1.13)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x})\}^T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{p_x(\mathbf{x}), p_y(\mathbf{x})\}^T, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4.1.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \{\sigma_x(\mathbf{x}), \sigma_y(\mathbf{x}), \tau_{xy}(\mathbf{x})\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \{\varepsilon_x(\mathbf{x}), \varepsilon_y(\mathbf{x}), \gamma_{xy}(\mathbf{x})\}^T. \quad (4.1.15)$$

Оператор геометрии в уравнениях (1.3.2):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T. \quad (4.1.16)$$

В физических уравнениях (1.3.1) матрицу упругости  $\mathbf{C}$  – матрицу закона Гука – соответственно для изотропного, ортотропного и анизотропного материалов получаем из (4.1.4), (4.1.5) и (4.1.6):

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} \\ \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}. \quad (4.1.17)$$

### Преобразования систем координат

Рассмотрим две системы прямоугольных координат  $XU$  и  $X'U'$ , начала которых совпадают, и пусть матрица ортогонального преобразования (матрица косинусов) имеет вид при повороте на угол  $\varphi$ :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.1.18)$$

Т.к.  $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$ , то в (1.7.2) матрица Якоби  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$  и

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{Bmatrix} \quad (4.1.19)$$

После соответствующих преобразований для деформаций и напряжений получаем следующие зависимости:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{S}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{S}_\sigma^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.1.20)$$

$\mathbf{S}_\varepsilon$  – матрица преобразования

$$\mathbf{S}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & l_2 m_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \sin \varphi & -2 \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (4.1.21)$$

При этом, в силу ортогональности преобразования  $\mathbf{S}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{S}_\varepsilon^T$ .

Матрица связи деформаций и напряжений  $\mathbf{C}$  (4.1.17) в физических уравнениях (1.3.1) при переходе к новой системе координат преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{S}_\varepsilon^T \mathbf{C} \mathbf{S}_\varepsilon. \quad (4.1.22)$$

Если материал тела изотропный, то матрица упругости  $\mathbf{C}$  инвариантна относительно ортогонального преобразования (4.1.21):  $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$ .

Усредненный угол поворота  $\omega_z$  тоже инвариант при ортогональном преобразовании:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right). \quad (4.1.23)$$

### Краевые условия

Краевыми условиями в точках на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$  могут быть:

- **кинематические**, когда заданы значения перемещений  $u$  и  $v$ . Если на части поверхности заданы обе нулевые компоненты перемещений, то говорят о жестком защемлении. Данные краевые условия являются главными при решении вариационной задачи минимизации функционала Лагранжа;
- **статические граничные условия** – равенство внутренних усилий поверхностным нагрузкам  $\mathbf{p}_N$  в точках границы, когда на границе области заданы нормальные и тангенциальные усилия. Данные краевые условия являются естественными при решении вариационной задачи минимизации функционала Лагранжа;
- **смешанные граничные условия** – только на части границы области  $\Omega$  заданы перемещения. Или на границе могут быть заданы одновременно и статические, и кинематические краевые условия. Например, закрепление

по одному из направлений и действующая по другому направлению нагрузка.

### Температурные воздействия

При изменении температуры на  $\delta t^\circ$  деформации от температурных воздействий получают приращения:

$$\varepsilon_{x,t} = \alpha \delta t; \quad \varepsilon_{y,t} = \alpha \delta t; \quad \gamma_{xy,t} = 0.$$

Если нет возможности свободно расширяться, то возникают температурные/тепловые напряжения, которые необходимо учесть в физических уравнениях (1.3.1), где:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}) = \{ \alpha t, \alpha t, 0 \}^T \in \mathcal{R}^3. \quad (4.1.24)$$

Для ортотропного материала коэффициенты температурного расширения могут быть разными по главным осям инерции:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}) = \{ \alpha_x \delta t, \alpha_y \delta t, 0 \}^T. \quad (4.1.25)$$

Подставив (4.1.24) или (4.1.25) в (1.4.12) и проинтегрировав по  $z$  получим учет температурных деформаций в потенциальной энергии.

### Главные напряжения и деформации

Для определения главных напряжений из системы уравнений (3.1.27) остается два уравнения:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i = 0 \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i = 0 \end{cases}, \quad i=1,2. \quad (4.1.26)$$

Получаем уравнение второго порядка, его решения  $\sigma_i$ ,  $i=1,2$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .

Для определения главных деформаций из системы уравнений (3.1.30) остается также два уравнения:

$$\begin{cases} 2(\varepsilon_x - \varepsilon_i)l_i + \gamma_{xy}m_i = 0 \\ \gamma_{xy}l_i + 2(\varepsilon_y - \varepsilon_i)m_i = 0 \end{cases}, \quad i=1,2. \quad (4.1.27)$$

Получим решения уравнения второго порядка:  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2$ ,  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ .

### Функционалы

Уравнения равновесия в матричной форме имеют вид:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{где } \mathbf{B} = -\mathbf{A}^T. \quad (4.1.28)$$

Используя матричную запись, получим для плоской задачи теории упругости функционалы Лагранжа (1.4.11), Кастельяно (1.4.15), Рейсснера (1.4.16) и смешанный функционал (1.4.17).

Запишем работу внешних сил для изотропного материала в функционале Лагранжа через функции перемещений без учета температурных воздействий:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) d\Omega. \quad (4.1.29)$$

В функционал Лагранжа входят только производные первого порядка функций перемещений, и, следовательно, энергетическое пространство задачи совпадает с пространством Соболева  $W_2^1(\Omega)$ .

Т.к. перемещения, деформации и напряжения не зависят от  $z$ , то получаем, что при  $h=const$  интегралы по  $\Omega$  можно заменить на интегралы по срединной поверхности  $\Omega_{xy}$ :

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\Omega = h \int_{\Omega_{xy}} g(\mathbf{x}) d\Omega_{xy}.$$

## 4.2. Плоская деформация

Плоская деформация реализуется в призматическом или цилиндрическом теле, у которых один из размеров существенно превышает два других, а возникающие перемещения не зависят от направления этого размера. Такими конструкциями, например, являются плотины, массивные подпорные стенки и туннели (рис. 4.2-1).

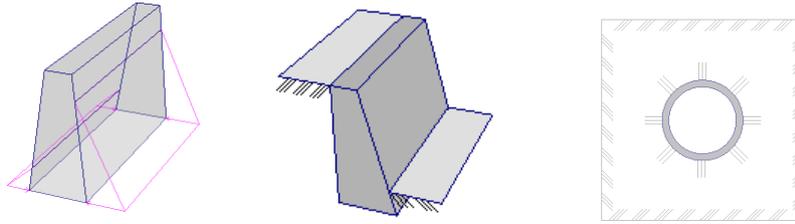


Рис. 4.2-1. Плотина, массивная подпорная стена и туннель

Будем считать, что данное направление совпадает с осью  $OZ$  и практически бесконечно. Если все сечения тела плоскостями  $z=const$  равны и находятся в одинаковых условиях по связям и нагрузкам, а объемные и поверхностные силы перпендикулярны оси  $OZ$ , то вместо рассмотрения всей области, занятой телом, можно ограничиться рассмотрением его сечения  $\Omega$  плоскостью  $XOY$ .

Поскольку перемещения из плоскости  $w(x,y) \equiv 0$ , а перемещения  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  являются функциями только двух переменных, то из формул Коши (3.1.4) следует, что  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  не зависят от  $z$ , и

$$\varepsilon_z \equiv 0, \quad \gamma_{yz} \equiv 0, \quad \gamma_{xz} \equiv 0. \quad (4.2.1)$$

Из закона Гука (3.1.6) следует, что напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  тоже не зависят от  $z$ , а для изотропного материала:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.2.2)$$

Т.е. отсутствие линейных деформаций  $\varepsilon_z$  вдоль оси  $OZ$  приводит к появлению нормальных напряжений  $\sigma_z$ .

Подставляя (4.2.2) в (3.1.6), окончательно получаем:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = G_1 \tau_{xy}, \quad (4.2.3)$$

где введены обозначения для новых упругих постоянных:

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad G_1 = G. \quad (4.2.4)$$

В общем случае, из (3.1.11):

$$\sigma_z = \nu_{xz} \sigma_x + \nu_{yz} \sigma_y - \eta_{xy,z} \tau_{xy}. \quad (4.2.5)$$

Получаем для трансверсальной изотропии в (4.2.3):

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}}, \quad G_1 = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

$$\nu_1 = \frac{\nu + \nu_{xz} \nu_{zx}}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}}, \quad \nu = \nu_{xy} = \nu_{yx}. \quad (4.2.6)$$

Для ортотропного и анизотропного материалов в выражении матрицы упругости  $\mathbf{C}$  (4.1.16) закона Гука получаем новые константы:

$$\bar{E}_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}}, \quad \bar{E}_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}},$$

$$\bar{\nu}_{xy} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{zy}}{1 - \nu_{xz} \nu_{zy}}, \quad \bar{\nu}_{yx} = \frac{\nu_{yx} + \nu_{yz} \nu_{zx}}{1 - \nu_{yz} \nu_{zx}}. \quad (4.2.7)$$

В случае анизотропии:

$$\bar{\eta}_{xy,x} = \frac{\eta_{xy,x} + \nu_{zx} \eta_{xy,x}}{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}}, \quad \bar{\eta}_{xy,y} = \frac{\eta_{xy,y} + \nu_{zy} \eta_{xy,z}}{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}},$$

$$\bar{\eta}_{x,xy} = \frac{\eta_{x,xy} + \nu_{xz} \eta_{z,xy}}{1 - \eta_{xy,z} \eta_{z,xy}}, \quad \bar{\eta}_{y,xy} = \frac{\eta_{y,xy} + \nu_{yz} \eta_{z,xy}}{1 - \eta_{xy,x} \eta_{z,xy}},$$

$$\bar{G}_{xy} = \frac{G_{xy}}{1 - \eta_{xy,z} \eta_{z,xy}}. \quad (4.2.8)$$

Из (4.2.3) – (4.2.8) следует, что формулы закона Гука для случая плоской деформации отличаются от формул плоского напряженного состояния (4.1.3) – (4.1.6) только упругими постоянными. При этом полностью совпадают: условия равновесия (4.1.7), формулы Коши (4.1.8), условия на поверхности (4.1.9) и уравнения совместности деформаций (4.1.10).

Поэтому данные задачи объединяют в одну – *плоскую задачу теории упругости*.

### 4.3. Степени свободы и аппроксимации

Для решения плоской задачи теории упругости используются, как правило, конечные элементы, имеющие геометрическую форму треугольника, прямоугольника и произвольного четырехугольника. Простейшие элементы имеют только узлы, совпадающие с вершинами многогранников. В элементах

с повышенной аппроксимацией добавляются узлы, лежащие на их сторонах. Существуют также семейства *серендиновых* конечных элементов с сетью внутренних узлов [27, 28], примеры которых приведены на рис. 2.9-2. При этом внутренние узлы имеют такие же степени свободы, как и узлы в вершинах области.

#### Элементы с двумя степенями свободы в узле

Классические конечные элементы в каждом узле имеют по две степени свободы:  $u_i, v_i, i=1,2,\dots,N_r$ , где  $N_r$  – число узлов элемента.

При построении большинства элементов перемещения аппроксимируются независимо по каждой координате. Т.е. вводится система функций

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), (i) \in \Omega_r, j=1,2\}, \quad (4.3.1)$$

а поле перемещений представляется в виде:

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{(i) \in \Omega_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r), \quad (4.3.2)$$

$$\varphi_{i,1}^r = \begin{Bmatrix} \psi_i^r \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{i,2}^r = \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_i^r \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,N_r. \quad (4.3.3)$$

Конечные элементы имеют  $2N_r$  степеней свободы, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{u_1, v_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}\}, \text{ и, соответственно, } \{\varphi_{1,1}^r, \varphi_{1,2}^r, \dots, \varphi_{N_r,1}^r, \varphi_{N_r,2}^r\} \quad (4.3.4)$$

Существуют элементы, у которых поле перемещений представляется так, что обе компоненты вектора отличны от нуля:

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_r} \begin{Bmatrix} u_i \varphi_{i,1,\mu}^r(x, y) + v_i \varphi_{i,2,\mu}^r(x, y) \\ u_i \varphi_{i,1,\nu}^r(x, y) + v_i \varphi_{i,2,\nu}^r(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (4.3.5)$$

$$\varphi_{i,1}^r = \begin{Bmatrix} \varphi_{i,1,\mu}^r \\ \varphi_{i,1,\nu}^r \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{i,2}^r = \begin{Bmatrix} \varphi_{i,2,\mu}^r \\ \varphi_{i,2,\nu}^r \end{Bmatrix}.$$

#### Элементы с вращательными степенями свободы

Более сложными являются элементы метода перемещений с тремя степенями свободы в узле, когда к значениям перемещений  $u_i, v_i$  добавляется:

- **усредненный угол поворота** (4.1.23). Согласно [61] величина  $\omega_z$  характеризует поворот бесконечно малого объема, окружающего точку  $\mathbf{x}$ . Данная величина инвариантна относительно ортогональных преобразований систем координат. Следовательно, аппроксимации можно построить так, чтобы результат расчета не зависел от принятой системы координат построения элемента при выполнении условий сохранения симметрии расчетной схемы.
- в работе [98] предложен и развит в работах [99, 113 и др.] подход, когда в узлах вводятся неизвестные  $\theta_j$ . При этом на стороне  $ij$ :

- а) касательное перемещение  $u_t$  изменяется по линейному закону;  
 б) нормальное перемещение  $u_n$  меняется по закону

$$u_n = (1 - \xi)u_{ni} + \xi u_{nj} + \frac{a_{ij}}{2}(\theta_j - \theta_i)\xi(1 - \xi), \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \xi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad \boldsymbol{\tau}_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / a_{ij},$$

$\mathbf{n}_{ij}$  – нормаль к стороне,  $a_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$  – длина стороны.

Однако, при использовании закона (4.3.6) возникает геометрическая изменяемость при равенстве всех степеней свободы  $\theta_j$ ;

- для исключения геометрической изменяемости будем нормальное перемещение  $u_n$  вместо (4.3.6) изменять по закону, предложенному в [35, 117] при  $\delta = \text{const}$ :

$$u_n = (1 - \xi)u_{ni} + \xi u_{nj} + \frac{a_{ij}}{2}\xi(1 - \xi)(\theta_j - \theta_i + \delta(\theta_j + \theta_i)(1 - 2\xi)). \quad (4.3.7)$$

Будем называть *квазивращательными* степени свободы  $\theta_j$ , построенные по гипотезе (4.3.7). Функции, удовлетворяющие данной гипотезе, будем представлять в следующем виде:

$$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{x}) + \delta \boldsymbol{\zeta}_i(\mathbf{x}), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (4.3.8)$$

где  $\boldsymbol{\chi}_i$  – функции, полученные по гипотезе (4.3.6),  $\boldsymbol{\zeta}_i$  – корректирующие функции по (4.3.7).

Для функций  $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})$ , построенных по (4.3.7):

$$\omega_z(\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})) \Big|_{\mathbf{x}_j} = \begin{cases} 0.5(1 - \delta), & i = j \\ -0.25(1 + \delta), & i \neq j, \text{ сторона} \\ 0, & i \neq j, \text{ диагональ} \end{cases}. \quad (4.3.9)$$

Если положить  $\delta = -1$ , то из (4.3.8) получаем, что:

$$u_n = (1 - \xi)u_{ni} + (1 - \xi)u_{nj} + a_{ij}\xi(1 - \xi)(\theta_{\delta,j}\xi - \theta_{\delta,i}(1 - \xi)). \quad (4.3.10)$$

При этом:

$$\omega_z(\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})) \Big|_{\mathbf{x}_j} = \delta_i^j, \quad i, j=1, 2, \dots, N_r. \quad (4.3.11)$$

Направление вектора нормали к стороне  $\mathbf{n}_{ij}$  в (4.3.6) и (4.3.7) выбирается таким образом, чтобы тройка  $\mathbf{n}_{ij}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{ij}$  и  $OZ$  была правой. В обоих случаях обеспечивается совместность соответствующей системы аппроксимирующих функций. Очевидно, что местные оси  $OZ$  всех конечных элементов должны совпадать.

Закон (4.3.6) обладает следующими недостатками:

- а) т.к. степени свободы  $\theta_j$  в (4.3.6) входят только в виде разности значений на сторонах, то необходимо при решении плоской задачи теории упругости иногда делать дополнительные связи во избежание вырожденности системы уравнений метода или вводить некоторые фиктивные жесткости;

- б) вычисленные значения  $\theta_j$  могут быть достаточно далеки от реальных углов поворота.

Для (4.3.7):

а) не требуется задавать дополнительные связи для расчетной схемы;

б) при малых значениях  $\delta$ , как показали численные эксперименты, получаем хорошую точность результатов, практически совпадающую с результатами по перемещениям и напряжениям с элементами при  $\delta=0$ . И получаем более реальные значения «углов поворота» в отличие от (4.3.6).

Для (4.3.6) и (4.3.7):

а) нагрузка в виде моментов **некорректна**;

б) при построении элементов с промежуточными узлами на сторонах практически невозможно согласовать физический смысл  $\theta_j$  в вершинах и на сторонах.

Степени свободы  $\theta_j$  в (4.3.6) и (4.3.7) уже не имеют определенного физического смысла. Их с трудом можно интерпретировать как «**усредненные углы поворота**», хотя соответствующие им аппроксимирующие функции не противоречат идеологии МКЭ как проекционно-сеточного метода и показывают хорошие результаты при расчете оболочек.

Построено большое число элементов с вращательными степенями свободы, основанных на использовании и отличных от функционала Лагранжа постановках: на основе смешанного функционала гибридные элементы, метода Трефтца, разложения по формам перемещений и др. [100, 109, 111, 122, 123, 131, 132]. Конечно, список работ по данной тематике не полон. В настоящей работе рассматриваются только элементы, основанные на функционале Лагранжа (1.4.11).

Для элементов, имеющих степени свободы  $\omega_z$  и обеспечивающих сходимость метода, можно в расчетной схеме задавать нагрузку в виде моментов: как узловых, так и распределенных на элементе (например, по стороне). При этом приведенные узловые моменты вычисляются по стандартной формуле:

$$M_{ij}^r = \int_{\Omega_r} M(x, y) \omega_z(\varphi_{ij}^r) d\Omega. \quad (4.3.12)$$

Конечные элементы имеют  $3N_r$  степеней свободы, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{u_1, v_1, \omega_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, \omega_{N_r}\} \text{ или } \{u_1, v_1, \theta_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, \theta_{N_r}\}, \quad (4.3.13)$$

и соответствующую им систему аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), (i) \in \Omega_r, j = 1, 2, 3\}. \quad (4.3.14)$$

Поле перемещений для степеней свободы  $\theta_i / \omega_i$  представляется в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r + \theta_i \varphi_{i,3}^r) = \sum_{i=1}^{N_r} \begin{Bmatrix} u_i \varphi_{i,1,\mu}^r + v_i \varphi_{i,2,\mu}^r + \theta_i \varphi_{i,3,\mu}^r \\ u_i \varphi_{i,1,\nu}^r + v_i \varphi_{i,2,\nu}^r + \theta_i \varphi_{i,3,\nu}^r \end{Bmatrix}. \quad (4.3.15)$$

Считаем, что, все компоненты функций (4.3.14) отличны от нуля.

Запишем тождества критерия полноты (2.5.7) порядка  $m=1$  для систем функций (4.3.1) и (4.3.14):

- для элементов с двумя степенями свободы в узле в случае независимой аппроксимации (4.3.3):

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} \psi_i^r \equiv 1, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i \psi_i^r \equiv x, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i \psi_i^r \equiv y; \quad (4.3.16)$$

- для элементов со степенями свободы  $\omega_z$ :

$$\begin{aligned} \sum_{(i) \in \Omega_r} \boldsymbol{\varphi}_{i1}^r &\equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i \boldsymbol{\varphi}_{i1}^r &\equiv \begin{Bmatrix} x \\ 0 \end{Bmatrix}, & \sum_{(i) \in \Omega_r} (y_i \boldsymbol{\varphi}_{i1}^r + \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r) &\equiv \begin{Bmatrix} y \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r &\equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, & \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r - \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r) &\equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ x \end{Bmatrix}, & \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r &\equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Для квазивращательных степеней свободы тождества (4.3.16) должны быть выполнены, ибо добавление независимых аппроксимаций не понижает порядок критерия полноты. Для совместных элементов выполнение тождеств (4.3.16) – (4.3.17) обеспечивает сходимость метода. Для несовместных для доказательства сходимости выполняем проверку критерия несовместности (2.7.3), или кусочного тестирования (2.7.1).

Для высокоточных элементов дополним (4.3.16) и (4.3.17) тождествами критерия полноты 2-го порядка:

- в случае независимой аппроксимации (4.3.3):

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} x_i^2 \psi_i^r \equiv x^2, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i y_i \psi_i^r \equiv xy, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i^2 \psi_i^r \equiv y^2; \quad (4.3.18)$$

- для элементов со степенями свободы  $\omega_z$ :

$$\begin{aligned} \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i^2 \boldsymbol{\varphi}_{i1}^r &\equiv \{x^2, 0\}^T, & \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i \left( y_i \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r \right) &\equiv \{xy, 0\}^T, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i (y_i \boldsymbol{\varphi}_{i1}^r - \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r) &\equiv \{y^2, 0\}^T, & \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i^2 \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r &\equiv \{0, y^2\}^T, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i (x_i \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r) &\equiv \{0, xy\}^T, & \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i (x_i \boldsymbol{\varphi}_{i2}^r + \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r) &\equiv \{0, x^2\}^T. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Для совместных элементов выполнение тождеств (4.3.18) – (4.3.19) обеспечивает повышенную скорость сходимости метода.

## 4.4. Элементы с двумя степенями свободы узла

### 4.4.1. Треугольник с узлами в вершинах

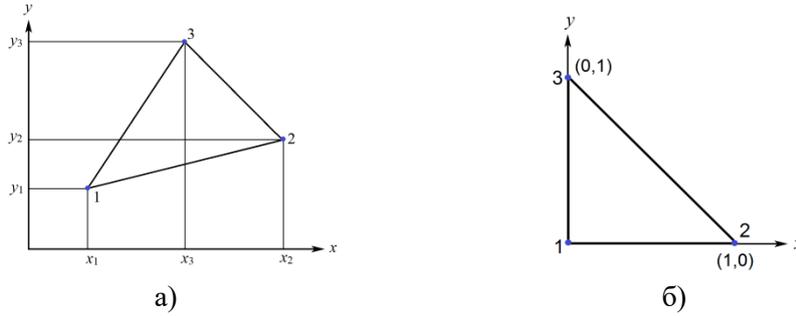
Простейший треугольный конечный элемент изображен на рис. 4.4-1а.

При построении системы аппроксимирующих функций (4.3.3) поле перемещений аппроксимируется по линейному закону:

$$\psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i x + C_3^i y. \quad (4.4.1)$$

На основании свойств (2.1.7) составляем систему уравнений для однозначного определения коэффициентов:

$$C_1^i + C_2^i x_j + C_3^i y_j = \delta_i^j, \quad j=1,2,3. \quad (4.4.2)$$



**Рис. 4.4-1.** Треугольник и его мастер-элемент

Для упрощения дальнейших выкладок воспользуемся вспомогательной системой координат, выполнив не ортогональное в общем случае преобразование с центром системы координат  $\xi\eta$  в первом узле:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Матрица Якоби (2.10.3):

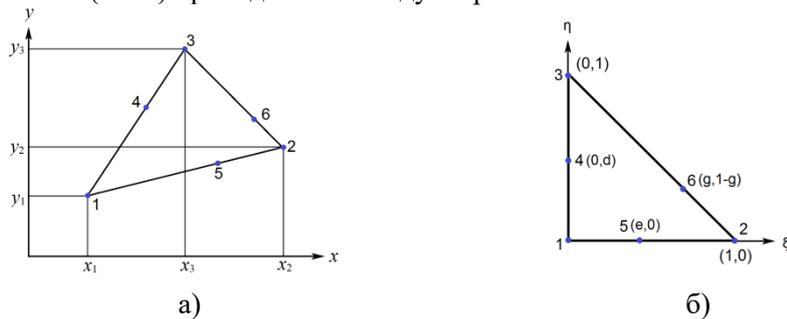
$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \quad |J(\xi, \eta)| = \text{const}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1}(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (4.4.4)$$

$$\psi_1 = 1 - \xi - \eta; \quad \psi_2 = \xi; \quad \psi_3 = \eta. \quad (4.4.5)$$

Полученные аппроксимации совместны и удовлетворяют тождествам критерия полноты (4.3.16) по построению.

#### 4.4.2. Шестиузловой треугольник

Треугольный конечный элемент с 6-ю узлами, у которого дополнительно на каждой из сторон добавлен еще один узел, изображен на рис. 4.4-2а. Преобразование (4.4.3) приводит его к виду на рис. 4.4-2б.



**Рис. 4.4-2.** Треугольник с 6-ю узлами и его мастер-элемент

При построении его системы аппроксимирующих функций (4.3.3) поле перемещений аппроксимируется по квадратичному закону.

$$\psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i \xi + C_3^i \eta + C_4^i \xi^2 + C_5^i \xi \eta + C_6^i \eta^2. \quad (4.4.6)$$

Коэффициенты  $C_i^j$  определяем из уравнений (2.1.7):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (1 - \xi - \eta) \left(1 - \frac{\xi}{e} - \frac{\eta}{d}\right), & \psi_2 &= \frac{\xi}{1-e} \left(\xi - \frac{g-e}{1-g} \eta - e\right), \\ \psi_3 &= \frac{\eta}{1-d} \left(\eta - \frac{1-g-d}{g} \xi - d\right), & \psi_4 &= \frac{\eta}{d(1-d)} (1 - \xi - \eta), \\ \psi_5 &= \frac{\xi}{e(1-e)} (1 - \xi - \eta), & \psi_6 &= \frac{\xi \eta}{g(1-g)}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Если узлы 4-6 расположены в серединах сторон, то формулы (4.4.7) упрощаются:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), & \psi_2 &= \xi(2\xi - 1), \\ \psi_3 &= \eta(2\eta - 1), & \psi_4 &= 4\eta(1 - \xi - \eta), \\ \psi_5 &= 4\xi(1 - \xi - \eta), & \psi_6 &= 4\xi\eta. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Можно рассматривать конечные элементы и с числом узлов 4 и 5, когда отсутствуют некоторые узлы на сторонах. Такие элементы применяются для последовательного сгущения сетки. При этом берется закон аппроксимаций (4.4.7), а на сторонах, где отсутствуют промежуточные узлы, добавляются условия линейности перемещений.

При корректной стыковке элементов полученные аппроксимации совместны и удовлетворяют тождествам критерия полноты (4.3.16), а для элементов с 6-ю узлами и (4.3.18).

### 4.4.3. Треугольные элементы (SA)

Рассмотрим треугольные конечные элементы, изображенные на рис. 4.4.1а или 4.4.2а. После построения систем аппроксимирующих функций (4.4.5) или (4.4.7) сделаем еще одну замену систем координат:

$$\xi = \frac{1}{3}(2\xi_1 - \eta_1 + 1), \quad \eta = \frac{1}{3}(-\xi_1 + 2\eta_1 + 1). \quad (4.4.9)$$

Преобразование приводит к треугольнику на рис. 4.4-3.

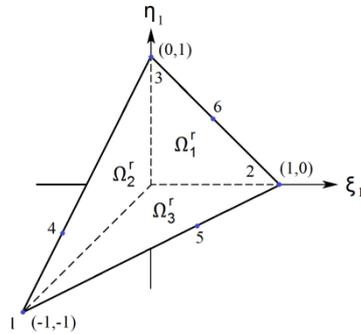


Рис. 4.4-3. Треугольник в специальной системе координат

Существует четыре кусочных полинома второго порядка<sup>1</sup>, которые непрерывны и на границе области равны нулю:

$$\zeta_1 = \begin{cases} 1 - \xi_1 - \eta_1, & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \\ 1 + 2\xi_1 - \eta_1, & \mathbf{x} \in \Omega_r^2 \\ 1 - \xi_1 + 2\eta_1, & \mathbf{x} \in \Omega_r^3 \end{cases}, \quad \zeta_2 = \xi_1 \zeta_1, \quad \zeta_3 = \eta_1 \zeta_1,$$

$$\zeta_4 = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \\ (1 + 2\xi_1 - \eta_1)\zeta_1, & \mathbf{x} \in \Omega_r^2 \\ (1 - \xi_1 + 2\eta_1)\eta_1, & \mathbf{x} \in \Omega_r^3 \end{cases}. \quad (4.4.10)$$

При независимой аппроксимации  $u$  и  $v$  «внутренние» степени свободы, соответствующие функциям (4.4.11), можно добавить к системам функций трехузлового и шестиузлового элементов:

$$\psi_{2i-1} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{2i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \zeta_i \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,3,4. \quad (4.4.11)$$

#### 4.4.4. Треугольники серендипового типа

Рассмотренные выше треугольные конечные элементы являются элементами серендипового типа соответственно для полиномов первой и второй степени.

Рассмотрим треугольник Паскаля, представленный на рис. 4.4-4. Если повышать степень полинома на единицу, то при обеспечении совместности аппроксимаций при стыковке однотипных элементов число одночленов в полиноме совпадает с числом узлов соответствующей внутренней сетки. При этом появляется еще один узел на каждой стороне.

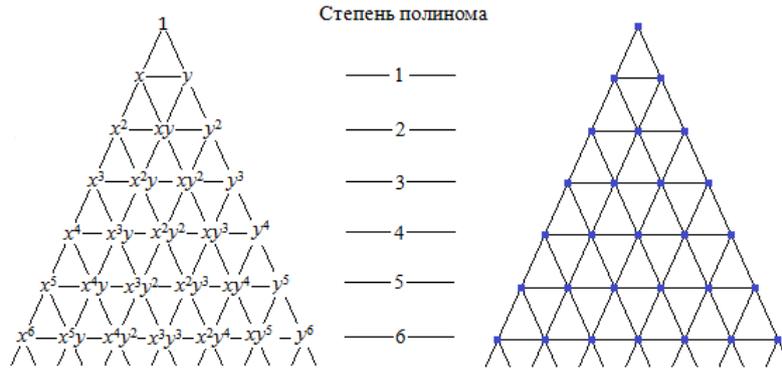


Рис. 4.4-4. Треугольник Паскаля и соответствующие ему треугольные элементы серендипового типа

<sup>1</sup> Дальнейшее повышение степени полинома не дает существенного повышения точности вычислений.

Начиная с третьей степени, появляются внутренние узлы, степени свободы которых можно конденсировать согласно разд. 2.9.

#### 4.4.5. Прямоугольник с узлами в вершинах

Простейший прямоугольный конечный элемент изображен на рис. 4.4-5а. При преобразовании (4.4.3) получаем квадрат, изображенный на рис. 4.4-5б.



Рис. 4.4-5. Прямоугольник и его мастер-элемент

При построении системы аппроксимирующих функций (4.3.3) поле перемещений аппроксимируется по билинейному закону:

$$\psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i \xi + C_3^i \eta + C_4^i \xi \eta. \quad (4.4.12)$$

Получаем:

$$\psi_1 = (1 - \xi)(1 - \eta), \quad \psi_2 = \xi(1 - \eta), \quad \psi_3 = (1 - \xi)\eta, \quad \psi_4 = \xi\eta. \quad (4.4.13)$$

Полученные аппроксимации совместны и удовлетворяют тождествам критерия полноты (4.3.16) порядка 1 по построению.

#### 4.4.6. Восьмиузловой прямоугольник

Четырехугольный конечный элемент с 8-ю узлами, у которого дополнительно на каждой из сторон добавлен еще один узел, изображен на рис. 4.4-6а. После преобразования (4.4.3) получаем четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-6б.

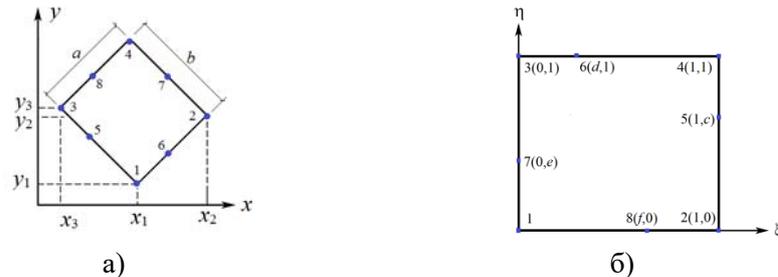


Рис. 4.4-6. 8-и узловой четырехугольник

При построении его системы аппроксимирующих функций (4.3.3) поле перемещений аппроксимируется неполным полиномом третьей степени, обеспечивающим непрерывность перемещений на линиях стыковки элементов.:

$$\psi_i(x, y) = C_1^i + C_2^i \xi + C_3^i \eta + C_4^i \xi^2 + C_5^i \xi \eta + C_6^i \eta^2 + C_7^i \xi^2 \eta + C_8^i \xi \eta^2, \quad (4.4.14)$$

Получаем функции (4.3.2):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (1-\xi)(1-\eta)\left(1-\frac{\xi}{b}-\frac{\eta}{a}\right), & \psi_2 &= \xi(1-\eta)\left(\frac{\xi-b}{1-b}-\frac{\eta}{d}\right), \\ \psi_3 &= (1-\xi)\eta\left(\frac{\eta-a}{1-a}-\frac{\xi}{c}\right), & \psi_4 &= \xi\eta\left(\frac{\xi-c}{1-c}-\frac{\eta-a}{a-1}\right), \\ \psi_5 &= (1-\xi)\frac{\eta(1-\eta)}{a(1-a)}, & \psi_6 &= \frac{\xi(1-\xi)}{b(1-b)}(1-\eta), \\ \psi_7 &= \xi\frac{\eta(1-\eta)}{c(1-c)}, & \psi_8 &= \frac{\xi(1-\xi)}{d(1-d)}\eta. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Если узлы 5-8 расположены на серединах сторон, то:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(1-2\xi-2\eta), & \psi_2 &= \xi(1-\eta)(2\xi-2\eta-1), \\ \psi_3 &= (1-\xi)\eta(2\eta-2\xi-1), & \psi_4 &= \xi\eta(2\eta+2\xi-3), \\ \psi_5 &= 4(1-\xi)\eta(1-\eta), & \psi_6 &= 4\xi(1-\xi)(1-\eta), \\ \psi_7 &= 4\xi\eta(1-\eta), & \psi_8 &= 4\xi(1-\xi)\eta. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Можно рассматривать конечные элементы и с числом узлов от 5 до 7, когда отсутствуют некоторые узлы на сторонах. Для этого берется закон аппроксимаций (4.4.15), а на сторонах, где отсутствуют промежуточные узлы, рассматриваются условия линейности перемещений. Как и в треугольных элементах, дополнительные узлы применяются для последовательного сгущения сетки.

При корректной стыковке элементов полученные аппроксимации совместны и удовлетворяют критерию полноты (4.3.16), а для элементов с 8-ю узлами, содержащих все одночлены 2-го порядка, – (4.3.18).

#### 4.4.7. Прямоугольные элементы серендипового типа

Рассмотренные выше четырехугольные конечные элементы являются серендипового типа соответственно для полиномов первой и второй степени на сторонах элементов.

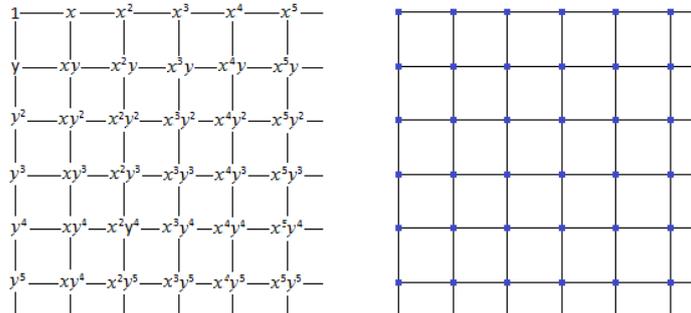


Рис. 4.4-7. Треугольник Паскаля и соответствующие ему четырехугольные элементы серендипового типа

Рассмотрим треугольник Паскаля, представленный на рис. 4.4-7. Если аппроксимации брать как произведение линейных полиномов, то получим полином удвоенной степени и соответствующее число внутренних узлов с прямоугольной внутренней сеткой. Степени свободы внутренних узлов можно конденсировать согласно разд. 2.9.

Восьмиузловой четырехугольный элемент на рис. 4.4-6 не содержит внутренних узлов. Существуют и другие прямоугольные элементы серендипового типа порядка  $p$  с  $p+1$  числом узлов на стороне элемента, у которых нет внутренних узлов [27, 28, 39].

#### 4.4.8. Четырехугольные элементы (SA)

Метод подобластей, описанный в разд. 2.11, позволяет получить совместные кусочно-полиномиальные аппроксимации для произвольного выпуклого четырехугольника, изображенного на рис. 4.4-8а, с сохранением симметрии в элементе при ее наличии.

Выполним преобразование (2.12.2). Произвольный четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-8а, преобразуется в четырехугольник, представленный на рис. 4.4-8б.

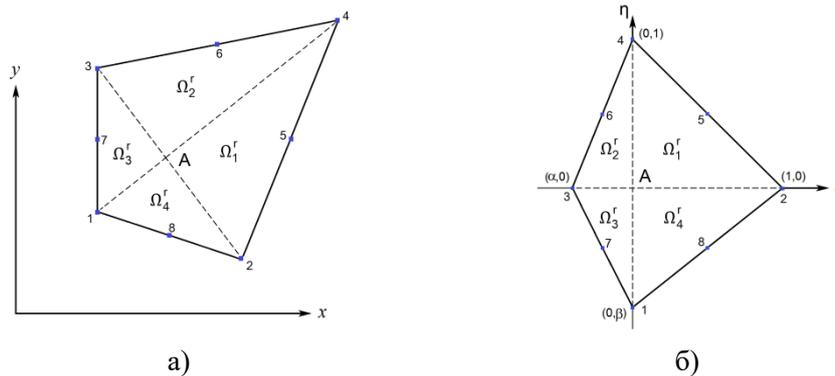


Рис. 4.4-8. Четырехугольный элемент

Будем рассматривать четырехугольники, у которых 8 узлов, что не нарушает общности построений. Если какой-нибудь узел отсутствует, то добавляется условие линейности перемещений на границе элемента.

#### Аппроксимации класса $W_2^1(\Omega)$

Аппроксимирующие функции (4.3.1) четырехугольного конечного элемента, имеющего не более одного промежуточного узла на стороне [39], будем искать в виде (2.12.9), где функции  $\psi_i(\mathbf{x})$ :

$$\psi_i = \chi_i - \sum_{j=5}^{N_r} \chi_j(\xi_j, \eta_j) \chi_j(\xi, \eta), \quad i=1,2,3,4, 4 \leq N_r \leq 8, \quad (4.4.17)$$

$$\chi_1 = \begin{cases} \eta / \beta, & \eta \leq 0 \\ 0, & \eta > 0 \end{cases}, \quad \chi_2 = \begin{cases} \xi, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases},$$

$$\chi_3 = \begin{cases} \xi / \alpha, & \xi \leq 0 \\ 0, & \xi > 0 \end{cases}, \quad \chi_4 = \begin{cases} \eta, & \eta \geq 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases},$$

$$\chi_j = \begin{cases} \frac{\xi \eta}{\xi_j \eta_j}, & (\xi, \eta), (\xi_j, \eta_j) \in \Omega_r^k \\ 0, & (\xi_j, \eta_j) \notin \Omega_r^k \end{cases}, \quad k=1,2,3,4, 5 \leq j \leq 8.$$

Функции (4.4.17) представляют собой на каждой из подобластей  $\Omega_r^k$ ,  $k=1,2,3,4$  – полиномы степени не выше 2-й, они непрерывны в  $\Omega_r$  и удовлетворяют условиям МКЭ (2.1.7).

Примем в представлении (2.12.9), что функции  $\lambda_i(\xi, \eta)$  являются полиномами второго порядка и, следовательно, необходимо определить в (2.12.10) двенадцать коэффициентов  $C_{jk}^i, j=1,2,3,4, k=1,2,3$ .

Из условий непрерывности  $\lambda_j$  в  $\Omega_r$  получаем 7 уравнений:

$$C_{11}^i = C_{21}^i = C_{31}^i = C_{41}^i, \quad C_{12}^i = C_{42}^i, \quad C_{13}^i = C_{23}^i, \quad C_{22}^i = C_{32}^i, \quad C_{33}^i = C_{43}^i \quad (4.4.18)$$

Потребуем для аппроксимирующих функций элемента равенства в точке  $A$  для всех подобластей  $\Omega_r^k, k=1,2,3,4$ , величин

$$\frac{\partial}{\partial \xi'}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta'}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi \eta'}.$$

Получаем недостающие пять уравнений:

$$\begin{aligned} -C_{12}^i - C_{13}^i + \gamma_{1,1}^{i,1} &= -C_{22}^i - AC_{13}^i + \gamma_{1,1}^{i,2} = -BC_{22}^i - AC_{43}^i + \gamma_{1,1}^{i,3} = -BC_{12}^i - C_{43}^i + \gamma_{1,1}^{i,4}, \\ -C_{11}^i + C_{12}^i + \gamma_{1,0}^{i,1} &= -AC_{11}^i + C_{22}^i + \gamma_{1,0}^{i,2}, \\ -C_{11}^i + C_{13}^i + \gamma_{0,1}^{i,1} &= -BC_{11}^i + C_{43}^i + \gamma_{0,1}^{i,4} \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

Решение системы равнений (4.4.18), (4.4.19):

$$\begin{aligned} C_{11}^i = C_{21}^i = C_{31}^i = C_{41}^i &= \frac{1}{2} \left( -A_1 \tilde{\gamma}_{1,0}^{i,21} - B_1 \tilde{\gamma}_{0,1}^{i,41} + A_1 B_1 (\tilde{\gamma}_{1,1}^{i,12} + \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,34}) \right), \\ C_{12}^i = C_{42}^i &= \frac{1}{2} \left( A_1 \tilde{\gamma}_{1,0}^{i,21} - B_1 \tilde{\gamma}_{0,1}^{i,41} + A_1 B_1 \left( (2A-1) \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,41} + \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,23} \right) \right), \\ C_{13}^i = C_{23}^i &= \frac{1}{2} \left( -A_1 \tilde{\gamma}_{1,0}^{i,21} + B_1 \tilde{\gamma}_{0,1}^{i,41} + A_1 B_1 \left( (2B-1) \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,21} - \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,34} \right) \right), \\ C_{22}^i = C_{32}^i &= \frac{1}{2} \left( AA_1 \tilde{\gamma}_{1,0}^{i,21} - AB_1 \tilde{\gamma}_{0,1}^{i,41} + A_1 B_1 \left( A \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,41} + (2-A) \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,23} \right) \right), \\ C_{33}^i = C_{43}^i &= \frac{1}{2} \left( -A_1 B \tilde{\gamma}_{1,0}^{i,21} + BB_1 \tilde{\gamma}_{0,1}^{i,41} + A_1 B_1 \left( B \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,21} + (2-B) \tilde{\gamma}_{1,1}^{i,34} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{nk} &= \zeta_{ij}^k(\psi_n), \quad - \text{величины (2.12.11)}, \\ \tilde{\gamma}_{ij}^{nkm} &= \gamma_{ij}^{nk} - \gamma_{ij}^{nm}, \\ A &= \frac{1}{\alpha}, \quad B = \frac{1}{\beta}, \quad A_1 = 1/(1-\alpha), \quad B_1 = 1/(1-\beta). \end{aligned}$$

**Аппроксимации класса  $C_1(\Omega_r)$** 

Потребуем, чтобы искомые аппроксимирующие функции четырехугольного конечного элемента, имеющего не более одного промежуточного узла на стороне, представляли собой на каждой подобласти полиномы второй степени и были непрерывны вместе со своими производными [117]. Заданным условиям непрерывности на элементе удовлетворяют восемь функций:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 1, & \chi_2 &= \xi, & \chi_3 &= \eta, & \chi_4 &= \xi\eta, \\ \chi_5 &= \begin{cases} \xi^2 & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=1,4 \\ 0, & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=2,3 \end{cases}, \\ \chi_6 &= \begin{cases} \xi^2 & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=2,3 \\ 0, & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=1,4 \end{cases}, \\ \chi_7 &= \begin{cases} \eta^2 & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=1,2 \\ 0, & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=3,4 \end{cases}, \\ \chi_8 &= \begin{cases} \eta^2 & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=3,4 \\ 0, & (\xi, \eta) \in \Omega_k^r, \quad k=1,2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Искомые аппроксимации представим в виде:

$$\varphi_i = \sum_{j=0}^8 C_{ij} \chi_j(\xi, \eta), \quad i=1, \dots, N_r \quad (4.4.22)$$

Коэффициенты  $C_{ij}$  определим из системы уравнений 8-го порядка:

- первые  $N_r$  уравнений являются уравнениями МКЭ (2.1.7);
- на сторонах, где отсутствуют промежуточные узлы, потребуем, чтобы функции изменялись по линейному закону. При этом получим недостающие  $8 - N_r$  уравнений.

Данная система уравнений всегда имеет решение, которое приведем для:

- четырехузлового элемента:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2} B_1 \begin{cases} 1 - 2\eta - \xi^2 + \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 - 2\eta - A^2 \xi^2 + \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1 - 2\eta - A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1 - 2\eta - \xi^2 + B^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} A_1 \begin{cases} -\alpha + 2\xi - \alpha \xi^2 + \alpha \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -\alpha + 2\xi - A \xi^2 + \alpha \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -\alpha + 2\xi - A \xi^2 + \alpha B^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ -\alpha + 2\xi - \alpha \xi^2 + \alpha B^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \frac{1}{2}A_1 \begin{cases} 1-2\xi+\xi^2-\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1-2\xi+A^2\xi^2-\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1-2\xi+A^2\xi^2-B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1-2\xi+\xi^2-B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\ \psi_4 &= \frac{1}{2}B_1 \begin{cases} -\beta+2\eta+\beta\xi^2-\beta\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -\beta+2\eta+A^2\beta\xi^2-\beta\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -\beta+2\eta+A^2\beta\xi^2-B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ -\beta+2\eta+\beta\xi^2-B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}; \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

- восьмиузловой элемента с узлами в серединах сторон<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{1}{2}B_1 \begin{cases} 1-2\eta-\xi^2+\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1-2\eta-A^2\xi^2+\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1-2\eta-A^2\xi^2-(3-4\beta)B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1-2\eta-\xi^2-(3-4\beta)B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}A_1 \begin{cases} \alpha-2\xi+(4-3\alpha)\xi^2-\alpha\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \alpha-2\xi+A\xi^2-\alpha\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ \alpha-2\xi+A\xi^2-\alpha B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ \alpha-2\xi+(4-3\alpha)\xi^2-\alpha B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\ \psi_3 &= -\frac{1}{2}A_1 \begin{cases} 1-2\xi+\xi^2-\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1-2\xi-(3-4\alpha)A^2\xi^2-\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1-2\xi-(3-4\alpha)A^2\xi^2-B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1-2\xi+\xi^2-B^2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\ \psi_4 &= \frac{1}{2}B_1 \begin{cases} \beta-2\eta-\beta\xi^2+(4-3\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \beta-2\eta-A^2\beta\xi^2+(4-3\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ \beta-2\eta-A^2\beta\xi^2+B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ \beta-2\eta-\beta\xi^2+B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\ \psi_5 &= A_1B_1 \begin{cases} 2\alpha\beta-4\beta\xi-4\alpha\eta+2\beta(2-\alpha)\xi^2+4\xi\eta+2\alpha(2-\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 2\alpha\beta-4\beta\xi-4\alpha\eta+2A\beta\xi^2+4\xi\eta+2\alpha(2-\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 2\alpha\beta-4\beta\xi-4\alpha\eta+2A\beta\xi^2+4\xi\eta+2\alpha B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 2\alpha\beta-4\beta\xi-4\alpha\eta+2\beta(2-\alpha)\xi^2+4\xi\eta+2\alpha B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Используя функции (4.4.24), несложно построить аппроксимации для произвольно расположенных на сторонах узлов.

$$\begin{aligned}
\psi_6 = A_1 B_1 & \begin{cases} -2\beta + 4\beta\xi + 4\eta - 2\beta\xi^2 - 4\xi\eta - (4 - 2\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -2\beta + 4\beta\xi + 4\eta - A\beta(4 - 2A)\xi^2 - 4\xi\eta - (4 - 2\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -2\beta + 4\beta\xi + 4\eta - A\beta(4 - 2A)\xi^2 - 4\xi\eta - 2B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ -2\beta + 4\beta\xi + 4\eta - 2\beta\xi^2 - 4\xi\eta - 4\xi\eta - 2B\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\
\psi_7 = A_1 B_1 & \begin{cases} -2 - 4\xi - 4\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -2 - 4\xi - 4\eta - 2A^2(1 - 2\alpha)\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -2 - 4\xi - 4\eta - 2A^2(1 - 2\alpha)\xi^2 + 4\xi\eta - 2B^2(1 - 2\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ -2 - 4\xi - 4\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta - 2B^2(1 - 2\beta)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\
\psi_8 = A_1 B_1 & \begin{cases} -2\alpha + 4\xi + 4\alpha\eta - (4 - 2\alpha)\xi^2 - 4\xi\eta - 2\alpha\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -2\alpha + 4\xi + 4\alpha\eta - 2A\xi^2 - 4\xi\eta - 2\alpha\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -2\alpha + 4\xi + 4\alpha\eta - 2A\xi^2 - 4\xi\eta - \alpha B(4 - 2B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ -2\alpha + 4\xi + 4\alpha\eta - (4 - 2\alpha)\xi^2 - 4\xi\eta - \alpha B(4 - 2B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}. \quad (4.4.24)
\end{aligned}$$

#### Аппроксимации с внутренними степенями свободы

Существует пять кусочных полиномов второго порядка, которые непрерывны и на границе области равны нулю:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \begin{cases} 1 - \xi - \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 - A\xi - \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1 - A\xi - B\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1 - \xi - B\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \quad \zeta_2 = \xi\zeta_1, \quad \zeta_3 = \eta\zeta_1, \\
\zeta_4 &= \begin{cases} (1 - \xi - \eta)\xi, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1 - \xi - B\eta)\xi, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \end{cases} \\
\zeta_5 &= \begin{cases} (1 - \xi - \eta)\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1 - A\xi - \eta)\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \end{cases}. \quad (4.4.25)
\end{aligned}$$

При независимой аппроксимации  $u$  и  $v$ :

$$\psi_{2i-1} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_{2i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \zeta_i \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,3,4,5. \quad (4.4.26)$$

Поставим в соответствие функциям (4.4.26) некие «внутренние» степени свободы, и добавим их как к аппроксимациям класса  $W_{\frac{1}{2}}^1(\Omega_r)$ , так и к аппроксимациям класса  $C_1(\Omega_r)$ . После конденсации дополнительных степеней свободы матрицы жесткости для обоих вариантов *совпадут*.

#### 4.4.9. Четырехугольники с двумя узлами на стороне

Если на сторонах элемента находится по два промежуточных узла  $j$  и  $t$ , то положим в (2.12.9) [39]:

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{\xi\eta(\xi\eta_t - \xi_t\eta)}{\xi_j\eta_j(\xi_j\eta_t - \xi_t\eta_j)}, & (\xi, \eta), (\xi_j, \eta_j), (\xi_t, \eta_t) \in \Omega_k^r, \\ 0, & (\xi_j, \eta_j) \notin \Omega_k^r \end{cases} \quad k=1,2,3,4, \quad 5 \leq j \leq N_r. \quad (4.4.27)$$

Функции представляют собой на каждой из подобластей  $\Omega_k^r$ ,  $k=1,2,3,4$  уже полиномы третьей степени. Они непрерывны на  $\Omega_r$  и удовлетворяют условиям МКЭ (2.1.7).

Если принять в представлении (2.12.10), что функции  $\lambda_i(\xi, \eta)$  являются тоже полиномами третьего порядка, то необходимо определить 24 коэффициента  $C_{jk}^i$ ,  $j=1,2,3,4$ ,  $k=1 \div 6$ .

Из условий непрерывности  $\lambda_i$  в  $\Omega_r$  следует 11 уравнений:

$$\begin{aligned} C_{11}^i = C_{21}^i = C_{31}^i = C_{41}^i, \quad C_{12}^i = C_{42}^i, \quad C_{14}^i = C_{44}^i, \quad C_{13}^i = C_{23}^i, \\ C_{16}^i = C_{26}^i, \quad C_{22}^i = C_{32}^i, \quad C_{24}^i = C_{34}^i, \quad C_{33}^i = C_{43}^i, \quad C_{36}^i = C_{46}^i. \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

Потребуем выполнения следующих дополнительных условий:

- равенства для всех треугольников  $\Omega_k^r$ ,  $k=1,2,3,4$  в точке A величин:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2}; \quad (4.4.29)$$

- выполнения дополнительных равенств:

$$\begin{aligned} \mu_{2,1}^{i,1} = \mu_{2,1}^{i,4}, \quad \mu_{2,1}^{i,2} = \mu_{2,1}^{i,3}, \quad \mu_{1,2}^{i,1} = \mu_{1,2}^{i,2}, \quad \mu_{1,2}^{i,3} = \mu_{1,2}^{i,4}, \\ A_1(\mu_{2,1}^{i,1} - \mu_{2,1}^{i,2}) + B_1(\mu_{1,2}^{i,1} - \mu_{1,2}^{i,4}) = 0, \\ A_1^3(\mu_{3,0}^{i,1} - \mu_{3,0}^{i,2}) + B_1^3(\mu_{0,3}^{i,1} - \mu_{0,3}^{i,4}) = 0, \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

где  $\mu_{ij}^{nk} = \zeta_{ij}^k(\varphi_n)$  – величины (2.12.11).

Данные условия обеспечивают единственность построения системы аппроксимирующих функций и сохраняют симметрию в элементе при ее наличии. Учитывая (4.4.28), из (4.4.29) и (4.4.30), получаем систему 13-ти уравнений:

$$\begin{aligned} -C_{11}^i + C_{12}^i + \gamma_{1,0}^{i,1} &= -AC_{11}^i + C_{22}^i + \gamma_{1,0}^{i,2}, \\ -C_{11}^i + C_{13}^i + \gamma_{0,1}^{i,1} &= -BC_{11}^i + C_{43}^i + \gamma_{0,1}^{i,4}, \\ -2C_{12}^i + 2C_{14}^i + \gamma_{2,0}^{i,1} &= -C_{22}^i + 2C_{24}^i + \gamma_{2,0}^{i,2}, \\ -2C_{13}^i + 2C_{16}^i + \gamma_{0,2}^{i,1} &= -2BC_{33}^i + 2C_{36}^i + \gamma_{0,2}^{i,4}, \\ -C_{12}^i - C_{13}^i + C_{15}^i + \gamma_{1,1}^{i,1} &= -C_{22}^i - AC_{13}^i + C_{25}^i + \gamma_{1,1}^{i,2} = \\ &= -BC_{22}^i - C_{33}^i + C_{35}^i + \gamma_{1,1}^{i,3} = -BC_{12}^i - C_{33}^i + C_{45}^i + \gamma_{1,1}^{i,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_1(-2C_{14}^i - 2C_{15}^i + 2C_{24}^i + 2AC_{25}^i - \tilde{\gamma}_{2,1}^{i,21}) + B_1(-2C_{15}^i - 2C_{16}^i + 2BC_{45}^i + 2C_{36}^i - \tilde{\gamma}_{1,2}^{i,41}) = 0, \\
& A_1^3(-6C_{14}^i + 6AC_{24}^i - \tilde{\gamma}_{3,0}^{i,21}) + B_1^3(-6C_{16}^i + 6BC_{36}^i + 2C_{36}^i - \tilde{\gamma}_{0,3}^{i,41}) = 0, \\
& -2C_{14}^i - 2C_{15}^i + \gamma_{2,1}^{i,1} = -2BC_{14}^i - 2C_{45}^i + \gamma_{2,1}^{i,4}, \\
& -2C_{24}^i - 2AC_{25}^i + \gamma_{2,1}^{i,2} = -2BC_{24}^i - 2AC_{35}^i + \gamma_{2,1}^{i,3}, \\
& -2C_{15}^i - 2C_{16}^i + \gamma_{1,2}^{i,1} = -2C_{25}^i - 2AC_{16}^i + \gamma_{1,2}^{i,2}, \\
& -2BC_{35}^i - 2AC_{36}^i + \gamma_{1,2}^{i,3} = -2BC_{45}^i - 2C_{36}^i + \gamma_{1,2}^{i,4}.
\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

Система уравнений (4.4.31) невырождена для выпуклых четырехугольников:  $\alpha < 0, \beta < 0$ .

#### 4.4.10. Изопараметрические элементы

Для произвольных четырехугольных элементов достаточно трудно построить полиномиальные аппроксимации. Данная задача еще усложняется, если стороны треугольного или четырехугольного элемента являются криволинейными из-за наличия на них дополнительных узлов. В этих случаях часто используются изопараметрические элементы.

Запишем преобразование (2.10.1) области в  $\Omega_r$  в «правильный» многоугольник:

$$\begin{cases} x = \Phi_x(\xi, \eta) = x_1 + \sum_{i=1}^{N_r} (x_i - x_1) \psi_i(\xi, \eta) \\ y = \Phi_y(\xi, \eta) = y_1 + \sum_{i=1}^{N_r} (y_i - y_1) \psi_i(\xi, \eta) \end{cases}, \tag{4.4.32}$$

где  $\psi_i(\xi, \eta)$  являются, как правило, соответствующими функциями формы «правильного» конечного элемента.

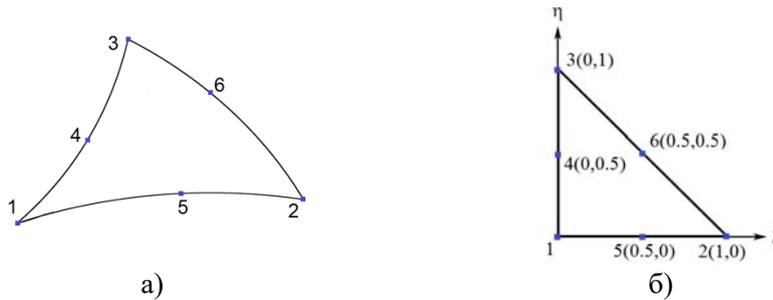
Матрица Якоби  $\mathbf{J}$  (2.10.3) преобразования (4.4.32) для произвольного четырехугольника уже не является константой. Рассматриваются выпуклые четырехугольники  $\Omega_r$ , для которых Якобиан  $J = |\mathbf{J}(\xi, \eta)| > 0$  в любой точке элемента.

Оператор геометрии  $\mathbf{A}$  (4.1.16) представим в таком виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\}^T. \tag{4.4.33}$$

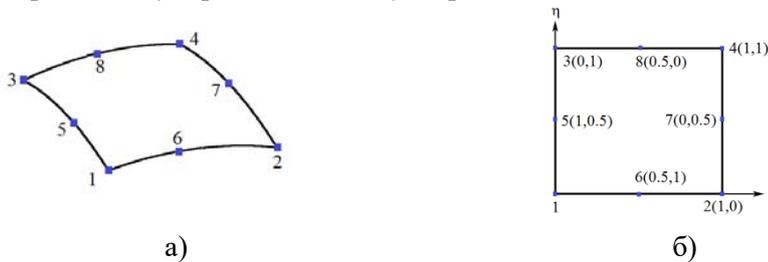
Представление (4.4.33) можно применить и при построении обычных конечных элементов плоской задачи теории упругости для упрощения соответствующих вычислений.

Изопараметрический элемент с 6-ю узлами: изображен на рис. 4.4-9а. Преобразование (4.4.32) с помощью системы функций (4.4.8) приводит его к мастер-элементу, представленному на рис. 4.4-9б.



**Рис. 4.4-9.** Изопараметрический 6-ти узловой элемент

Изопараметрический элемент с 8-ю узлами: изображен на рис. 4.4-10а. Преобразование (4.4.32) с помощью системы функций (4.4.16) приводит его к мастер-элементу, представленному на рис. 4.4-10б.



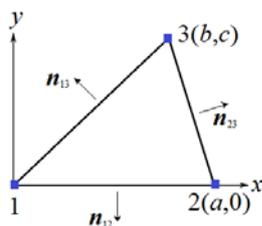
**Рис. 4.4-10.** Изопараметрический 8-ми узловой элемент

Можно поместить узлы на ребрах мастер-элемента как посередине, так и пропорционально соотношению расстояний до узлов ребра. Но в этом случае будут использоваться для преобразования (4.4.32) уже системы функций соответственно (4.4.7) и (4.4.15).

## 4.5. Элементы с квазивращательными степенями свободы (QRDF)

### 4.5.1. Треугольный элемент (QRDF3)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис 4.5-1. Заменой координат (4.5.1) он преобразуется к прямоугольному треугольнику с единичными катетами, изображенному на рис. 4.4-1б.



**Рис. 4.5-1.** Треугольный элемент

$$\xi = \frac{1}{a}(x - \frac{b}{c}y), \quad \eta = \frac{y}{c}, \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{b}{ac} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\mathbf{n}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{13} = \frac{1}{a_{13}} \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{23} = \frac{1}{a_{23}} \begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix},$$

$a_{ij}$  – длины соответствующих сторон.

Условием (4.3.6) удовлетворяет следующая аппроксимация перемещений:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1 - \xi - \eta)u_1 + \xi u_2 + \eta u_3 + \frac{c}{2} \xi \eta (\theta_3 - \theta_2) - \frac{c}{2} (1 - \xi - \eta) \eta (\theta_1 - \theta_3) \\ v(x, y) &= (1 - \xi - \eta)v_1 + \xi v_2 + \eta v_3 - \frac{a}{2} \xi (1 - \xi - \eta) (\theta_2 - \theta_1) + \\ &\quad \frac{a-b}{2} \xi \eta (\theta_3 - \theta_2) + \frac{b}{2} \eta (1 - \xi - \eta) (\theta_1 - \theta_3). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Т.е., функции системы (4.3.6) имеют вид [98]:

$\varphi_{i,j}^r, j=1,2$  – совпадают с линейными аппроксимациями (4.4.5);

$$\begin{aligned} \varphi_{13}^r &= \frac{1 - \xi - \eta}{2} \begin{pmatrix} -c\eta \\ a\xi + b\eta \end{pmatrix}, \\ \varphi_{23}^r &= \frac{\xi}{2} \begin{pmatrix} -c\eta \\ -a(1 - \xi) + b\eta \end{pmatrix}, \\ \varphi_{33}^r &= \frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} c(1 - \eta) \\ a\xi - b(1 - \eta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Функции (4.5.3) могут привести к геометрической изменяемости систем уравнений, если не заданы закрепления дополнительных степеней свободы.

Для условий (4.3.7) получаем с использованием полиномов 3-й степени [117]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \dots + \delta((\theta_1 + \theta_2) \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + (\theta_2 + \theta_3) \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + (\theta_1 + \theta_3) \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x})) = \\ &\dots + \delta(\theta_1 (\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x})) + \theta_2 (\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x})) + \theta_3 (\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}))), \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \xi (1 - \xi - \eta) (1 - 2\xi - \eta), \\ \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} \xi \eta (\xi - \eta), \\ \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} (1 - \xi - \eta) \eta (\xi + 2\eta - 1). \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Тогда в (4.3.8):

$$\boldsymbol{\chi}_i = \boldsymbol{\psi}_{i,3}, \quad i=1,2,3 \text{ – функции (4.5.3),}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1-\xi-\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} -c\eta(\xi+2\eta-1) \\ -a\xi(1-2\xi-\eta) - b\eta(1-\xi-2\eta) \end{array} \right\}, \\ \zeta_2 &= \frac{\xi}{2} \left\{ \begin{array}{l} c\eta(\xi-\eta) \\ -a(1-3\xi-2\eta+2\xi^2+2\xi\eta+2\eta^2) - b\eta(\xi-\eta) \end{array} \right\}, \\ \zeta_3 &= \frac{\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} -c(-1+2\xi+3\eta-2\xi^2-2\xi\eta-2\eta^2) \\ a\xi(\xi-\eta) + b(-1+2\xi+3\eta-2\xi^2-2\xi\eta-2\eta^2) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

#### 4.5.2. Четырехузловой изопараметрический элемент (QRDF4IP)

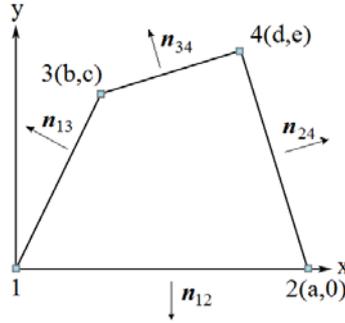


Рис. 4.5-2. Четырехугольный элемент

$$\mathbf{n}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{24} = \frac{1}{a_{24}} \begin{pmatrix} e \\ a-d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{34} = \frac{1}{a_{34}} \begin{pmatrix} c-e \\ d-b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{13} = \frac{1}{a_{13}} \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выпуклый четырехугольный конечный элемент, который изображен в местной системе координат на рис. 4.5-2. Заменой системы координат (4.4.32) с использованием функций (4.4.10) он преобразуется к единичному квадрату.

Условием (4.3.6) удовлетворяет следующая аппроксимация перемещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \dots &+ \frac{a_{12}\mathbf{n}_{12}}{2} \xi(1-\xi)(1-\eta)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a_{24}\mathbf{n}_{24}}{2} \xi\eta(1-\eta)(\theta_4 - \theta_2) + \\ &\mathbf{n}_{34}\xi(1-\xi)\eta(\theta_3 - \theta_4) + \frac{a_{13}\mathbf{n}_{13}}{2} (1-\xi)\eta(1-\eta)(\theta_1 - \theta_3). \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \varphi_4 u_4 - \frac{c}{2} \eta(1-\eta)(1-\xi)(\theta_1 - \theta_3) + \\ &\frac{e}{2} \eta(1-\eta)\xi(\theta_4 - \theta_2) + \frac{c-e}{2} \xi(1-\xi)\eta(\theta_3 - \theta_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3 + \varphi_4 v_4 + \frac{b}{2} \eta(1-\eta)(1-\xi)(\theta_1 - \theta_3) - \\ &\frac{a}{2} \xi(1-\xi)(1-\eta)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a-d}{2} \eta(1-\eta)\xi(\theta_4 - \theta_2) + \frac{d-b}{2} \xi(1-\xi)\eta(\theta_3 - \theta_4). \end{aligned}$$

Т.е. функции системы (4.3.6) имеют вид [99]:

$$\varphi_{i,j}^r, j=1,2 \text{ — совпадают с полилинейными аппроксимациями (4.4.10),}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{13}^r &= \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{2} \begin{Bmatrix} -c\eta \\ b\eta + a\xi \end{Bmatrix}, \\
\varphi_{23}^r &= \frac{\xi(1-\eta)}{2} \begin{Bmatrix} -e\eta \\ -a(1-\xi) + (d-a)\eta \end{Bmatrix}, \\
\varphi_{33}^r &= \frac{(1-\xi)\eta}{2} \begin{Bmatrix} c(1-\eta) + (c-e)\xi \\ (d-b)\xi - b(1-\eta) \end{Bmatrix}, \\
\varphi_{43}^r &= \frac{\xi\eta}{2} \begin{Bmatrix} e(1-\eta) + (e-c)(1-\xi) \\ (b-d)(1-\xi) + (a-d)(1-\eta) \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Иногда добавляют еще две функции:

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} \xi(1-\xi)\eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi(1-\xi)\eta(1-\eta) \end{Bmatrix}. \tag{4.5.9}$$

Если потребовать выполнения условий (4.3.7), то получаем:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \dots + \delta \left( (\theta_1 + \theta_2) \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + (\theta_2 + \theta_4) \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + (\theta_3 + \theta_4) \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}) + (\theta_1 + \theta_3) \boldsymbol{\mu}_4(\mathbf{x}) \right), \tag{4.5.10}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi(1-\xi)(1-\eta)(1-2\xi) \\ \eta(1-\eta)\xi(1-2\eta) \end{Bmatrix}, \\
\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} e \\ a-d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi(1-\xi)(1-\eta)(1-2\xi) \\ \eta(1-\eta)\xi(1-2\eta) \end{Bmatrix}, \\
\boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} c-e \\ d-b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi(1-\xi)\eta(1-2\xi) \\ \eta(1-\eta)(1-\xi)(1-2\eta) \end{Bmatrix}, \\
\boldsymbol{\mu}_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -c \\ b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi(1-\xi)\eta(1-2\xi) \\ \eta(1-\eta)(1-\xi)(1-2\eta) \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

Тогда в (4.3.8) [117]:

$$\begin{aligned}
\chi_i &= \psi_{i,3}, \quad i=1,2,3,4 - \text{функции (4.5.8),} \\
\zeta_1(\mathbf{x}) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2} \begin{Bmatrix} c\eta(1-2\eta) \\ -b\eta(1-2\eta) - a\xi(1-2\xi) \end{Bmatrix}, \\
\zeta_2(\mathbf{x}) &= \frac{\xi(1-\eta)}{2} \begin{Bmatrix} e\eta(1-2\eta) \\ -a(1-\xi)(1-2\xi) - (d-a)\eta(1-2\eta) \end{Bmatrix}, \\
\zeta_3(\mathbf{x}) &= \frac{(1-\xi)\eta}{2} \begin{Bmatrix} c(1-\eta)(1-2\eta) - (c-e)\xi(1-2\xi) \\ -(d-b)\xi(1-2\xi) - b(1-\eta)(1-2\eta) \end{Bmatrix}, \\
\zeta_4(\mathbf{x}) &= \frac{\xi\eta}{2} \begin{Bmatrix} e(1-\eta)(1-2\eta) + (e-c)(1-\xi)(1-2\xi) \\ (b-d)(1-\xi)(1-2\xi) + (a-d)(1-\eta)(1-2\eta) \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

### 4.5.3. Четырехузловой элемент (QRDF4SA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольный конечный элемент, который изображен на рис. 4.4.8а. Линейным преобразованием (2.12.1) он преобразуется в четырехугольник, представленный на рис. 4.4-8б. Тогда в соответствии с условиями (4.3.6) можно записать [117]:

$$u(x, y) = \dots - \frac{c}{8} \psi_7(\theta_1 - \theta_3) + \frac{e}{8} \psi_5(\theta_4 - \theta_2) + \frac{c-e}{8} \psi_6(\theta_3 - \theta_4), \quad (4.5.13)$$

$$v(x, y) = \dots + \frac{b}{8} \psi_7(\theta_1 - \theta_3) - \frac{a}{8} \psi_8(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a-d}{8} \psi_5(\theta_4 - \theta_2) + \frac{d-b}{8} \psi_6(\theta_3 - \theta_4),$$

где:  $\psi_i$ ,  $i=1,2,3,4$  – функции системы (4.4.23),  $\psi_i$ ,  $i=5,6,7,8$  – (4.4.24).

Получаем, что функции, соответствующие квазивращательной степени свободы узла, имеют вид<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi_{13}^r &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} -c\psi_7 \\ b\psi_7 + a\psi_8 \end{array} \right\}, \\ \varphi_{23}^r &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} -e\psi_5 \\ -a\psi_8 + (d-a)\psi_5 \end{array} \right\}, \\ \varphi_{33}^r &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} c\psi_7 + (c-e)\psi_6 \\ (d-b)\psi_6 - b\psi_7 \end{array} \right\}, \\ \varphi_{43}^r &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} e\psi_5 + (e-c)\psi_6 \\ (b-d)\psi_6 + (a-d)\psi_5 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Для выполнения условий (4.3.7) воспользуемся полиномами третьей степени в представлении в (4.5.10):

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ a \end{array} \right\} \psi_8(\xi - B\eta), \\ \mu_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} e \\ a-d \end{array} \right\} \psi_5(\xi - \eta), \\ \mu_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} c-e \\ d-b \end{array} \right\} \psi_6(\eta - A\xi), \\ \mu_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} -c \\ b \end{array} \right\} \psi_7(A\xi - B\eta). \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Тогда в (4.3.8):

$$\begin{aligned} \chi_i &= \psi_{i,3}, \quad i=1,2,3,4 \text{ – функции (4.5.14),} \\ \zeta_1 &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} -c\psi_7(A\xi - B\eta) \\ b\psi_7(A\xi - B\eta) - a\psi_8(B\eta - \xi) \end{array} \right\}, \\ \zeta_2 &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} e\psi_5(\xi - \eta) \\ -a\psi_8(B\eta - \xi) - (d-a)\psi_5(\xi - \eta) \end{array} \right\}, \\ \zeta_3 &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} -c\psi_7(A\xi - B\eta) + (c-e)\psi_6(\eta - A\xi) \\ (d-b)\psi_6(\eta - A\xi) + b\psi_7(A\xi - B\eta) \end{array} \right\}, \\ \zeta_4 &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} e\psi_5(\xi - \eta) - (e-c)\psi_6(\eta - A\xi) \\ -(b-d)\psi_6(\eta - A\xi) + (a-d)\psi_5(\xi - \eta) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

<sup>1</sup> Если изопараметрический элемент использует для аппроксимаций полиномы третьей степени, то на каждой из подобластей мы имеем полиномы второй степени.

## 4.6. Несовместные элементы (DDFIC)

### 4.6.1. Алгоритм построения несовместных элементов

Применим алгоритм, изложенный в разд. 2.11, к рассматриваемой задаче. Построим систему функций

$$\left\{ \boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x}), \boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^2, L_{nk} \boldsymbol{\lambda}_i^r = 0, k=1,2, L_{n3} \boldsymbol{\lambda}_i^r = \delta_i^n, (i),(n) \in \Omega_r \right\}, \quad (4.6.1)$$

удовлетворяющую уравнениям критерия несовместности (2.7.3), которые примут следующий вид:

$$\int_{\Omega_r} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_i^r d\Omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \int_{\Omega_r} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_i^r d\Omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.6.2)$$

Если функции  $\boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x})$  не удовлетворяют уравнениям (4.6.2), откорректируем их:

$$\boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i^r(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^4 b_{ik}^r \boldsymbol{\mu}_k^r(\mathbf{x}) \zeta, \quad (i) \in \Omega_r, \quad (4.6.3)$$

где функции  $\boldsymbol{\mu}_k^r(\mathbf{x})$ ,  $k=1,2,3,4$  – функции с равными нулю значениями всех рассматриваемых степеней свободы:

$$\left\{ \boldsymbol{\mu}_k^r(\mathbf{x}), k=1,2,3,4, L_{ij} \boldsymbol{\mu}_k^r(\mathbf{x}) = 0, (i) \in \Omega_r, j=1,2,3 \right\} \quad (4.6.4)$$

Коэффициенты  $b_{ik}$  в (4.6.3) найдем из систем уравнений (4.6.2).

Рассмотрим систему функций соответствующего элемента без вращательной степени свободы:

$$\left\{ \boldsymbol{\Phi}_{ij}^r(\mathbf{x}), L_{kn} \boldsymbol{\Phi}_{ij}^r = \delta_{kn}^{ij}, (i),(k) \in \Omega_r, j,n=1,2 \right\}. \quad (4.6.5)$$

Будем считать, что система функций (4.6.5) удовлетворяет, как минимум, тождествам критерия полноты (4.3.16).

Функции системы (4.3.14), соответствующие линейным смещениям, построим корректировкой функций (4.6.5):

$$\boldsymbol{\varphi}_{ij}^r(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}_{ij}^r(\mathbf{x}) - \sum_{(k) \in \Omega_r} \boldsymbol{\lambda}_{k3}^r(\mathbf{x}) L_{k3}(\boldsymbol{\Phi}_{ij}^r), \quad (i) \in \Omega_r, j=1,2. \quad (4.6.6)$$

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы  $\omega_z$ , будем искать в виде:

$$\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}_i^r(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Theta}_i^r(\mathbf{x}), \quad (i) \in \Omega_r, \quad (4.6.7)$$

где  $\boldsymbol{\Phi}_i^r(\mathbf{x})$  и  $\boldsymbol{\Theta}_i^r(\mathbf{x})$  соответственно совместные и несовместные аппроксимации.

При этом потребуем, чтобы функции  $\Theta_i^r(\mathbf{x})$  удовлетворяли уравнениям (4.6.2). Тогда полученные аппроксимации:

- по теореме (2.11.1) удовлетворяют критерию полноты (2.5.1) такого же порядка, как и система (4.6.5), т.к. она получена из нее добавлением новых функций;
- выполнен критерий несовместности порядка  $m=1$ : условие (4.6.2) эквивалентно условию (2.7.3) теоремы 2.7.1. Для доказательства этого достаточно взять в качестве совместной системы функций систему функций (4.6.5), дополнив ее нулевыми аппроксимациями для вращательной степени свободы  $\omega_z$ .

Следовательно, по теореме (2.8.2) *обеспечивается сходимость метода*.

Если в (4.6.7) функции  $\Phi_i^r(\mathbf{x})$  отличны от нуля, то для выполнения тождеств критерия полноты более высокого порядка (4.3.17) дополнительно требуется, чтобы:

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} \Phi_{i3}^r(\mathbf{x}) \equiv \sum_{(i) \in \Omega_r} (\Phi_i^r(\mathbf{x}) + \Theta_i^r(\mathbf{x})) \equiv \sum_{(i) \in \Omega_r} \lambda_i^r(\mathbf{x}). \quad (4.6.8)$$

Пусть построенная система функций (4.3.14) уже удовлетворяет критериям полноты и несовместности соответствующего порядка по построению и обеспечивает сходимость метода.

Для увеличения точности вычислений, возможно, будем добавлять к системе функций (4.3.14) аппроксимации, соответствующие внутренним степеням свободы:

$$\left\{ \Psi_k^r(\mathbf{x}), \quad k=1,2,\dots,k_r, \quad L_{ij} \Psi_k^r(\mathbf{x})=0, \quad (i) \in \Omega_r, \quad j=1,2,3 \right\}, \quad (4.6.9)$$

$k_r$  – число дополнительных внутренних степеней свободы элемента.

Все степени свободы в узлах элемента у них равны нулю. Для выполнения критерия несовместности для сходимости метода достаточно, чтобы они удовлетворяли уравнениям (4.6.2).

Если начальные приближения функций  $\Psi_k^r(\mathbf{x})$  не удовлетворяют уравнениям (4.6.2), то производим их корректировку, используя функции  $\mu_i^r(\mathbf{x})$  из (4.6.3).

Необходимо заметить, что при построении элементов предложенным алгоритмом были использованы полиномы минимально возможной степени. Однако, могут существовать и аппроксимации более низкого порядка для определенных форм области при меньшем числе узлов элемента.

*Все рассмотренные в данном разделе системы аппроксимирующих функций обеспечивают сходимость метода и сохраняют симметрию расчетной схемы в результатах расчета [117].*

#### 4.6.2. Треугольник с узлами в вершинах (DDF3IC)

Рассмотрим треугольник в местной системе координат, изображенный на рис 4.6-1. Заменой координат (4.4.3) он преобразуется к треугольнику, изображенному на рис. 4.4-1б.

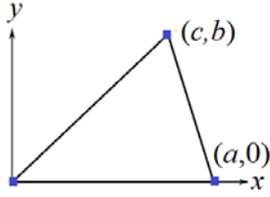


Рис. 4.6-1. Треугольный элемент

Систему аппроксимирующих функций (4.3.14) элемента будем искать в виде полиномов третьей степени<sup>1</sup> по области конечного элемента [117].

Уравнениям (4.6.2) удовлетворяют функции:

$$\lambda_i^r(\mathbf{x}) = -4\zeta_i(\mathbf{x}) + \zeta(\mathbf{x}), \quad \zeta(\mathbf{x}) = \zeta_1(\mathbf{x}) + \zeta_2(\mathbf{x}) + \zeta_3(\mathbf{x}), \quad i=1,2,3, \quad (4.6.10)$$

$\zeta_i(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3$  – совместные аппроксимации (4.5.6);

$$\zeta(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{l} c\eta(\xi(\xi-\eta) - (1-\xi-\eta)(\xi+2\eta-1)) \\ -a\xi((1-\xi-\eta)(1-2\xi-\eta) + \eta(\xi-\eta)) - b\eta(\xi((\xi-\eta) + (1-\xi-\eta)(\xi+2\eta-1))) \end{array} \right\}.$$

Функция  $\zeta_i(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнениям (4.6.2). С ее помощью корректируем по формуле (4.6.6) функции, соответствующие линейным степеням свободы. Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^r(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} 1-\xi-\eta \\ 0 \end{array} \right\} - \frac{a-b}{2ac} \zeta(\mathbf{x}), & \varphi_{12}^r(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1-\xi-\eta \end{array} \right\} + \frac{1}{2a} \zeta(\mathbf{x}), \\ \varphi_{21}^r(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ 0 \end{array} \right\} - \frac{b}{2ac} \zeta(\mathbf{x}), & \varphi_{22}^r(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \xi \end{array} \right\} - \frac{1}{2a} \zeta(\mathbf{x}), \\ \varphi_{31}^r(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} \eta \\ 0 \end{array} \right\} + \frac{1}{2c} \zeta(\mathbf{x}), & \varphi_{32}^r(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \eta \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

Полученные аппроксимации являются уже несовместными, потому что не обеспечивается равенство перемещений на сторонах элемента при его стыковке с другими элементами расчетной схемы, но удовлетворяют уравнениям критерия несовместности (4.6.2).

Система аппроксимирующих функций элемента обеспечивает сходимость метода. Выполнены:

- тождества критерия полноты (4.3.16) порядка  $m=1$ ;
- критерия несовместности (4.6.2) порядка  $m=1$ .

При этом сохраняется симметрия расчетной схемы в результатах расчетов.

Для увеличения точности расчетов воспользуемся в (4.6.7) совместными функциями (4.5.3) элемента с квазивращательными степенями свободы и несовместной  $\zeta(\mathbf{x})$ . Получаем единственную возможную комбинацию, при ко-

<sup>1</sup> Необходимо заметить, что на множестве полиномов второй степени невозможно выбрать такие функции  $\mu_i$  в (4.6.3), чтобы система уравнений (4.6.2) всегда была невырожденной.

торой выполнены тождества критерия полноты (4.3.17) и несовместности (4.6.2)<sup>1</sup>:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \frac{4}{3} \Phi_{i3}^r(\mathbf{x}) + \zeta(\mathbf{x}), \quad (i) \in \Omega_r. \quad (4.6.12)$$

$\Phi_{i3}(\mathbf{x})$  – функции (4.5.3).

Имеет смысл также добавить 5 внутренних степеней свободы, которые будут соответствовать следующим аппроксимациям, удовлетворяющим условиям (4.6.2) после их корректировки функциями (4.6.10):

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^3 \lambda_k^r(\mathbf{x}) \mathbf{L}_{k3}(\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})), \quad \mathbf{Z}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_{i,\nu} \\ -\lambda_{i,\mu} \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,3,$$

$$\psi_4 = \begin{Bmatrix} H \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \psi_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix}, \quad H = \xi\eta(1-\xi-\eta).$$

### 4.6.3. Шестиузловой треугольник (DDF6IC)

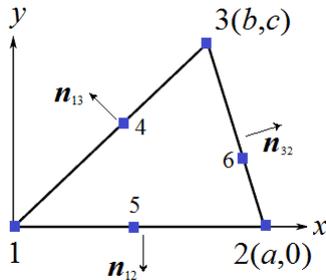


Рис. 4.6-2. Шестиузловой треугольный элемент

Рассмотрим элемент с узлами на сторонах, изображенный на рис 4.6-2. Заменой координат (4.4.3) он преобразуется к треугольнику, изображенному на рис. 4.4-2б.

Будем использовать полиномы четвертой степени [117].

Определим функции, соответствующие степеням свободы:

- углам поворота на сторонах:

$$\varphi_{43}^r = -\frac{2ac\xi\eta(1-\xi-\eta)(e(g-1)+(1-g)\xi+(e-g)\eta)}{a_{13}d(1-d)(e(1-g)+(g-e)d)} \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix},$$

$$\varphi_{53}^r = \frac{c\xi\eta(1-\xi-\eta)(dg+(1-g-d)\xi-g\eta)}{e(1-e)(dg+(1-g-d)e)} \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\varphi_{63}^r = \frac{2ac\xi\eta(1-\xi-\eta)(ed-d\xi-e\eta)}{a_{23}g(1-g)(ed-dg-e(1-g))} \begin{Bmatrix} a-b \\ c \end{Bmatrix}. \quad (4.6.13)$$

- перемещениям на сторонах:

<sup>1</sup> Если воспользоваться функциями  $\zeta_i(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3$ , то возможны и другие варианты представления функций  $\varphi_{i3}(\mathbf{x})$ . Но (4.6.12) показало самые лучшие результаты в тестах.

$$\boldsymbol{\varphi}_{ij}^r = \mathbf{H}_{ij}^r - \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r \mathbf{L}_{i3} \mathbf{H}_{ij}^r, \quad i=4,5,6, \quad j=1,2, \quad (4.6.14)$$

$$\mathbf{H}_{i+3,1}^r = \begin{Bmatrix} P_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{i+3,2}^r = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_i \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,3,$$

$$P_1 = \frac{(1-\xi-\eta)^2 \eta^2}{d^2(1-d)^2}, \quad P_2 = \frac{\xi^2(1-\xi-\eta)^2}{e^2(1-e)^2}, \quad P_3 = \frac{\xi^2 \eta^2}{g^2(1-g)^2};$$

- *углам поворота в вершинах треугольника, аналогично (4.6.12):*

$$\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r = \boldsymbol{\Phi}_i - \sum_{j=4}^6 \boldsymbol{\varphi}_{j3}^r \mathbf{L}_{j3}(\boldsymbol{\Phi}_i), \quad \boldsymbol{\Phi}_i = \frac{1}{3} \left( 4\boldsymbol{\chi}_i^r(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) \right), \quad i=1,2,3, \quad (4.6.15)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_1^r &= \frac{1-\xi-\eta}{2} \left\{ c\eta(1-d_1(1-\xi-\eta)\eta) \right. \\ &\quad \left. (a\xi(1-e_1\xi(1-\xi-\eta)) - b\eta(1-d_1(1-\xi-\eta)\eta)) \right\}, \quad d_1 = \frac{1}{d(1-d)}, \\ \boldsymbol{\chi}_2^r &= \frac{\xi}{2} \left\{ -c\xi\eta(1-g_1\xi\eta) \right. \\ &\quad \left. (-a\xi(1-\xi-\eta)(1-e_1\xi(1-\xi-\eta)) - (a-b)\xi\eta(1-g_1\xi\eta)) \right\}, \quad e_1 = \frac{1}{e(1-e)}, \\ \boldsymbol{\chi}_3^r &= \frac{\eta}{2} \left\{ c\xi(1-g_1\xi\eta) - c(1-\xi-\eta)(1-d_1(1-\xi-\eta)\eta) \right. \\ &\quad \left. ((a-b)\xi(1-g_1\xi\eta) + b(1-\xi-\eta)(1-d_1(1-\xi-\eta)\eta)) \right\}, \quad g_1 = \frac{1}{g(1-g)}. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

При этом  $\boldsymbol{\chi}_1^r + \boldsymbol{\chi}_2^r + \boldsymbol{\chi}_3^r = \mathbf{0}$ .

Совместные функции  $\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{x})$  получены из условия, что на стороне  $ij$  касательное перемещение  $u_\tau$  изменяется по квадратичному закону, а нормальное перемещение  $u_n$  зависит от  $\theta_i$  по закону:

$$u_n = \dots + a_{ij} \xi(1-\xi) \left( 1 - a_{ij}^2 \frac{\xi(1-\xi)}{a_{ik} a_{jk}} \right) (\theta_j - \theta_i). \quad (4.6.17)$$

Формула (4.6.17) аналогична формуле (4.3.6) с учетом промежуточного узла  $\mathbf{x}_k$  на стороне  $ij$ .

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) = b_1 \begin{Bmatrix} c \\ a-b \end{Bmatrix} H_1(\mathbf{x}) + b_2 \begin{Bmatrix} -c \\ b \end{Bmatrix} H_2(\mathbf{x}) + b_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \end{Bmatrix} H_3(\mathbf{x}), \quad (4.6.18)$$

$$\begin{aligned} H_1(\xi, \eta) &= \begin{cases} 0.5\xi\eta((1-g)\xi - g\eta), & g = 0.5 \\ 2\xi\eta((1-g)\xi - g\eta)((5g-2)\xi + (3-5g)\eta), & g \neq 0.5, \end{cases} \\ H_2(\xi, \eta) &= 2\eta(1-\xi-\eta)(-d + d\xi + \eta)((3-5d) + (10d-5)\eta), \\ H_3(\xi, \eta) &= 2\xi(1-\xi-\eta)(e - \xi - e\eta)((3-5e) + (10e-5)\xi). \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

Функции (4.6.19) удовлетворяют уравнениям (4.6.2), а коэффициенты  $b_j$ ,  $i=1,2,3$  в (4.6.18) находятся из уравнений

$$\mathbf{L}_{i3} \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}, \quad i=1,2,3; \quad (4.6.20)$$

- *перемещения в узлах элемента:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{ij}^r(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Phi}_{ij}^r(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^6 \boldsymbol{\varphi}_{k3}^r \mathbf{L}_{k3}(\boldsymbol{\Phi}_{ij}^r(\mathbf{x})), \\ \boldsymbol{\Phi}_{ij}^r(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Psi}_{ij}^r(\mathbf{x}) - \sum_{k=4}^6 \boldsymbol{\varphi}_{kj}^r \mathbf{L}_{kj}(\boldsymbol{\Psi}_{ij}^r(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

$i=1,2,3, \quad j=1,2, \quad \boldsymbol{\Psi}_{ij}^r$  – линейные функции (4.4.5).

Построенная система функций удовлетворяет критерию полноты (4.3.17) и критерию несовместности (4.6.2) по построению. Т.е. обеспечена сходимость метода при сохранении симметрии расчетных схем.

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы, совместные функции:

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=4}^6 \varphi_{k3}^r(\mathbf{x}) L_{k3}(\mathbf{Z}_i(\mathbf{x})), \quad i=1,2,$$

$$\mathbf{Z}_1 = \{H, 0\}^T, \quad \mathbf{Z}_2 = \{0, H\}^T, \quad H = \xi\eta(1-\xi-\eta).$$

Критерий несовместности при этом не будет нарушен. Будет также сохранена симметрия расчетной схемы.

#### 4.6.4. Прямоугольник с узлами в вершинах (DDF4RIC)

Рассмотрим прямоугольник, изображенный на рис. 4.6-3. Положим  $x=a\xi$ ,  $y=b\eta$ .

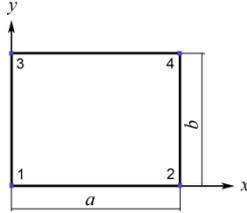


Рис. 4.6-3. Прямоугольный элемент

Построим совместные аппроксимирующие функции, соответствующие углам поворота, подставив в (4.3.8) функции (4.5.6) при  $\delta=-1$  [117]:

$$\varphi_{13}^r = \begin{Bmatrix} -b\eta(1-\eta)^2(1-\xi) \\ a\xi(1-\xi)^2(1-\eta) \end{Bmatrix},$$

$$\varphi_{23}^r = \begin{Bmatrix} -b\eta(1-\eta)^2\xi \\ -a\xi^2(1-\xi)(1-\eta) \end{Bmatrix},$$

$$\varphi_{33}^r = \begin{Bmatrix} b\eta^2(1-\eta)(1-\xi) \\ a\xi(1-\xi)^2\eta \end{Bmatrix},$$

$$\varphi_{43}^r = \begin{Bmatrix} b\eta^2(1-\eta)\xi \\ -a\xi^2(1-\xi)\eta \end{Bmatrix}. \quad (4.6.22)$$

Определим в (4.6.1) функции, удовлетворяющие уравнениям (4.6.2):

$$\lambda_1^r(\mathbf{x}) = \varphi_{13}^r + H, \quad \lambda_2^r(\mathbf{x}) = \varphi_{23}^r - H,$$

$$\lambda_3^r(\mathbf{x}) = \varphi_{33}^r - H, \quad \lambda_4^r(\mathbf{x}) = \varphi_{43}^r + H, \quad (4.6.23)$$

$$H(\mathbf{x}) = \frac{5}{4} \begin{Bmatrix} b(1-2\xi)\eta^2(\eta-1)^2 \\ -a(1-2\eta)\xi^2(\xi-1)^2 \end{Bmatrix}.$$

Выполним корректировку (4.6.6) билинейной системы функций  $\Phi_{ij}^r$  (4.4.13) прямоугольного элемента с двумя степенями свободы в узле:

$$\begin{aligned}\varphi_{11}^r &= \Phi_{11}^r - \frac{1}{2b}(\lambda_1^r + \lambda_3^r), & \varphi_{12}^r &= \Phi_{12}^r + \frac{1}{2a}(\lambda_1^r + \lambda_2^r), \\ \varphi_{21}^r &= \Phi_{21}^r - \frac{1}{2b}(\lambda_2^r + \lambda_4^r), & \varphi_{22}^r &= \Phi_{22}^r - \frac{1}{2a}(\lambda_1^r + \lambda_2^r), \\ \varphi_{31}^r &= \Phi_{31}^r + \frac{1}{2b}(\lambda_1^r + \lambda_3^r), & \varphi_{32}^r &= \Phi_{32}^r + \frac{1}{2a}(\lambda_3^r + \lambda_4^r), \\ \varphi_{41}^r &= \Phi_{41}^r + \frac{1}{2b}(\lambda_2^r + \lambda_4^r), & \varphi_{42}^r &= \Phi_{42}^r - \frac{1}{2a}(\lambda_3^r + \lambda_4^r).\end{aligned}\quad (4.6.24)$$

Полученные аппроксимации удовлетворяют критериям полноты и несовместности порядка 1 и, соответственно, обеспечивают сходимость и сохраняют симметрию расчетной схемы.

#### 4.6.5. Прямоугольник с промежуточными узлами на сторонах (DDF8IC)

Рассмотрим прямоугольник, изображенный на рис. 4.6-4.

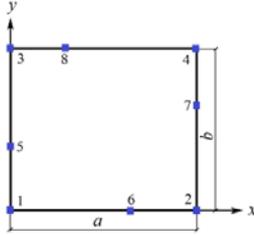


Рис. 4.6-4. 8-ми узловой прямоугольный элемент

Преобразованием системы координат  $x=a\xi$ ,  $y=b\eta$  получаем квадрат как на рис. 4.4-6б. Систему аппроксимирующих функций элемента будем искать в виде полиномов седьмой степени [117].

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы на сторонах, зададим так:

$$\begin{aligned}\varphi_{53}^r &= \frac{2a}{e(1-e)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \xi(1-\xi)^2\eta(1-\eta) \end{array} \right\}, \\ \varphi_{63}^r &= -\frac{2b}{f(1-f)} \left\{ \begin{array}{l} \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)^2 \\ 0 \end{array} \right\}, \\ \varphi_{73}^r &= \frac{2a}{c(1-c)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \xi^2(1-\xi)\eta(1-\eta) \end{array} \right\}, \\ \varphi_{83}^r &= -\frac{2b}{d(1-d)} \left\{ \begin{array}{l} \xi(1-\xi)\eta^2(1-\eta) \\ 0 \end{array} \right\}.\end{aligned}\quad (4.6.25)$$

Определим в (4.6.1), (4.6.3):

- функции  $\lambda_i^r$ ,  $i=1,2,3,4$ :

$$\lambda_i^r = \mathbf{v}_i - \sum_{k=5}^8 \boldsymbol{\varphi}_{k3}^r \mathbf{L}_{k3} \mathbf{v}_i^r, \quad i=1,2,3,4, \quad (4.6.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{Bmatrix} -b(1-\xi)\eta(1-\eta)^2(1-\eta/e) \\ a\xi(1-\xi)^2(1-\eta)(1-\xi/f) \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{Bmatrix} -b\xi\eta(1-\eta)^2(1-\eta/c) \\ -a\xi(1-\xi)^2\eta(1-\xi/f) \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{Bmatrix} b(1-\xi)\eta^2(1-\eta)(1-\eta/e) \\ a\xi(1-\xi)^2\eta(1-\xi/d) \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{v}_4 &= \begin{Bmatrix} b\xi\eta^2(1-\eta)(1-\eta/c) \\ -a\xi^2(1-\xi)\eta(1-\xi/d) \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.6.27)$$

- функции  $\boldsymbol{\mu}_i^r, i=1,2,3,4$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1^r(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \boldsymbol{\mu}_2^r(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} \chi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \boldsymbol{\mu}_3^r(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \chi_1 \end{Bmatrix}, & \boldsymbol{\mu}_4^r(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \chi_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(\xi, \eta) &= (\xi - \eta)^3(1 - \xi - \eta)^2(-f + \xi + (f - d)\eta)(e + (c - e)\xi - \eta), \\ \chi_2(\xi, \eta) &= (\xi - \eta)^2(1 - \xi - \eta)^3(-f + \xi + (f - d)\eta)(e + (c - e)\xi - \eta). \end{aligned}$$

Окончательно, после решения систем уравнений (4.6.2):

$$\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r = \lambda_i^r, \quad i=1,2,3,4. \quad (4.6.30)$$

Функции  $\boldsymbol{\varphi}_{ij}^r, i=1 \div 8, j=1,2$ , соответствующие перемещениям узлов, получим после корректировки (4.6.6) системы функций (4.4.15) соответствующего элемента с двумя степенями свободы в узле.

Построенная система аппроксимирующих функций элемента по построению удовлетворяет критериям полноты (4.3.17) порядка 2 и несовместности порядка 1 и сохраняет симметрию расчетной схемы.

#### 4.6.6. Четырехугольник (DDF4ISA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольник на рис. 4.5-2. Преобразованием системы координат (2.12.7) получим четырехугольник как на рис. 4.4-8б. Тогда из (2.12.7):

$$\frac{\partial}{\partial x} = r_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + r_{21} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = r_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} + r_{22} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (4.6.31)$$

и, следовательно,

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} \right) = \frac{1}{2} \left( r_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{v} + r_{21} \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{v} - r_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u} - r_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{u} \right). \quad (4.6.32)$$

Из (2.12.7) следует, что для выпуклого четырехугольника  $r_{11} \neq 0$  и  $r_{21} \neq 0$ .

Систему аппроксимирующих функций (4.3.14) элемента будем искать в виде кусочных полиномов четвертой степени по области конечного элемента [117].

Построим совместные аппроксимирующие функции  $\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r$ ,  $i=1,2,3,4$ , подставив в (4.3.8) функции (4.5.16) при  $\delta=-1$ .

В (4.6.3)  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i = \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r$ ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1 &= \begin{Bmatrix} H_1(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix}, & \boldsymbol{\mu}_2 &= \begin{Bmatrix} H_1(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \boldsymbol{\mu}_3 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ H_2(\xi, \eta) \end{Bmatrix}, & \boldsymbol{\mu}_4 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ H_2(\xi, \eta) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6.33)$$

$$H_1 = \begin{cases} \alpha^2 \xi^2 \eta^2, & (\xi, \eta) \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \\ -\xi^2 \eta^2, & (\xi, \eta) \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \end{cases}, \quad H_2 = \begin{cases} \beta^2 \xi^2 \eta^2, & (\xi, \eta) \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \\ -\xi^2 \eta^2, & (\xi, \eta) \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \end{cases}.$$

Функции  $\boldsymbol{\varphi}_{ij}^r$ ,  $i=1,2,3,4$ ,  $j=1,2$ , соответствующие перемещениям узлов, получим после корректировки (4.6.6) системы функций (4.4.23) соответствующего элемента с двумя степенями свободы в узле.

Для построенных аппроксимаций выполнен критерий полноты (4.3.17), т.к. из свойств функций (4.5.16) следует, что  $\boldsymbol{\zeta}_i(\mathbf{x})$  удовлетворяют уравнениям (4.6.2) и

$$\sum_{i=1}^4 (\boldsymbol{\varphi}_{i3}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x})) = -\sum_{i=1}^4 (\boldsymbol{\zeta}_i(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_{ik} \boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Построенная система функций удовлетворяет критериям полноты и несовместности порядка 1 по построению, что обеспечивает сходимость метода. При этом сохраняется симметрия расчетной схемы.

#### 4.6.7. Восьмиузловой четырехугольник (DDF8ISA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольник, изображенный на рис. 4.5-2, и выполним преобразование системы координат (2.12.7). Систему аппроксимирующих функций (4.3.14) будем искать в виде кусочных полиномов неполной шестой степени по области конечного элемента [117].

Для узлов на сторонах:

$$\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} n_{yi} \\ -n_{xi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{i-4}(\mathbf{x}) \\ f_{i-4} \end{Bmatrix}, \quad i=5,6,7,8, \quad (4.6.34)$$

где  $\{n_{xi}, n_{yi}\}^T$  – нормаль к стороне, на которой находится узел  $i$ ;

$$\begin{aligned} f_{i-4} &= -(n_{xi} \frac{\partial}{\partial x} + n_{yi} \frac{\partial}{\partial y}) \zeta_{i-4}(\mathbf{x})|_{x_i} = \\ &= -\left( (n_{xi} r_{11} + n_{yi} r_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + (n_{xi} r_{21} + n_{yi} r_{22}) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \zeta_{i-4}(\mathbf{x})|_{x_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \begin{cases} (1-\xi-\eta)p(1,A,1,B), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1-A\xi-\eta)^2(1-A\xi+(2-3B)\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1-A\xi-B\eta)^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ (1-\xi-B\eta)^2(1+(2-3A)\xi-B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\
\chi_2 &= \begin{cases} (1-\xi-\eta)^2(1-\xi+(2-3B)\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1-A\xi-\eta)p(A,1,1,B), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1-A\xi-B\eta)^2(1+(2A-3)\xi-B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ (1-\xi-B\eta)^3, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\
\chi_3 &= \begin{cases} (1-\xi-\eta)^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1-A\xi-\eta)^2(1+(2A-3)\xi-\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1-A\xi-B\eta)p(A,1,B,1), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ (1-\xi-B\eta)^2(1-\xi+(2B-3)\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \\
\chi_4 &= \begin{cases} (1-\xi-\eta)^2(1+(2-3A)\xi-\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1-A\xi-\eta)^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1-A\xi-B\eta)^2(1-A\xi+(2B-3)\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ (1-\xi-B\eta)p(1,A,B,1), & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases} \quad (4.6.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(a,b,c,d) &= 1 + (a-3b)\xi + (c-3d)\eta + (3b-2a)\xi^2 + \\
&\quad (2ac-3b-3d+6bz_4)\xi\eta + (3d-2c)\eta^2.
\end{aligned}$$

Определим в (4.6.3):

$$\tilde{\lambda}_i = \mathbf{H}_i - \sum_{k=5}^8 \boldsymbol{\varphi}_{k3}^r \mathbf{L}_{k3} \mathbf{H}_i^r, \quad i=1,2,3,4, \quad \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}_{i3}^r(\mathbf{x}) T_i(\mathbf{x}), \quad (4.6.36)$$

где  $\boldsymbol{\psi}_{i3}^r(\mathbf{x})$  – совместные функции четырехугольного четырехузлового элемента, определенные с помощью (4.5.14) в (4.3.8) при  $\varepsilon = -1$ ;

$$\begin{aligned}
T_1 &= P_{781}, \quad T_2 = P_{582}, \quad T_3 = P_{673}, \quad T_4 = P_{564}, \\
P_{ijk}(\mathbf{x}) &= \frac{(\xi - \xi_j)(\eta_j - \eta_i) - (\eta - \eta_i)(\xi_j - \xi_i)}{(\xi_k - \xi_i)(\eta_j - \eta_i) - (\eta_k - \eta_i)(\xi_j - \xi_i)},
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}_i - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=5}^8 \boldsymbol{\varphi}_{kj}^r \mathbf{L}_{kj}(\mathbf{Z}_i), \quad i=1,2,3,4,$$

$$\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}) = \{H_i, 0\}^T, \quad \mathbf{Z}_{i+2}(\mathbf{x}) = \{0, H_i\}^T, \quad i=1,2,$$

$$H_1(\mathbf{x}) = \xi^3 \eta^3 \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ A^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -A^3 B^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ -B^3, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \quad H_2(\mathbf{x}) = \xi^3 \eta^3 \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -A^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -A^3 B^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ B^3, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}. \quad (4.6.37)$$

Решив системы уравнений (4.6.2) для определения коэффициентов  $b_{ij}$  в (4.6.3), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}^r(\mathbf{x}) &= \Phi_{ij}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^8 \lambda_i^r(\mathbf{x}) L_{i3}(\Phi_{ij}(\mathbf{x})), \quad i=1,2,3,4, \quad j=1,2, \\ \varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) &= \lambda_{i3}^r(\mathbf{x}), \quad i=1 \div 8,\end{aligned}\quad (4.6.38)$$

где  $\Phi_{ij}$  – аппроксимации, построенные по (4.4.24) элемента без вращательных степеней свободы.

Построенная система аппроксимирующих функций элемента сохраняет симметрию расчетной схемы и по построению критериям полноты (4.3.17) порядка 2 и несовместности (4.6.2) порядка 1.

## 4.7. Совместные элементы (DDFSA)

### 4.7.1. Треугольник с узлами в вершинах (DDF3SA)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 4.5-1, и выполним преобразование системы координат (2.12.5) в треугольник, изображенный на рис. 2.12-2а.

Построим функции  $\lambda_j^r(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3$ , которые должны быть на каждой из подобластей полиномами второго порядка, равны нулю на сторонах треугольника, непрерывны на  $\Omega$  и удовлетворять условиям:

$$L_{i3}(\lambda_j^r(\mathbf{x})) = \delta_i^j, \quad i, j=1,2,3.$$

Получаем единственное решение [117]:

$$\begin{aligned}\lambda_1^r(\mathbf{x}) &= \frac{2}{9} \left\{ \begin{matrix} -c \\ -a-b \end{matrix} \right\} \gamma_1(\mathbf{x}), \quad \lambda_2^r(\mathbf{x}) = \frac{2}{9} \left\{ \begin{matrix} c \\ 2a-b \end{matrix} \right\} \gamma_2(\mathbf{x}), \quad \lambda_3^r(\mathbf{x}) = \frac{2}{9} \left\{ \begin{matrix} -2c \\ 2b-a \end{matrix} \right\} \gamma_3(\mathbf{x}) \quad (4.7.1) \\ \gamma_1 &= (1-\xi-\eta)\gamma, & \gamma_2 &= (1+2\xi-\eta)\gamma, & \gamma_3 &= (1-\xi+2\eta)\gamma, \\ \gamma &= \begin{cases} 1-\xi-\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1+2\xi-\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1-\xi+2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}\end{aligned}$$

Функции  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,3$  имеют разрывы  $\omega_2$  на границах  $\Omega_i^r$  (стороны элемента при стыковке, отрезки медиан), но  $\omega_2(\lambda_i^r(\mathbf{x}))$  непрерывны в узлах элемента.

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы, аналогично (4.6.12), зададим в следующем виде:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} (4\chi_i(\mathbf{x}) + \zeta(\mathbf{x})), \quad (4.7.2)$$

$$\zeta(\mathbf{x}) = \lambda_1^r(\mathbf{x}) + \lambda_2^r(\mathbf{x}) + \lambda_3^r(\mathbf{x}),$$

где  $\chi_i$  – функции (4.5.6) в системе координат (2.12.5).

Функции, соответствующие перемещениям, получим корректировкой (4.6.11), подставив функцию  $\zeta(\mathbf{x})$  из (4.7.2) и линейные функции в системе координат элемента:

$$\psi_1 = \frac{1}{3}(1-\xi-\eta), \quad \psi_2 = \frac{1}{3}(1+2\xi-\eta), \quad \psi_3 = \frac{1}{3}(1-\xi+2\eta). \quad (4.7.3)$$

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы, равные нулю на сторонах функции:

$$\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} H \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix}, \quad H(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1 + 2\xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1 - \xi + 2\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}. \quad (4.7.4)$$

#### 4.7.2. Треугольник шестиузловой (DDF6SA)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 4.6-2а, и выполним преобразование системы координат (2.12.5) в треугольник, изображенный на рис. 2.12-2а. Построение будем делать на полиномах третьего порядка на каждой из подобластей [117].

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы в узлах, зададим следующим образом:

$$\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x}) - \sum_{k=4}^6 \boldsymbol{\varphi}_{k3}^r(\mathbf{x}) \mathbf{L}_{k3}(\boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x})), \quad i=1,2,3, \quad (4.7.5)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x})$  – функции (4.7.1), а  $\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r(\mathbf{x})$ ,  $i=4,5,6$ <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{43}^r(\mathbf{x}) &= \frac{4c}{3\eta_4(\xi_4 - \eta_4)} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} H_1, & H_1 &= \begin{cases} \eta(\eta - \xi)(1 - \xi + 2\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \end{cases}, \\ \boldsymbol{\varphi}_{53}^r(\mathbf{x}) &= \frac{4ac}{3a_{13}^2 \xi_5 (\xi_5 - \eta_5)} \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix} H_2, & H_2 &= \begin{cases} \xi(\xi - \eta)(1 + 2\xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_3^r \end{cases}, \\ \boldsymbol{\varphi}_{63}^r(\mathbf{x}) &= \frac{4ac}{3a_{23}^2 \xi_6 \eta_6} \begin{Bmatrix} a - b \\ c \end{Bmatrix} H_3, & H_3 &= \begin{cases} \xi\eta(1 - \xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r^2 \cup \Omega_r^3 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Функции, соответствующие перемещениям, получим из переведенных в заданную систему координат аппроксимаций (4.4.7) или (4.4.8) элемента без вращательных степеней свободы, корректируя их по (4.6.6) с помощью функций  $\boldsymbol{\varphi}_{i3}^r$ ,  $i=1,2,\dots,6$ .

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы функции:

$$\boldsymbol{\psi}_4(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_5(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix}, \quad R(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \\ (1 + 2\xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_r^2 \\ (1 - \xi + 2\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_r^3 \end{cases}.$$

<sup>1</sup> Можно применить функции (4.6.13), что приведет к повышению степени полинома до 4-й.

### 4.7.3. Четырехугольник с узлами в вершинах (DDF4SA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-8а, и выполним преобразование системы координат (2.12.7) в четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-8б [117].

Построим функции  $\lambda_j^r(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3,4$ , которые должны быть на каждой из подобластей полиномами второго порядка, равны нулю на сторонах треугольника, непрерывны на  $\Omega$  и удовлетворять условиям

$$\lambda_1^r(\mathbf{x}) = \frac{2}{\rho} \begin{Bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{Bmatrix} \gamma_1, \quad \lambda_2^r(\mathbf{x}) = -\frac{2}{\rho} \begin{Bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{Bmatrix} \gamma_2, \\ \lambda_3^r(\mathbf{x}) = \frac{2}{\rho} \begin{Bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{Bmatrix} \gamma_3, \quad \lambda_4^r(\mathbf{x}) = -\frac{2}{\rho} \begin{Bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{Bmatrix} \gamma_4, \quad \rho = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}. \quad (4.7.7)$$

$$\gamma_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta(1 - A\xi - B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ \eta(1 - \xi - B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \end{cases} \\ \gamma_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \xi(1 - \xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \xi(1 - \xi - B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \end{cases} \\ \gamma_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta(1 - A\xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ \eta(1 - A\xi - B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \end{cases} \\ \gamma_4(\mathbf{x}) = \begin{cases} \xi(1 - \xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \xi(1 - A\xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \end{cases} \quad (4.7.8)$$

Как и у треугольного элемента, функции  $\lambda_i^r(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3,4$  имеют разрывы  $\omega_z$  на границах  $\Omega_i^r$  (стороны элемента при стыковке, отрезки диагоналей), но  $\omega_z(\lambda_i^r(\mathbf{x}))$  непрерывна в его узлах.

Совместные функции, соответствующие вращательным степеням свободы, сохраняющие тождества (4.3.17), зададим в следующем виде с учетом опыта построения треугольных элементов:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} (4\chi_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^4 \mathcal{K}(i,k)\lambda_k^r(\mathbf{x})), \quad (4.7.9)$$

где  $\chi_i(\mathbf{x})$  – функции (4.5.12),  $i=1,2,3,4$ ,  $\mathcal{K}(i,k) = \begin{cases} 1, & \text{сторона} \\ 0, & \text{диагональ} \end{cases}$ .

Функции, соответствующие перемещениям, получим из аппроксимаций (4.4.23) элемента без вращательных степеней свободы, корректируя их по (4.6.6) с помощью функций (4.7.7).

Построенная система функций совместна и удовлетворяет критерию полноты порядка 1.

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы функции:

$$\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} H \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix}, \quad H(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1 - A\xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1 - A\xi - B\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ (1 - \xi - B\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}. \quad (4.7.10)$$

#### 4.7.4. Восьмиузловой четырехугольник (DDF8SA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-8а, и выполним преобразование системы координат (2.12.7) в четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-8б. Построение будем делать на полиномах третьего порядка на каждой из подобластей [117].

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы в узлах, зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\psi}_{i3}^r(\mathbf{x}), \quad i=5,6,7,8, \\ \boldsymbol{\varphi}_{i3}^r(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x}) - \sum_{k=5}^8 \boldsymbol{\varphi}_{k3}^r(\mathbf{x}) \mathbf{L}_{k3}(\boldsymbol{\lambda}_i^r(\mathbf{x})), \quad i=1,2,3,4, \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

$\boldsymbol{\psi}_{i3}(\mathbf{x})$  – функции (4.6.34),  $\boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x})$  – функции (4.7.7).

Функции, соответствующие перемещениям, получим из аппроксимаций (4.4.24) элемента без вращательных степеней свободы, корректируя их с помощью функций (4.7.11).

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы, функции (4.7.10).

## 4.8. Тесты

Все тесты для элементов с квазивращательными степенями свободы выполнены при значении  $\delta=0.001$ . В приведенных тестах не приведены значения перемещений и напряжений для элементов с  $\delta=0$  по гипотезе (4.3.6), т.к. они при заданном  $\delta$  по гипотезе (4.3.7) *отличаются только в четвертой значащей цифре* (да и то только на самой крупной сетке).

Для элементов задействованы все приведенные в статье аппроксимации, соответствующие «внутренним» степеням свободы элементов.

Заданные как равномерно-распределенная, трапециевидная и *параболическая* нагрузки к узловой приводились точно с учетом конденсации «внутренних» степеней свободы.

В таблице 4.8-1 приведены цифровые коды типов элементов, которые приняты в вычислительном комплексе SCAD [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

Таблица 4.8-1. Типы элементов для решения плоской задачи

Степени свободы	Тип элемента	Число узлов	Описание
$u, v$	21	4	прямоугольный, разд.4.4.5
	22	3	треугольный, разд.4.4.1.
	25	3-6 <sup>1</sup>	треугольный, <i>SA</i> , разд.4.4.3.
	30	4-8	четырёхугольный, <i>SA</i> , разд.4.4.8.
$u, v, w$	23	4	прямоугольный, разд.4.4.5
	24	3	треугольный, разд.4.4.1.
	26	4-8	четырёхугольный, <i>IP</i> , разд.4.4.10.
	27	4-8	четырёхугольный, <i>SA</i> , разд.4.4.8.
	28	3-6	треугольный, <i>IP</i> , разд.4.4.10.
$u, v, \omega_z$	121	4	прямоугольный, <i>DDR4RIC</i> , разд.4.6.4
	122	3	треугольный, <i>DDR3IC</i> , разд.4.6.2.
	125	3-6	треугольный, <i>DDRCSE</i> , разд.4.7.
	129	4-8	четырёхугольный, <i>DDRICSE</i> , разд.4.6
	130	4-8	четырёхугольный, <i>DDRCSE</i> , разд.4.7.
$u, v, \theta_z$	526	4	четырёхугольный, <i>QRDF4IP</i> , разд.4.5.2
	527	4	четырёхугольный, <i>QRDF4SA</i> , разд.4.5.3
	528	3	треугольный, <i>QRDF3</i> , разд.4.5.1

*Примечание.* В элементах 23, 24, 26, 27, 28 степень свободы  $w$  введена для работы в трехмерном пространстве: соответствующие ей строки и столбцы матрицы жесткости нулевые.

#### 4.8.1. Патологические (patch) тесты

##### Прямоугольная пластина в условиях постоянных напряжений

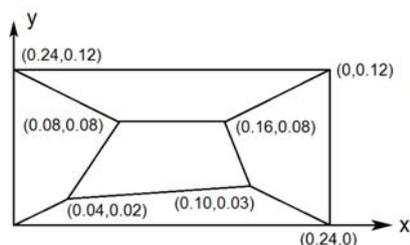


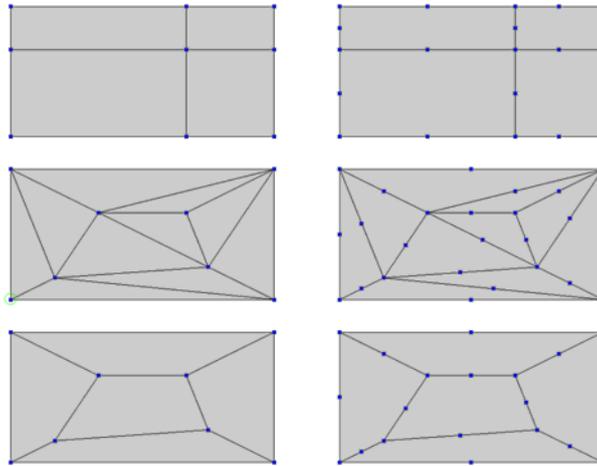
Рис. 4.8-1. Пластина

Прямоугольная изотропная пластина  $0.24 \times 0.12 \text{ m}$  постоянной толщины, изображенная на рис. 4.8-1, подвергается воздействию смещений наружных кромок, обеспечивающих условия постоянных напряжений по всей области.

В работах [121, 127], где рассматривались последние три нагружения данного теста, было принято:

- $E = 1.0 \cdot 10^6 \text{ кПа}$  – модуль упругости;
- $\nu = 0.25$  – коэффициент Пуассона;
- $\delta = 0.001 \text{ m}$  – толщина пластины.

<sup>1</sup> Кроме узлов в вершинах допускается не более одного узла на стороне.



**Рис. 4.8-2.** Расчетные схемы прямоугольной пластины

На рис. 4.8-2 приведены расчетные схемы для различных типов элементов плоской задачи теории упругости.

Рассматривались две группы кинематических загрузок, для которых известны теоретические значения, приведенные в табл. 4.8-2.

Первые три загрузки являются проверкой смещения прямоугольника как твердого тела, когда напряжения по всей области пластины равны нулю:

- смещение как твердого тела по оси  $OX$ :  $u|_{\Gamma}=1m$ ,  $v|_{\Gamma}=0$ ;
- смещение как твердого тела по оси  $OY$ :  $u|_{\Gamma}=0$ ,  $v|_{\Gamma}=1m$ ;
- поворот как твердого тела по оси  $OZ$ :  $u|_{\Gamma}=0.001y$ ,  $v|_{\Gamma}=-0.001x$ .

**Таблица 4.8-2.** Теоретические значения напряжений в пластине

Загрузка	Напряжения(кПа)		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
1-3	0	0	0
4	1066.(6)	266.(6)	0
5	266.(6)	1066.(6)	0
6	0	0	800

Для всех рассмотренных в данной главе элементов результаты расчета совпадают с теоретическими с точностью до вычислительной погрешности.

Следующие три загрузки обеспечивают не равные нулю постоянные напряжения по всей области пластины:

- растяжение по оси  $OX$ :  $u|_{\Gamma}=0.001x$ ,  $v|_{\Gamma}=0$ ;
- растяжение по оси  $OY$ :  $u|_{\Gamma}=0$ ,  $v|_{\Gamma}=0.001y$ ;
- поворот как твердого тела по оси  $OZ$ :  $u|_{\Gamma}=0.001y$ ,  $v|_{\Gamma}=0.001x$ .

Т.к. для всех элементов выполнены тождества критерия полноты (4.3.16) и, возможно, (4.3.17), то данные тесты являются критерием корректности программного кода.

### 4.8.2. Температурные деформации

Рассмотрим прямоугольную пластинку, изображенную на рис. 4.8-1. Зададим следующие связи:  $u|_{x=0}=0$  и  $v|_{y=0}=0$ , которые не препятствуют температурному расширению.<sup>1</sup>

Коэффициент температурного линейного расширения материала пластинки  $\alpha=1e-5 \text{ K}^{-1} (\text{°C}^{-1})$ . Если нагрев выполнен до температуры  $t=100\text{°C}$ , то перемещения точек пластинки равны:  $u=atx$ ,  $v=aty$ , т.к. краевые условия не препятствуют деформации тела, и, соответственно, нормальные и касательные напряжения равны нулю.

### 4.8.3. Узкая прямоугольная пластина

Пластина прямоугольного поперечного сечения, изображенная на рис. 4.8-3, находится под воздействием на торцах трапециевидной нагрузки  $P=\pm 2kEy$ ,  $E=100 \text{ кПа}$ ,  $\nu=0$ ,  $h=1 \text{ м}$ ,  $a=10 \text{ м}$ ,  $b=1 \text{ м}$ . Коэффициент  $k=0.06$  обеспечивает единичные моменты на концах пластины, если рассматривать ее как стержень.

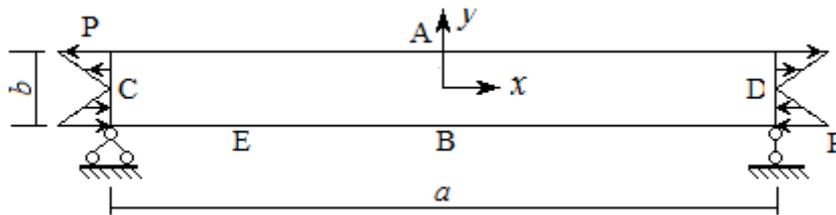


Рис.4.8-3. Узкая пластина

Расчетные схемы, представленные на рис. 4.8-4, возьмем из [128], где рассматривалась данная задача. В табл. 4.8.2 приведены вычисленные вертикальные перемещения в точке  $A(0,5)$ , напряжения  $\sigma_x$  в точке  $B(0,-5)$  и углы поворота  $\omega$  в точке  $E(1.6(6),0)$ .

Задача имеет аналитическое решение, известное из курса теории упругости:

$$u = -\frac{2}{b}kxy, \quad v = \frac{1}{b}k\left(\nu y^2 + x^2 - \frac{a^2}{4}\right). \quad (4.8.1)$$

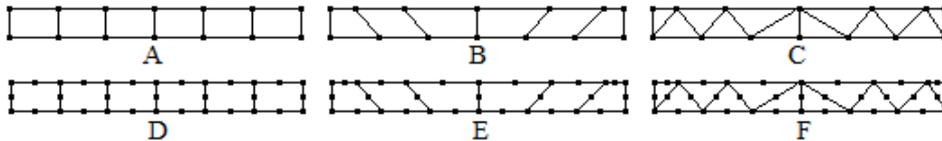


Рис. 4.8-4. Расчетные схемы  $1 \times b$  для узкой прямоугольной пластины

<sup>1</sup> Краевые условия достаточно задать только в вершинах прямоугольника.



Таблица 4.8-4. Результаты расчета узкой прямоугольной пластинки (нагрузка моментами)

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	Перемещения $w_A$ (m)						Напряжения $\sigma_B$ (kPa)						Углы поворота $\phi_E$ (rad)					
			Сетка						Сетка						Сетка					
			1x6	2x12	4x24	8x48	1x6	2x12	4x24	8x48	1x6	2x12	4x24	8x48	1x6	2x12	4x24	8x48		
A	121	$u, v, \omega$	-1.286	-1.397	-1.449	-1.470	4.877	5.673	5.915	5.978	0.3178	0.3784	0.3943	0.3986						
	129		-1.255	-1.403	-1.452	-1.470	4.775	5.639	5.905	5.976	0.3170	0.3749	0.3937	0.3984						
	130		-0.938	-1.291	-1.431	-1.472	3.053	4.743	5.529	5.817	0.2409	0.3454	0.3846	0.3960						
B	526	$u, v, \theta$	-1.499	-1.467	-1.457	-1.453	5.996	5.998	5.997	5.991	<b>0.6877</b>	<b>1.5776</b>	<b>5.0046</b>	<b>18.805</b>						
	527		-1.499	-1.474	-1.464	-1.454	5.996	5.998	5.997	5.991	<b>0.6877</b>	<b>1.5516</b>	<b>5.0064</b>	<b>18.803</b>						
C	122	$u, v, \omega$	-0.796	-1.208	-1.390	-1.455	3.264	5.241	5.805	5.951	0.1970	0.3207	0.3758	0.3936						
	130		-0.780	-1.194	-1.396	-1.461	2.336	4.088	5.280	5.747	0.1999	0.3186	0.3758	0.3936						
D	526	$u, v, \theta$	-1.225	-1.393	-1.456	-1.442	5.801	6.424	6.446	6.413	<b>0.5241</b>	<b>0.9224</b>	<b>2.8121</b>	<b>10.096</b>						
	527		-1.295	-1.419	-1.441	-1.443	5.803	6.392	6.428	6.408	<b>0.6074</b>	<b>1.2582</b>	<b>3.103</b>	<b>10.373</b>						
	122		-0.916	-1.279	-1.423	-1.467	4.801	6.097	6.252	6.171	0.2429	0.3447	0.3828	0.3952						
E	125	$u, v, \omega$	-0.697	-1.113	-1.359	-1.451	1.781	3.412	4.894	5.635	0.1785	0.2983	0.3668	0.3908						
	528		-1.029	-1.502	-1.700	-1.747	4.305	<b>6.959</b>	<b>8.027</b>	<b>8.017</b>	<b>0.5514</b>	<b>0.6701</b>	<b>2.4418</b>	<b>9.1624</b>						
	129		-1.528	-1.494	-1.494	-1.490	6.072	6.007	6.002	6.001	0.3897	0.4034	0.3953	0.3991						
F	130	$u, v, \omega$	-1.511	-1.496	-1.488	-1.483	6.003		6		0.3991	0.3996	0.4							
	129		-1.521	-1.493	-1.495	-1.489	6.295	6.069	6.019	6.005	0.3703	0.4088	0.3976	0.3987						
F	130	$u, v, \omega$	-1.504	-1.490	-1.485	-1.484	5.998		6		0.3993	0.3974	0.4							
	122		-1.372	-1.477	-1.490	-1.488	5.300	5.754	5.914	5.970	0.3788	0.3917	0.3974	0.3993						
	125		-1.514	-1.519	-1.485	-1.482	6.001		6		0.3983	0.3994	0.3999	0.4						

При заданных параметрах:

$$v_A = -1.5m, \sigma_{x,B} = 6kПа, \omega_E = 0.4rad.$$

Если рассматривать данную пластину как стержень, то, задав на его концах пару моментов  $M_y = 2kEh^2/12$ , получим те же вертикальные прогибы и углы поворота по теории стержней.

Для изучения работы с моментными нагрузками рассматривались статически эквивалентные для трапецевидной нагрузки два нагружения:

- в узлах C и D задается момент  $\pm 1kHm$ ;
- на торцах пластины заданы равномерно-распределенные моменты

$$M = \pm \frac{2bkEJ_y}{h}, \text{ где } J_y = \frac{bh^3}{12} - \text{ момент инерции сечения пластины.}$$

Интегрируя по стороне пластины, получаем, что суммарный момент на торцах пластины равен  $\pm 1kHm$ .

Приведенные узловые моменты вычисляем по формуле (4.3.12).

В табл. 4.8.4 приведены вычисленные вертикальные перемещения в точке A, напряжения  $\sigma_x$  в точке B и углы поворота  $\theta$  в точке E для элементов с вращательными степенями свободы только для нагружения двумя узловыми моментами, т.к. для второго нагружения результаты практически идентичны.

Численные эксперименты показали некорректность результатов для элементов с квазивращательными степенями свободы. Поэтому для них не приведены результаты вычислений.

#### 4.8.4. Пластика с прямым изгибом

Рассматривается пластинка, изображенная на рис. 4.8-5.

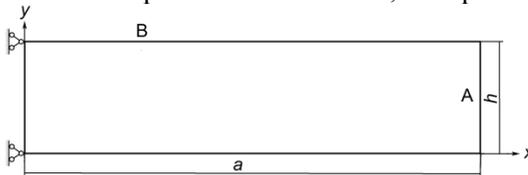


Рис. 4.8-5. Консольная пластинка

Материал пластинки изотропный. Заданы только изображенные на рисунке связи – закрепление перемещений в двух узлах. Пластинка находится под действием следующих нагрузок:

- на стороне  $x=a$  :  $f_y = -6ry(a-y)$ ;
  - на стороне  $x=0$ <sup>1</sup> :  $f_x = 6ra(h-2y)$ ;  $f_y = 6r y(h-y)$ ;
- $r$  – коэффициент пропорциональности к нагрузке.

Данная задача имеет аналитическое решение, которому соответствует функция напряжений Эри  $\Phi = r(3by^2 - 2y^3)(x-a)$ .

<sup>1</sup> Во всех работах, где исследовалась данная задача, нагрузка на стороне  $x=0$  не рассматривалась. Это является приближением уже при наличии третьей степени свободы даже в случае отсутствия дополнительных узлов на левой стороне консоли.

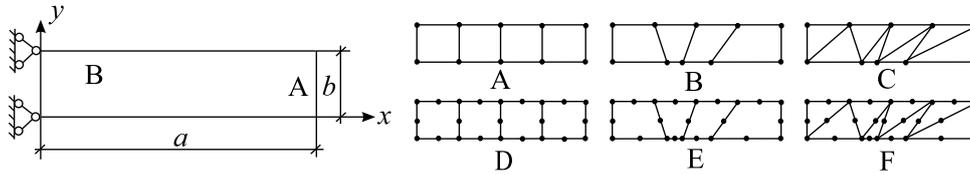


Рис. 4.8-6. Расчетные схемы для решения задачи о пластинке с прямым изгибом

Следуя [98], зададим:

$E=3e7kH/m^2$  – модуль упругости материала;

$\nu=0.25$  – коэффициент Пуассона;

$a=48m$ ,  $h=12m$  – размеры пластинки;

$r=f/h^3/E$ ,  $f=40kH$ .

Таблица 4.8-5. Перемещения и напряжения в пластинке

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	Перемещения $w_A$ (m)				Напряжения $\sigma_B$ (kПа)			
			Сетка				Сетка			
			1x4	2x8	4x16	8x32	1x4	2x8	4x16	8x32
A	21,26	$u, v$	-0.2424	-0.3171	-0.3423	-0.3502	43.636	56.507	59.274	60.063
	30		-0.2864	-0.334	-0.3477	-0.3517	46.054	55.154	58.33	59.371
	121	$u, v, \omega$	-0.3541	-0.3583	-0.3586	-0.3572	64.969	61.874	61.028	60.509
	129		-0.3480	-0.3556	-0.3572	-0.3564	63.811	61.823	60.990	60.500
	130	$u, v, \theta$	-0.2742	-0.3264	-0.3451	-0.3510	43.205	54.035	57.923	59.226
	526		-0.3283	-0.3456	-0.3511	-0.3527	59.988	60.998	60.746	60.438
527	-0.3283	-0.3458	-0.3512	-0.3527	59.988	60.980	60.746	60.437		
B	30	$u, v$	-0.2495	-0.3231	-0.3444	-0.3508	40.761	52.726	57.415	59.03
	26		-0.2098	-0.3002	-0.3364	-0.3484	37.96	53.159	58.329	59.785
	129	$u, v, \omega$	-0.3227	-0.3487	-0.3544	-0.3553	61.805	62.292	61.366	60.725
	130		-0.2614	-0.3216	-0.3434	-0.3504	39.607	52.825	57.497	59.064
	526	$u, v, \theta$	-0.3342	-0.3465	-0.3513	-0.3527	61.512	61.304	60.945	60.501
	527		-0.3271	-0.3462	-0.3513	-0.3528	59.743	61.140	60.934	60.501
C	22, 25	$u, v$	-0.0956	-0.1967	-0.2848	-0.3301	4.8989	24.707	43.936	53.216
	122		-0.2673	-0.3236	-0.3440	-0.3505	44.407	52.306	57.177	59.052
	125	$u, v, \omega$	-0.2141	-0.2902	-0.3297	-0.3457	35.949	48.270	55.999	58.521
	528		-0.2471	-0.3179	-0.3427	-0.3503	36.867	50.599	56.499	58.611
D	21,26	$u, v$	-0.3531	-0.3533		60.006	59.997	60		
	30		-0.3536	-0.354	-0.3533	59.974	60			
	129	$u, v, \omega$	-0.3567	-0.3522	-0.3521	-0.3525	64.896	61.840	60.458	60.128
	130		-0.3540	-0.3534	-0.3533	-0.3533	60.004	60		
E	26	$u, v$	-0.353	-0.3534	-0.3533		58.529	59.704	59.933	59.984
	30		-0.3521	-0.3533			58.521	59.726	59.967	59.996
	129	$u, v, \omega$	-0.3585	-0.3529	-0.3522	-0.3525	63.849	61.159	60.288	60.092
	130		-0.3533			59.328	59.804	59.960	59.991	
F	25	$u, v$	-0.3493	-0.3528	-0.3533		62.145	60.461	60.091	60.019
	122		-0.3398	-0.3488	-0.3519	-0.3529	41.195	52.981	57.554	58.844
	125	$u, v, \omega$	-0.3470	-0.3523	-0.3532	-0.3533	62.438	60.555	60.090	60.017

Будем исследовать получаемые значения вертикального перемещения  $w$  в точке  $A(48,6)$  и напряжение  $\sigma_x$  в точке  $B(12,12)$ . Аналитические решения данной задачи:  $w_A = -0.353(3)m$ ,  $\sigma_{x,B} = 60 \text{ kПа}$ .

Рассмотрим расчетные схемы, представленные на рис. 4.10-5. За основу взяты разбиения работы [112]. Приведение нагрузки к узловой выполнялось точно.

В таблице 4.8-5 приведены результаты вычислений.

#### 4.8.5. Задача Соок

Рассматривается клин, изображенный на рис. 4.8-7, по левому краю которого задано защемление. На правом краю действует равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  $P$ .

Следуя [112], примем:  $E = 1 \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.3(3)$ ,  $h = 1 \text{ м}$ ,  $P = 0.0625 \text{ Н/м}$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $v|_{x=0} = 0$ .

Для данной задачи не известно аналитическое решение. Устойчивое численное решение с точностью до 6-ти значащих цифр, полученное различными типами конечных элементов при сгущении сетки до  $1024 \times 1024$  (3149825 узлов,  $2^{20}$  элементов)<sup>1</sup>:

вертикальное перемещение  $w_A = -23.9677 \text{ м}$ ,

главные напряжения  $\sigma_{1,B} = 0.203525 \text{ Па}$  и  $\sigma_{3,C} = -0.23687 \text{ Па}$ .

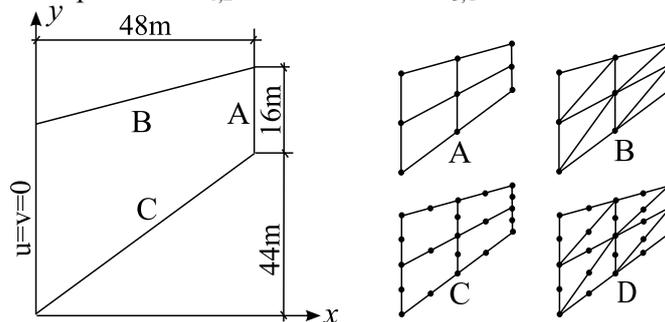


Рис. 4.8-7. Клин и его расчетные схемы

В таблице 4.8-6 приведены результаты вычислений.

<sup>1</sup> В некоторых работах принимается  $\nu = 0.3$ . В этом случае значения незначительно отличаются:  $w_A = -23.9119 \text{ м}$ ,  $\sigma_{1,B} = 0.20353 \text{ Па}$  и  $\sigma_{3,C} = -0.23692 \text{ Па}$ .

Таблица 4.8-6. Перемещения и главные напряжения в задаче Cook's

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	Перемещения $w_A$ (m)												Гл. напряжения $\sigma_{1,2}$ (kPa)												Гл. напряжения $\sigma_{3,c}$ (kPa)											
			Сетка				Сетка				Сетка				Сетка				Сетка				Сетка															
			2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16																
A	26	$u, v$	-11.80	-18.29	-22.08	-23.34	0.0982	0.1508	0.1866	0.2002	-0.1278	-0.1905	-0.2251	-0.2358																								
	30		-14.14	-20.13	-22.79	-23.64	0.1034	0.1557	0.1864	0.2039	-0.1121	-0.1853	-0.2202	-0.2316																								
	129	$u, v, \omega$	-17.26	-21.92	-23.37	-23.79	0.1777	0.2013	0.2039	0.2049	-0.1760	-0.2279	-0.2388	-0.2395																								
	130		-17.55	-21.53	-23.13	-23.69	0.1430	0.1769	0.1953	0.2013	-0.1470	-0.1982	-0.2249	-0.2338																								
	526	$u, v, \theta$	-21.66	-23.23	-23.78	-23.92	0.1774	0.1977	0.2009	0.2032	-0.1730	-0.2197	-0.2322	-0.2354																								
527		-21.56	-23.22	-23.78	-23.92	0.1747	0.1977	0.2007	0.2032	-0.1711	-0.2193	-0.2322	-0.2354																									
B	22,25	$u, v$	-6.743	-11.25	-17.33	-21.59	0.02105	0.06154	0.1182	0.1684	-0.0611	-0.1051	-0.1688	-0.2127																								
	122	$u, v, \omega$	-18.49	-22.00	-23.34	-23.76	0.1687	0.1693	0.1940	0.2018	-0.2011	-0.2382	-0.2485	-0.2482																								
	125		-15.36	-18.97	-21.60	-23.07	0.1486	0.1547	0.1838	0.1964	-0.1446	-0.1838	-0.2147	-0.2337																								
	528	$u, v, \theta$	-17.46	-21.51	-23.23	-23.75	0.1196	0.1618	0.1873	0.1970	-0.1643	-0.2124	-0.2312	-0.2363																								
C	30	$u, v$	-23.47	-23.89	-23.94	-23.96	0.2011	0.2038	0.2037		-0.2471	-0.2409	-0.2382	-0.2372																								
	26		-22.72	-23.71	-23.88	-23.93	0.2273	0.2007	0.2041	0.2037	-0.2472	-0.2471	-0.239	-0.2474																								
	129	$u, v, \omega$	-23.24	-23.79	-23.90	-23.94	0.2051	0.2015	0.2042	0.2040	-0.2629	-0.2466	-0.2399	-0.2377																								
130		-22.97	-23.76	-23.90	-23.94	0.2114	0.2023	0.2041	0.2037	-0.2557	-0.2430	-0.2392	-0.2375																									
D	25	$u, v$	-22.11	-22.68	-22.92	-22.95	0.1723	0.1995	0.2026	0.2033	-0.2317	-0.242	-0.2395	-0.2377																								
	122	$u, v, \omega$	-22.14	-23.57	-23.85	-23.93	0.1911	0.1903	0.1988	0.2014	-0.2110	-0.2301	-0.2369	-0.2376																								
	125		-21.21	-23.42	-23.85	-23.93	0.1305	0.1971	0.2020	0.2032	-0.1931	-0.2304	-0.2379	-0.2375																								

### 4.8.6. Изгиб неограниченного клина сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине (задача Инглиса)

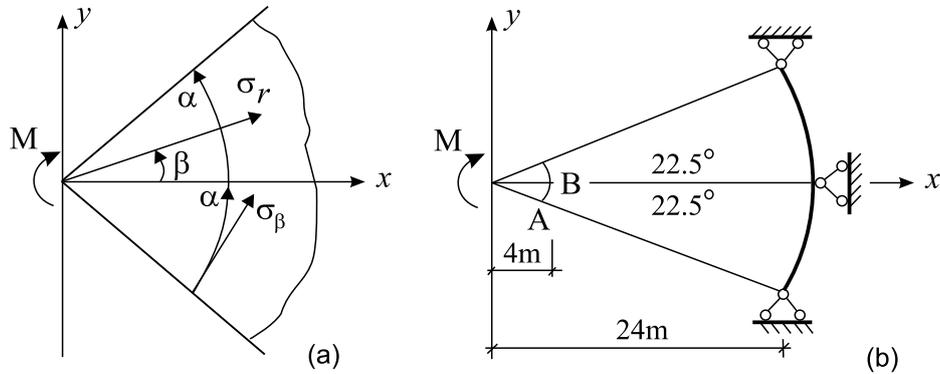


Рис. 4.8-8. Задача Инглиса

Рассмотрим область  $R \leq 24 \text{ m}$ ,  $\alpha = 22.5^\circ$  и зададим краевые условия, показанные на рис. 4.8-8(b). По принципу Сен-Венана данные ограничения не окажут существенного влияния на результат, т.к. будем рассматривать точки  $A(4, -22^\circ)$  и  $B(4, 0^\circ)$ .

Зададим:  $E = 3.0 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $M = -1 \text{ кНм}$ .

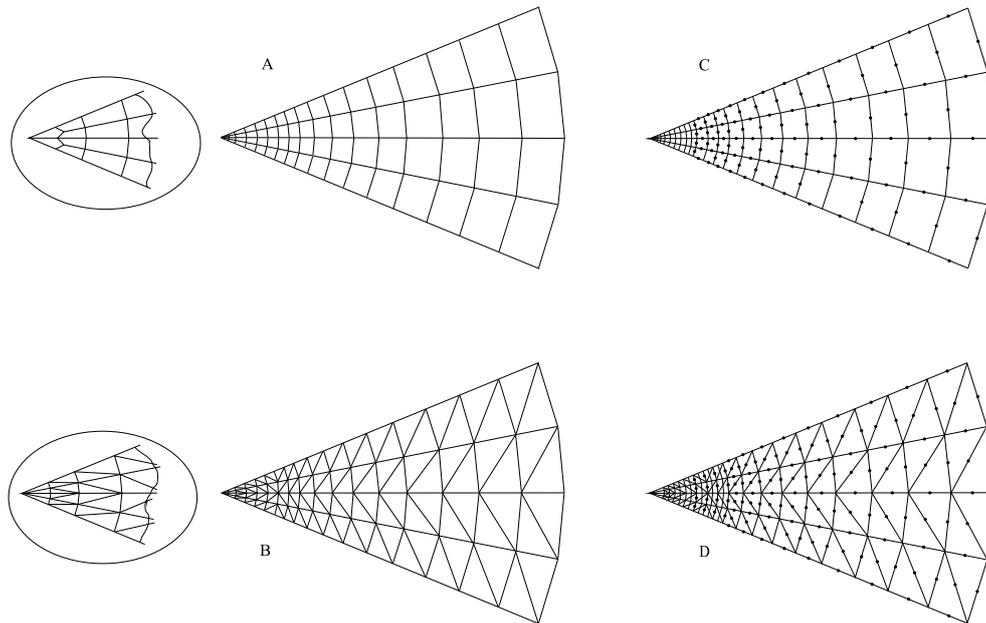


Рис. 4.8-9. Фрагменты расчетных схем клина с четырехугольными элементами

В расчетных схемах на рис. 4.8-9 радиусы положения точек: 0.5, 0.625, 1, 1.75, 2.5, 3.25, 4, 4.75, 5.5, 6.5, 7.75, 9.25, 11, 13, 15.5, 18, 21, 24.

Данная задача имеет аналитическое решение:

$$\sigma_r = \frac{2M \sin(2\beta)}{r^2(2\alpha \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha))}, \quad \sigma_\beta = 0, \quad \tau_{r\beta} = \frac{2M(\cos(2\alpha) - \cos(2\beta))}{r^2(2\alpha \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha))},$$

где  $r, \beta$  – полярные координаты точки.

Т.е.:  $\sigma_{rA} = 0.582474 \text{ кПа}$ ,  $\tau_{r\beta B} = 0.120634 \text{ кПа}$ .

**Таблица 4.8-7.** Напряжения в задаче Инглиса

Тип сетки	Элемент	Напряжения $\sigma_{rA}$ (Па)				Напряжения $\tau_{r\beta B}$ (Па)			
		Сетка				Сетка			
		A	A2	A4	A8	A	A2	A4	A8
A	129	0.6108	0.5909	0.5851	0.5834	0.0914	0.1172	0.1216	0.1218
	130	0.5759	0.5781	0.5801	0.5812	0.1216	0.1208	0.1208	0.1207
B	122	0.6578	0.6108	0.5940	0.5875	0.1135	0.1121	0.1164	0.1185
	125	0.5541	0.5761	0.5811	0.5822	0.1043	0.1217	0.1232	0.1224
C	129	0.5637	0.5784	0.5816	0.5823	0.1522	0.1263	0.1220	0.1210
	130	0.5737	0.5809	0.5821	0.5824	0.1414	0.1259	0.1219	0.1210
D	122	0.6066	0.5892	0.5843	0.5830	0.1283	0.1244	0.1230	0.1220
	125	0.5418	0.5706	0.5791	0.5816	0.1220	0.1213	0.1209	0.1207

Рассматриваются напряжения в точках А и В, которые находятся на расстоянии 4м от вершины. В соответствии с принципом Сен-Венана ограничим размеры клина радиусом  $R=24\text{м}$  и зададим связи только в трех точках, как изображено на рисунке.

В табл. 4.8-7 приведены результаты расчетов только для элементов со степенями свободы  $\omega_z$ , т.к. для элементов с квазивращательными степенями свободы они некорректны.

#### 4.8.7. Изгиб прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне

Рассмотрим жестко подвешенную на сторонах  $x=0$  и  $x=a$  прямоугольную балку-стенку (рис. 4.8.10), нагруженную по верхнему краю равномерно распределенной нагрузкой. Данная задача имеет аналитическое решение в рядах, приведенное в [31]. В работе [20] были получены численные значения при следующих данных:

- $E = 2.65 \cdot 10^6 \text{ Па}$  – модуль упругости;
- $\nu = 0.15$  – коэффициент Пуассона;
- $h = 0.1 \text{ м}$  – толщина балки-стенки;
- $a = 1.6 \text{ м}$  – длина пролета балки-стенки;
- $b = 1.6 \text{ м}$  – высота балки-стенки;
- $p = 500.0 \text{ Н/м}$  – равномерно распределенная нагрузка.

Расчет выполнялся на половине балки-стенки с учетом оси симметрии CD при задних краевых условиях:  $w|_{x=0} = u|_{x=1.2} = \omega/\theta|_{x=1.2} = 0$ .

Таблица 4.8-8. Перемещения и напряжения в пластинке

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	Перемещения $w_A$ (m)				Напряжения $\sigma_B$ (kПа)			
			Сетка				Сетка			
			2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16
A	21,26	$u, v$	-3.3028	-3.5671	-3.7144	-3.7511	0.8936	1.5729	1.9136	2.0717
	30		-3.3897	-3.5877	-3.7202	-3.7526	0.9526	1.6114	1.9329	2.0811
	121	$u, v, \omega$	-3.5971	-3.6802	-3.7410	-3.7577	2.0216	2.0975	2.1564	2.1875
	129		-3.5344	-3.6762	-3.7395	-3.7573	1.8855	2.0341	2.1258	2.1725
	130		-3.3881	-3.6433	-3.7312	-3.7554	1.9479	2.0749	2.1505	2.1858
	526	$u, v, \theta$	-3.4643	-3.6726	-3.7415	-3.7580	1.9846	2.1234	2.1739	2.1966
	527		-3.4603	-3.6686	-3.7414	-3.7580	1.8881	2.0835	2.1546	2.1870
B	22	$u, v$	-2.8562	-3.4602	-3.7167	-3.7641	0.7733	1.3595	1.7864	2.009
	122	$u, v, \omega$	-3.3494	-3.6562	-3.7377	-3.7582	2.1242	2.1274	2.1736	2.1967
	125		-3.0276	-3.5946	-3.7042	-3.7468	1.9472	2.0158	2.1133	2.1674
	528	$u, v, \theta$	-3.2005	-3.6080	-3.7249	-3.7547	1.8805	2.0160	2.1214	2.1715
C	26	$u, v$	-2.8845	-3.5181	-3.6976	-3.7463	0.6828	1.1605	1.6065	1.8599
	30		-2.8677	-3.5156	-3.6913	-3.7445	0.6686	1.1269	1.533	1.7995
	129	$u, v, \omega$	-3.1957	-3.6065	-3.7582	-3.7745	1.6774	1.6550	1.8636	2.0106
	130		-2.8401	-3.4950	-3.6285	-3.7053	1.8166	2.0413	2.1162	2.1461
	526	$u, v, \theta$	-3.1204	-3.6785	-3.7518	-3.7627	1.4033	1.9437	2.0779	2.1411
	527		-3.1483	-3.6716	-3.7507	-3.7626	1.5706	1.9523	2.0554	2.1257
D	22,25	$u, v$	-2.6571	-3.2203	-3.53	-3.682	0.5303	0.8634	1.2578	1.6429
	122	$u, v, \omega$	-3.2120	-3.5619	-3.7015	-3.7492	2.0067	2.0686	2.1351	2.1736
	125		-2.7636	-3.1829	-3.3407	-3.4860	1.8346	1.8803	1.9712	2.0734
	528	$u, v, \theta$	-3.0684	-3.5233	-3.6936	-3.7464	1.7172	1.9280	2.0795	2.1497
E	21,26	$u, v$	-3.7429	-3.7546	-3.7632	-3.7636	1.9522	2.0872	2.1526	2.1852
	30		-3.7384	-3.7648	-3.7637	-3.7636	1.8594	2.047	2.133	2.1755
	129	$u, v, \omega$	-3.8112	-3.7866	-3.7752	-3.7677	1.9724	2.1122	2.1663	2.1923
	130		-3.7435	-3.7543	-3.7630	-3.7635	1.8486	2.0507	2.1359	2.1770
F	25	$u, v$	-3.8502	-3.7775	-3.765	-3.7637	1.6852	1.9824	2.1025	2.1605
	122	$u, v, \omega$	-3.8582	-3.7694	-3.7593	-3.7621	1.7710	2.0022	2.1109	2.1648
	125		-3.4784	-3.7437	-3.7620	-3.7634	1.6815	1.9797	2.1015	2.1600
G	26	$u, v$	-3.6423	-3.7707	-3.7666	-3.764	1.3464	1.8638	2.0421	2.1274
	30		-3.559	-3.7714	-3.767	-3.7641	1.2797	1.8531	2.0376	2.1238
	129	$u, v, \omega$	-3.8661	-3.8615	-3.8079	-3.7799	1.6800	1.9761	2.0908	2.1497
	130		-3.5164	-3.7586	-3.7651	-3.7639	1.3827	1.8735	2.0504	2.1316
H	25	$u, v$	-3.659	-3.7625	-3.7654	-3.7639	1.3322	1.819	2.0351	2.1295
	122	$u, v, \omega$	-3.6114	-3.7890	-3.8003	-3.7818	1.7490	1.9895	2.1021	2.1594
	125		-3.4959	-3.7713	-3.7742	-3.7665	1.4127	1.8596	2.0539	2.1392

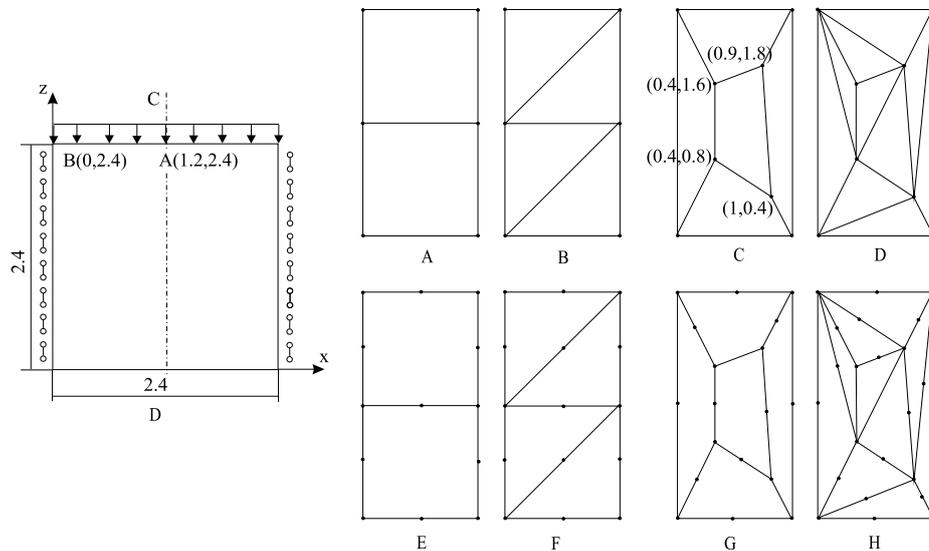


Рис. 4.8-10. Балка-стенка и расчетные схемы

Расчетные схемы приведены на рис. 4.8-10. Причем схемы С и D являются повторением схемы патологических тестов [121,127]. Результаты расчетов приведены в табл. 4.8-8.

#### 4.8.8. Анализ результатов

Все описанные в данной главе конечные элементы используют или полиномиальные аппроксимации поля перемещений по всему телу, или являются изопараметрическими. При этом по построению всегда выполнены условия критерия полноты (2.5.7) порядка  $p \geq 1$  для всех рассмотренных элементов, а для несовместных элементов – критерии несовместности порядка 1.

Все рассмотренные элементы обеспечивают, как минимум, первый порядок сходимости по напряжениям, а по перемещениям – второй. Для совместных элементов с промежуточными узлами на сторонах, которые все удовлетворяют критерию полноты порядка  $p=2$ , скорости сходимости увеличиваются.

Проведенные численные эксперименты подтвердили теоретические основы построения конечных элементов:

- все элементы со степенями свободы  $\theta$  и  $\omega_z$  показывают значительно лучшие результаты по сравнению с аналогичными элементами с двумя степенями свободы узла;
- элементы с квазивращательными степенями свободы и несовместные элементы с  $\omega_z$  показывают приблизительно одинаковые результаты по перемещениям и напряжениям;
- по углам поворота элементы с квазивращательными степенями свободы могут давать некорректные результаты;

- *совместные* элементы с  $\omega_z$  без дополнительных узлов на сторонах показывают *незначительно худшие* результаты по сравнению аналогичными элементами с квазивращательными степенями свободы и несовместными с  $\omega_z$ ;
- все элементы со степенями свободы  $\omega_z$  позволяют рассчитывать конструкции с нагрузкой в виде как сосредоточенных, так и равномерно-распределенных моментов.

## Глава 5. Стержни

### 5.1. Гипотезы

К стержням относятся тела, у которых длина значительно больше его ширины и высоты. Тело стержня образуется движением плоского сечения вдоль линии, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к ней. Данная линия называется осью стержня. Сечение может быть переменным. В данной главе будем рассматривать только прямолинейные стержни, у которых осью служит прямая линия.

Классическая теория Эйлера – Бернулли основана на следующих предположениях:

- *гипотеза плоских сечений*: поперечные сечения, плоские и перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси после ее деформации;
- *гипотеза ненадавливания*: продольные волокна балки при ее изгибе не надавливают друг на друга;
- *гипотеза отсутствия сдвигов*: деформации сдвига настолько малы, что работой касательных напряжений для энергии деформации можно пренебречь по сравнению с работой нормальных напряжений;
- изотропный материал подчиняется закону Гука.

В гипотезах Тимошенко вместо *гипотезы отсутствия сдвигов*:

- плоское поперечное сечение при изгибе поворачивается не только из-за изгиба ее оси, но и из-за поворота относительно этой оси. В исходных уравнениях вводится учет работы касательных напряжений и, следовательно, деформаций сдвига.

В вычислительных комплексах стержневой конечных элемент может рассматриваться как подконструкция. Возможна реализация:

- недеформируемых частей (жестких вставок);
- шарниров (ползунов) по любой из осей. Шарниры могут быть упругими;
- учет упругого основания.

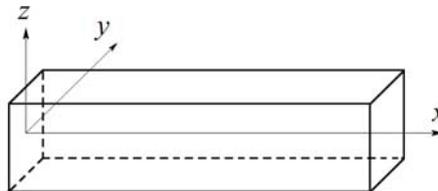


Рис. 5.1-1. Стержень

Считаем, что главные оси инерции стержня совпадают с осями системы координат XYZ, как изображено на рис. 5.1-1.

## 5.2. Сжато-растянутый стержень

Рассмотрим задачу о растяжении-сжатии прямолинейного стержня длиной  $a$ , изображенного на рис. 5.2-1, где  $x$  – продольная ось стержня,  $q(x)$  – интенсивность распределенной вдоль оси стержня нагрузки, действующей в направлении  $x$ . На концы стержня действуют сосредоточенные силы  $P_0$  и  $P_a$  соответственно.

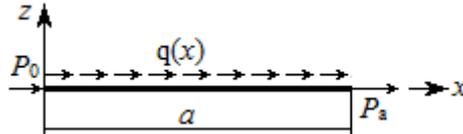


Рис. 5.2-1. Растянуто-сжатый стержень

Поле перемещений точек стержня:

$$u=u(x), v=w=0. \quad (5.2.1)$$

Получаем геометрические уравнения из (3.1.4):

$$\varepsilon_x = \frac{d}{dx}u, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (5.2.2)$$

$\varepsilon_x$  – относительная продольная деформация, положительная при растяжении.

Из закона Гука (3.1.6) следуют физические уравнения:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (5.2.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

Введем в точке  $x$  стержня осевое внутреннее усилие как интеграл по сечению  $F$ :

$$N(x) = \iint_F \sigma_x dF = \varepsilon_x \iint_F E dF, \quad (5.2.4)$$

$N(x)$  – продольная сила, считающаяся положительной при растяжении стержня.

При  $E=const$  то получаем физическое уравнение:

$$N(x) = EF(x)\varepsilon_x, \quad (5.2.5)$$

где  $F(x)$  – площадь поперечного сечения стержня в точке  $x$ .

*Дифференциальное уравнение равновесия:*

$$-\frac{dN(x)}{dx} = q(x), \quad -\frac{d}{dx}EF \frac{d}{dx}u(x) = q(x). \quad (5.2.6)$$

*Статические краевые условия:*

$$N(0) = P_0; \quad N(a) = -P_a.$$

*Кинематические краевые условия:*

$$u(0) = u_0; \quad u(a) = u_a.$$

Функционал Лагранжа, если заданы только нулевые кинематические краевые условия:

$$A(u) = \frac{1}{2} \int_0^a EF(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^a q(x)u(x)dx. \quad (5.2.7)$$

В матричной форме векторы напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\epsilon$  и перемещений  $u$  состоят из одной компоненты каждый:

$$\sigma = \{ N \}, \quad \epsilon = \{ \epsilon_x \}, \quad u = \{ u \}. \quad (5.2.8)$$

Линейный матричный оператор  $A$  и матрица упругости  $C$  имеют вид в (1.3.1) и (1.3.2):

$$A = \left[ \frac{d}{dx} \right], \quad C = [EF(x)], \quad B = -A. \quad (5.2.9)$$

### Степени свободы и аппроксимирующие функции

В узлах элемента определим по одной степени свободы:

$$u_i, \quad i=1,2. \quad (5.2.10)$$

Поле перемещений представим в следующем виде:

$$u(x) = u_1(1 - \xi) + u_2\xi, \quad \xi = \frac{x}{a}. \quad (5.2.11)$$

## 5.3. Балка Бернулли

### 5.3.1. Уравнения

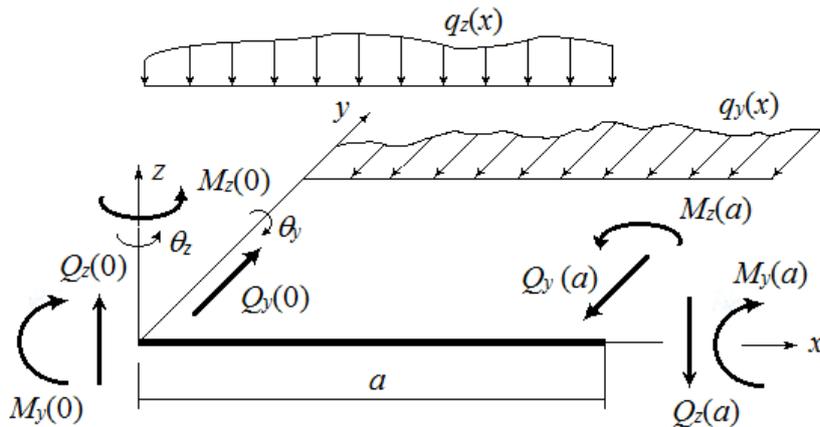


Рис. 5.3-1. Изгибаемый стержень

Рассмотрим задачу об изгибе прямолинейного стержня длиной  $a$ , изображенного на рис. 5.3-1, где  $x$  – продольная ось стержня, оси  $y$  и  $z$  совпадают с главными осями инерции сечения,  $q_y(x)$ ,  $q_z(x)$  – распределенные вдоль осей стержня нагрузки по направлениям осей  $y$  и  $z$ . На концы стержня действуют перерезывающие силы и моменты  $M_y(0)$ ,  $Q_z(0)$ ,  $M_z(0)$ ,  $Q_y(0)$ ,  $M_y(a)$ ,  $M_z(a)$ ,  $Q_z(a)$  и  $Q_y(a)$ .

Из гипотезы плоских сечений углы поворота поперечного сечения  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  и кривизны  $\chi_y$ ,  $\chi_z$  стержня относительно осей  $y$  и  $z$  связаны с прогибами  $w$  и  $v$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\theta_y &= -\frac{d}{dx}w, & \theta_z &= \frac{d}{dx}v, \\ \chi_y &= -\frac{d^2}{dx^2}w = \frac{d}{dx}\theta_y, & \chi_z &= -\frac{d^2}{dx^2}v = -\frac{d}{dx}\theta_z.\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

Поле горизонтальных перемещений  $u$  точек стержня по теории Эйлера – Бернулли:

$$u(x) = -z\frac{d}{dx}w(x) - y\frac{d}{dx}v(x). \quad (5.3.2)$$

Получаем геометрические уравнения из (3.1.4):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= z\chi_y + y\chi_z = -z\frac{d^2}{dx^2}w - y\frac{d^2}{dx^2}v, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.\end{aligned}\quad (5.3.3)$$

Из закона Гука (3.1.6) следуют физические уравнения:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0. \quad (5.3.4)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

Введем в точке  $x$  стержня осевые внутренние усилия  $M_y(x)$  и  $M_z(x)$  – изгибающие моменты вокруг осей  $OY$  и  $OZ$ :

$$\begin{aligned}M_y(x) &= -\iint_F z\sigma_x dF = -\chi_y \iint_F z^2 E dF, \\ M_z(x) &= \iint_F y\sigma_x dF = -\chi_z \iint_F y^2 E dF.\end{aligned}\quad (5.3.5)$$

Если модуль упругости  $E = const$ , то получаем, что

$$M_y(x) = EI_y(x)\chi_y, \quad M_z(x) = EI_z(x)\chi_z, \quad (5.3.6)$$

где  $I_y(x)$  и  $I_z(x)$  – моменты инерции сечения стержня относительно осей  $OY$  и  $OZ$ .

Из уравнений равновесия (3.1.2) следует, что касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  не равны нулю. Введем в точке  $x$  стержня осевые внутренние усилия  $Q_y(x)$  и  $Q_z(x)$  – поперечные силы в направлении осей  $OY$  и  $OZ$ :

$$Q_y(x) = -\iint_F \tau_{xy} dF, \quad Q_z(x) = -\iint_F \tau_{xz} dF. \quad (5.3.7)$$

После интегрирования по площади сечения уравнений равновесия (3.1.2) следует:

$$Q_y(x) = -\frac{d}{dx}M_z(x), \quad Q_z(x) = \frac{d}{dx}M_y(x). \quad (5.3.8)$$

Получаем дифференциальные уравнения равновесия:

$$-\frac{d}{dx}Q_y(x) = q_y(x), \quad -\frac{d}{dx}Q_z(x) = q_z(x), \quad (5.3.9)$$

которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}Q_z(x) &= -\frac{d^2M_y(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}EI_y \frac{d^2}{dx^2}w(x) = q_z(x), \\
-\frac{d}{dx}Q_y(x) &= \frac{d^2M_z(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}EI_z \frac{d^2}{dx^2}v(x) = q_y(x).
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Статические краевые условия:

$$\begin{aligned}
M_y(0) &= -M_{y,0}, & Q_z(0) &= -Q_{z,0}, \\
M_y(a) &= M_{y,a}, & Q_z(a) &= Q_{z,a}, \\
M_z(0) &= -M_{z,0}, & Q_y(0) &= -Q_{y,0}, \\
M_z(a) &= M_{z,a}, & Q_y(a) &= Q_{y,a}.
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Кинематические краевые условия:

$$\begin{aligned}
v(0) &= v_0, & v(a) &= v_a, \\
\theta_z(0) &= \theta_{z,0}, & \theta_z(a) &= \theta_{z,a}, \\
w(0) &= w_0, & w(a) &= w_a, \\
\theta_y(0) &= \theta_{y,0}, & \theta_y(a) &= \theta_{y,a}.
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Функционал Лагранжа при нулевых краевых условиях:

$$\begin{aligned}
A(w) &= \frac{1}{2} \int_0^a \left( EI_z \left( \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right)^2 + EI_y \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 \right) dx \\
&\quad - \int_0^a (q_y(x)v(x) + q_z(x)w(x)) dx.
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

В матричной форме векторы напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\epsilon$  и перемещений  $u$  на оси стержня состоят из двух компонент каждый:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} M_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{Bmatrix} \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}. \tag{5.3.14}$$

Линейный матричный оператор  $A$  и матрица упругости  $C$  имеют вид в (1.3.1) и (1.3.2):

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} EI_z(x) & 0 \\ 0 & EI_y(x) \end{bmatrix}, \quad B = A. \tag{5.3.15}$$

### 5.3.2. Учет сдвиговых деформаций

Рассмотрим стержень, изображенный на рис. 5.3-1. Будем считать, следуя [59, 71], что существуют следующие зависимости для полных вертикального и горизонтального прогибов и углов поворота:

$$\begin{aligned}
w(x) &= w_d(x) + w_s(x), & v(x) &= v_d(x) + v_s(x), \\
\theta_y &= -\frac{d}{dx}w_d, & \theta_z &= \frac{d}{dx}v_d,
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

где:  $w_d$  и  $v_d$  – прогибы от изгиба, удовлетворяющие уравнениям равновесия (5.3.10);

$w_s$  и  $v_s$  – прогибы от сдвига.

Если считать, что сдвиги по высоте поперечного сечения стержня распределены равномерно и сечение не испытывает деформации, то между углами сдвига  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  и перерезывающими силами  $Q_z(x)$ ,  $Q_y(x)$  существуют зависимости:

$$\gamma_{xz} = -\frac{dw_s}{dx} = \frac{1}{GF_y} Q_z, \quad \gamma_{xy} = \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{GF_z} Q_y. \quad (5.3.17)$$

Учитывая (5.3.8), получаем:

$$\frac{dw_s}{dx} = -\frac{EF_y}{GF_y} \frac{d^3 w_d}{dx^3}, \quad \frac{dv_s}{dx} = -\frac{EF_z}{GF_z} \frac{d^3 v_d}{dx^3}. \quad (5.3.18)$$

Функционал Лагранжа при нулевых краевых условиях:

$$\begin{aligned} A(w) = & \frac{1}{2} \int_0^a \left( EI_z \left( \frac{d^2 v_d(x)}{dx^2} \right)^2 + EI_y \left( \frac{d^2 w_d(x)}{dx^2} \right)^2 \right) dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^a \left( GF_z \left( \frac{dv_s(x)}{dx} \right)^2 + GF_y \left( \frac{dw_s(x)}{dx} \right)^2 \right) dx + \\ & \int_0^a (q_y(x)v(x) + q_z(x)w(x)) dx. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

### 5.3.3. Преднапряжение и сдвиг

Пусть в начальном состоянии в сечении стержня действует положительная при растяжении ненулевая нормальная сила  $N(x)$ . Она возникает, например, в железобетонном стержне при предварительно натянутой арматуре. Тогда уравнения равновесия (5.3.10) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} w(x) &= q_z(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} v(x) &= q_y(x). \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Вектор перемещений  $\mathbf{u}$ , линейный матричный оператор  $\mathbf{A}$  и матрицу упругости  $\mathbf{D}$  в (1.3.1) и (1.3.2) запишем в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^2}{dx^2} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI_z(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N(x) \end{bmatrix}. \quad (5.3.21)$$

Функционал Лагранжа при нулевых краевых условиях:

$$\begin{aligned} A(w) = & \frac{1}{2} \int_0^a \left( EI_z \left( \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 + EI_y \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 + N \left( \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 \right) \right) dx \\ & - \int_0^a (q_y(x)v(x) + q_z(x)w(x)) dx. \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Если необходимо учесть сдвиг, то согласно [44], достаточно в (5.3.20)–(5.3.22) заменить жесткости  $EI_y$  и  $EI_z$  на:

$$EI_y^s = EI_y \left( 1 + \frac{N}{GF_y} \right), \quad EI_z^s = EI_z \left( 1 + \frac{N}{GF_z} \right). \quad (5.3.23)$$

### 5.3.4. Степени свободы и аппроксимирующие функции

В узлах элемента определим четыре степени свободы – два перемещения по соответствующим осям и углы поворота вокруг них:

$$v_i, w_i, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \quad i=1,2. \quad (5.3.24)$$

Поле перемещений представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_1 \varphi_{11} + \theta_{z,1} \varphi_{14} + v_2 \varphi_{21} + \theta_{z,2} \varphi_{24}, \\ w(x) &= w_1 \varphi_{12} + \theta_{y,1} \varphi_{13} + w_2 \varphi_{22} + \theta_{y,2} \varphi_{23}, \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

где первый индекс при  $\varphi$  – номер узла, второй – порядковый номер степени свободы в (5.3.24).

Рассмотрим невязку:

$$\zeta(x) = w(x) - w(0) \varphi_{12} - \theta_y(0) \varphi_{13} - w(a) \varphi_{22} - \theta_y(a) \varphi_{23}. \quad (5.3.26)$$

Разложив  $w(x)$  в ряд, учитывая (5.3.1), получим:

$$\begin{aligned} \zeta(x) = & w(0) + x \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{x^3}{6} \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} \\ & - w(0) \varphi_{12} + \varphi_{13} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + a \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{a^2}{2} \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right) \varphi_{22} \\ & - \left( w(0) + a \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{a^2}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{a^3}{6} \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right) \varphi_{23} + \dots \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

Тождества критерия полноты третьего порядка для  $w$  получаем, приравняв соответствующие коэффициенты при членах ряда:

$$\begin{aligned} \varphi_{12} + \varphi_{22} &\equiv 1, \\ a \varphi_{22} - \varphi_{13} - \varphi_{23} &\equiv x, \\ a^2 \varphi_{22} - 2a \varphi_{23} &\equiv x^2, \\ a^3 \varphi_{22} - 3a \varphi_{23} &\equiv x^3. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Аналогично для  $v$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} + \varphi_{21} &\equiv 1, \\
a\varphi_{21} + \varphi_{14} + \varphi_{24} &\equiv x, \\
a^2\varphi_{21} + 2a\varphi_{24} &\equiv x^2, \\
a^3\varphi_{21} + 3a\varphi_{24} &\equiv x^3.
\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Первые два тождества в (5.3.28) и (5.3.29) являются условиями равновесия стержня как жесткого тела.

Рассматривая систему тождеств (5.3.28) и (5.3.29) как системы уравнений, получаем аппроксимирующие функции, удовлетворяющие всем условиям МКЭ:

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}(x) &= \psi_1(\xi, \mu), & \varphi_{14}(x) &= -\psi_2(\xi, \mu), \\
\varphi_{21}(x) &= \psi_3(\xi, \mu), & \varphi_{24}(x) &= -\psi_4(\xi, \mu), \\
\varphi_{12}(x) &= \psi_1(\xi, \lambda), & \varphi_{13}(x) &= \psi_2(\xi, \lambda), \\
\varphi_{22}(x) &= \psi_3(\xi, \lambda), & \varphi_{23}(x) &= \psi_4(\xi, \lambda),
\end{aligned} \tag{5.3.30}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & \psi_3(x) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & \xi &= \frac{x}{a}, \\
\psi_2(x) &= -a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), & \psi_4(x) &= a(\xi^2 - \xi^3),
\end{aligned} \tag{5.3.31}$$

Функции (5.3.31) являются решениями соответствующего однородного уравнения равновесия (5.3.10), если  $EI_y = \text{const}$  и  $EI_z = \text{const}$ .

При наличии сдвига или преднапряжения функции (5.3.31) уже не будут решениями уравнений равновесия. По теореме 2.4.1 для получения точных значений перемещений узлов и усилий в элементах желательно использовать аналитические решения соответствующих однородных уравнений.

**Чистый сдвиг:**  $N=0$  и  $GF_y \neq 0$ ,  $GF_z \neq 0$ .

С учетом уравнений (5.3.16) и (5.3.18) решения для однородных уравнений равновесия (5.3.10) имеют вид [59, 71]:

$$\begin{aligned}
w_d &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3, \\
w_s &= -\frac{6EI_y}{GF_y}xC_4 + C_5 = -\lambda a^2xC_4 + C_5, \\
w &= C_1 + C_5 + C_2x + C_3x^2 + C_4(x^3 - a^2\lambda x), \\
v_d &= B_1 + B_2x + B_3x^2 + B_4x^3, \\
v_s &= -\frac{6EI_z}{GF_z}xB_4 + B_5 = -\mu a^2xB_4 + B_5, \\
v &= B_1 + B_5 + B_2x + B_3x^2 + B_4(x^3 - a^2\mu x),
\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

где  $\lambda = \frac{6EI_y}{a^2GF_y}$ ,  $\mu = \frac{6EI_z}{a^2GF_z}$ .

Получим аппроксимирующие функции (5.3.25) для чистого сдвига:

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= 1 - \frac{1}{1+2\mu}(2\mu\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3), & \varphi_{21} &= 1 - \varphi_{11}, \\
\varphi_{12} &= 1 - \frac{1}{1+2\lambda}(2\lambda\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3), & \varphi_{22} &= 1 - \varphi_{12}, \\
\varphi_{13} &= -\frac{a}{1+2\lambda}((1+\lambda)\xi - (\lambda+2)\xi^2 + \xi^3), & \varphi_{23} &= a\varphi_{12} - \varphi_{13} - a\xi, \\
\varphi_{14} &= \frac{a}{1+2\mu}((1+\mu)\xi - (\mu+2)\xi^2 + \xi^3), & \varphi_{24} &= a\xi - a\varphi_{21} - \varphi_{14}. \quad (5.3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_s(x) &= w_1\psi_{12} + \theta_{y1}\psi_{13} + w_2\psi_{22} + \theta_{y2}\psi_{23}, \\
v_s(x) &= v_1\psi_{11} + \theta_{z1}\psi_{14} + w_2\psi_{21} + \theta_{z2}\psi_{24}. \quad (5.3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= -\frac{2\mu}{1+2\mu}, & \psi_{14} &= \psi_{24} = \frac{\mu a}{1+2\mu}, \\
\psi_{12} &= -\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\xi, & \psi_{13} &= \psi_{23} = \frac{\lambda a}{1+2\lambda}\xi, \\
\psi_{21} &= \frac{2\mu}{1+2\mu}, & \psi_{22} &= \frac{2\lambda}{1+2\lambda}.
\end{aligned}$$

**Сдвиг и обжатие:**  $N \neq 0$ .

Воспользуемся решениями однородных уравнений равновесия (5.3.20)

[43]:

$$\begin{aligned}
v(x) &= C_1 + C_2x + C_3c(2\mu\xi) + C_4s(2\mu\xi), \\
w(x) &= B_1 + B_2x + B_3c(2\lambda\xi) + B_4s(2\lambda\xi). \quad (5.3.35)
\end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{|N|}{EI_y}}$ ,  $\mu = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{|N|}{EI_z}}$ ,

$$c(x) = \begin{cases} \cos(x), & N < 0 \\ ch(x), & N > 0 \end{cases}, \quad s(x) = \begin{cases} \sin(x), & N < 0 \\ sh(x), & N > 0 \end{cases}.$$

При учете сдвига подставляем в (5.3.35) величины  $EI_y^s$  и  $EI_z^s$  из (5.3.23).

Решив соответствующие системы уравнений (2.1.8), получим в (5.3.30) вместо функций (5.3.31) функции:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\xi, \lambda) &= \frac{1}{2(t(\lambda) - \lambda)}(t(\lambda) - 2\lambda + 2\lambda\xi - s(2\lambda\xi) + t(\lambda)c(2\lambda\xi)), \\
\psi_2(\xi, \lambda) &= -\frac{a \operatorname{sign}(N)}{4\lambda(t(\lambda) - \lambda)} \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda t^{-1}(2\lambda) + 2\lambda t(\lambda) \operatorname{sign}(N) \xi + \\ (t(\lambda) - 2\lambda) \operatorname{sign}(N) s(2\lambda\xi) + \\ (2\lambda t^{-1}(2\lambda) - 1)c(2\lambda\xi) \end{pmatrix}, \\
\psi_3(\xi, \lambda) &= 1 - \varphi_{13}(x), & \psi_4(\xi, \lambda) &= a\psi_3(\xi, \lambda) - \psi_2(\xi, \lambda) - a\xi, \quad (5.3.36) \\
t(\lambda) &= \begin{cases} tg(\lambda), & N < 0 \\ th(\lambda), & N > 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Функции (5.3.36) удовлетворяют только первым двум тождествам критерия полноты (5.3.28) – условиям равновесия стержня как твердого тела.

При учете сдвига подставляем в (5.3.36) величины  $EI_y^s$  и  $EI_z^s$  из (5.3.23).

В связи с трансцендентностью функций и сложностью построения (5.3.36) приведем матрицу жесткости элемента:

$$\mathbf{K}_r = \left[ K_{ij}^r \right]_{i,j=1}^8, \quad (5.3.37)$$

учитывая, что  $N = \frac{\lambda^2}{4a^2} El_y \text{sign}(N) = \frac{\mu^2}{4a^2} El_z \text{sign}(N)$ ,

$$\begin{aligned} k_{22} = k_{66} &= \frac{\lambda}{a(\lambda - t(\lambda))} N, & k_{11} = k_{55} &= \frac{\mu}{a(\mu - t(\mu))} N, \\ k_{26} &= -k_{22}, & k_{15} &= -k_{11}, \\ k_{23} = k_{27} &= -\frac{t(\lambda)}{2(\lambda - t(\lambda))} N, & k_{14} = k_{18} &= \frac{t}{2(\mu - t(\mu))} N, \\ k_{36} = k_{67} &= -k_{23}, & k_{36} = k_{67} &= -k_{14}, \\ k_{33} = k_{77} &= \frac{\lambda(2\lambda t^{-1}(2\lambda) - 1)}{a(\lambda - t(\lambda))} El_z, & k_{33} = k_{77} &= \frac{\mu(2\mu t^{-1}(2\mu) - 1)}{a(\mu - t(\mu))} El_y, \\ k_{28} &= \frac{\lambda(1 - 2\lambda s^{-1}(2\lambda))}{a(\lambda - t(\lambda))} El_z, & k_{28} &= \frac{\mu(1 - 2\mu s^{-1}(2\mu))}{a(\mu - t(\mu))s(2\mu)} El_y. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

При отсутствии продольной силы в стержне ( $N=0$ ) имеем в (5.3.38) неопределенности в силу вырождения соответствующих выражений.

#### 5.4. Балка Тимошенко

Рассмотрим опять задачу об изгибе прямолинейного стержня длиной  $a$ , изображенного на рис. 5.3-1.

Горизонтальные перемещения  $u$  точек стержня по теории Тимошенко:

$$u(x) = z\theta_y - y\theta_z. \quad (5.4.1)$$

Тогда геометрические уравнения (3.1.4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = z\chi_y + y\chi_z, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{xz} = \frac{d}{dx}w + \theta_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{d}{dx}w - \theta_z, \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

где параметры изгибной деформации:

$$\chi_y = -\frac{d}{dx}\theta_z, \quad \chi_z = \frac{d}{dx}\theta_y. \quad (5.4.3)$$

Из закона Гука (3.1.6) следуют физические уравнения:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0. \quad (5.4.4)$$

Моменты (5.3.5) выражаются через параметры изгибной деформации (5.4.3) соотношениями (5.3.6).

Считается, что перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$  пропорциональны сдвигам  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{xy}$ :

$$Q_z = GF_y \gamma_{xz}, \quad Q_y = GF_z \gamma_{xy}, \quad (5.4.5)$$

где  $G$  – модуль сдвига, а  $F_y$  и  $F_z$  называются площадями сдвига и имеют размерность площади.

Перезывающие силы и моменты связаны соотношениями (5.3.8).

Система дифференциальных уравнений равновесия Эйлера:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}Q_y &= q_y(x), & -\frac{d}{dx}\left(GF_z\left(\frac{d}{dx}v - \theta_z\right)\right) &= q_y(x), \\ Q_y + \frac{d}{dx}M_z &= 0, & -GF_z\left(\frac{d}{dx}v - \theta_z\right) - \frac{d}{dx}\left(EI_z\frac{d}{dx}\theta_z\right) &= 0, \\ -\frac{d}{dx}Q_z &= q_z(x), & \text{или} & \\ -\frac{d}{dx}\left(GF_y\left(\frac{d}{dx}w + \theta_y\right)\right) &= q_z(x), & & \\ -Q_z + \frac{d}{dx}M_y &= 0, & GF_y\left(\frac{d}{dx}w + \theta_y\right) - \frac{d}{dx}\left(EI_y\frac{d}{dx}\theta_y\right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Статические и кинематические краевые условия совпадают с (5.3.11) и (5.3.12).

Функционал Лагранжа при нулевых краевых условиях:

$$\begin{aligned} \Lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_0^a \left( EI_y \left( \frac{d}{dx} \theta_y \right)^2 + GF_y \left( \frac{d}{dx} w + \theta_y \right)^2 \right) dx - \int_0^a q_z(x) w(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^a \left( EI_z \left( \frac{d}{dx} \theta_z \right)^2 + GF_z \left( \frac{d}{dx} v - \theta_z \right)^2 \right) dx - \int_0^a q_y(x) v(x) dx. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

В матричной форме векторы напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\epsilon$  и перемещений  $u$  на оси стержня:

$$u = \begin{Bmatrix} v \\ w \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix}, \quad \sigma = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}. \quad (5.4.8)$$

Оператор геометрии  $A$ , оператор равновесия  $B \neq -A^T$  и матрица упругости  $C$  в (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.3):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} GF_z & & & \\ & GF_y & & \\ & & EI_y & \\ & & & EI_z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{dx} \\ -1 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.9)$$

### Степени свободы и аппроксимирующие функции

В узлах элемента определим степени свободы (5.3.24), которым соответствует система аппроксимирующих функций

$$\varphi_{ij} = \{ \varphi_{v,ij}, \varphi_{w,ij}, \varphi_{\theta_y,ij}, \varphi_{\theta_z,ij} \}^T, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3,4. \quad (5.4.10)$$

Будем считать, что

$$\begin{aligned} \varphi_{w,i1} = \varphi_{w,i4} = \varphi_{\theta_y,i1} = \varphi_{\theta_y,i4} = 0 \\ \varphi_{v,i2} = \varphi_{v,i3} = \varphi_{\theta_z,i2} = \varphi_{\theta_z,i3} = 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Рассмотрим невязку по  $w$  и  $\theta_y$ :

$$\zeta(x) = \begin{Bmatrix} 0 \\ w(x) \\ \theta_y(x) \\ 0 \end{Bmatrix} - w(0)\varphi_{w,12} - \theta_{y,13}(0)\varphi_{w,13} - w(a)\varphi_{w,22} - \theta_{y,23}(a)\varphi_{w,22}. \quad (5.4.12)$$

Считаем, что  $EI_y = \text{const}$  и  $GF_y = \text{const}$ .

Из уравнений равновесия (5.4.6):

$$\theta_y = -\frac{d}{dx}w + \frac{1}{\lambda_z} \frac{d^2}{dx^2}\theta_y = -\frac{d}{dx}w - \frac{1}{\lambda_z} \frac{d^3}{dx^3}w + \dots, \quad \lambda_z = \frac{GF_z}{EI_z}. \quad (5.4.13)$$

Подставив (5.4.13) в (5.4.12) и разложив в ряды  $w(x)$ , получим:

$$\begin{aligned} \zeta(x) = & \begin{Bmatrix} 0 \\ w(0) + x \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{x^3}{6} \frac{d^3w}{dx^3} \Big|_{x=0} \\ -\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - x \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_{x=0} - \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\lambda_z} \right\} \frac{d^3w}{dx^3} \Big|_{x=0} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ & - w(0)\varphi_{12} + \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{1}{\lambda_z} \frac{d^3w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right) \varphi_{13} \\ & - \left( w(0) + a \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{a^2}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{a^3}{6} \frac{d^3w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right) \varphi_{22} \\ & + \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + a \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_{x=0} + \left\{ \frac{a^2}{2} + \frac{1}{\lambda_z} \right\} \frac{d^3w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right) \varphi_{23} + \dots \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Восемь тождеств критерия полноты третьего порядка получаем, приравняв соответствующие коэффициенты при членах ряда:

- четыре тождества критерия полноты 1-го порядка являются условиями равновесия стержня как жесткого тела:

$$\begin{aligned} \varphi_{w,12} + \varphi_{w,22} \equiv 1, \quad \varphi_{\theta_y,12} + \varphi_{\theta_y,22} \equiv 0, \\ a\varphi_{w,22} - \varphi_{w,13} - \varphi_{w,23} \equiv x, \quad a\varphi_{\theta_y,22} - \varphi_{\theta_y,13} - \varphi_{\theta_y,23} \equiv -1; \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

- два тождества критерия полноты 2-го порядка:

$$\frac{a^2}{2} \varphi_{w,22} - a\varphi_{w,23} \equiv \frac{x^2}{2}, \quad \frac{a^2}{2} \varphi_{\theta_y,22} - a\varphi_{\theta_y,23} \equiv -x. \quad (5.4.16)$$

Тождества (5.4.16) обеспечивают выполнение тестов на постоянные моменты. Именно их невыполнение приводит к так называемому режиму запираания, когда для тонких стержней решение не сходится к аналитическому;

- два тождества критерия полноты 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{6} \varphi_{w,22} - \frac{1}{\lambda_z} \varphi_{w,13} - \left( \frac{a^2}{2} + \frac{1}{\lambda_z} \right) \varphi_{w,23} &\equiv \frac{x^3}{6}, \\ \frac{a^3}{6} \varphi_{\theta_y,22} - \frac{1}{\lambda_z} \varphi_{\theta_y,13} - \left( \frac{a^2}{2} + \frac{1}{\lambda_z} \right) \varphi_{\theta_y,23} &\equiv -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\lambda_z}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Если сравнить (5.4.15) и (5.4.16) с (5.3.28), то увидим, что они совпадают. Совпадут и тождества (5.4.17), если выполнено условие

$$\varphi_{\theta_y,13} + \varphi_{\theta_y,23} \equiv 1. \quad (5.4.18)$$

Зададим функции вида (5.4.10):

$$\begin{aligned} \psi_{w,12} = \psi_{\theta,13} = 1 - \frac{x}{a}, \quad \psi_{w,22} = \psi_{\theta,23} = \frac{x}{a}, \\ \psi_{\theta_y,12} = \psi_{\theta_y,22} = 0, \quad \psi_{w,13} = -\frac{x}{2} \left( 1 - \frac{x}{a} \right), \quad \psi_{w,23} = -\psi_{w,13}. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Функции (5.4.19) удовлетворяют тождествам критерия полноты 2-го порядка (5.4.15) и (5.4.16). Потому при их использовании отсутствует эффект запираания. Они не зависят от жесткостных характеристик<sup>1</sup>.

Можно повысить точность вычислений. Все восемь тождеств критерия полноты третьего порядка являются системой уравнений для определения соответствующих функций (5.4.10). Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \psi_{ij} + c_{ij} \chi_1, \\ \chi_1 &= \frac{x(a-x)}{12a} \{0, a-2x, 6, 0\}^T, \quad i=1,2, j=2,3, \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

где  $\psi_{ij}$ — функции (5.4.19),

$$c_{12} = \frac{12\lambda_z}{12 + a^2\lambda_z}, \quad c_{22} = -c_{12}, \quad c_{13} = c_{23} = -\frac{1}{2}ac_{12}. \quad (5.4.21)$$

Функции (5.4.20) являются решениями системы однородных уравнений равновесия для  $w$  при  $EL_y = \text{const}$  и  $GF_y = \text{const}$ . Они приведены, например, в [48, 119].

Аналогично получаем для аппроксимаций, соответствующих  $v$ :

$$\theta_z = \frac{d}{dx} v + \frac{1}{\lambda_y} \frac{d^2}{dx^2} \theta_z = \frac{d}{dx} w + \frac{1}{\lambda_y} \frac{d^3}{dx^3} v + \dots, \quad \lambda_y = \frac{GF_y}{EI_y}; \quad (5.4.22)$$

- четыре тождества критерия полноты 1-го порядка, которые являются условиями равновесия стержня как жесткого тела:

<sup>1</sup> Их можно применять как при переменных жесткостях, так и в случае, например, наличия упругого основания.

$$\begin{aligned} \varphi_{v,11} + \varphi_{v,21} &\equiv 1, & \varphi_{\theta_z,11} + \varphi_{\theta_z,21} &\equiv 0, \\ a\varphi_{v,21} + \varphi_{v,14} + \varphi_{v,24} &\equiv x, & a\varphi_{\theta_z,21} + \varphi_{\theta_z,14} + \varphi_{\theta_z,24} &\equiv 1; \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

- два тождества критерия полноты 2-го порядка:

$$\frac{a^2}{2}\varphi_{v,21} + a\varphi_{v,24} \equiv \frac{x^2}{2}, \quad \frac{a^2}{2}\varphi_{\theta_z,21} + a\varphi_{\theta_z,24} \equiv x; \quad (5.4.24)$$

- два тождества критерия полноты 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{6}\varphi_{v,21} + \frac{1}{\lambda_y}\varphi_{v,14} + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\lambda_y}\right)\varphi_{v,24} &\equiv \frac{x^3}{6}, \\ \frac{a^3}{6}\varphi_{\theta_z,21} + \frac{1}{\lambda_y}\varphi_{\theta_z,14} + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\lambda_y}\right)\varphi_{\theta_z,24} &\equiv \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\lambda_y}. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Получаем функции, соответствующие  $v$ :

$$\varphi_{ij} = \psi_{ij} + c_{ij}\chi_2, \quad i=1,2, j=1,4, \quad (5.4.26)$$

где:  $\chi_2 = \frac{x(a-x)}{12a}\{a-2x, 0, 0, 6\}^T, i=1,2, j=1,4,$

$$\begin{aligned} \psi_{v,11} = \psi_{\theta_z,14} &= 1 - \frac{x}{a}, & \psi_{v,21} = \psi_{\theta_z,24} &= \frac{x}{a}, \\ \psi_{\theta_z,11} = \psi_{\theta_z,21} &= 0, & \psi_{v,14} &= \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right), & \psi_{v,24} &= -\psi_{v,14}. \end{aligned}$$

$$c_{11} = \frac{12\lambda_y}{12 + a^2\lambda_y}, \quad c_{21} = -c_{11}, \quad c_{14} = c_{24} = \frac{1}{2}ac_{11}.$$

## 5.5. Кручение

Рассматривается стержень постоянного сечения, изображенный на рис. 5.5-1 под действием крутящих моментов  $m_x(x)$ . Считаем, что в поперечных сечениях возникает только один силовой фактор – крутящий момент  $M_x$ . На концы стержня действуют вращающие моменты  $M_x(0)$  и  $M_x(a)$ .

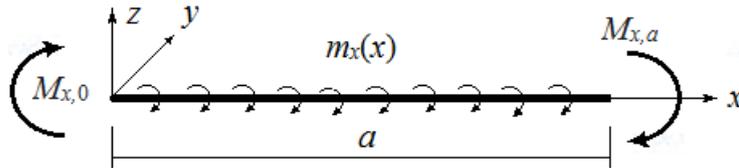


Рис. 5.5-1. Кручение стержня

На нейтральной оси:

$$u=v=w=0. \quad (5.5.1)$$

Геометрические уравнения:

$$\gamma_{yz} = \rho(x, y, z) \frac{d}{dx} \theta_x, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0, \quad (5.5.2)$$

где  $\theta_x$  – угол поворота сечения вокруг нейтральной оси;

$\rho$  – расстояние точки сечения до нейтральной оси.

Из закона Гука следуют физические уравнения:

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0. \quad (5.5.3)$$

Вводится в точке  $x$  стержня осевое внутреннее усилие как интеграл по сечению  $F$  – крутящий момент:

$$M_x(x) = \iint_F \rho \tau_{yz} dF = \iint_F \rho^2 G dF \frac{d}{dx} \theta_x = GI_{кр} \frac{d}{dx} \theta_x, \quad (5.5.4)$$

где  $I_{кр}$  – полярный момент инерции сечения стержня.

*Дифференциальное уравнение равновесия:*

$$-\frac{dM_x(x)}{dx} = m_x(x), \quad -\frac{d}{dx} GI_{кр} \frac{d}{dx} M_x(x) = m_x(x). \quad (5.5.5)$$

*Статические краевые условия:*  $M_x(0) = M_{x,0}$ ;  $M_x(a) = -M_{x,a}$ .

*Кинематические краевые условия:*  $\theta_x(0) = \theta_{x,0}$ ;  $\theta_x(a) = \theta_{x,a}$ .

Функционал Лагранжа, если заданы только кинематические краевые условия:

$$L(\theta_x) = \frac{1}{2} \int_0^a GI_{кр}(x) \left( \frac{d\theta_x(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^a m_x(x) \theta_x(x) dx. \quad (5.5.6)$$

В матричной форме векторы напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$  и перемещений  $u$  состоят из одной компоненты каждый:

$$\sigma = \{ M_x \}, \quad \varepsilon = \{ \tau_{yz} \}, \quad u = \{ \theta_x \}. \quad (5.5.7)$$

Линейный матричный оператор  $A$  и матрица упругости  $C$  имеют вид в (1.3.1) и (1.3.2):

$$A = \left[ \frac{d}{dx} \right], \quad C = [GI_{кр}(x)]. \quad B = -A \quad (5.5.8)$$

### Степени свободы и аппроксимирующие функции

В узлах элемента определим по одной степени свободы:

$$\theta_{x,i}, \quad i=1,2, \quad (5.5.9)$$

Поле обобщенных перемещений представим в следующем виде:

$$\theta_x(x) = \theta_{x,1}(1 - \xi) + \theta_{x,2}\xi, \quad \xi = \frac{x}{a}. \quad (5.5.10)$$

## 5.6. Пространственный стержень

Рассмотрим прямолинейный стержень, изображенный на рис. 5.1-1, у которого оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  совпадают с главными осями инерции сечения.

Стержень находится одновременно под действием:

- растяжения/сжатия;
- изгиба в двух плоскостях (балка Бернулли или стержень Тимошенко);
- кручения вокруг собственной оси.

Считаем заданные воздействия независимыми.

В узлах элемента определим шесть степеней свободы – три перемещения по соответствующим осям и углы поворота вокруг них:

$$u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, i=1,2. \quad (5.6.1)$$

Строим матрицу жесткости элемента:

$$K_r = [K_{ij}^r]_{i,j=1}^{12}. \quad (5.6.2)$$

Для этого вычисляем элементы матриц жесткости частных случаев нагружений и делаем их рассылку в (5.6.2) в соответствии с новой нумерацией степеней свободы узлов (5.6.1).

## 5.7. Тесты

Для проверки реализации конечного элемента стержня в вычислительном комплексе используются тесты, связанные с проверкой:

- смещения как жесткого тела;
- постоянных продольной силы, моментов, перерезывающих сил.

**Таблица 5.7-1.** Типы стержневых элементов по гипотезе Бернулли

Тип элемента	Степени свободы	Описание стержня
1	$u, v$	плоской фермы
2	$u, v, \theta_y$	плоской рамы
3,7	$w, \theta_x, \theta_y$	балочного ростверка
4	$u, v, w$	пространственной фермы
5,6	$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	пространственный
10	по параметру	универсальный

**Таблица 5.7-2.** Типы стержневых элементов по гипотезе Тимошенко

Тип элемента	Степени свободы	Описание стержня
102	$u, v, \theta_y$	плоской рамы
103	$w, \theta_x, \theta_y$	балочного ростверка
105	$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	пространственный
110	по параметру	универсальный

Согласно теореме 2.4.1, если в расчетной схеме все одномерные элементы используют в качестве аппроксимирующих функций решения однородных уравнений равновесия, то в результате получаем для соответствующих тестовых задач точные аналитические решения.

В таблицах 5.7-1 и 5.7-2 приведены цифровые коды типов элементов, которые приняты в вычислительном комплексе *SCAD* [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

Большое число тестовых задач приведено в [16].

## Глава 6. Тонкие плиты (теория Кирхгоффа-Лява)

### 6.1. Теория изгиба тонких пластин Кирхгоффа-Лява

Рассмотрим плиту толщиной  $h$ , изображенную на рис. 6.1-1. На нее действует перпендикулярная ее поверхности нагрузка интенсивности  $q(x,y)$ . Введем правоориентированную систему координат  $XYZ$  так, чтобы плоскость  $XOY$  совпадала со срединной поверхностью. Тогда плоскость  $z = h/2$  будем называть верхней, а  $z = -h/2$  – нижней гранями пластины.

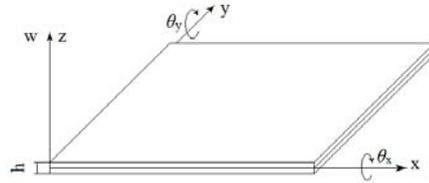


Рис. 6.1-1

Классическая теория Кирхгоффа-Лява основана на следующих гипотезах [22]:

- *прямых нормалей.* Нормаль к срединной поверхности, проведенная в недеформированном состоянии пластины, не искривляется, сохраняет свою длину и остается ортогональной срединной поверхности, в которую переходит срединная плоскость при изгибе пластины;
- *ненадавливания.* Плоскости пластины, параллельные ее срединной плоскости, не взаимодействуют по нормали к ним при деформировании, и можно пренебречь нормальным напряжением сжатия  $\sigma_z$ , которое значительно ниже изгибающих напряжений. Очевидно, что  $\sigma_z$  должна быть равна нормальной нагрузке на гранях пластины;
- *отсутствия поперечных сдвигов.* Деформации  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  настолько малы, что работой касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  можно пренебречь.

Пусть  $\theta_x, \theta_y$  – углы поворота относительно осей  $OX$  и  $OY$  соответственно. Положительное направление для них определено в соответствии с правилом правого винта. Тогда, с учетом, что на срединной поверхности тангенциальные смещения равны нулю:

$$u = z\theta_y, \quad v = -z\theta_x. \quad (6.1.1)$$

Перемещение  $w(x,y)$  является функцией только двух переменных, т.е.  $\varepsilon_z(x,y) \equiv 0$ , и с учетом принятых гипотез:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (6.1.2)$$

Рассмотрим кривизны

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.1.3)$$

Представим деформации (3.1.3) через кривизны:

$$\varepsilon_x = z\chi_x, \quad \varepsilon_y = z\chi_y, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = 2z\chi_{xy}. \quad (6.1.4)$$

Рассмотрим сначала изотропный материал, для которого справедлив закон Гука:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y), \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_y + \nu\chi_x), \quad \tau_{xy} = 2Gz\chi_{xy}. \quad (6.1.5)$$

Напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  считаются малыми, а на наружных поверхностях пластины

$$\sigma_z \Big|_{z=-h/2} = \tau_{xz} \Big|_{z=\pm h/2} = \tau_{yz} \Big|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \sigma_z \Big|_{z=h/2} = q(x,y). \quad (6.1.6)$$

Из уравнений равновесия (3.1.2) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} - \frac{h^3}{12} \right) \Delta^2 w, \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Погонные изгибающие моменты и перерезывающие силы в сечениях пластины определяются как интегральные характеристики напряжений, действующих на полосу единичной ширины:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz, \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Умножив на  $z$  и проинтегрировав два первых уравнений равновесия (3.1.2) по высоте получаем:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (6.1.9)$$

Выразим моменты и перерезывающие силы через перемещение  $w$  для изотропного материала:

$$M_x = D(\chi_x + \nu\chi_y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
M_y &= D(\chi_y + \nu\chi_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
M_{xy} &= D(1-\nu)\chi_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \\
Q_x &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right), \quad Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right),
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Из последнего краевого условия (6.1.6) и (6.1.7) получаем уравнение равновесия, выраженное через перерезывающие силы

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \tag{6.1.11}$$

Приведя все к перемещению  $w$  получаем уравнение Софи Жермен для изотропного материала:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \tag{6.1.12}$$

Введем векторы обобщенных «напряжений» и «деформаций» и дифференциальный оператор геометрии  $A$ :

$$\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad A = \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \right\}^T. \tag{6.1.13}$$

Тогда в матричной форме:

$$\tilde{\sigma} = D\tilde{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon} = Aw. \tag{6.1.14}$$

При этом  $B = A^T$ , а уравнение равновесия имеет вид:

$$B\tilde{\sigma}(x) = q(x). \tag{6.1.15}$$

Соответственно, из (3.1.11) для изотропного, ортотропного и анизотропного материалов матрица закона Гука  $C = [C_{ij}]_{i,j=1}^3$  в (1.3.1):

$$C_I = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad C_O^{-1} = \frac{12}{h^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_A^{-1} = \frac{12}{h^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} \\ \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}. \quad (6.1.16)$$

Уравнение (6.1.11) для вычисления прогибов пластинки при анизотропии материала примет вид:

$$C_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2C_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(C_{12} + 2C_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2C_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + C_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q. \quad (6.1.17)$$

Из (6.1.7) следует, что на поверхностях пластины напряжения равны:

$$\sigma_x \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy} \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}. \quad (6.1.18)$$

### Преобразования систем координат

Рассмотрим на нейтральной плоскости пластины систему прямоугольных координат  $X'Y'$ , полученную поворотом  $XY$  на угол  $\varphi$ . Тогда матрица  $\mathbf{S}$  в преобразовании (2.10.1) имеет вид (4.1.18).

Получаем, после соответствующих преобразований, для деформаций, моментов и перерезывающих сил следующие зависимости:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{S}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{S}_\varepsilon^T \mathbf{M}, \quad \begin{Bmatrix} Q'_x \\ Q'_y \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_\varepsilon \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad (6.1.19)$$

где  $\mathbf{S}_\varepsilon$  – матрица преобразования (4.1.21).

Матрица связи деформаций и напряжений  $\mathbf{C}$  в физических уравнениях (1.3.1) при переходе к новой системе координат преобразуется следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}', \quad \mathbf{C}' = \mathbf{S}_\varepsilon^T \mathbf{C} \mathbf{S}_\varepsilon. \quad (6.1.20)$$

Если материал тела изотропный, то для ортогонального преобразования  $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$ .

### Краевые условия

Рассмотрим точку  $\mathbf{x}$  на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$ . Нормаль к границе области –  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$ . Краевые условия в точке  $\mathbf{x}$  могут быть:

- **кинематическими**, когда заданы значения значения прогиба и/или значение угла поворота вокруг оси, нормальной к контуру. Т.е.

$$w \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = w_\Gamma \quad \text{и/или} \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = \theta_{n,\Gamma}. \quad (6.1.21)$$

Если заданы оба эти условия и  $w_\Gamma = 0$ ,  $\theta_{n,\Gamma} = 0$ , то говорят о *жестком заземлении* пластины на краю;

- **статическими** – равенство в точках границы внешним нагрузкам, действующим по нормали к контуру: момента  $M_n$  и/или перерезывающей силы:

$$M_n|_{x \in \Gamma} = M_{n,\Gamma} \quad \text{и/или} \quad Q_n|_{x \in \Gamma} = Q_{n,\Gamma}. \quad (6.1.22)$$

Если на незакрепленном и ненагруженном крае пластинки отсутствуют внешние силовые факторы, то говорят о *свободном крае*;

- **смешанные**. Если край оболочки не является жестко заземленным или свободным, то граничные условия формулируются исходя из отсутствия на этом участке внешних силовых факторов. Частным случаем смешанных краевых условий является *шарнирное опирание*, когда на контуре задано только нулевое значение прогиба  $w$ .

Не пересекаются участки границы, на которых заданы:

$$w_\Gamma \text{ и } Q_{n,\Gamma}, \quad \theta_{n,\Gamma} \text{ и } M_n.$$

### Температурные воздействия

Если нет возможности свободно изгибаться, то возникают температурные/тепловые напряжения, которые необходимо учесть в физических уравнениях (1.3.1), где при линейном изменении температуры по толщине пластины

$$\varepsilon_{x,t} = \alpha \frac{z}{h} \Delta t, \quad \varepsilon_{y,t} = \alpha \frac{z}{h} \Delta t, \quad \gamma_{xy,t} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}) = \Delta t \frac{z}{h} \{\alpha, \alpha, 0\}^T, \quad (6.1.23)$$

$\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала,

$\Delta t$  – разность температур на верхней и нижних поверхностях плиты.

Подставив (6.1.23) в (1.4.12) и проинтегрировав по  $z$ , получим учет температурных деформаций в потенциальной энергии.

Особенностью температурных воздействий на плиту является то, что температурные тепловые напряжения возникают только в том случае, если  $\Delta t \neq 0$ , и не зависят от значения температуры.

Для ортотропного материала коэффициенты температурного расширения могут быть разными по главным осям инерции:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{x}) = \Delta t \frac{z}{h} \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}^T. \quad (6.1.24)$$

### Главные моменты

Для определения главных площадок рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} (M_x - M_i)l_i + \tau_{xy}m_i = 0 \\ M_{xy}l_i + (M_y - M_i)m_i = 0 \end{cases}, \quad i=1,2, \quad (6.1.25)$$

ненулевое решение которой существует при равенстве нулю определителя:

$$|\mathbf{T}_g - M_i \mathbf{E}| = 0, \quad \mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix}, \quad (6.1.26)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{T}_g$  – тензор моментов.

Уравнение (6.1.26) в общем случае является уравнением второго порядка, его решения  $M_i$ ,  $i=1,2$ ,  $M_1 \geq M_2$  называются главными моментами, а значение

определителя  $T_g$  является инвариантом преобразований систем координат и не зависит от их выбора.

### Главные кривизны

Для определения главных направлений кривизн рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} (\chi_x - \chi_i)l_i + \chi_{xy}m_i = 0 \\ \chi_{xy}l_i + (\chi_y - \chi_i)m_i = 0 \end{cases}, \quad i=1,2, \quad (6.1.27)$$

ненулевое решение которой существует при равенстве нулю ее определителя:

$$|T_\varepsilon - \chi_i E| = 0, \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \chi_x & \chi_{xy} \\ \chi_{xy} & \chi_y \end{bmatrix}, \quad (6.1.28)$$

$T_\varepsilon$  – матрица тензора кривизн.

Уравнение (6.1.28) в общем случае является уравнением второго порядка, его решения  $\chi_i$ ,  $i=1,2$ ,  $\chi_1 \geq \chi_2$  называются главными кривизнами.

### Функционалы

Используя матричную запись (6.1.14), получим для теории изгиба тонких пластин Кирхгоффа-Лява функционалы Лагранжа (1.4.11), Кастельяно (1.4.15), Рейсснера (1.4.16) и смешанный функционал (1.4.17)

Уравнения равновесия рассматриваемых задач имеет вид (6.1.15).

Запишем работу внешних сил для изотропного материала в функционале Лагранжа через функцию перемещений  $w$  без учета температурных воздействий:

$$\mathcal{E}(u) = \frac{D}{2} \iint_{\Omega'} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy, \quad (6.1.29)$$

где  $\Omega'$  – срединная поверхность.

В функционал Лагранжа входят производные второго порядка функции перемещений  $w$  и, следовательно, энергетическое пространство задачи совпадает с пространством Соболева  $W_2^2(\Omega)$ .

## 6.2. Степени свободы и аппроксимации

Для решения задач изгиба плит используются, как правило, конечные элементы, имеющие геометрическую форму треугольника, прямоугольника и произвольного четырехугольника. Простейшие элементы имеют только узлы, совпадающие с вершинами многогранников. В элементах с повышенной аппроксимацией добавляются узлы, лежащие на их сторонах.

Классические конечные элементы в каждом узле имеют по три степени свободы:

$$w_i, \quad \theta_{xi} = \frac{\partial w_i}{\partial y} \Big|_{x_i}, \quad \theta_{yi} = -\frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x_i}, \quad i=1,2,\dots,N_r, \quad (6.2.1)$$

где  $N_r$  – число узлов элемента, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_{N_r}, \theta_{xN_r}, \theta_{yN_r}\}. \quad (6.2.2)$$

Существуют конечные элементы плиты, у которых в узлах на сторонах элемента из трех степеней свободы  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$  только одна степень свободы – угол поворота вокруг нормали к стороне:  $\theta_{ni}$ . В узлах могут быть и другие степени свободы, кроме указанных.

Степеням свободы (6.2.2) соответствует система аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), (i) \in \Omega_r, j = 1, 2, 3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.2.3)$$

Соответственно функции располагаются в порядке (6.2.2):

$$\{\varphi_{1,1}^r, \varphi_{1,2}^r, \varphi_{1,3}^r, \dots, \varphi_{N_r,1}^r, \varphi_{N_r,2}^r, \varphi_{N_r,3}^r\}. \quad (6.2.4)$$

Как правило, построение аппроксимаций происходит в специальных системах координат  $\xi O \eta$ , которая не обязательно ортогональная:

$$\begin{cases} \xi = c_1 x + c_2 y + c_0 \\ \eta = d_1 x + d_2 y + d_3 \end{cases}. \quad (6.2.5)$$

В этом случае рассматривается вспомогательная система функций

$$\{\psi_{ij}^r(x, y), (i) \in \Omega_r, j = 1, 2, 3, \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}, \quad (6.2.6)$$

которая соответствует степеням свободы

$$w_i, \theta_{\eta i} = \frac{\partial w_i}{\partial \eta} \Big|_{x_i}, \theta_{\xi i} = -\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \Big|_{x_i}, i = 1, 2, \dots, N_r. \quad (6.2.7)$$

Аналогично (2.3.2) обозначим операторы степеней свободы (6.2.7) –  $\tilde{L}_{ij}$ .

Функции (6.2.3) выражаются через (6.2.6):

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^r &= \psi_{i1}^r, \\ \varphi_{i2}^r &= \frac{1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} (c_1 \psi_{i2}^r + d_1 \psi_{i3}^r), \\ \varphi_{i3}^r &= \frac{1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} (d_2 \psi_{i3}^r - c_2 \psi_{i2}^r), \quad (i) \in \Omega_r. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Дифференциальное уравнение равновесия (6.1.15) четвертого порядка. Поэтому строятся тождества критерия полноты (2.5.7) порядка  $m$  не ниже 2:

$$\begin{aligned} \sum_{(i) \in \Omega_r} \varphi_{i1}^r &\equiv 1, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i \varphi_{i1}^r - \varphi_{i3}^r) &\equiv x, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} (y_i \varphi_{i1}^r + \varphi_{i2}^r) \equiv y, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i^2 \varphi_{i1}^r - 2x_i \varphi_{i3}^r) &\equiv x^2, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i y_i \varphi_{i1}^r - y_i \varphi_{i3}^r + x_i \varphi_{i2}^r) &\equiv xy, \end{aligned}$$

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} (y_i^2 \varphi_{i1}^r + 2y_i \varphi_{i2}^r) \equiv y^2. \quad (6.2.9)$$

Выполнение первых трех тождеств (6.2.9) соответствует смещению конечного элемента как твердого тела.

Для совместных элементов выполнение тождеств (6.2.9) уже обеспечивает сходимость метода.

Для высокоточных элементов дополнительные тождества критерия полноты (2.5.7) порядка  $m=3$ :

$$\begin{aligned} \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i^3 \varphi_{i1}^r - 3x_i^2 \varphi_{i3}^r) &\equiv x^3, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i^2 y_i \varphi_{i1}^r - 2x_i y_i \varphi_{i3}^r + x_i^2 \varphi_{i2}^r) &\equiv x^2 y, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i y_i^2 \varphi_{i1}^r - y_i^2 \varphi_{i3}^r + 2x_i y_i \varphi_{i2}^r) &\equiv x y^2, \\ \sum_{(i) \in \Omega_r} (y_i^3 \varphi_{i1}^r + 3y_i^2 \varphi_{i2}^r) &\equiv y^3. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Для несовместных элементов для доказательства сходимости проверяем критерий несовместности (2.7.3) или более сложные равенства кусочного тестирования (2.7.1).

Для данной задачи критерий несовместности (2.7.3) принимает вид равенств с учетом линейности преобразования (6.2.5):

$$\begin{aligned} [x^2, \varphi_{ki}^r - \zeta_{ki}^r]_{\Omega_r} &= 0 & [\xi^2, \varphi_{ki}^r - \zeta_{ki}^r]_{\Omega_r} &= 0 \\ [y^2, \varphi_{ki}^r - \zeta_{ki}^r]_{\Omega_r} &= 0, \text{ или } [\eta^2, \varphi_{ki}^r - \zeta_{ki}^r]_{\Omega_r} &= 0, \\ [xy, \varphi_{ki}^r - \zeta_{ki}^r]_{\Omega_r} &= 0 & [\xi\eta, \varphi_{ki}^r - \zeta_{ki}^r]_{\Omega_r} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

где  $\zeta_{ki}^r$  – совместная система функций, соответствующая степеням свободы (6.2.1) и удовлетворяющая критерию полноты порядка  $m=1$ .

### 6.3. Прямоугольные конечные элементы

#### 6.3.1. Элемент Богнера-Фокса-Шмидта

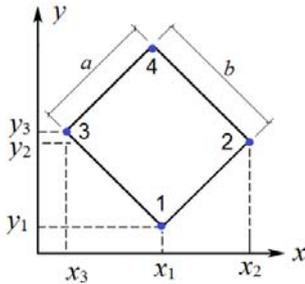


Рис. 6.3-1. Прямоугольный элемент

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент, изображенный на рис. 6.3-1. Преобразованием (6.3.1) он приводится к единичному квадрату:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases} \quad (6.3.1)$$

В каждом узле  $i$  элемента вводятся четыре степени свободы [105]:

$$w_i, \quad \theta_{xi} = \frac{\partial w_i}{\partial y} \Big|_{x_i}, \quad \theta_{yi} = -\frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x_i}, \quad \gamma_i = \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \Big|_{x_i}. \quad (6.3.2)$$

Система аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}, \quad (6.3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^r &= P_1(\xi)P_1(\eta), & \varphi_{12}^r &= bP_1(\xi)P_3(\eta), \\ \varphi_{13}^r &= -aP_3(\xi)P_1(\eta), & \varphi_{13}^r &= abP_3(\xi)P_3(\eta), \\ \varphi_{21}^r &= P_2(\xi)P_1(\eta), & \varphi_{22}^r &= bP_1(\xi)P_4(\eta), \\ \varphi_{23}^r &= -aP_4(\xi)P_1(\eta), & \varphi_{24}^r &= abP_4(\xi)P_3(\eta), \\ \varphi_{31}^r &= P_1(\xi)P_2(\eta), & \varphi_{32}^r &= bP_2(\xi)P_3(\eta), \\ \varphi_{33}^r &= -aP_3(\xi)P_2(\eta), & \varphi_{34}^r &= abP_3(\xi)P_4(\eta), \\ \varphi_{41}^r &= P_2(\xi)P_2(\eta), & \varphi_{42}^r &= bP_2(\xi)P_4(\eta), \\ \varphi_{43}^r &= -aP_4(\xi)P_2(\eta), & \varphi_{44}^r &= abP_4(\xi)P_4(\eta), \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

где  $a=a_{12}$ ,  $b=a_{13}$ ,

$$\begin{aligned} P_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & P_2(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ P_3(\xi) &= \xi(1 - \xi)^2, & P_4(\xi) &= \xi^2(\xi - 1). \end{aligned}$$

Аппроксимации (6.3.4) совместны и удовлетворяют тождествам критерия полноты (6.2.9) и (6.2.10) порядка  $m=3$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^r + \varphi_{21}^r + \varphi_{31}^r + \varphi_{41}^r &\equiv 1 \\ a(\varphi_{21}^r + \varphi_{41}^r) - \varphi_{13}^r - \varphi_{23}^r - \varphi_{33}^r - \varphi_{43}^r &\equiv x \\ b(\varphi_{31}^r + \varphi_{41}^r) + \varphi_{12}^r + \varphi_{22}^r + \varphi_{32}^r + \varphi_{42}^r &\equiv y \\ a^2(\varphi_{21}^r + \varphi_{41}^r) - 2a(\varphi_{23}^r + \varphi_{43}^r) &\equiv x^2, \\ ab\varphi_{41}^r - b(\varphi_{33}^r + \varphi_{43}^r) + a(\varphi_{22}^r + \varphi_{42}^r) + \varphi_{14}^r + \varphi_{24}^r + \varphi_{34}^r + \varphi_{44}^r &\equiv xy, \\ b^2(\varphi_{31}^r + \varphi_{41}^r) + 2b(\varphi_{32}^r + \varphi_{42}^r) &\equiv y^2, \\ a^3(\varphi_{21}^r + \varphi_{41}^r) - 3a^2(\varphi_{23}^r + \varphi_{43}^r) &\equiv x^3, \\ a^2b\varphi_{41}^r - 2ab\varphi_{43}^r + a^2(\varphi_{22}^r + \varphi_{42}^r) + 2a(\varphi_{24}^r + \varphi_{44}^r) &\equiv x^2y, \\ ab^2\varphi_{41}^r - b^2(\varphi_{33}^r + \varphi_{43}^r) + ab\varphi_{42}^r + b(\varphi_{34}^r + \varphi_{44}^r) &\equiv xy^2, \\ b^3(\varphi_{31}^r + \varphi_{41}^r) + 3b^2(\varphi_{32}^r + \varphi_{42}^r) &\equiv y^3. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

### 6.3.2. Элемент Клафа

В каждом узле элемента на рис. 6.3-1 рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i$ ,  $\theta_{xi}$ ,  $\theta_{yi}$ , которым соответствует система аппроксимирующих функций [97]:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i=1,2,3,4, j=1,2,3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.3.6)$$

Перемещения  $w$  упругой поверхности пластины аппроксимируются неполным полиномом четвертой степени:

$$w(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + C_7x^3 + C_8x^2y + C_9xy^2 + C_{10}y^3 + C_{11}x^3y + C_{12}xy^3. \quad (6.3.7)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^r(x, y) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3, \\ \varphi_{12}^r(x, y) &= b(1 - \xi)(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), \\ \varphi_{13}^r(x, y) &= -a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(1 - \eta), \\ \varphi_{21}^r(x, y) &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3, \\ \varphi_{22}^r(x, y) &= b\xi(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), \\ \varphi_{23}^r(x, y) &= a(\xi^2 - \xi^3)(1 - \eta), \\ \varphi_{31}^r(x, y) &= 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3, \\ \varphi_{32}^r(x, y) &= b(1 - \xi)(-\eta^2 + \eta^3), \\ \varphi_{33}^r(x, y) &= -a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\eta, \\ \varphi_{41}^r(x, y) &= -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3, \\ \varphi_{42}^r(x, y) &= b(-\eta^2 + \eta^3)\xi, \\ \varphi_{43}^r(x, y) &= a(\xi^2 - \xi^3)\eta. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Подставим (6.3.8) в (6.3.5), считая что  $\varphi_{i4} = 0$ ,  $i=1,2,3,4$ , и проверяем выполнение критерия полноты порядка  $m=3$ .

Функции системы (6.3.8) несовместны. При стыковке элементов они непрерывны, но на границах элементов нормальные производные имеют разрывы.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что система функций (6.3.8) удовлетворяет критерию несовместности (2.7.3) в виде уравнений (6.2.11). В качестве совместной системы функций в (6.2.11) воспользуемся функциями (6.3.4) без функций  $\varphi_{i4}^r$ , которые не входят в первые три уравнения критерия полноты (6.3.5). Следовательно, по теореме 2.7.1 аппроксимации (6.3.8) обеспечивают сходимость метода.

### 6.3.3. Полусовместный элемент

В каждом узле элемента на рис. 6.3-1 рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i$ ,  $\theta_{xi}$ ,  $\theta_{yi}$  и, соответственно, имеем систему аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i=1,2,3,4, j=1,2,3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.3.9)$$

При этом будем считать [32, 36], что  $\varphi_{i1}^r = \psi_{i1}^r, i=1,2,3,4$ , где  $\psi_{i1}^r$  – совместные функции системы (6.3.4)<sup>1</sup>. Т.к. эти функции удовлетворяют первому уравнению критерия полноты (6.3.5), то для определения оставшихся девяти функций, соответствующих углам поворота, получаем систему девяти тождеств. Ее решение:

$$\begin{aligned} \varphi_{12}^r(x, y) &= \psi_{12}(x, y) + b\zeta(x, y), \\ \varphi_{13}^r(x, y) &= \psi_{13}(x, y) - a\zeta(x, y), \\ \varphi_{22}^r(x, y) &= \psi_{22}(x, y) - b\zeta(x, y), \\ \varphi_{23}^r(x, y) &= \psi_{23}(x, y) - a\zeta(x, y), \\ \varphi_{32}^r(x, y) &= \psi_{32}(x, y) + b\zeta(x, y), \\ \varphi_{33}^r(x, y) &= \psi_{33}(x, y) + a\zeta(x, y), \\ \varphi_{42}^r(x, y) &= \psi_{42}(x, y) - b\zeta(x, y), \\ \varphi_{43}^r(x, y) &= \psi_{43}(x, y) + a\zeta(x, y). \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

где  $\psi_{ij}, i=1,2,3,4, j=2,3$  – функции системы (6.3.4),

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{4}(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3)(\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3). \quad (6.3.11)$$

Т.к. функции (6.3.10) удовлетворяют тождествам критерия полноты порядка  $m=3$  по построению, а функция  $\zeta(x, y)$  удовлетворяет уравнениям критерия несовместности (6.2.11), то по теореме 2.7.1 обеспечена сходимость метода.

#### 6.4. Несовместный треугольный элемент с 9-ю степенями свободы

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис 6.4-1.

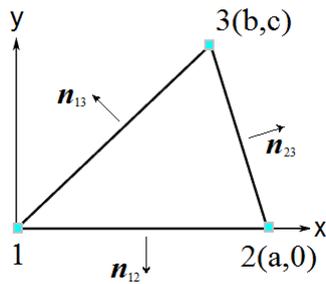


Рис. 6.4-1. Треугольный элемент

<sup>1</sup> В [35] построен также элемент, у которого  $\varphi_{ij}^r = \psi_{ij}^r, i=1,2,3,4, j=2,3$ , где  $\psi_{ij}^r$  – функции системы (6.3.4), а функции  $\varphi_{i1}^r, i=1,2,3,4$  являются решениями тождеств критерия полноты порядка  $m=2$ .

Заменой координат (6.4.1) он преобразуется к прямоугольному треугольнику с единичными катетами:

$$\xi = \frac{1}{a}(x - \frac{b}{c}y), \quad \eta = \frac{y}{c}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{b}{ac} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (6.4.1)$$

$a_{ij}$  – длины соответствующих сторон,  $\eta$

$$\mathbf{n}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{13} = \frac{1}{a_{13}} \begin{Bmatrix} -c \\ b \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{23} = \frac{1}{a_{23}} \begin{Bmatrix} c \\ a-b \end{Bmatrix}.$$

В каждом узле элемента рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$  и, соответственно, система аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3, \quad \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.4.2)$$

Функции (6.4.2) определим на множестве полиномов четвертой степени.

Построим вспомогательную систему функций

$$\{\psi_{ij}^r(x, y), \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3, \quad \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}, \quad (6.4.3)$$

соответствующую степеням свободы (6.2.7)  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ .

Из (6.4.1) и (6.2.8):

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^r(x, y) &= \psi_{i1}^r(x, y), \\ \varphi_{i2}^r(x, y) &= c\psi_{i2}^r(x, y), \quad , \quad i=1,2,3. \\ \varphi_{i3}^r(x, y) &= a\psi_{i3}^r(x, y) - b\psi_{i2}^r(x, y) \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Запишем тождества критерия полноты (6.2.8) порядка  $m=2$  для системы функций (6.4.3):

$$\begin{aligned} \psi_{11}^r + \psi_{21}^r + \psi_{31}^r &\equiv 1, \\ \psi_{21}^r - \psi_{13}^r - \psi_{23}^r - \psi_{33}^r &\equiv \xi, \\ \psi_{31}^r + \psi_{12}^r + \psi_{22}^r + \psi_{32}^r &\equiv \eta, \\ \psi_{21}^r - 2\psi_{23}^r &\equiv \xi^2, \\ -\psi_{33}^r + \psi_{22}^r &\equiv \xi\eta, \\ \psi_{31}^r + 2\psi_{32}^r &\equiv \eta^2 \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Представим функции системы (6.4.3) в следующем виде:

$$\psi_{ij}^r(x, y) = \lambda_{ij}^r(x, y) + \sum_{k=1}^3 p_{ij}^k \mu_k, \quad (6.4.6)$$

где  $\lambda_{ij}^r$  – полиномы третьей степени, удовлетворяющие условиям (2.1.7)<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Возможно и другое задание функций  $\lambda_{ij}^r$  в силу того, что  $\mathbf{L}_{ij}\zeta = 0, i, j=1,2,3$ .

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^r &= 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3, \\
\lambda_{21}^r &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\
\lambda_{31}^r &= 3\eta^2 - 2\eta^3, \\
\lambda_{12}^r &= \eta(1-\eta)^2 - \xi^2\eta - 0.5\zeta, \\
\lambda_{22}^r &= \xi^2\eta + 0.5\zeta, \\
\lambda_{32}^r &= -\eta^2 + \eta^3, \\
\lambda_{13}^r &= -\xi(1-\xi)^2 + 3\xi\eta^2 + 0.5\zeta, \\
\lambda_{23}^r &= \xi^2 - \xi^3, \\
\lambda_{33}^r &= -\xi\eta^2 - 0.5\zeta, \\
\zeta &= \xi\eta(1-\xi-\eta).
\end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Функции (6.4.7) несовместны: при стыковке элементов непрерывны, но имеют разрывы нормальных производных. Для определения коэффициентов  $p_{ij}^k$  в (6.4.6) воспользуемся теперь критерием несовместности (6.2.11), взяв в качестве совместной системы соответствующие функции конечного элемента Купера, приведенные в разд. 6.4.4.

Система уравнений критерия несовместности (6.2.11) эквивалентна девяти уравнениям:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\varphi_{ij} - \psi_{ij}) d\xi d\eta \\ \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\varphi_{ij} - \psi_{ij}) d\xi d\eta \\ \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (\varphi_{ij} - \psi_{ij}) d\xi d\eta \end{cases}, \quad i, j=1,2,3. \tag{6.4.8}$$

Решив системы уравнений (6.4.8) получим [32]:

$$\begin{aligned}
\psi_{11}^r &= 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 6(1-\gamma_1-\gamma_2)\mu_1 - 12(1-\gamma_2)\mu_2 - 12(1-\gamma_1)\mu_3, \\
\psi_{12}^r &= \eta(1-\eta)^2 - \xi^2\eta + (1-3\gamma_2)\mu_1 - (4-6\gamma_2)\mu_2 - 2\mu_3, \\
\psi_{13}^r &= -\xi(1-\xi)^2 + \xi\eta^2 - (1-3\gamma_1)\mu_1 + 2\mu_2 + (4-6\gamma_1)\mu_3, \\
\psi_{21}^r &= 3\xi^2 - 2\xi^3 + 12(1-\gamma_3)\mu_2 + (1-\gamma_1-\gamma_3)(12\mu_3 - 6\mu_1), \\
\psi_{22}^r &= \xi^2\eta - (1-3\gamma_3)\mu_1 + (4-6\gamma_3)\mu_2 + (2-6\gamma_3)\mu_3, \\
\psi_{23}^r &= \xi^2 - \xi^3 + 6(1-\gamma_3)\mu_2 + (1-\gamma_1-\gamma_3)(6\mu_3 - 3\mu_1), \\
\psi_{31}^r &= 3\eta^2 - 2\eta^3 + 12\gamma_3\mu_3 + (\gamma_2-\gamma_3)(6\mu_1 - 12\mu_2), \\
\psi_{32}^r &= -\eta^2 + \eta^3 - 6\gamma_3\mu_3 - (\gamma_2-\gamma_3)(3\mu_1 - 6\mu_2), \\
\psi_{33}^r &= -\xi\eta^2 + (3\gamma_3-2)(\mu_1 - 2\mu_2) + (2-6\gamma_3)\mu_3.
\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

где  $\mu_1 = \zeta$ ,  $\mu_2 = \xi\mu_1$ ,  $\mu_3 = \eta\mu_1$ ,  $\gamma_1 = \frac{b}{a}$ ,  $\gamma_2 = \frac{ab}{b^2+c^2}$ ,  $\gamma_3 = \frac{(a-b)a}{c^2+(a-b)^2}$ .

Полученные аппроксимации (6.4.9) обеспечивают сходимость метода, т.к. удовлетворяют критериям полноты (6.2.8) и несовместности (6.2.11) порядка  $m=2$  по построению. При этом они сохраняют симметрию расчетной схемы.

## 6.5. Совместные треугольные элементы

### 6.5.1. Треугольный элемент Клафа-Точера с 9-ю степенями свободы (PLSA3)

В работе [110] были построены методом подобластей<sup>1</sup> совместные треугольные конечные элементы плиты с 9-ю и 12-ю степенями свободы.

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 6.5-1а в местной системе координат. Заменой координат (2.12.1) он преобразуется к треугольнику, изображенному на рис. 6.5-1б [37].

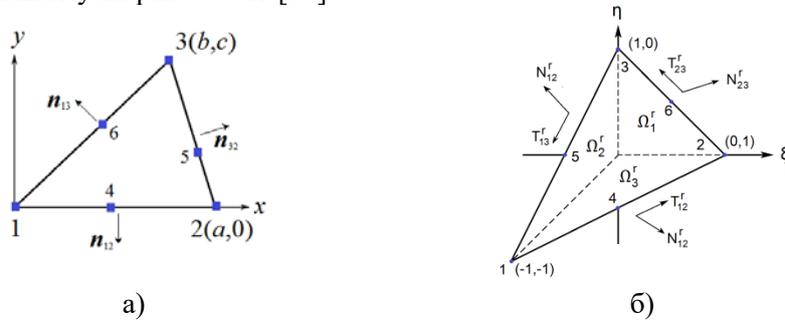


Рис. 6.5-1. Треугольный элемент

Нормали к сторонам:

$$\mathbf{n}_{12} = \begin{Bmatrix} n_{x,12} \\ n_{y,12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{23} = \begin{Bmatrix} n_{x,23} \\ n_{y,23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{23}} \begin{Bmatrix} c \\ a-b \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{13} = \begin{Bmatrix} n_{x,13} \\ n_{y,13} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{13}} \begin{Bmatrix} -c \\ b \end{Bmatrix}. \quad (6.5.1)$$

В каждом узле в вершинах треугольника рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i$ ,  $\theta_{xi}$ ,  $\theta_{yi}$ , которым соответствует система функций

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i=1,2,3, j=1,2,3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.5.2)$$

Разобьем треугольник медианами на три треугольника, на каждом из которых будем использовать полиномы третьей степени. Так как двумерный полином третьей степени имеет 10 одночленов, то 30 коэффициентов однозначно определяются из:

- из условий МКЭ (2.1.7):  $\mathbf{L}_{ij} \varphi_{km}^r = \delta_{ij}^{km}$ ;
- условий совместности на границах подобластей;
- нормальная производная на сторонах элемента – полином первой степени.

<sup>1</sup> См. разд.2.12.

Построим вспомогательную систему функций, соответствующую степеням свободы узла (6.2.7):

$$\left\{ \psi_{ij}^r(\xi, \eta), i=1,2,3, j=1,2,3, \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega) \right\}. \quad (6.5.3)$$

В соответствии с (2.12.9) функции системы (6.5.3) будем искать в следующем виде:

$$\psi_{ij}^r(\xi, \eta) = \mu_{ij}(\xi, \eta) + \lambda_{ij}(\xi, \eta), \quad (6.5.4)$$

где функции  $\mu_{ij}$  удовлетворяют условиям МКЭ  $\tilde{L}_{ij}\mu_{km}^r = \delta_{ij}^{km}$ :

$$\mu_{ij}(\xi, \eta) = \zeta_{ij}(\xi, \eta) + a_{ij}\chi_1(\xi, \eta) + b_{ij}\chi_2(\xi, \eta) + c_{ij}\chi_3(\xi, \eta). \quad (6.5.5)$$

Функции  $\zeta_{ij}$  удовлетворяют условиям МКЭ  $\tilde{L}_{ij}\zeta_{km} = \delta_{ij}^{km}$  и равны:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 3\xi^2 + 2\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 3\eta^2 + 2\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}, & \zeta_{12} &= \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 3\xi^2(1+\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ \eta^2(1+\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \zeta_{13} &= \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -\xi^2(1+\xi), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ -\eta^2(1+\xi), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}, & \zeta_{21} &= \begin{cases} 3\xi^2 - 2\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 3(\xi-\eta)^2 - 2(\xi-\eta)^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \zeta_{22} &= \begin{cases} 3\xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (\xi-\eta)^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}, & \zeta_{23} &= \begin{cases} \xi^2 - \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (\xi-\eta)^2(1-\xi), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \zeta_{31} &= \begin{cases} 3\eta^2 - 2\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 3(\xi-\eta)^2 + 2(\xi-\eta)^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}, & \zeta_{32} &= \begin{cases} \eta^3 - \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (\xi-\eta)^2(\eta-1), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \zeta_{33} &= \begin{cases} -\xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ -\xi(\xi-\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

Функции  $\chi_i, i=1,2,3$ :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{n_{\xi 1} + n_{\eta 1}} \begin{cases} \xi\eta(1-\xi-\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_1^r \end{cases}, \\ \chi_2 &= \frac{1}{n_{\xi 2} - 2n_{\eta 2}} \begin{cases} \xi(\eta-\xi)(1+2\xi-\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_2^r \end{cases}, \\ \chi_3 &= \frac{1}{2n_{\xi 3} - n_{\eta 3}} \begin{cases} \eta(\xi-\eta)(1-\xi+2\eta) & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_3^r \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= \zeta_{11} - 6n_{\xi 2} \chi_2 - 6n_{\eta 3} \chi_3, \\
\mu_{12} &= \zeta_{12} - (4n_{\xi 2} + n_{\eta 2}) \chi_2 - 3n_{\eta 3} \chi_3, \\
\mu_{13} &= \zeta_{13} + 3n_{\xi 2} \chi_2 + (n_{\xi 3} + 4n_{\eta 3}) \chi_3, \\
\mu_{21} &= \zeta_{21} + 6n_{\xi 1} \chi_1 + 6(n_{\xi 3} - n_{\eta 3}) \chi_3, \\
\mu_{22} &= \zeta_{22} + (2n_{\xi 1} - n_{\eta 1}) \chi_1 - (2n_{\xi 3} - n_{\eta 3}) \chi_3, \\
\mu_{23} &= \zeta_{23} + 3n_{\xi 1} \chi_1 + (5n_{\xi 3} - 4n_{\eta 3}) \chi_3, \\
\mu_{31} &= \zeta_{31} + 6n_{\eta 1} \chi_1 - 6(n_{\xi 2} - n_{\eta 2}) \chi_2, \\
\mu_{32} &= \zeta_{32} - 3n_{\eta 1} \chi_1 + (4n_{\xi 2} - 5n_{\eta 2}) \chi_2, \\
\mu_{33} &= \zeta_{33} + (n_{\xi 1} - 2n_{\eta 1}) \chi_1 - (n_{\xi 2} - 2n_{\eta 2}) \chi_2.
\end{aligned} \tag{6.5.8}$$

$$\begin{aligned}
n_{\xi 1} &= \frac{1}{a_{23}} \left( \frac{2c}{a} + \frac{(a-b)(a-2b)}{ac} \right), & n_{\eta 1} &= \frac{1}{a_{23}} \left( \frac{c}{a} + \frac{(a-b)(2a-b)}{ac} \right), \\
n_{\xi 2} &= \frac{1}{a_{13}} \left( -\frac{2c}{a} + \frac{b(a-2b)}{ac} \right), & n_{\eta 2} &= \frac{1}{a_{13}} \left( -\frac{c}{a} + \frac{b(2a-b)}{ac} \right), \\
n_{\xi 3} &= -\frac{a-2b}{ac}, & n_{\eta 3} &= -\frac{2a-b}{ac}.
\end{aligned} \tag{6.5.9}$$

Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  в (6.5.8) найдены из условия линейности нормальной производной на сторонах треугольника.

В представлении (2.12.10) функций  $\lambda_{ij}$  ограничимся полиномами третьей степени:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)^2 (C_{ij}^{11} + C_{ij}^{12} \xi + C_{ij}^{13} \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1 + 2\xi - \eta)^2 (C_{ij}^{21} + C_{ij}^{22} \xi + C_{ij}^{23} \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1 - \xi + 2\eta)^2 (C_{ij}^{31} + C_{ij}^{32} \xi + C_{ij}^{33} \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}. \tag{6.5.10}$$

Коэффициенты  $C_{ij}^{kl}$  в (6.5.10) определим из условий равенства в точке  $A$ , центре пересечения медиан, следующих величин:

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r}, \\
\frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r}, \\
\frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r}, \\
\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r}.
\end{aligned} \tag{6.5.11}$$

Условия (6.5.11) обеспечивают непрерывность функций (6.5.3) и их первых производных по всей области элемента. При этом сохраняется симметрия расчетных схем.

Из условий (6.5.11) получаем системы девяти уравнений для определения коэффициентов  $C_{ij}^{kl}$ ,  $i, j=1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} C_{ij}^{11} &= C_{ij}^{21} = C_{ij}^{31}, \\ -2C_{ij}^{11} + C_{ij}^{12} &= 4C_{ij}^{21} + C_{ij}^{22} = -2C_{ij}^{31} + C_{ij}^{32}, \\ -2C_{ij}^{11} + C_{ij}^{13} &= -2C_{ij}^{21} + C_{ij}^{23} = 4C_{ij}^{31} + C_{ij}^{33}, \\ 2C_{ij}^{11} - 2C_{ij}^{12} - 2C_{ij}^{13} + \gamma_{ij}^1 &= -4C_{ij}^{21} - 2C_{ij}^{22} + 4C_{ij}^{23} + \gamma_{ij}^2 = -4C_{ij}^{31} + 4C_{ij}^{32} - 2C_{ij}^{23} + \gamma_{ij}^3, \\ 6C_{ij}^{21} + 8C_{ij}^{22} + 4C_{ij}^{23} + \rho_{ij}^2 &= -6C_{ij}^{31} - 4C_{ij}^{32} - 8C_{ij}^{33} + \rho_{ij}^3, \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

где  $\gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \mu_{ij}^r \Big|_{x_A \in \Omega_k^r}$ ,  $\rho_{ij}^k = \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \mu_{ij}^r \Big|_{x_A \in \Omega_k^r}$ ,  $k=1, 2, 3$ .

Решение системы уравнений (6.5.12):

$$\begin{aligned} C_{ij}^{11} &= C_{ij}^{21} = C_{ij}^{31} = -\frac{1}{54} \left( \gamma_{ij}^2 + \gamma_{ij}^3 - 2\gamma_{ij}^1 + 0.5(\rho_{ij}^3 - \rho_{ij}^2) \right), \\ C_{ij}^{12} &= C_{ij}^{32} = -C_{ij}^{11} - \frac{1}{6} \gamma_{ij}^3, \quad C_{ij}^{22} = C_{ij}^{12} - 6C_{ij}^{11}, \\ C_{ij}^{13} &= C_{ij}^{23} = -C_{ij}^{11} - \frac{1}{6} \gamma_{ij}^2, \quad C_{ij}^{33} = C_{ij}^{13} - 6C_{ij}^{11}. \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

Построенная система функций (6.5.3) удовлетворяет критерию полноты (6.2.8) порядка  $m=2$ , тождества которого для рассматриваемой системы координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{11}^r + \psi_{21}^r + \psi_{31}^r &\equiv 1, \\ -\psi_{11}^r + \psi_{21}^r - \psi_{13}^r - \psi_{23}^r - \psi_{33}^r &\equiv \xi, \\ -\psi_{11}^r + \psi_{31}^r + \psi_{12}^r + \psi_{22}^r + \psi_{32}^r &\equiv \eta, \\ \psi_{11}^r + \psi_{21}^r - 2\psi_{23}^r &\equiv \xi^2, \\ \psi_{11}^r - \psi_{33}^r + \psi_{22}^r &\equiv \xi\eta, \\ \psi_{11}^r + \psi_{31}^r + 2\psi_{32}^r &\equiv \eta^2. \end{aligned} \quad (6.5.14)$$

Для преобразования (6.4.1):

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^r &= \psi_{i1}^r, \\ \varphi_{i2}^r &= \frac{1}{3} (2\psi_{i2}^r + \psi_{i3}^r), \\ \varphi_{i3}^r &= \frac{1}{3} ((2a-b)\psi_{i3}^r - (a-2b)\psi_{i2}^r), \quad i=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

Система функций (6.5.3) совместна и удовлетворяет критерию полноты порядка  $m=2$  по построению.

### 6.5.2. Элемент Клафа-Точера с 12-ю степенями свободы (SA)

Рассмотрим теперь треугольный элемент, у которого на каждой из сторон находится по одной дополнительной точке, в которой определена только одна степень свободы – значение нормальной производной.

Условие линейности нормальной производной теперь является лишним, ибо уже будет обеспечена непрерывность нормальной производной при стыковке элементов.

Строим систему функций

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i=1,2,3, j=1,2,3, i=4,5,6, j=1, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.5.16)$$

Функции, соответствующие нормальным производным на сторонах:

$$\varphi_{i1}^r(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi_i \eta_i} \chi_i, i=4,5,6, \quad (6.5.17)$$

$\chi_i$  – функции (6.5.7),  $\{\xi_i, \eta_i\}^T$  – координаты узла на стороне.

$$\varphi_{ij}^r(\xi, \eta) = \Phi_{ij}^r(\xi, \eta) - \sum_{k=4}^6 \varphi_{k1}^r(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \Phi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}, i=1,2,3, j=1,2,3. \quad (6.5.18)$$

$\Phi_{ij}^r$  – функции (6.5.3) элемента с 9-ю степенями свободы.

Построенная система функций совместна и удовлетворяет критерию полноты порядка  $m=3$  в силу того, что в аппроксимации перемещений используется полный полином 3-й степени.

### 6.5.3. Еще один метод построения системы аппроксимирующих функций Клафа-Точера

Найдем все кусочные полиномы третьего порядка, непрерывные вместе со своими первыми производными по всей области элемента. Кроме десяти полиномов второй степени, определенных на всей области элемента, существует еще два кусочных полинома, удовлетворяющих заданным условиям:

$$P_{11} = \begin{cases} \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^f \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^f \\ \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^f \end{cases} \quad (6.5.19)$$

$$P_{12} = \begin{cases} \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^f \\ 2\xi^3 - 3\xi^2\eta + \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^f \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^f \end{cases}$$

Соответственно, имеем 12 уравнений для определения аппроксимаций как для элемента с 9-ю степенями свободы, так и для элемента с 12-ю степенями свободы.

### 6.5.4. Шестиузловой треугольный элемент с 18-ю степенями свободы (PLSA6)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис 6.5-1а. Заменой координат (2.12.4) он преобразуется к треугольнику, изображенному на рис. 6.5-1б.

В каждом узле в вершинах треугольника рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ , которым соответствует система функций [37]:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i = 1 \div 6, j = 1, 2, 3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.5.20)$$

Построим вспомогательную систему функций:

$$\{\psi_{ij}^r(x, y), i = 1 \div 6, j = 1, 2, 3, \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}, \quad (6.5.21)$$

считая, что в вершинах треугольника определены степени свободы (6.2.7), а в узлах на сторонах элемента при  $i=4,5,6$ :

$$w_i, \theta_{ni} = \frac{\partial w_i}{\partial n} \Big|_{x_i}, \theta_{\tau i} = -\frac{\partial w_i}{\partial \tau} \Big|_{x_i}. \quad (6.5.22)$$

Функции, соответствующие значению  $w$  и нормальной производной на сторонах элемента, в (6.5.21) будем искать в следующем виде:

$$\psi_{ij}^r(x, y) = \chi_i(C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \xi + C_{ij}^3 \eta) + \gamma_i(C_{ij}^4 \xi + C_{ij}^5 \eta), i=4,5,6, j=1,3, \quad (6.5.23)$$

$$\chi_1 = \begin{cases} \xi^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_1^r \end{cases}$$

$$\chi_2 = \begin{cases} (\xi - \eta)^2 \xi^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_2^r \end{cases}$$

$$\chi_3 = \begin{cases} (\xi - \eta)^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_3^r \end{cases}$$

Функции  $\gamma_i$  определены на всем элементе:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 + 2\xi - \eta)^2 (1 - \xi + 2\eta)^2, \\ \gamma_2 &= (1 - \xi - \eta)^2 (1 - \xi + 2\eta)^2, \\ \gamma_3 &= (1 - \xi - \eta)^2 (1 + 2\xi - \eta)^2. \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

Два уравнения для определения констант  $C_{ij}^k$ ,  $k=1 \div 5$  в (6.5.23) для каждой функции получаем из условий:

$$\tilde{L}_{ik} \psi_{ij}^r = \delta_j^k, i=4,5,6, j,k=1,3. \quad (6.5.25)$$

Еще три уравнения получим из условия, что нормальная производная этих функций на сторонах элемента тождественно равна нулю<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi_{ij}^r \Big|_{\Gamma} \equiv 0, i=4,5,6, j=1,3. \quad (6.5.26)$$

Построим систему аппроксимирующих функций элемента Клафа-Точера с 12-ю степенями свободы:

$$\{\lambda_{ij}^r(x, y), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, i = 4, 5, 6, j = 1, \lambda_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.5.27)$$

Т.к. уже определены  $\psi_{i1}^r, \psi_{i3}^r$ , то:

<sup>1</sup> Данное условие эквивалентно равенству нулю нормальной производной в трех произвольных точках на соответствующей стороне элемента, т.к. используются полиномы пятой степени. Получаем, что нормальная производная на сторонах является полиномом степени не выше второй.

$$\psi_{ij}^r = \lambda_{ij} - \sum_{k=4}^6 \left( \lambda_{ij}^r(\mathbf{x}_k) \psi_{k1}^r + \psi_{k3}^r \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_{ij} \Big|_{\mathbf{x}_k} \right), \quad (6.5.28)$$

$i, j=1, 2, 3, , i=4, 5, 6, j=2.$

Преобразуем теперь систему функций (6.5.21) в (6.5.20). Для функций, соответствующих степеням свободы в узлах элемента, действует преобразование (6.5.15). Для функций, соответствующих степеням свободы на сторонах элемента:

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^r &= \psi_{i1}^r, \\ \varphi_{i2}^r &= n_{xi} \psi_{i2}^r + n_{yi} \psi_{i3}^r, \quad , i=4, 5, 6. \\ \varphi_{i3}^r &= -n_{yi} \psi_{i2}^r + n_{xi} \psi_{i3}^r. \end{aligned} \quad (6.5.29)$$

Полученная система функций (6.5.20) совместна, как и элемент с 12-ю степенями свободы, и удовлетворяет критерию полноты порядка  $m=3$ . Т.е. обеспечивается сходимость метода.

Для повышения точности вычислений рассмотрим 9 дополнительных функций, являющихся кусочными полиномами 5-го порядка, у которых все рассматриваемые степени свободы узлов равны нулю:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \chi \begin{cases} 1 - \xi^3 - \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 - 6\xi + 21\xi^2 - 6\xi\eta + 29\xi^3 - 6\xi\eta^2 - \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r, \\ 1 - 6\eta - 6\xi\eta + 21\eta^2 - \xi^3 - 6\xi^2\eta + 228\xi\eta^2 - 199\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \mu_2 &= \chi \begin{cases} \xi - \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \xi - 6\xi^2 - 7\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r, \\ \xi - 6\xi\eta - \xi^3 - 6\xi^2\eta - 48\xi\eta^2 + 48\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \mu_3 &= \chi \begin{cases} \xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r, \\ \eta(\xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \mu_4 &= \chi \begin{cases} \xi\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \xi\eta + \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r, \\ \xi\eta + 9\xi\eta^2 - 8\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \mu_5 &= \chi \begin{cases} \eta^2 - \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \eta^2 + 8\xi^3 - \eta^3 - 6\xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r, \\ \eta^2 + 24\xi\eta^2 - 23\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \\ \mu_6 &= \chi \begin{cases} \eta - \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \eta - 6\xi\eta - 6\eta^3 - 6\xi\eta^2 - \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r, \\ \eta - 6\eta^2 - 7\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_7 &= \chi \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^f \\ \xi^2(\xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^f, \\ \eta^2(\xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^f \end{cases} \\
\mu_8 &= \chi \begin{cases} \xi^2 - \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^f \\ \xi^2 + \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^f, \\ \xi^2 - \xi^3 - 6\xi^2\eta + 24\xi\eta^2 - 16\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^f \end{cases} \\
\mu_9 &= \chi \begin{cases} \xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^f \\ \xi(\xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^f. \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^f \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.5.30}$$

Допустимы два варианта использования функций (6.5.30):

### Вариант А

Корректируем систему функций (6.5.20):

$$\widehat{\varphi}_{ij}^f(x, y) = \varphi_{ij}^f(x, y) - \sum_{k=1}^9 C_{ij}^k \mu_k, \tag{6.5.31}$$

где величины  $C_{ij}^k$  находим из 9-ти уравнений – условий равенства следующих величин:

$$\begin{aligned}
Y_k(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^f} &= Y_k(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^f} = Y_k(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^f}, \quad k=0,1,2, \\
Y_3(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^f} &= Y_3(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^f}, \\
Y_4(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^f} &= Y_4(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^f}, \\
Y_5(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^f} &= Y_5(\widehat{\varphi}_{ij}^f) \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^f}.
\end{aligned} \tag{6.5.32}$$

$Y_k$ – операторы:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad Y_1 = \frac{\partial}{\partial \xi} Y_0, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial \xi} Y_0, \\
Y_3 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) Y_0, \quad Y_4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) Y_0, \\
Y_5 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) Y_0.
\end{aligned} \tag{6.5.33}$$

Условия (6.5.33) обеспечивают непрерывность вторых и третьих производных в точке А, что существенно упрощает вычисление моментов и перерезывающих сил в ней. Также сохраняется симметрия расчетных схем.

Функции (6.5.30) можно переопределить таким образом, чтобы матрица соответствующих уравнений (6.5.32) была диагональной.

**Вариант В**

Поставить в соответствие функциям (6.5.30) некоторые внутренние степени свободы с последующей их конденсацией.

**6.5.5. Трехузловой элемент Купера с 18-ю степенями свободы**

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 6.5-1. Заменой координат (6.4.1) он преобразуется к прямоугольному треугольнику с единичными катетами. В каждом узле элемента определим по 6 степеней свободы:

$$q_k = \left\{ w_i, \frac{\partial w_i}{\partial y} \Big|_{x_i}, -\frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x_i}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \Big|_{x_i}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \Big|_{x_i}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \Big|_{x_i} \right\}, \quad k=1,2,3. \quad (6.5.34)$$

Система функций, соответствующая степеням свободы (6.5.1):

$$\left\{ \varphi_{ij}^r(x, y), \quad i=1,2,3, \quad j=1 \div 6, \quad \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega) \right\}. \quad (6.5.35)$$

Будем считать, что в узлах определены степени свободы узла в специальной системе координат  $\xi\eta$ :

$$\hat{q}_k = \left\{ w_i, \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \Big|_{x_i}, \frac{\partial w_i}{\partial \eta} \Big|_{x_i}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi^2} \Big|_{x_i}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{x_i}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2} \Big|_{x_i} \right\}, \quad k=1,2,3, \quad (6.5.36)$$

которым соответствует система функций

$$\left\{ \psi_{ij}^r(x, y), \quad i=1,2,3, \quad j=1 \div 6, \quad \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega) \right\}. \quad (6.5.37)$$

Упругую поверхность пластины аппроксимируем полиномом 5-й степени:

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = & C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi^2 + C_5\xi\eta + C_6\eta^2 + C_7\xi^3 + C_8\xi^2\eta + \\ & C_9\xi\eta^2 + C_{10}\eta^3 + C_{11}\xi^4 + C_{12}\xi^3\eta + C_{13}\xi^2\eta^2 + C_{14}\xi\eta^3 + C_{15}\eta^4 + \\ & C_{16}\xi^5 + C_{17}\xi^4\eta + C_{18}\xi^3\eta^2 + C_{19}\xi^2\eta^3 + C_{20}\xi\eta^4 + C_{21}\eta^5. \end{aligned} \quad (6.5.38)$$

Имеем 21 коэффициент, которые находим из:

- 18-ти уравнений  $\tilde{L}_{km}\phi_{ij}^{km} = \delta_{ij}^{km}$ ,  $i=1,2,3$ ,  $j=1 \div 6$ ;
- трех дополнительных уравнений: нормальная производная на сторонах элемента является полиномом третьей степени.

Данные условия гарантируют совместность элементов при их стыковке.

Получаем функции (6.5.37):

$$\begin{aligned} \psi_{11}^r &= 1 - \psi_{21}^r - \psi_{31}^r, \\ \psi_{12}^r &= \xi - 6\xi^3 + 8\xi^4 - 3\xi^5 - \xi\eta^3(4-3\eta) + 15n_{12,\xi}\mu_1 - 3n_{13,\xi}\mu_2 + 12(n_{23,\xi} + n_{23,\eta})\mu_3, \\ \psi_{13}^r &= \eta - 6\eta^3 + 8\eta^4 - 3\eta^5 - \xi^3\eta(4-3\xi) - 3n_{12,\eta}\mu_1 + 15n_{13,\eta}\mu_2 + 12(n_{23,\xi} + n_{23,\eta})\mu_3, \\ \psi_{14}^r &= 0.5\xi^2(1-\xi)^2(1-\xi-\eta) + (2.5n_{12,\xi} + 0.5n_{12,\eta})\mu_1 + 0.5(n_{23,\xi} + n_{23,\eta})\mu_3, \\ \psi_{15}^r &= \xi\eta - \xi^3\eta(3-2\xi) - \xi\eta^3(3-2\eta) - 2n_{12,\eta}\mu_1 - 2n_{13,\xi}\mu_2 + 6(n_{23,\xi} + n_{23,\eta})\mu_3, \\ \psi_{16}^r &= 0.5\eta^2(1-\eta)^2(1-\xi-\eta) + (0.5n_{13,\xi} + 2.5n_{13,\eta})\mu_2 + 0.5(n_{23,\xi} + n_{23,\eta})\mu_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{21}^r &= 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5 - 30n_{12,\xi}\mu_1 - 30n_{23,\xi}\mu_3, \\
\psi_{22}^r &= -4\xi^3 + 7\xi^4 - 3\xi^5 + 15n_{12,\xi}\mu_1 + 15n_{23,\xi}\mu_3, \\
\psi_{23}^r &= \xi^3\eta(4-3\xi) + 3n_{12,\eta}\mu_1 - (12n_{23,\xi} - 3n_{23,\eta})\mu_3, \\
\psi_{24}^r &= 0.5\xi^3(1-\xi)^2 - 2.5n_{12,\xi}\mu_1 - 2.5n_{23,\xi}\mu_3, \\
\psi_{25}^r &= \xi^3\eta(\xi-1) - n_{12,\eta}\mu_1 + (4n_{23,\xi} - n_{23,\eta})\mu_3, \\
\psi_{26}^r &= 0.5\xi\eta^2(1-\eta)^2 - 0.5n_{13,\xi}\mu_2 - (0.5n_{23,\xi} - 2n_{23,\eta})\mu_3, \\
\psi_{31}^r &= 10\eta^3 - 15\eta^4 + 6\eta^5 - 30n_{13,\eta}\mu_2 - 30n_{23,\eta}\mu_3, \\
\psi_{32}^r &= \xi\eta^3(4-3\eta) + 3n_{13,\xi}\mu_2 + (3n_{23,\xi} - 12n_{23,\eta})\mu_3, \\
\psi_{33}^r &= -4\eta^3 + 7\eta^4 - 3\eta^5 + 12n_{13,\eta}\mu_2 + 12n_{23,\eta}\mu_3, \\
\psi_{34}^r &= 0.5\xi^2\eta(1-\xi)^2 - 0.5n_{12,\eta}\mu_1 + (2n_{23,\xi} - 0.5n_{23,\eta})\mu_3, \\
\psi_{35}^r &= \xi\eta^3(\eta-1) - n_{13,\xi}\mu_2 - (n_{23,\xi} - 4n_{23,\eta})\mu_3, \\
\psi_{36}^r &= 0.5\eta^3(1-\eta)^2 - 2.5n_{13,\eta}\mu_2 - 2.5n_{23,\eta}\mu_3,
\end{aligned} \tag{6.5.39}$$

$$\text{где } \mu_1 = \frac{\xi^2\eta(1-\xi-\eta)^2}{n_{12,\eta}}, \quad \mu_2 = \frac{\xi\eta^2(1-\xi-\eta)^2}{n_{13,\xi}}, \quad \mu_3 = -\frac{\xi^2\eta^2(1-\xi-\eta)}{n_{23,\xi} + n_{23,\eta}}. \tag{6.5.40}$$

Функции системы (6.5.39) совместны и удовлетворяют критерию полноты 3-го порядка:

$$\begin{aligned}
\psi_{11}^r + \psi_{12}^r + \psi_{13}^r &\equiv 1, \\
\psi_{21}^r + \psi_{12}^r + \psi_{22}^r + \psi_{32}^r &\equiv \xi, \\
\psi_{31}^r + \psi_{13}^r + \psi_{23}^r + \psi_{33}^r &\equiv \eta, \\
\psi_{21}^r + 2(\psi_{22}^r + \psi_{14}^r + \psi_{24}^r + \psi_{34}^r) &\equiv \xi^2, \\
\psi_{32}^r + \psi_{23}^r + \psi_{15}^r + \psi_{25}^r + \psi_{35}^r &\equiv \xi\eta, \\
\psi_{31}^r + 2(\psi_{33}^r + \psi_{16}^r + \psi_{26}^r + \psi_{36}^r) &\equiv \eta^2, \\
\psi_{21}^r + 2(\psi_{22}^r + \psi_{14}^r + \psi_{24}^r + \psi_{34}^r) &\equiv \xi^2, \\
\psi_{32}^r + \psi_{23}^r + \psi_{15}^r + \psi_{25}^r + \psi_{35}^r &\equiv \xi\eta, \\
\psi_{31}^r + 2(\psi_{33}^r + \psi_{16}^r + \psi_{26}^r + \psi_{36}^r) &\equiv \eta^2,
\end{aligned} \tag{6.5.41}$$

Функции системы (6.5.35) получаем преобразованием:

$$\begin{aligned}
\phi_{i1}^r &= \psi_{i1}^r, \\
\phi_{i2}^r &= c\psi_{i2}^r, \\
\phi_{i3}^r &= -a\psi_{i2}^r - b\psi_{i3}^r, \\
\phi_{i4}^r &= a^2\psi_{i4}^r + ab\psi_{i5}^r + b^2\psi_{i6}^r, \\
\phi_{i5}^r &= ac\psi_{i5}^r + 2bc\psi_{i6}^r, \\
\phi_{i6}^r &= c^2\psi_{i6}^r.
\end{aligned} \tag{6.5.42}$$

## 6.6. Совместные четырехугольные элементы (SA)

### 6.6.1. Элемент с 12-ю степенями свободы (PLSA4)

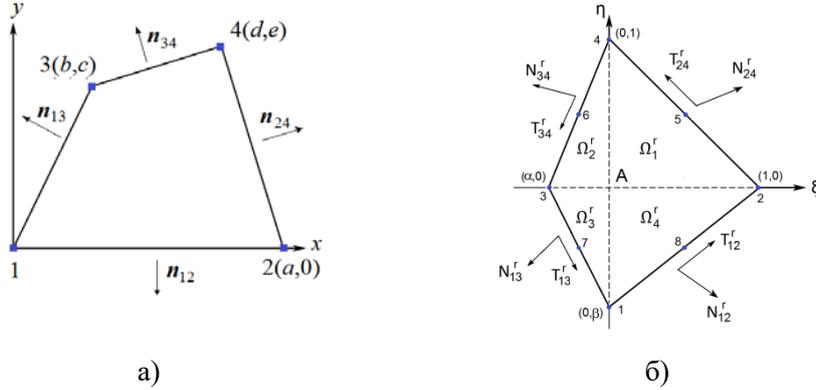


Рис. 6.6-1. Четырехугольный элемент

Метод подобластей, описанный в разд. 2.11 позволяет получить совместные кусочно-полиномиальные аппроксимации для произвольного выпуклого четырехугольника, изображенного на рис. 6.6-1а в местной системе координат, с сохранением симметрии в элементе при ее наличии [114, 38].

Выполним преобразование (2.11-9). Произвольный четырехугольник, изображенный на рис. 6.6-1а, преобразуется в четырехугольник, представленный на рис. 6.6-1б.

В каждом узле в вершинах элемента рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ , которым соответствует система функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.6.1)$$

Построим вспомогательную систему функций

$$\{\psi_{ij}^r(x, y), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}, \quad (6.6.2)$$

соответствующую степеням свободы (6.2.7)  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ .

Аппроксимирующие функции (6.6.2) будем искать в виде кусочных полиномов 3-й степени, считая, что нормальная производная на стороне элемента – полином первой степени. В соответствии с (2.12.9):

$$\psi_{ij}^r(\xi, \eta) = \mu_{ij}(\xi, \eta) + \lambda_{ij}(\xi, \eta), \quad (6.6.3)$$

где функции  $\mu_{ij}$  удовлетворяют условиям МКЭ  $\tilde{L}_{ij} \mu_{km}^r = \delta_{ij}^{km}$ :

$$\mu_{ij}(\xi, \eta) = \zeta_{ij}(\xi, \eta) + a_{ij} \chi_1(\xi, \eta) + b_{ij} \chi_2(\xi, \eta) + c_{ij} \chi_3(\xi, \eta). \quad (6.6.4)$$

Функции  $\zeta_{ij}$  также удовлетворяют условиям МКЭ  $\tilde{L}_{ij} \zeta_{km} = \delta_{ij}^{km}$  и равны:

$$\zeta_{11} = \begin{cases} 3B^2 \eta^2 - 2B^3 \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{12} &= \begin{cases} -B\eta^2 + B^2\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \end{cases}, \\
\zeta_{13} &= \begin{cases} -B^2\xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \end{cases}, \\
\zeta_{21} &= \begin{cases} 3\xi^2 - 2\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \end{cases}, \\
\zeta_{22} &= \begin{cases} \xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \end{cases}, \\
\zeta_{23} &= \begin{cases} \xi^2 - \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \end{cases}, \\
\zeta_{31} &= \begin{cases} 3A^2\xi^2 - 2A^3\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \end{cases}, \\
\zeta_{32} &= \begin{cases} A^2\xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \end{cases}, \\
\zeta_{33} &= \begin{cases} A\xi^2 - A^2\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_4^r \end{cases}, \\
\zeta_{41} &= \begin{cases} 3\eta^2 - 2\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \end{cases}, \\
\zeta_{42} &= \begin{cases} -\eta^2 + \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \end{cases}, \\
\zeta_{43} &= \begin{cases} -\xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \Omega_4^r \end{cases}, \tag{6.6.5}
\end{aligned}$$

где  $A = \frac{1}{\alpha}$ ,  $B = \frac{1}{\beta}$ ,  $A_1 = 1/(1-\alpha)$ ,  $B_1 = 1/(1-\beta)$ .

У функций  $\chi_i$  значения всех степеней свободы узлов равны нулю:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{n_{\xi_1} + n_{\eta_1}} \begin{cases} \xi\eta(1-\xi-\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_1^r \end{cases}, \\
\chi_2 &= \frac{1}{An_{\xi_2} + n_{\eta_2}} \begin{cases} \xi\eta(1-A\xi-\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_2^r \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_3 &= \frac{1}{An_{\xi 1} + Bn_{\eta 1}} \begin{cases} \xi\eta(1 - A\xi - B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_3^r \end{cases} \\ \chi_4 &= \frac{1}{n_{\xi 1} + Bn_{\eta 1}} \begin{cases} \xi\eta(1 - \xi - B\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_4^r \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  в (6.6.4) найдены из условия линейности нормальной производной на сторонах четырехугольника:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \zeta_{11} - 6B^2(An_{13,\eta}\chi_3 + n_{12,\eta}\chi_4), \\ \mu_{12} &= \zeta_{12} + 3B(An_{13,\eta}\chi_3 + n_{12,\eta}\chi_4), \\ \mu_{13} &= \zeta_{13} + B(-An_{13,\xi} + 2Bn_{13,\eta})\chi_3 + B(-n_{12,\xi} + 2Bn_{12,\eta})\chi_4, \\ \mu_{21} &= \zeta_{21} - 6(n_{24,\xi}\chi_1 + Bn_{12,\xi}\chi_4), \\ \mu_{22} &= \zeta_{22} + (-2n_{24,\xi} + n_{24,\eta})\chi_1 + (-2n_{12,\xi} + Bn_{12,\eta})\chi_4, \\ \mu_{23} &= \zeta_{23} - 3(n_{24,\xi}\chi_1 + Bn_{12,\xi}\chi_4), \\ \mu_{31} &= \zeta_{31} - 6A^2(n_{34,\xi}\chi_2 + Bn_{13,\xi}\chi_3), \\ \mu_{32} &= \zeta_{32} + A(-2An_{34,\xi} + n_{34,\eta})\chi_2 + A(-2An_{13,\xi} + Bn_{13,\eta})\chi_3, \\ \mu_{33} &= \zeta_{33} - 3A(Bn_{34,\xi}\chi_2 + n_{13,\xi}\chi_4), \\ \mu_{41} &= \zeta_{41} - 6(n_{24,\eta}\chi_1 + An_{34,\eta}\chi_2), \\ \mu_{42} &= \zeta_{42} + 3(n_{24,\eta}\chi_1 + An_{34,\eta}\chi_2), \\ \mu_{43} &= \zeta_{43} + (-n_{24,\xi} + 2n_{24,\eta})\chi_1 + (-An_{34,\eta} + 2n_{34,\eta})\chi_2. \end{aligned} \quad (6.6.7)$$

В (6.6.3) положим:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)^2 (C_{ij}^{11} + C_{ij}^{12}\xi + C_{ij}^{13}\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \\ (1 - A\xi - \eta)^2 (C_{ij}^{21} + C_{ij}^{22}\xi + C_{ij}^{23}\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^2 \\ (1 - A\xi - B\eta)^2 (C_{ij}^{31} + C_{ij}^{32}\xi + C_{ij}^{33}\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^3 \\ (1 - \xi - B\eta)^2 (C_{ij}^{41} + C_{ij}^{42}\xi + C_{ij}^{43}\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^4 \end{cases}. \quad (6.6.8)$$

Коэффициенты  $C_{ij}^{km}$  в (6.6.8) находим из условий равенства в точке  $A$  для всех подобластей  $\Omega_k^r$  величин

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r} = \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4^r}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4^r}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r} = \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4^r}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1^r} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2^r} = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3^r} = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4^r}. \end{aligned} \quad (6.6.9)$$

Получаем системы уравнений:

$$\begin{aligned}
-2C_{ij}^{11} + C_{ij}^{12} &= -2AC_{ij}^{21} + C_{ij}^{22} = -2AC_{ij}^{31} + C_{ij}^{32} = -2C_{ij}^{41} + C_{ij}^{42}, \\
-2C_{ij}^{11} + C_{ij}^{13} &= -2C_{ij}^{21} + C_{ij}^{23} = -2BC_{ij}^{31} + C_{ij}^{33} = -2BC_{ij}^{41} + C_{ij}^{43}, \\
2C_{ij}^{11} - 2C_{ij}^{12} - 2C_{ij}^{13} - q_{ij}^1 &= 2AC_{ij}^{21} - 2C_{ij}^{22} - 2AC_{ij}^{23} - q_{ij}^2 = \\
2ABC_{ij}^{31} - 2BC_{ij}^{32} - 2AC_{ij}^{33} - q_{ij}^3 &= 2BC_{ij}^{41} - 2BC_{ij}^{42} - 2C_{ij}^{43} - q_{ij}^4, \\
C_{ij}^{11} = C_{ij}^{21} = C_{ij}^{31} = C_{ij}^{41}, &
\end{aligned} \tag{6.6.10}$$

где  $q_{ij}^k = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \zeta_{ij} \Big|_{A \in \Omega_k}$ ,  $i, k=1,2,3,4$ .

Их решения:

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{11} = C_{ij}^{12} = C_{ij}^{13} = C_{ij}^{14} &= \frac{A_1 B_1}{6} (q_{ij}^2 + q_{ij}^4 - q_{ij}^1 - q_{ij}^3), \\
C_{ij}^{12} = C_{ij}^{42} &= \frac{B_1}{2} (q_{ij}^4 - q_{ij}^1) - C_{ij}^{11}, \\
C_{ij}^{13} = C_{ij}^{23} &= \frac{A_1}{2} (q_{ij}^2 - q_{ij}^1) - C_{ij}^{11}, \\
C_{ij}^{22} = C_{ij}^{32} &= \frac{B_1}{2} (q_{ij}^2 - q_{ij}^1) - AC_{ij}^{11}, \\
C_{ij}^{33} = C_{ij}^{43} &= \frac{A_1}{2} (q_{ij}^2 - q_{ij}^1) - BC_{ij}^{11}.
\end{aligned} \tag{6.6.11}$$

Можно упростить построение, рассмотрев вместо  $\chi_i$  функции  $\chi_i'$ :

$$\chi_i'(\xi, \eta) = \chi_i(\xi, \eta) + \lambda_i'(\xi, \eta). \tag{6.6.12}$$

Функции  $\lambda_i'$  в (6.6.12) – функции (6.6.8), коэффициенты которых являются решениями систем уравнений (6.6.10), у которых

$$q_i^k = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \chi_i \Big|_{A \in \Omega_k}, \quad i=1,2,3,4.$$

Если подставить в (6.6.7) вместо  $\chi_i$  функции  $\chi_i'$ , то будут выполнены уравнения (6.6.9) и для функций  $\mu_{ij}$ , которые будут совпадать с  $\psi_{ij}$ .

Построенная система функций совместна и удовлетворяет критерию полноты порядка  $m=2$ :

$$\begin{aligned}
\psi_{11}^r + \psi_{21}^r + \psi_{31}^r + \psi_{41}^r &\equiv 1, \\
\psi_{21}^r + \alpha \psi_{31}^r - \psi_{13}^r - \psi_{23}^r - \psi_{33}^r - \psi_{41}^r &\equiv \xi, \\
\beta \psi_{31}^r + \psi_{41}^r + \psi_{12}^r + \psi_{22}^r + \psi_{32}^r + \psi_{42}^r &\equiv \eta, \\
\psi_{21}^r + \alpha^2 \psi_{31}^r - 2(\varphi_{13}^r + \alpha \varphi_{33}^r) &\equiv \xi^2, \\
\varphi_{22}^r + \alpha \varphi_{32}^r - \beta \varphi_{13}^r - \varphi_{41}^r &\equiv \xi \eta, \\
\beta^2 \psi_{11}^r + \varphi_{41}^r + 2(\beta \varphi_{12}^r + \varphi_{42}^r) &\equiv \eta^2.
\end{aligned} \tag{6.6.13}$$

Преобразование (6.2.8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_{i1}^r &= \psi_{i1}^r, \\
\varphi_{i2}^r &= e\left(1 - \frac{ac}{H}\right)\psi_{i2}^r + \frac{ace}{H}\psi_{i3}^r, \\
\varphi_{i3}^r &= \frac{ae(a-b)}{H}\psi_{i3}^r + d\left(1 - \frac{ac}{H}\right)\psi_{i3}^r, \\
H &= cd + (a-b)e, \quad (i) \in \Omega_r.
\end{aligned} \tag{6.6.14}$$

### 6.6.2. Элемент с 16-ю степенями свободы

Рассмотрим четырехугольный элемент, у которого на каждой из сторон находится по одной дополнительной точке, в которой определена только одна степень свободы – значение нормальной производной [114, 38].

Условие линейности нормальной производной теперь является лишним, ибо будет обеспечена непрерывность нормальной производной при стыковке элементов.

Строим систему функций:

$$\left\{ \varphi_{ij}^r(x, y), \quad i=1,2,3,4, \quad j=1,2,3, \quad i=5,6,7,8, \quad j=1, \quad \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega) \right\}. \tag{6.6.15}$$

Функции, соответствующие нормальным производным на сторонах, получаем из (6.6.7):

$$\varphi_{i1}^r(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi_i \eta_i} \gamma_i, \quad i=5,6,7,8, \tag{6.6.16}$$

$\gamma_i$  – функции (6.6.12),

$$\varphi_{ij}^r(\xi, \eta) = \Phi_{ij}^r(\xi, \eta) - \sum_{k=5}^8 \varphi_{k1}^r(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \Phi_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}, \tag{6.6.17}$$

$i=1,2,3,4, j=1,2,3$ ,  $\Phi_{ij}^r$  – функции (6.6.1) элемента с 12-ю степенями свободы.

Построенная система функций совместна и удовлетворяет критерию полноты порядка  $m=3$  в силу того, что в аппроксимации перемещений используется полный полином 3-й степени.

### 6.6.3. Элемент с 24-мя степенями свободы (PLSA8)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис 6.6-1а в местной системе координат. Заменой координат (2.12.6) он преобразуется к четырехугольнику, изображенному на рис. 6.6-1б [38].

В каждом узле в вершинах треугольника рассматривается по три степени свободы (6.2.1)  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ , которым соответствует система функций:

$$\left\{ \varphi_{ij}^r(x, y), \quad i=1 \div 6, \quad j=1,2,3, \quad \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega) \right\}. \tag{6.6.18}$$

Построим вспомогательную систему функций:

$$\left\{ \psi_{ij}^r(x, y), \quad i=1 \div 6, \quad j=1,2,3, \quad \psi_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega) \right\}, \tag{6.6.19}$$

считая, что в вершинах треугольника определены степени свободы (6.2.7),  $i=1,2,3,4$ ., В узлах на сторонах элемента – (6.5.22),  $i=5,6,7,8$ .

Рассмотрим вспомогательные функции:

$$\zeta_i = \chi_{i1}C_{i1} + \chi_{i2}C_{i2} + \chi_{i3}C_{i3}, \quad i=1,2,3,4, \quad (6.6.20)$$

$$\chi_{i1} = \begin{cases} \xi^2 \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_r^i \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_r^i \end{cases}$$

$$\chi_{2i} = \frac{1}{(b_i - B_i)^2} \begin{cases} \xi^2 (1 - a_i \xi_i - B_i \eta_i)^2, & \xi_i \geq 0 \\ 0, & \xi_i < 0 \end{cases},$$

$$\chi_{3i} = \frac{1}{(a_i - A_i)^2} \begin{cases} \eta^2 (1 - A_i \xi_i - b_i \eta_i)^2, & \eta_i \geq 0 \\ 0, & \eta_i < 0 \end{cases}, \quad (6.6.21)$$

$$a_i = \begin{cases} 1, & i=1,4 \\ A, & i=2,3 \end{cases}, \quad b_i = \begin{cases} 1, & i=1,2 \\ B, & i=3,4 \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} 1, & i=2,3 \\ A, & i=1,4 \end{cases}, \quad B_i = \begin{cases} 1, & i=3,4 \\ B, & i=1,2 \end{cases}.$$

Уравнения для определения констант  $C_{ik}$ ,  $k=1,2,3,4$  в (6.6.20) для каждой функции получаем из условий:

$$\frac{\partial}{\partial n} \zeta_i \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \zeta_i(\xi_i, \eta_i) = 1, \quad i=5,6,7,8, \quad (6.6.22)$$

где  $\xi_i, \eta_i$  – координаты точки на стороне подобласти  $\Omega_i$ .

$$C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} = 1 / (\xi_i \eta_i)^2,$$

$$C_1 n_{\xi_i} + C_2 n_{\xi_i} - C_3 (n_{\xi_i} A_i + n_{\eta_i} b_i) / (a_i - A_i) = 0,$$

$$C_1 n_{\eta_i} - C_2 (n_{\xi_i} a_i + n_{\eta_i} B_i) / (b_i - B_i) + C_3 n_{\eta_i} = 0. \quad (6.6.23)$$

Решение системы уравнений (6.6.23):

$$C_{i1} = 1 - C_{i2} - C_{i3},$$

$$C_{i2} = \frac{n_{\eta_i} (b_i - B_i)}{\xi_i^2 \eta_i^2 (n_{\xi_i} a_i + n_{\eta_i} b_i)}, \quad C_{i3} = \frac{n_{\xi_i} (a_i - A_i)}{\xi_i^2 \eta_i^2 (n_{\xi_i} a_i + n_{\eta_i} b_i)},$$

$$C_{i2} = \frac{n_{\eta_i} (b_i - B_i)}{\xi_i^2 \eta_i^2 (n_{\xi_i} a_i + n_{\eta_i} b_i)}, \quad C_{i3} = \frac{n_{\xi_i} (a_i - A_i)}{\xi_i^2 \eta_i^2 (n_{\xi_i} a_i + n_{\eta_i} b_i)}. \quad (6.6.24)$$

Функции, соответствующие касательным производным на сторонах элемента, определим с помощью (6.6.20):

$$\psi_{i+4,3}^r(x, y) = \zeta_i (D_{i1} + D_{i2} \xi_i + D_{i3} \eta_i). \quad (6.6.25)$$

Коэффициенты  $D_{ij}$  находятся из условий:

$$\psi_{i+4,3}^r(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{i+4,3}^r \Big|_{\mathbf{x}_i} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial n} \psi_{i+4,3}^r \Big|_{\mathbf{x}_i} = 0. \quad (6.6.26)$$

Функции, соответствующие значениям  $w$  на сторонах элемента:

$$\psi_{i+4,1}^r(x, y) = \zeta_i - \psi_{i+4,3}^r(x, y) \frac{\partial}{\partial \tau} \zeta_i \Big|_{\mathbf{x}_{i+4}}, \quad i=1,2,3,4. \quad (6.6.27)$$

Если точка находится на середине стороны, то значение касательной производной в ней равно нулю.

Построим систему аппроксимирующих функций четырехугольного элемента с 16-ю степенями свободы:

$$\{\lambda_{ij}^r(x, y), i=1,2,3,4 j=1,2,3, i=5,6,7,8, j=1, \lambda_{ij}^r \in \mathcal{R}^1(\Omega)\}. \quad (6.6.28)$$

Т.к. уже определены  $\psi_{i1}^r, \psi_{i3}^r, i=5,6,7,8$ , то:

$$\psi_{ij}^r = \lambda_{ij}^r - \sum_{k=5}^8 \left( \lambda_{ij}^r(\mathbf{x}_k) \psi_{k1}^r + \psi_{k3}^r \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_{ij}^r \Big|_{\mathbf{x}_k} \right), \quad (6.6.29)$$

$i, j=1,2,3,4, i=5,6,7,8, j=2$ .

Преобразуем теперь систему функций (6.6.19) в (6.6.18). Для функций, соответствующих степеням свободы в узлах элемента, действует преобразование (6.5.15). Для функций, соответствующих степеням свободы на сторонах элемента, – преобразование (6.5.29).

Полученная система функций (6.6.18) совместна, как и для элемента с 16-ю степенями свободы, удовлетворяет критерию полноты порядка  $m=3$ , что обеспечивает сходимость метода.

Для повышения точности элемента найдем функции, принадлежащие пространству  $W_2^2(\Omega)$  и равные нулю вместе со своими первыми производными на сторонах элемента:

$$\mu = \chi \begin{cases} C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi^2 + C_5\xi\eta + C_6\eta^2 + \\ C_7\xi^3 + C_8\xi^2\eta + C_9\xi\eta^2 + C_{10}\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ D_1 + D_2\xi + D_3\eta + D_4\xi^2 + D_5\xi\eta + D_6\eta^2 + \\ D_7\xi^3 + D_8\xi^2\eta + D_9\xi\eta^2 + D_{10}\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (E_1 + E_2\xi + E_3\eta + E_4\xi^2 + E_5\xi\eta + E_6\eta^2 + \\ E_7\xi^3 + E_8\xi^2\eta + E_9\xi\eta^2 + E_{10}\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ B_1 + B_2\xi + B_3\eta + B_4\xi^2 + B_5\xi\eta + B_6\eta^2 + \\ B_7\xi^3 + B_8\xi^2\eta + B_9\xi\eta^2 + B_{10}\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \quad (6.6.30)$$

$$\chi = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ (1 - A\xi - \eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ (1 - A\xi - B\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ (1 - \xi - B\eta)^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}. \quad (6.6.31)$$

Из условий непрерывности функций (6.6.30) и их производных получаем систему 29-и уравнений с 40-ка неизвестными:

$$\begin{aligned}
C_1 = D_1 = E_1 = B_1, \quad C_2 = B_2, \quad C_3 = D_3, \\
C_4 = B_4, \quad C_6 = D_6, \quad C_7 = B_7, \\
C_{10} = D_{10}, \quad D_2 = E_2, \quad D_4 = E_4, \quad D_7 = E_7, \\
D_3 = B_3, \quad D_6 = B_6, \quad D_{10} = B_{10}, \\
-2(1-B)C_1 + C_3 - E_3 = 0, \\
-2(1-B)C_2 + C_5 - B_5 - C_3 + E_3 = 0, \\
-2(1-B)C_4 + C_8 - B_8 - C_5 + B_5 = 0, \\
-2(1-B)C_7 - C_8 + B_8 = 0, \\
-2(1-A)C_1 + C_2 - D_2 = 0, \\
-2(1-A)C_3 + C_5 - D_5 - C_2 + D_2 = 0, \\
-2(1-A)C_6 + C_9 - D_9 - C_5 + D_5 = 0, \\
-2(1-A)C_{10} - C_9 + D_9 = 0, \\
-2(1-B)D_2 + D_5 - B_5 - AC_3 + AE_3 = 0, \\
-2(1-B)D_4 + D_8 - E_8 - AD_5 + AE_5 = 0, \\
-2(1-B)D_7 - AD_8 + AE_8 = 0, \\
-2(1-A)C_3 + C_5 - D_5 - C_2 + D_2 = 0, \\
-2(1-A)C_6 + C_9 - D_9 - C_5 + D_5 = 0, \\
-2(1-A)C_{10} - C_9 + D_9 = 0.
\end{aligned} \tag{6.6.32}$$

Причем ранг матрицы системы уравнений (6.6.32) равен 28.

Определим в качестве базисных переменных  $C_5, C_8, C_9, D_5, D_8, D_9, E_5, E_8, E_9, B_5, B_8, B_9$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
C_1 = \frac{C_5 - D_5 + E_5 - B_5}{6(1-A)(1-B)}, \quad C_2 = B_2 = \frac{B_5 - C_5}{2(B-1)} - C_1, \\
C_3 = D_3 = \frac{D_5 - C_5}{2(A-1)} - C_1, \quad C_4 = B_4 = \frac{B_8 - C_8 - B_5 + C_5}{2(B-1)}, \\
C_6 = D_6 = \frac{D_9 - C_9 - D_5 + C_5}{2(A-1)}, \quad C_7 = B_{7k} = \frac{C_8 - B_8}{2(B-1)}, \\
C_{10} = D_{10} = \frac{C_9 - D_9}{2(A-1)}, \quad E_3 = B_3 = \frac{E_5 - B_5}{2(A-1)} - BC_1, \\
E_6 = B_6 = \frac{E_9 - B_9 - B(E_5 - B_5)}{2(A-1)}, \quad E_{10} = B_{10} = \frac{B_9 - E_9}{2(A-1)}, \\
D_7 = E_7 = A \frac{D_8 - E_8}{2(B-1)}, \quad D_2 = E_2 = \frac{E_5 - D_5}{2(B-1)} - AC_1, \\
D_4 = E_4 = \frac{E_8 - D_8 - A(E_5 - D_5)}{2(B-1)}.
\end{aligned} \tag{6.6.33}$$

Получили 12 дополнительных достаточно гладких функций  $\mu_k, k=1 \div 12$  при различных комбинациях базисных коэффициентов, являющихся кусочными полиномами 5-го порядка, у которых все рассматриваемые степени свободы узлов равны нулю:

$$\begin{aligned}
\mu_1 = \chi & \begin{cases} 1 + (2-3A)\xi + (2-3B)\eta - 3(1-A)\xi^2 + 6(1-A)(1-B)\xi\eta - 3(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 - A\xi + (2-3B)\eta - 3(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1 - A\xi - B\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1 + (2-3A)\xi - B\eta - 3(1-A)\xi^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\
\mu_2 = \chi & \begin{cases} 1 - \xi + (2-3B)\eta - 3(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 + (2A-3)\xi + (2-3B)\eta - 3(1-A)\xi^2 - 6(1-A)(1-B)\xi\eta - 3(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1 + (2A-3)\xi - B\eta - 3(1-A)\xi^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1 - \xi - B\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\
\mu_3 = \chi & \begin{cases} 1 - \xi - \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 + (2A-3)\xi - \eta + 3A(1-A)\xi^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1 + (2A-3)\xi + (2B-3)\eta + 3A(1-A)\xi^2 + 6(1-A)(1-B)\xi\eta + 3B(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1 - \xi + (2B-3)\eta + 3B(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\
\mu_4 = \chi & \begin{cases} 1 - \xi - \eta - 3(1-A)\xi^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ 1 - A\xi - \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 1 - A\xi + (2B-3)\eta - 3B(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 1 - \xi + (2B-3)\eta - 3(1-A)\xi^2 - 6(1-A)(1-B)\xi\eta - 3B(1-B)\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\
\mu_5 = \chi & \begin{cases} \xi^2 - \xi^3 + 2(1-B)\xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \xi^2 - \xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}, \\
\mu_6 = \chi & \begin{cases} \eta^2 - \eta^3 + 2(1-A)\xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \\ \eta^2 - \eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\
\mu_7 = \chi & \begin{cases} \xi^2 - A\xi^3, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ \xi^2 - A\xi^3 - 2(1-B)\xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases}, \\
\mu_8 = \chi & \begin{cases} \eta^2 - B\eta^3 - 2(1-A)\xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \\ \eta^2 - B\eta^3, & \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_2^r \end{cases}, \\
\mu_9 = \chi & \begin{cases} \xi^2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_4^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_3^r \end{cases}, \\
\mu_{10} = \chi & \begin{cases} \xi\eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_1^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_2^r \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_3^r \cup \mathbf{x} \in \Omega_4^r \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \chi \begin{cases} \xi^2 \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2' \cup \mathbf{x} \in \Omega_3' \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1' \cup \mathbf{x} \in \Omega_4' \end{cases}, \\ \mu_{12} &= \chi \begin{cases} \xi \eta^2, & \mathbf{x} \in \Omega_3' \cup \mathbf{x} \in \Omega_4' \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1' \cup \mathbf{x} \in \Omega_2' \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.6.34)$$

Как и для треугольного элемента с 18-ю степенями свободы, рассмотрим два варианта использования функций (6.6.34):

### Вариант А

Корректируем систему функций (6.6.18):

$$\widehat{\varphi}_{ij}^r(x, y) = \varphi_{ij}^r(x, y) - \sum_{k=1}^{12} C_{ij}^k \mu_k, \quad (6.6.35)$$

где величины  $C_{ij}^k$  находим из 12-ти уравнений: условий равенства следующих величин:

- 11-ти уравнений:

$$\Upsilon_k(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1'} = \Upsilon_k(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2'} = \Upsilon_k(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3'} = \Upsilon_k(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4'}, \quad (6.6.36)$$

$k=0 \div 9$ ;

- 12-го уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-A} \left( \Upsilon_{10}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1'} - \Upsilon_{10}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2'} - \Upsilon_{10}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3'} + \Upsilon_{10}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4'} \right) = \\ & - \frac{1}{1-B} \left( \Upsilon_{11}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_1'} + \Upsilon_{11}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_2'} - \Upsilon_{11}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_3'} - \Upsilon_{11}(\widehat{\varphi}_{ij}^r)|_{\mathbf{x}_A \in \Omega_4'} \right). \end{aligned} \quad (6.6.37)$$

$\Upsilon_k$  – операторы:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, & \Upsilon_2 &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \Upsilon_3 &= \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}, & \Upsilon_4 &= \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta}, & \Upsilon_5 &= \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2}, & \Upsilon_6 &= \frac{\partial^3}{\partial \eta^3}, \\ \Upsilon_7 &= \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta}, & \Upsilon_8 &= \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}, & \Upsilon_9 &= \frac{\partial^4}{\partial \xi \partial \eta^3}, \\ \Upsilon_{10} &= \frac{\partial^5}{\partial \xi^3 \partial \eta^2}, & \Upsilon_{11} &= \frac{\partial^5}{\partial \xi^2 \partial \eta^3}. \end{aligned} \quad (6.6.38)$$

Условия (6.6.36) – (6.6.37) обеспечивают непрерывность вторых и третьих производных в точке  $A$ , что существенно упрощает вычисление моментов и перерезывающих сил в ней. Также сохраняется симметрия расчетных схем.

Функции (6.6.34) можно переопределить таким образом, чтобы матрица соответствующих уравнений (6.6.36) – (6.6.37) была диагональной.

### Вариант В

Поставим в соответствие функциям (6.6.34) некоторые внутренние степени свободы с последующей их конденсацией.

## 6.7. Тесты

Все описанные в данной главе конечные элементы используют или полиномиальные аппроксимации поля перемещений по всему телу, или кусочно-полиномиальные. При этом по построению всегда выполнены условия критерия полноты (2.5.7) порядка  $p \geq 2$  для всех рассмотренных элементов, а для несовместных элементов – критерии несовместности порядка 2.

**Таблица 6.7-1.** Типы элементов для расчета тонких плит

Тип элемента	Число узлов	Описание
11	4	полусовместный прямоугольный, разд. 6.3.3
12, 14	3	треугольный, <i>IC</i> , разд. 6.4
13	4	прямоугольный, <i>IC</i> , разд. 6.3.2
15	3-6 <sup>1</sup>	треугольный, <i>PLSA</i> , разд. 6.5.4, вариант А.
16	4-8	четырёхугольный, <i>PLSA</i> , разд. 6.6, вариант В
18	3-6	треугольный, <i>SA</i> , разд. 6.5.4, вариант В
19	4	четырёхугольный, <i>SA</i> , разд. 6.6.1
20	4-8	четырёхугольный, <i>SA</i> , разд. 6.6, вариант А

Все рассмотренные элементы обеспечивают, как минимум, первый порядок сходимости по напряжениям, а по перемещениям – второй. Для совместных элементов с промежуточными узлами на сторонах, которые все удовлетворяют критерию полноты порядка  $p=3$ , скорости сходимости увеличиваются.

Для элементов задействованы все приведенные в статье аппроксимации, соответствующие «внутренним» степеням свободы элементов.

В таблице 6.7-1 приведены цифровые коды типов элементов, которые приняты в вычислительном комплексе *SCAD* [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

### 6.7.1. Патологические (patch) тесты

Для всех рассмотренных в данной главе элементов результаты расчета паталогических тестов совпадают с теоретическими с точностью до вычислительной погрешности. Данные тесты являются критерием корректности программного кода.

<sup>1</sup> Кроме узлов, в вершинах допускается не более одного узла на стороне.

**Прямоугольная пластина в условиях постоянных моментов**

Прямоугольная изотропная пластина постоянной толщины, изображенная на рис. 4.8-1, подвергается воздействию ортогональных смещений наружных кромок, обеспечивающих условия постоянных моментов по всей области.

Следуя работам [122, 127], примем:

$E = 1.0 \cdot 10^6 \text{ кПа}$  – модуль упругости;

$\nu = 0.25$  – коэффициент Пуассона;

$\delta = 0.001 \text{ м}$  – толщина пластины.

На рис. 4.8-2 приведены расчетные схемы для различных типов элементов.

Считаем, что пластинка на сторонах жестко закреплена:

$$w|_{\Gamma} = \theta_x|_{\Gamma} = \theta_y|_{\Gamma} = 0.$$

Рассматривались две группы кинематических загрузжений, для которых известны теоретические значения, приведенные в табл. 6.7-2.

Первые три загрузжения являются проверкой смещения прямоугольника как твердого тела, когда моменты и перерезывающие силы по всей области пластины равны нулю:

- смещение по оси OZ:  $w|_{\Gamma}=1, \theta_x|_{\Gamma}, \theta_y|_{\Gamma}=0$ ;
- поворот вокруг оси OX:  $w|_{\Gamma}=y, \theta_x|_{\Gamma}=1, \theta_y|_{\Gamma}=0$ ;
- поворот вокруг оси OY:  $w|_{\Gamma}=x, \theta_x|_{\Gamma}=-1, \theta_y|_{\Gamma}=0$ .

Следующие три загрузжения обеспечивают не равные нулю постоянные моменты и равные нулю перерезывающие силы по всей области пластины:

- $w|_{\Gamma}=x^2, \theta_x|_{\Gamma}=0, \theta_y|_{\Gamma}=-2x$ ;
- $w|_{\Gamma}=y^2, \theta_x|_{\Gamma}=2y, \theta_y|_{\Gamma}=0$ ;
- $w|_{\Gamma}=xy, \theta_x|_{\Gamma}=x, \theta_y|_{\Gamma}=-y$ .

**Таблица 6.7-2.** Теоретические значения моментов в пластине

Загрузжение	Моменты и перерезывающие силы (кНм/м)			
	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$Q_x, Q_y$
1-3	0	0	0	0
4	0.17(7)	0.04(4)	0	0
5	0.04(4)	0.17(7)	0	0
6	0	0	0.06(6)	0

**Температурные деформации**

Рассмотрим прямоугольную пластинку, изображенную на рис. 4.8-1 с двумя вариантами связей:

а) перемещения в узлах пластинки:

$$w(0,0) = w(0.24,0) = w(0,0.12) = w(0.24,0.12) = 0,$$

которые не препятствуют температурному изгибу;

б) жесткое защемление на сторонах пластинки.

Коэффициент температурного линейного расширения материала пластинки  $\alpha \text{ K}^{-1} (\text{°C}^{-1})$ .

Если нагрев выполнен до разности температур  $\Delta t$  на верхней и нижней поверхностях пластины, то для рассматриваемых вариантов:

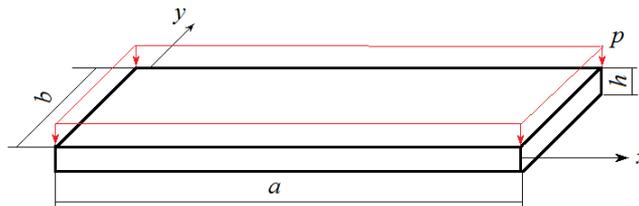
$$\text{а) } w = \frac{\alpha \Delta t}{2h} (x^2 + y^2 - ax - by), \quad M_x = M_y = M_{xy} = Q_x = Q_y \equiv 0. \quad (6.7.1)$$

Т.к. краевые условия не препятствуют деформации пластины, то, соответственно, моменты и перерезывающие силы равны нулю.

$$\text{б) } w \equiv 0, \quad M_x = M_y = D \frac{\alpha \Delta t (1 + \nu)}{h}, \quad M_{xy} \equiv 0. \quad (6.7.2)$$

### 6.7.2. Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки

Рассмотрим свободно опертую по периметру прямоугольную пластину под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки (рис. 6.7-1).



**Рис. 6.7-1.** Прямоугольная плита под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки

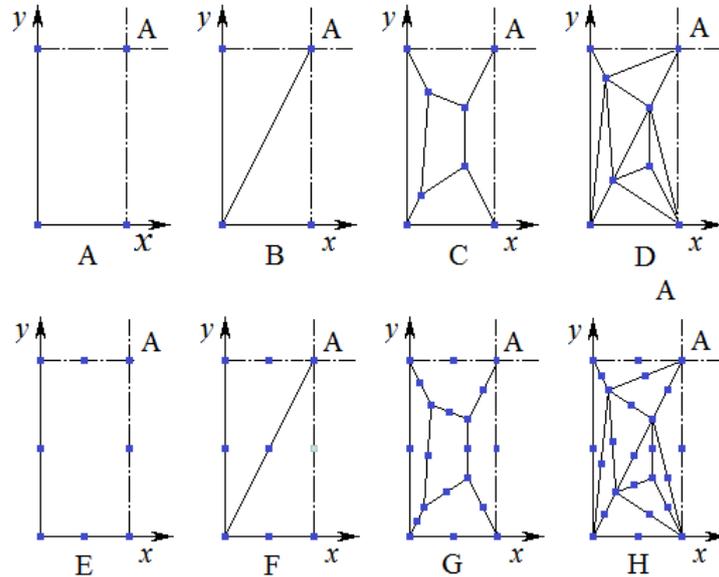
Зададим:

$$E = 30000 \text{ кПа}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.2 \text{ м}, \quad a = 2.4 \text{ м}, \quad b = 4.8 \text{ м}, \quad p = 1.0 \text{ кПа}.$$

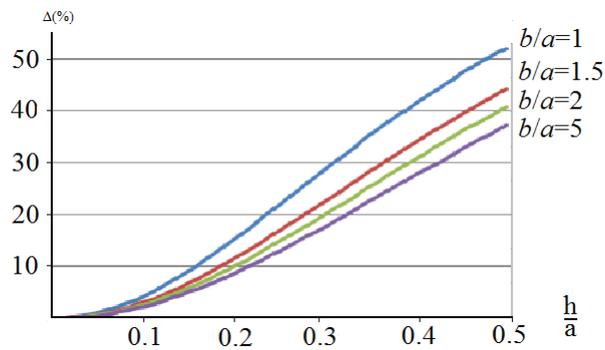
По контуру плиты задано шарнирное закрепление:

$$w|_r = 0, \quad \theta_x(0, y) = \theta_x(a, y) = 0, \quad \theta_y(x, 0) = \theta_y(x, b) = 0.$$

Закрепление углов поворота по касательной задавать не обязательно. Это не главные краевые условия.



**Рис. 6.7-2.** Расчетные схемы 2x2 прямоугольной плиты под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



**Рис. 6.7-3.** Сравнение прогиба в центре прямоугольной пластинки при шарнирном опирании по теории Кирхгофа-Лява с решением по пространственной теории

Расчетные схемы с учетом осей симметрии приведены на рис. 6.7-2. Причем схемы С и D являются повторением схемы патологических тестов [121] с пропорциональным изменением координат, представленных на рис. 4.8.1.

Аналитическое решение данной задачи для центра пластины в точке А:

$$w_A = -15.291(\text{mm}), M_x = 0.58569(\text{kHm/m}).$$

Для иллюстрации, что теория Кирхгофа-Лява – теория тонких плит, на рис. 6.7-3 приведены для данной задачи графики погрешности в сравнении с пространственной теорией.

**Таблица 6.7-3.** Перемещения и моменты в центре прямоугольной пластинки

Тип сетки	Тип элемента	Перемещение $w_A$ (mm)				Момент $M_{x,A}$ (kNm/m)			
		Сетка				Сетка			
		2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16
A	11	-20.208	-16.449	-15.576	-15.361	0.8668	0.651	0.6015	0.5896
	13	-20.224	-16.454	-15.576	-15.361	0.8674	0.6511	0.6015	0.5896
	16	-14.539	-15.081	-15.242	-15.278	0.5057	0.5546	0.578	0.5838
	19,20	-13.424	-14.652	-15.138	-15.253	0.5021	0.5392	0.5742	0.5829
B	12	-8.1476	-13.545	-14.882	-15.19	0.2871	0.5531	0.5864	0.5871
	15	-7.2934	-13.404	-14.882	-15.195	0.1554	0.4435	0.5631	0.584
	18	-7.712	-13.574	-14.929	-15.206	0.1713	0.4533	0.5647	0.5837
C	16	-14.493	-15.194	-15.283	-15.288	0.5314	0.592	0.59	0.5868
	19,20	-14.323	-14.652	-15.138	-15.253	0.4054	0.5395	0.5742	0.5828
D	12	-13.605	-14.825	-15.278	-15.26	0.5326	0.5789	0.5882	0.5864
	15	-13.427	-14.779	-15.171	-15.289	0.5037	0.5558	0.5806	0.5842
	18	-13.531	-14.848	-15.188	-15.262	0.5091	0.5623	0.5831	0.5849
E	16	-15.313	-15.293	-15.29	-15.29	0.5985	0.5873	0.5858	0.5857
	20	-15.341	-15.292	-15.29	-15.29	0.6237	0.585	0.5857	0.5857
F	15	-15.313	-15.284	-15.29	-15.29	0.6598	0.6126	0.593	0.5875
	18	-15.31	-15.284	-15.29	-15.29	0.6462	0.6096	0.5919	0.5872
G	16	-15.31	-15.292	-15.29	-15.29	0.61	0.5905	0.5869	0.586
	20	-15.309	-15.293	-15.29	-15.29	0.6095	0.5907	0.5869	0.586
H	15	-15.326	-15.295	-15.29	-15.29	0.6156	0.5963	0.5881	0.5863
	18	-15.324	-15.295	-15.29	-15.29	0.6144	0.5949	0.588	0.5863

Результаты расчетов приведены в табл. 6.7-3.

### 6.7.3. Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим защемленную по контуру правильную шестиугольную пластину под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки (рис. 6.7-4).

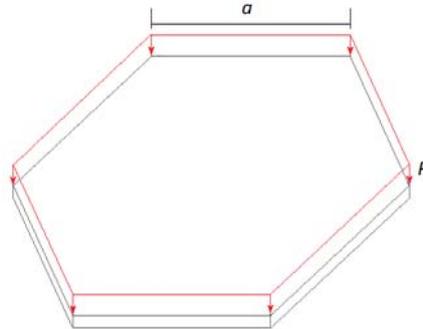


Рис. 6.7-4. Шестиугольная пластина

Зададим:  $E = 30000 \text{ кПа}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $h = 0.1 \text{ м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $p = 10 \text{ кПа}$ .

Связи: жесткое закрепление узлов по контуру –  $w|_{\Gamma} = \theta_x|_{\Gamma} = \theta_y|_{\Gamma} = 0$ .

Решение данной задачи приведено в работе [10]. В центре пластины в точке А:

$$w_A = -36.324(\text{мм}), M_x = 0.64786(\text{кНм/м}).$$

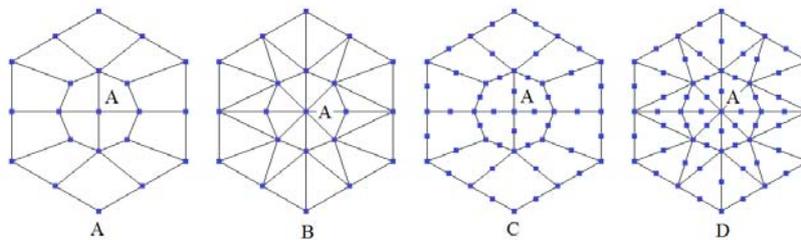


Рис. 6.7-5. Расчетные схемы 1x1 шестиугольной пластины

Результаты расчетов для расчетных схем, приведенных на рис. 6.7-5, приведены в табл. 6.7-4.

Таблица 6.7-4. Перемещения и моменты в центре шестиугольной пластинки

Тип сетки	Тип элемента	Перемещение $w_A$ (мм)				Момент $M_{x,A}$ (кНм/м)			
		Сетка				Сетка			
		1x1	2x2	4x4	8x8	1x1	2x2	4x4	8x8
A	16	-35.009	-35.84	-36.203	-36.304	0.752	0.6503	0.6485	0.6481
	19	-33.683	-35.432	-36.091	-36.276	0.7204	0.6468	0.647	0.6477
	20	-33.391	-35.693	-36.185	-36.3	0.6222	0.65	0.6483	0.648
B	12	-30.555	-34.534	-35.91	-36.244	0.6743	0.6647	0.6529	0.6494
	15	-31.271	-34.716	-35.951	-36.263	0.6464	0.6551	0.6506	0.6489
	18	-32.869	-35.898	-35.994	-36.262	0.6569	0.6563	0.6509	0.649
C	16	-36.281	-36.315	-36.331	-36.333	0.6471	0.6476	0.648	0.6481
	20	-36.091	-36.303	-36.33	-36.333	0.6421	0.6479	0.648	0.6481
D	15	-36.214	-36.293	-36.329	-36.332	0.6164	0.6477	0.648	0.648
	18	-36.273	-36.297	-36.329	36.332	0.651	0.6478	0.648	0.648

## Глава 7. Изгиб плит средней толщины (теория Рейсснера-Миндлина)

### 7.1. Теория изгиба плит средней толщины

Теория Кирхгоффа-Лява применима к тонким пластинам. Это хорошо иллюстрирует график на рис. 6.7-4. При увеличении толщины пластин гипотеза прямых нормалей уже неприменима. Теория Рейсснера-Миндлина позволяет рассчитывать как тонкие, так и средней толщины пластины.

Рассмотрим плиту толщиной  $h$ , изображенную на рис. 6.1-1, у которой плоскость  $XOY$  совпадает со срединной плоскостью. На нее действует перпендикулярная ее поверхности нагрузка интенсивности  $q(x,y)$ .

Будем считать, что напряжения линейно изменяются по толщине пластины, а на срединной поверхности равны нулю. Тогда из (6.1.7) следует:

$$M_x = \frac{12\sigma_x}{h^3}z, \quad M_y = \frac{12\sigma_y}{h^3}z, \quad M_{xy} = \frac{12\tau_{xy}}{h^3}z. \quad (7.1.1)$$

Из краевых условий (6.1.6) и уравнений (6.1.9):

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{2h^3}p(3zh^2 - 4z^3 + h^3), \\ \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2h^3}(h^2 - 4z^2), \\ \tau_{yz} &= \frac{3Q_y}{2h^3}(h^2 - 4z^2). \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Очевидно, что выполнено уравнение равновесия (6.1.11).

В теории Рейсснера-Миндлина углы поворота нормали  $\theta_x$  и  $\theta_y$  принимаются в качестве независимых кинематических параметров, не связанных уравнениями (6.1.1) с перемещением  $w$ . При этом роль кривизн в (6.1.4) играют их производные:

$$\chi_x = \frac{\partial\theta_y}{\partial x}, \quad \chi_y = -\frac{\partial\theta_x}{\partial y}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} - \frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right). \quad (7.1.3)$$

Учитывая (6.1.1):

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x. \quad (7.1.4)$$

При этом выражения (7.1.4) не зависят от  $z$ . Поэтому будем считать их усредненными по высоте деформациями сдвига.

Рассмотрим часть функционала Лагранжа, соответствующую поперечным силам, при выполнении соответствующих равенств закона Гука:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\tau_{xz}^2}{G_{xz}} + \frac{\tau_{yz}^2}{G_{yz}} \right) dz = \\ \frac{1}{2} \left( \frac{Q_x^2}{G_{xz}} + \frac{Q_y^2}{G_{yz}} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{9(h^2 - 4z^2)^2}{4h^6} dz &= \frac{6}{10h} \left( \frac{Q_x^2}{G_{xz}} + \frac{Q_y^2}{G_{yz}} \right). \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Поставим усредненным деформациям сдвига в соответствие усредненные касательные напряжения

$$\tilde{\tau}_{xz} = \frac{1}{h\mathcal{K}} G_{xz} \gamma_{xz}, \quad \tilde{\tau}_{yz} = \frac{1}{h\mathcal{K}} G_{yz} \gamma_{yz}, \quad \mathcal{K} = \frac{5}{6}. \quad (7.1.6)$$

Получаем уравнения, выражающие перерезывающие силы через деформации (7.1.4):

$$Q_x = \mathcal{K} G_{xz} \gamma_{xz}, \quad Q_y = \mathcal{K} G_{yz} \gamma_{yz}. \quad (7.1.7)$$

В матричной форме:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (7.1.8)$$

Физические и геометрические уравнения:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (7.1.9)$$

Дифференциальный оператор  $\mathbf{A}$  и матрица упругости  $\mathbf{C}$  в (7.1.9):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{K} G_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{K} G_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}. \quad (7.1.10)$$

Для изотропного материала:

$$\mathbf{C} = D \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & 1 & \nu & \\ & & \nu & 1 & \\ & & & & 0.5(1-\nu) \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{5(1-\nu)}{h^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (7.1.11)$$

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\mathbf{B}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (7.1.12)$$

Заметим, что  $\mathbf{B} \neq -\mathbf{A}^T$ .

Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях без учета нагрузок в виде моментов и температуры

$$\begin{aligned} -\Delta w + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} &= \frac{q}{\lambda D}, \\ \lambda(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial y}) - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \lambda(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y) - \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Напряжения на поверхностях пластины вычисляются по формулам (6.1.18).

### Преобразования систем координат

Рассмотрим в нейтральной плоскости пластины систему прямоугольных координат  $X'Y'$ , полученную поворотом  $XY$  на угол  $\varphi$ . Тогда матрица  $\mathbf{S}$  в преобразовании (2.10.1) имеет вид (4.1.18).

После соответствующих преобразований получаем для деформаций, моментов и перерезывающих сил следующие зависимости:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \tilde{\mathbf{S}}_{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{S}_{\varepsilon}^T \mathbf{M}, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q'_x \\ Q'_y \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad (7.1.14)$$

где  $\mathbf{S}_{\varepsilon}$  – матрица преобразования (4.1.21) плоской задачи теории упругости.

Матрица связи деформаций и напряжений  $\mathbf{D}$  в физических уравнениях (7.1.9) при переходе к новой системе координат преобразуется следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}', \quad \mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{S}}_{\varepsilon}^T \tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon}. \quad (7.1.15)$$

Для изотропного материала при ортогональном преобразовании  $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$ .

### Краевые условия

Рассмотрим точку  $\mathbf{x}$  на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$ , где нормаль к границе области  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$ . Краевые условия в точке  $\mathbf{x}$  могут быть:

- **кинематическими**, когда заданы значения прогиба и/или значения углов поворота на контуре:

$$w|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = w_{\Gamma} \text{ и/или } \theta_n|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = \theta_{n,\Gamma} \text{ и/или } \theta_{\tau}|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = \theta_{\tau,\Gamma}. \quad (7.1.16)$$

Если заданы три эти условия и  $w_\Gamma = 0$ ,  $\theta_{n,\Gamma} = 0$ ,  $\theta_{\tau,\Gamma} = 0$ , то говорят о *жестком защемлении* пластины на краю.

- **статическими** – равенство в точках границы внешним нагрузкам, действующим по нормали к контуру: момента  $M_n$  и/или перерезывающей силы:

$$M_n|_{x \in \Gamma} = M_{n,\Gamma} \text{ и/или } M_\tau|_{x \in \Gamma} = M_{\tau,\Gamma} \text{ и/или } Q_n|_{x \in \Gamma} = Q_{n,\Gamma}. \quad (7.1.17)$$

Если на незакрепленном и ненагруженном крае пластинки отсутствуют внешние силовые факторы, то говорят о *свободном крае*;

- **смешанные**. Если край оболочки не является жестко защемленным или свободным, то граничные условия формулируются, исходя из отсутствия на этом участке внешних силовых факторов. Частным случаем смешанных краевых условий является *шарнирное опирание*, когда на контуре задано только нулевое значение прогиба  $w$  и углов поворота  $\theta$ .

Не пересекаются участки границы, на которых заданы:

$$w_\Gamma \text{ и } Q_{n,\Gamma}, \quad \theta_{n,\Gamma} \text{ и } M_n, \quad \theta_{\tau,\Gamma} \text{ и } M_{\tau,\Gamma}.$$

**В отличие от теории Кирхгоффа-Лява, на границе не два, а три кинематических и, соответственно, три статических краевых условия.**

#### Температурные воздействия

Если нет возможности свободно изгибаться, то возникают температурные/тепловые напряжения, которые необходимо учесть в физических уравнениях (1.3.1), где при линейном изменении температуры по толщине пластины температурные деформации вычисляются по формулам (6.1.19) или (6.1.20).

Подставив (6.1.19) или (6.1.20) в (1.4.11) и проинтегрировав по  $z$ , получим учет температурных деформаций в потенциальной энергии.

**Главные моменты и главные кривизны** вычисляются по формулам (6.1.25)–(6.1.28)

#### Функционалы

Используя матричную запись (7.1.9), получим для теории изгиба тонких пластин Кирхгоффа-Лява функционалы Лагранжа (1.4.11), Кастельяно (1.4.15), Рейсснера (1.4.16) и смешанный функционал (1.4.17).

Запишем работу внутренних сил для изотропного материала в функционале Лагранжа без учета температурных воздействий:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}) = & \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega + \\ & \frac{D\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

В функционал Лагранжа входят производные первого порядка функции перемещений  $w$ ,  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$ . Следовательно, энергетическое пространство задачи совпадает с пространством Соболева  $W_2^1(\Omega)$ <sup>1</sup>.

## 7.2. Степени свободы и аппроксимации

Как и для решения задачи изгиба плит по теории Кирхгоффа, используются, как правило, конечные элементы, имеющие геометрическую форму треугольника, прямоугольника и произвольного четырехугольника. Простейшие элементы имеют только узлы, совпадающие с вершинами многогранников. В элементах с повышенной аппроксимацией добавляются узлы, лежащие на их сторонах.

Будем рассматривать обобщенные «перемещения»<sup>2</sup>

$$\mathbf{u} = \{w, \theta_x, \theta_y, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T \in \mathcal{R}^5(\Omega). \quad (7.2.1)$$

В каждом узле конечных элементов определим по три степени свободы:

$$w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi} \quad i=1,2,\dots,N, \quad (7.2.2)$$

где  $N_r$  – число узлов элемента, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_{N_r}, \theta_{xN_r}, \theta_{yN_r}\}. \quad (7.2.3)$$

Степеням свободы (7.2.3) соответствует система аппроксимирующих функций:

$$\left\{ \boldsymbol{\varphi}_{ij}(x, y) = \{\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2, \varphi_{ij}^3, \varphi_{ij}^4, \varphi_{ij}^5\}^T, (i) \in \Omega_r, j = 1, 2, 3, \boldsymbol{\varphi}_{ij} \in \mathcal{R}^5(\Omega) \right\}. \quad (7.2.4)$$

Функции  $\boldsymbol{\varphi}_{ij}$  располагаются в порядке (7.2.3):

$$\{\boldsymbol{\varphi}_{1,1}, \boldsymbol{\varphi}_{1,2}, \boldsymbol{\varphi}_{1,3}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{N_r,1}, \boldsymbol{\varphi}_{N_r,2}, \boldsymbol{\varphi}_{N_r,3}\}. \quad (7.2.5)$$

При использовании внутренних степеней свободы будем рассматривать вспомогательную систему функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\psi}_{ij}(x, y), L_{ij}\boldsymbol{\psi}_{km} = \delta_{ij}^{km}, \quad (i), (k) \in \Omega_r, \quad j, m = 1, 2, 3, \\ \boldsymbol{\mu}_k(x, y), L_{ij}\boldsymbol{\mu}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, k_r, \quad \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\psi}_{ij} \in \mathcal{R}^5(\Omega) \end{array} \right\} \quad (7.2.6)$$

Функции  $\boldsymbol{\mu}_k$  в (7.2.6) будем искать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mu}_k(x, y) = \{0, 0, 0, \mu_k^4(x, y), \mu_k^5(x, y)\}^T. \quad (7.2.7)$$

Систему функций (7.2.4) получим из (7.2.6) конденсацией дополнительных степеней свободы.

<sup>1</sup> Возможен учет в функционале Лагранжа компонент  $\sigma_x\sigma_z$  и  $\sigma_y\sigma_z$ , которые приводят к дополнительным нагрузкам в виде моментов [11].

<sup>2</sup> Рассматриваем в пятимерном пространстве вместо трехмерного для упрощения дальнейших выкладок.

Когда просто используют классические аппроксимации элементов плоской задачи теории упругости, то принимают:

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^1 &= \varphi_{i2}^2 = \varphi_{i3}^3 - \text{аппроксимации КЭ плоской задачи теории упругости;} \\ \varphi_{i1}^2 &= \varphi_{i1}^3 = \varphi_{i1}^4 = \varphi_{i1}^5 = \varphi_{i2}^1 = \varphi_{i2}^3 = \varphi_{i2}^4 = \varphi_{i2}^5 = 0; \\ \varphi_{i3}^1 &= \varphi_{i3}^2 = \varphi_{i3}^4 = \varphi_{i3}^5 = 0. \end{aligned}$$

В большинстве случаев при таком подходе возникает так называемый *эффект запирання*: для таких элементов при расчете тонких плит нет сходимости метода.

Основной причиной эффекта запирання является то, что невозможно задать такие значения степеней свободы одного элемента, чтобы обеспечить постоянные моменты по его области при линейных и квадратичных прогибах  $w$  и линейных углах поворота. Это связано с тем, что в дифференциальных уравнениях равновесия (7.1.13) и, соответственно, в функционале (7.1.18) имеем разные порядки дифференцирования по переменным.

Существует много методов ликвидации режима запирання. Наиболее часто используют:

- гибридные схемы, основанные на функционале Рейсснера [133];
- специальные процедуры аппроксимации поперечных сдвигов (*Mixed Interpolation of Tensorial Components, MITC*, [102,103]), *DSG (Discrete Shear Gap*, [104]) и другие;
- введение внутренних степеней свободы;
- совместную интерполяцию перемещений и углов поворота (*JOINT INTERPOLATION OF DISPLACEMENTS AND ROTATIONS, JIDR*) [118].

Запишем работу внутренних сил (7.1.18) в матричном виде, используя вектор «перемещений» (7.2.1). Оператор геометрии  $A$  имеет разный вид в зависимости от метода построения конечных элементов<sup>1</sup>:

- элементы *MITC* и *DSG*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.2.8)$$

При этом:

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^1 &= \varphi_{i2}^2 = \varphi_{i3}^3 - \text{аппроксимации КЭ плоской задачи теории упругости;} \\ \varphi_{i1}^2 &= \varphi_{i1}^3 = \varphi_{i2}^1 = \varphi_{i2}^3 = \varphi_{i3}^1 = \varphi_{i3}^2 = 0; \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Приведены только рассматриваемые в работе операторы геометрии.

$\varphi_{ij}^4, \varphi_{ij}^5$  – конструируются таким образом, чтобы с высокой степенью точности аппроксимировать перерезывающие силы;

$\varphi_{i1}^1$  не участвуют в формировании матрицы жесткости элемента.

- элементы **JDR**:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2.9)$$

При этом:

$\varphi_{ij}^j, j=1,2,3$  – могут быть не обязательно аппроксимациями элементов плоской задачи теории упругости;

$\varphi_{ij}^k, j,k=1 \div 5, k \neq j$  – некоторые из этих функций *не равны нулю*.

В уравнения равновесия (7.1.13) входят производные по  $w, \theta_x, \theta_y$  второго порядка. Поэтому для совместности аппроксимаций функции  $\varphi_{ij}^k, j,k=1,2,3$  должны принадлежать пространству Соболева  $W_2^1(\Omega)$ . Для элементов **MITC** функции  $\varphi_{ij}^4, \varphi_{ij}^5, j=1,2,3$  могут не принадлежать пространству Соболева  $W_2^0(\Omega)$  в силу особенностей составления матрицы жесткости.

### 7.3. Треугольники **DSG3**

#### 7.3.1. Элемент **DSG3**

Рассмотрим треугольный конечный элемент в местной системе координат, изображенный на рис. 7.3-1.

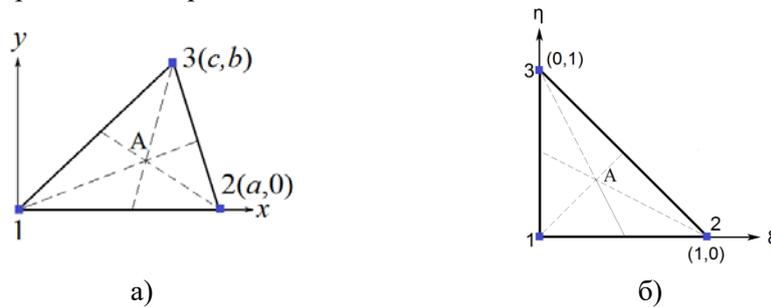


Рис. 7.3-1. Треугольник и его мастер-элемент

Заменой координат (6.4.1) он преобразуется к прямоугольному треугольнику с единичными катетами, изображенному на рис. 7.3-1б.

При построении системы аппроксимирующих функций (7.2.5) поле перемещений и углов поворота аппроксимируется по линейному закону:

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^1 = \varphi_{i2}^2 = \varphi_{i3}^3 = \psi_i, \quad \varphi_{i1}^2 = \varphi_{i1}^3 = \varphi_{i2}^1 = \varphi_{i2}^3 = \varphi_{i3}^1 = \varphi_{i3}^2 = 0, \\ \psi_1 = 1 - \xi - \eta, \quad \psi_2 = \xi, \quad \psi_3 = \eta. \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

$\varphi_{ij}^4, \varphi_{ij}^5$  конструируются таким образом, чтобы с высокой степенью точности аппроксимировать перерезывающие силы.

Из (7.3.1) согласно (7.1.4) [104]:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} w + \theta_y = \frac{\partial}{\partial x} (w_1(1 - \xi - \eta) + w_2\xi + w_3\eta) + \theta_{y1}(1 - \xi - \eta) + \theta_{y2}\xi + \theta_{y3}\eta = \\ &= \frac{1}{a}(-w_1 + w_2) + \theta_{y1}(1 - \xi - \eta) + \theta_{y2}\xi + \theta_{y3}\eta, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} w - \theta_x = \frac{\partial}{\partial y} (w_1(1 - \xi - \eta) + w_2\xi + w_3\eta) - \theta_{x1}(1 - \xi - \eta) - \theta_{x2}\xi - \theta_{x3}\eta = \\ &= -\frac{b}{ac}(-w_1 + w_2) + \frac{1}{c}(-w_1 + w_3) - \theta_{x1}(1 - \xi - \eta) - \theta_{x2}\xi - \theta_{x3}\eta. \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Используя (7.3.2), найдем:

- приращение нормального прогиба  $w$  за счет сдвига при перемещении от узла 1 к узлу 2:

$$\Delta w_{12} = \int_0^a \gamma_{xz} \Big|_{\eta=0} dx = a \int_0^1 \gamma_{xz} d\xi = -w_1 + w_2 + \frac{a}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2}); \quad (7.3.3)$$

- приращение нормального прогиба  $w$  за счет сдвига при перемещении от узла 1 к узлу 3:

$$\begin{aligned} \Delta w_{13} &= \int_0^{a_{13}} \gamma_{yz} \Big|_{\xi=0} ds = a_{13} \int_0^1 (\cos(\varphi)\gamma_{xz} + \sin(\varphi)\gamma_{yz}) \Big|_{\xi=0} d\eta = \\ &= \int_0^1 (b\gamma_{xz} + c\gamma_{yz}) \Big|_{\xi=0} d\eta = w_3 - w_1 + \frac{b}{2}\theta_{y1} + \frac{b}{2}\theta_{y3} - \frac{c}{2}\theta_{x1} - \frac{c}{2}\theta_{x3}. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Используя вычисленные значения приращений прогибов, аппроксимируем сдвиги с их помощью:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} (\psi_2 \Delta w_{12} + \psi_3 \Delta w_{13}) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \Delta w_{12} + \eta \Delta w_{13}), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} (\psi_2 \Delta w_{12} + \psi_3 \Delta w_{13}) = \left(-\frac{b}{ac} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \eta}\right) (\varphi_2 \Delta w_{12} + \varphi_3 \Delta w_{13}). \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Подставив (7.3.3) и (7.3.4) в (7.3.5), получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{1}{a}(w_2 - w_1) + \frac{1}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2}), \\ \gamma_{yz} &= \frac{b-a}{ac}w_1 - \frac{b}{ac}w_2 + \frac{1}{c}w_3 - \frac{b}{2c}(\theta_{y2} - \theta_{y3}) - \frac{1}{2}(\theta_{x1} + \theta_{x3}). \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Из (7.3.6) следует:

$$\begin{cases} \varphi_{11}^4 \\ \varphi_{11}^5 \end{cases} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix}, & \begin{cases} \varphi_{12}^4 \\ \varphi_{12}^5 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}, & \begin{cases} \varphi_{13}^4 \\ \varphi_{13}^5 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} \varphi_{21}^4 \\ \varphi_{21}^5 \end{cases} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}, & \begin{cases} \varphi_{22}^4 \\ \varphi_{22}^5 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{cases} \varphi_{23}^4 \\ \varphi_{23}^5 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5b/c \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} \varphi_{31}^4 \\ \varphi_{31}^5 \end{cases} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, & \begin{cases} \varphi_{32}^4 \\ \varphi_{32}^5 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}, & \begin{cases} \varphi_{33}^4 \\ \varphi_{33}^5 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5b/c \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (7.3.7)$$

При этом оператор геометрии  $\mathbf{A}$  должен иметь вид (7.2.8).

### 7.3.2. Элемент $DSG3M$

Необходимо заметить, что выражения (7.3.3) и (7.3.4) являются приближенными, т.к. зависят от пути интегрирования. Для того, чтобы обеспечить сохранение симметрии расчетных схем, выберем путь интегрирования по медианам треугольника:

$$\begin{aligned} \Delta w_{21} = & (a+b) \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{a} (-w_1 + w_2) + \theta_{y1} (1 - \xi - \eta) + \theta_{y2} \xi + \theta_{y3} \eta \right) \Big|_{\xi=\eta} d\xi + \\ & c \int_0^{1/3} \left( -\frac{b}{ac} (-w_1 + w_2) + \frac{1}{c} (-w_1 + w_3) - \theta_{x1} (1 - \xi - \eta) - \theta_{x2} \xi - \theta_{x3} \eta \right) \Big|_{\xi=\eta} d\eta + \\ & \frac{2a-b}{2} \int_{1/3}^1 \left( \frac{1}{a} (-w_1 + w_2) + \theta_{y1} (1 - \xi - \eta) + \theta_{y2} \xi + \theta_{y3} \eta \right) \Big|_{\eta=\frac{1-\xi}{2}} d\xi + \\ & c \int_{1/3}^0 \left( -\frac{b}{ac} (-w_1 + w_2) + \frac{1}{c} (-w_1 + w_3) - \theta_{x1} (1 - \xi - \eta) - \theta_{x2} \xi - \theta_{x3} \eta \right) \Big|_{\xi=1-2\eta} d\eta = \\ & w_2 - w_1 - \frac{c}{6} \theta_{x1} + \frac{c}{6} \theta_{x2} + \frac{2a+b}{6} \theta_{y1} + \frac{3a-b}{6} \theta_{y2} + \frac{a}{6} \theta_{y3}. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_{31} = & (a+b) \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{a} (-w_1 + w_2) + \theta_{y1} (1 - \xi - \eta) + \theta_{y2} \xi + \theta_{y3} \eta \right) \Big|_{\xi=\eta} d\xi + \\ & c \int_0^{1/3} \left( -\frac{b}{ac} (-w_1 + w_2) + \frac{1}{c} (-w_1 + w_3) - \theta_{x1} (1 - \xi - \eta) - \theta_{x2} \xi - \theta_{x3} \eta \right) \Big|_{\xi=\eta} d\eta + \\ & (2b-a) \int_0^{1/3} \left( \frac{1}{a} (-w_1 + w_2) + \theta_{y1} (1 - \xi - \eta) + \theta_{y2} \xi + \theta_{y3} \eta \right) \Big|_{\eta=1-2\xi} d\xi + \\ & c \int_{1/3}^1 \left( -\frac{b}{ac} (-w_1 + w_2) + \frac{1}{c} (-w_1 + w_3) - \theta_{x1} (1 - \xi - \eta) - \theta_{x2} \xi - \theta_{x3} \eta \right) \Big|_{\xi=\frac{1-\eta}{2}} d\eta = \\ & w_3 - w_1 - \frac{1}{3} c \theta_{x1} - \frac{c}{6} \theta_{x2} - \frac{c}{2} c \theta_{x3} + \frac{2b+a}{6} \theta_{y1} + \frac{b}{6} \theta_{y2} + \frac{3b-a}{6} \theta_{y3}. \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Подставив (7.3.8) и (7.3.9) в (7.3.5), получаем:

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{a} (w_2 - w_1) + \frac{c}{6a} (\theta_{x2} - \theta_{x1}) + \frac{2a+b}{6a} \theta_{y1} + w_2 \frac{1}{a} + \frac{3a-b}{6a} \theta_{y2} + \frac{1}{6} \theta_{y3},$$

$$\gamma_{yz} = w_1 \left( \frac{b}{ac} - \frac{1}{c} \right) + \theta_{x1} \left( \frac{b}{6a} - \frac{1}{3} \right) + \frac{a^2 - b^2}{6ac} \theta_{y1} - \frac{b}{ac} w_2 + \theta_{x2} \left( -\frac{b}{6a} - \frac{1}{6} \right) + \frac{b^2 - 2ab}{6ac} \theta_{y2} + \frac{1}{c} w_3 - \theta_{x3} \frac{1}{2} + \frac{2b-a}{6c} \theta_{y3}. \quad (7.3.10)$$

Тогда:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} \varphi_{11}^4 \\ \varphi_{11}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix}, & \left\{ \begin{matrix} \varphi_{12}^4 \\ \varphi_{12}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6a} \begin{pmatrix} -c \\ b-2a \end{pmatrix}, & \left\{ \begin{matrix} \varphi_{13}^4 \\ \varphi_{13}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6J} \begin{pmatrix} (2a+b)c \\ a^2 - b^2 \end{pmatrix}, \\ \left\{ \begin{matrix} \varphi_{21}^4 \\ \varphi_{21}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}, & \left\{ \begin{matrix} \varphi_{22}^4 \\ \varphi_{22}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6a} \begin{pmatrix} c \\ -a-b \end{pmatrix}, & \left\{ \begin{matrix} \varphi_{23}^4 \\ \varphi_{23}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6J} \begin{pmatrix} (3a-b)c \\ b^2 - 2ab \end{pmatrix}, \\ \left\{ \begin{matrix} \varphi_{31}^4 \\ \varphi_{31}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, & \left\{ \begin{matrix} \varphi_{32}^4 \\ \varphi_{32}^5 \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}, & \left\{ \begin{matrix} \varphi_{33}^4 \\ \varphi_{33}^5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6c} \begin{pmatrix} c \\ 2b-a \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (7.3.11)$$

Оператор геометрии  $\mathbf{A}$  имеет вид (7.2.8).

#### 7.4. Изопараметрический четырехугольник с узлами в вершинах (MITC4)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 7.4-1.

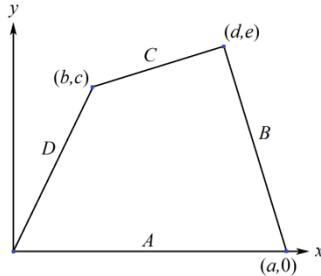


Рис. 7.4-1. Четырехугольник

Используя изопараметрическое преобразование (4.4.32) с полилинейными аппроксимациями (4.4.13), приводим его к единичному квадрату.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

Рассмотрим систему аппроксимирующих функций:

$$\left\{ \varphi_{ij}^r(x, y), i=1,2,3,4, j=1,2,3, \varphi_{ij}^r \in \mathcal{R}^5(\Omega) \right\}, \quad (7.4.1)$$

$$\varphi_{i1}^r(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_i \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{xz}^{i1} \\ \gamma_{yz}^{i1} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{i2}^r(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_i \\ 0 \\ \gamma_{xz}^{i2} \\ \gamma_{yz}^{i2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{i3}^r(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_i \\ \gamma_{xz}^{i3} \\ \gamma_{yz}^{i3} \end{pmatrix}, \quad (7.4.2)$$

где  $\psi_i, i=1,2,3,4$  – функции (4.4.23).

Дифференциальный оператор  $\mathbf{A}$  в геометрических уравнениях (1.3.2) запишем в виде (7.2.8).

Угол сдвига в точке на середине стороны  $ij$  определим через узловые значения:

$$\gamma_{ij} = \frac{w_j - w_i}{a_{ij}} - \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j). \quad (7.4.3)$$

Проецируя на оси системы координат  $\xi\eta$ , получаем для точек А, В, С, D в серединах сторон [102, 103]

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z}^A &= \frac{1}{a_{12}} \left( w_2 - w_1 + \frac{a}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2}) \right), \\ \gamma_{\eta z}^B &= \frac{1}{a_{24}} \left( w_4 - w_2 + \frac{d-a}{2}(\theta_{y2} + \theta_{y4}) - \frac{e}{2}(\theta_{x2} + \theta_{x4}) \right), \\ \gamma_{\xi z}^C &= \frac{1}{a_{34}} \left( w_4 - w_3 + \frac{d-b}{2}(\theta_{y3} + \theta_{y4}) - \frac{e-c}{2}(\theta_{x3} + \theta_{x4}) \right), \\ \gamma_{\eta z}^D &= \frac{1}{a_{13}} \left( w_3 - w_1 + \frac{b}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y3}) - \frac{c}{2}(\theta_{x1} + \theta_{x3}) \right). \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Используя значения сдвигов в серединах сторон, определим значения сдвигов в любой точке пластинки по следующим интерполяционным формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z} &= \frac{1}{a_\xi} \left( a_{12} \gamma_{\xi z}^A (1-\eta) + a_{34} \gamma_{\xi z}^C \eta \right), \\ \gamma_{\eta z} &= \frac{1}{a_\eta} \left( a_{13} \gamma_{\eta z}^D (1-\xi) + a_{24} \gamma_{\eta z}^B \xi \right), \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

где  $a_\xi$  и  $a_\eta$  – длины отрезков прямых в системе координат ХОУ, соединяющих точки на сторонах элемента, которые получены при пересечении соответственно с линиями  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} a_\xi^2 &= (a - (a+b-d)\eta)^2 + (c + (e-c)\eta)^2, \\ a_\eta^2 &= (b + (a+b-d)\xi)^2 + \xi^2 (e-c)^2. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Преобразуем теперь сдвиги из системы координат  $\xi\eta$  в систему координат ХОУ:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z} &= \gamma_{xz} \cos(\psi_\xi) + \gamma_{yz} \sin(\psi_\xi), \\ \gamma_{\eta z} &= \gamma_{xz} \cos(\psi_\eta) + \gamma_{yz} \sin(\psi_\eta). \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

где  $\psi_\xi$  и  $\psi_\eta$  – углы между осью  $x$  и соответственно осями  $\xi$  и  $\eta$ .

$$\begin{aligned} \cos(\psi_\xi) &= \frac{1}{a_\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \sin(\psi_\xi) &= \frac{1}{a_\xi} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \cos(\psi_\eta) &= \frac{1}{a_\eta} \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \sin(\psi_\eta) &= \frac{1}{a_\eta} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

т.к. для преобразования (4.4.28) с полилинейными аппроксимациями (4.4.10):

$$a_{\xi}^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad a_{\eta}^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad (7.4.9)$$

то:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} a_{\xi} \gamma_{\xi z} \\ a_{\eta} \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} a_{12} \gamma_{\xi z}^A (1-\eta) + a_{34} \gamma_{\xi z}^C \eta \\ a_{24} \gamma_{\eta z}^D (1-\xi) + a_{13} \gamma_{\eta z}^B \xi \end{Bmatrix}. \quad (7.4.10)$$

Из (7.4.10) получаем функции (7.4.2):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{11} \\ \gamma_{yz}^{11} \end{Bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \eta - 1 \\ \xi - 1 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{12} \\ \gamma_{yz}^{12} \end{Bmatrix} &= \frac{c}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi - 1 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{13} \\ \gamma_{yz}^{13} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} a(1-\eta) \\ b(1-\xi) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{21} \\ \gamma_{yz}^{21} \end{Bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} 1-\eta \\ -\xi \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{22} \\ \gamma_{yz}^{22} \end{Bmatrix} &= \frac{e}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\xi \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{23} \\ \gamma_{yz}^{23} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} a(1-\eta) \\ (d-a)\xi \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{31} \\ \gamma_{yz}^{31} \end{Bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} -\eta \\ 1-\xi \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{32} \\ \gamma_{yz}^{32} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} (c-e)\eta \\ c(\xi-1) \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{33} \\ \gamma_{yz}^{33} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} (d-b)\eta \\ b(1-\xi) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{41} \\ \gamma_{yz}^{41} \end{Bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{42} \\ \gamma_{yz}^{42} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} (c-e)\eta \\ -e\xi \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{43} \\ \gamma_{yz}^{43} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} (d-b)\eta \\ (d-a)\xi \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

## 7.5. Совместная интерполяция перемещений и углов поворота (*Joint interpolation of displacements and rotations, JIDR*)

### 7.5.1. Критерии полноты и несовместности для элементов теории Рейсснера-Миндлина

Рассмотрим невязку для аппроксимаций *JIDR*:

$$\zeta(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} w(\mathbf{x}) \\ \theta_x(\mathbf{x}) \\ \theta_y(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} - A_1 \sum_i (w_i \boldsymbol{\varphi}_{i1}(\mathbf{x}) + \theta_{xi} \boldsymbol{\varphi}_{i2}(\mathbf{x}) + \theta_{yi} \boldsymbol{\varphi}_{i3}(\mathbf{x})), \quad (7.5.1)$$

где:  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  – матричный оператор, преобразующий функции из пространства  $\mathcal{R}^5(\Omega)$  в  $\mathcal{R}^3(\Omega)$ .

Из уравнений равновесия (7.1.13):

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_y = & -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) \\ & - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Следовательно:

$$\begin{Bmatrix} w(\mathbf{x}) \\ \theta_x(\mathbf{x}) \\ \theta_y(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ w_y + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \dots \\ -w_x - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \dots \end{Bmatrix}. \quad (7.5.3)$$

Разложив в (7.5.1) значения перемещений относительно центра координат, получим:

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}) = & \left\{ \begin{aligned} & w|_{\mathbf{x}=0} + xw_x|_{\mathbf{x}=0} + yw_y|_{\mathbf{x}=0} + \frac{1}{2}x^2w_{xx}|_{\mathbf{x}=0} + xyw_{xy}|_{\mathbf{x}=0} + \frac{1}{2}y^2w_{yy}|_{\mathbf{x}=0} + \dots \\ & w_y|_{\mathbf{x}=0} + xw_{xy}|_{\mathbf{x}=0} + yw_{yy}|_{\mathbf{x}=0} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\lambda}\right)w_{xxy}|_{\mathbf{x}=0} + xyw_{xyy}|_{\mathbf{x}=0} + \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{\lambda}\right)w_{yyy}|_{\mathbf{x}=0} + \dots \\ & -w_x|_{\mathbf{x}=0} - xw_{xx}|_{\mathbf{x}=0} - yw_{xy}|_{\mathbf{x}=0} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\lambda}\right)w_{xxx}|_{\mathbf{x}=0} - xyw_{xxy}|_{\mathbf{x}=0} - \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{\lambda}\right)w_{xyy}|_{\mathbf{x}=0} + \dots \end{aligned} \right\} - \\ & \sum_{i \in \Omega_r} \left( w + x_i w_x + y_i w_y + \frac{1}{2} x_i^2 w_{xx} + x_i y_i w_{xy} + \frac{1}{2} y_i^2 w_{yy} + \dots \right) \Big|_{\mathbf{x}=0} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_{i1} - \\ & \sum_{i \in \Omega_r} \left( w_y + x_i w_{xy} + y_i w_{yy} + \left(\frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda}\right) w_{xxy} + x_i y_i w_{xyy} + \left(\frac{1}{2} y_i^2 + \frac{1}{\lambda}\right) w_{yyy} \right) \Big|_{\mathbf{x}=0} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_{i2} + \quad (7.5.4) \\ & \sum_{i \in \Omega_r} \left( w_x + x_i w_{xx} + y_i w_{xy} + \left(\frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda}\right) w_{xxx} + x_i y_i w_{xxy} + \left(\frac{1}{2} y_i^2 + \frac{1}{\lambda}\right) w_{xyy} \right) \Big|_{\mathbf{x}=0} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_{i3} + \dots \end{aligned}$$

Получаем тождества критерия полноты (2.5.7):

- порядка  $p=1$ :

$$\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \boldsymbol{\varphi}_{i1} \equiv \{1, 0, 0\}^T,$$

$$\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} (x_i \boldsymbol{\varphi}_{i1} - \boldsymbol{\varphi}_{i3}) \equiv \{x, 0, -1\}^T,$$

$$\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} (y_i \boldsymbol{\varphi}_{i1} + \boldsymbol{\varphi}_{i2}) \equiv \{y, 1, 0\}^T; \quad (7.5.5)$$

- порядка  $p=2$ :

$$\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i^2 \boldsymbol{\varphi}_{i1} - x_i \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right) \equiv \left\{ \frac{1}{2} x^2, 0, -x \right\}^T,$$

$$\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} y_i^2 \boldsymbol{\varphi}_{i1} + y_i \boldsymbol{\varphi}_{i2} \right) \equiv \left\{ \frac{1}{2} y^2, y, 0 \right\}^T,$$

$$\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} (x_i y_i \boldsymbol{\varphi}_{i1} + x_i \boldsymbol{\varphi}_{i2} - y_i \boldsymbol{\varphi}_{i3}) \equiv \{xy, x, -y\}^T; \quad (7.5.6)$$

- порядка  $p=3$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{6} x_i^3 \boldsymbol{\varphi}_{i1} - \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right) &\equiv \left\{ \frac{1}{6} x^3, 0, -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{\lambda} \right\}^T, \\
\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i^2 y_i \boldsymbol{\varphi}_{i1} + \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i2} - x_i y_i \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right) &\equiv \left\{ \frac{1}{2} x^2 y, \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{\lambda}, -xy \right\}^T, \\
\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i y_i^2 \boldsymbol{\varphi}_{i1} + x_i y_i \boldsymbol{\varphi}_{i2} - \left( \frac{1}{2} y_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right) &\equiv \left\{ \frac{1}{2} x y^2, xy, -\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{\lambda} \right\}^T, \\
\mathbf{A}_1 \sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{6} y_i^3 \boldsymbol{\varphi}_{i1} + \left( \frac{1}{2} y_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i2} \right) &\equiv \left\{ \frac{1}{6} y^3, \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{\lambda}, 0 \right\}^T.
\end{aligned} \tag{7.5.7}$$

Тождества критерия полноты (7.5.5) и (7.5.6) совпадают с соответствующими тождествами элементов тонкой плиты Кирхгофа-Лява (6.2.9). Совпадают и тождества порядка  $p=3$  (7.5.7) с (6.2.10), если

$$\sum_{i=1}^N \varphi_{ij}^j \equiv 1, \quad j=2,3. \tag{7.5.8}$$

Тождества критерия полноты порядка  $p=1$  являются уравнениями смещения конечного элемента как твердого тела.

Выполнение тождеств критерия полноты порядка  $p \geq 1$  по теореме 2.5.1 в случае совместных аппроксимаций достаточно для сходимости метода при расчете плит средней толщины. Но невыполнение тождеств критерия полноты порядка  $p=2$  приводит к так называемому эффекту запертия, когда при расчете тонких пластин метод сходится не к аналитическому решению. При этом невозможно реализовать тесты о постоянных моментах.

Для всех построенных элементов допускается несовместность только для функций  $\mu_k^j, j=4,5$  в (7.2.7).

Т.к. в функционал при построении матрицы жесткости конечного элемента входят выражения:

$$\mu_k^4 \left( \frac{\partial}{\partial y} \varphi_{ij}^1 - \varphi_{ij}^2 \right), \quad \mu_k^5 \left( \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{ij}^1 + \varphi_{ij}^3 \right), \tag{7.5.9}$$

то критерий несовместности (2.7.3) минимального порядка сводится к проверке равенств:

$$\int_{\Omega_k} \mu_k^j d\Omega = 0, \quad j=4,5, \quad k \leq 4. \tag{7.5.10}$$

Равенства (7.5.10) получаем в силу того, что функции (7.2.7) соответствуют внутренним степеням свободы и не влияют на выполнение тождеств критерия полноты соответствующей совместной системы функций в условиях теоремы (2.7.1).

При выполнении тождеств критерия полноты (7.5.5) и (7.5.6) порядка  $p=2$  и равенств критерия несовместности (7.5.10) будет обеспечена сходимость метода.

### 7.5.2. Системы аппроксимирующих функций

В (7.2.6) зададим:

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^1 &= \varphi_{i2}^2 = \varphi_{i3}^3 = \chi_i, \\ \varphi_{i1}^2 &= \varphi_{i1}^3 = \varphi_{i2}^3 = \varphi_{i3}^2 = 0, \quad \varphi_{ij}^4 = \varphi_{ij}^5 = 0, \quad j=1,2,3, \\ \varphi_{i2}^1, \varphi_{i3}^1 &\text{ — не равны нулю;} \end{aligned} \quad (7.5.11)$$

$\chi_i$  — классические аппроксимации элементов плоской задачи теории упругости.

Для изопараметрических элементов и классических элементов плоской задачи теории упругости выполнены тождества критерия полноты порядка  $p=1$ :

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} \chi_i \equiv 1, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i \chi_i \equiv x, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i \chi_i \equiv y. \quad (7.5.12)$$

Из тождества, соответствующего  $xu$  в (7.5.6) с учетом (7.5.12):

$$\sum_{(i) \in \Omega_r} (x_i y_i \chi_i + x_i \varphi_{i2}^1 - y_i \varphi_{i3}^1) \equiv \sum_{(i),(j) \in \Omega_r} x_i y_j \chi_i \chi_j. \quad (7.5.13)$$

Для сохранения симметрии в расчетных схемах, заданием [118]:

$$\begin{aligned} \varphi_{i2}^1 &= \frac{1}{2} \chi_i \left( \sum_{j \in \Omega_r} y_j \chi_j - y_i \right) = \frac{1}{2} \chi_i (y - y_i), \\ \varphi_{i3}^1 &= -\frac{1}{2} \chi_i \left( \sum_{j \in \Omega_r} x_j \chi_j - x_i \right) = -\frac{1}{2} \chi_i (x - x_i). \end{aligned} \quad (7.5.14)$$

При представлении (7.5.14) выполнены все тождества (7.5.5) и (7.5.6), т.к. согласно (7.5.12):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega_r} \varphi_{i2}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i (y - y_i) = \frac{1}{2} \left( y \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i - \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i y_i \right) = \frac{y}{2} \left( \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i - 1 \right) = 0, \\ \sum_{i \in \Omega_r} \varphi_{i3}^1 &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i (x - x_i) = -\frac{1}{2} \left( x \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i - \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i x_i \right) = -\frac{x}{2} \left( \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i - 1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.5.15)$$

Данный алгоритм уже обеспечивает сходимость метода без эффекта за-пираия, что подтверждается проведенными численными экспериментами.

Для элементов с 3-мя и 4-мя узлами не могут быть выполнены тождества критерия полноты порядка  $p=3$ . Для повышения точности элементов построим функции (7.2.7), воспользовавшись невязками тождеств критерия полноты (7.5.7) порядка  $p=3$ :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \left\{ \frac{1}{6} x^3, 0, -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{\lambda} \right\}^T - \sum_{i \in \Omega_r} \mathbf{A}_1 \left( \frac{1}{6} x_i^3 \boldsymbol{\varphi}_{i1} - \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right), \\ \zeta_2 &= \left\{ \frac{1}{2} x^2 y, \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{\lambda}, -xy \right\}^T - \sum_{i \in \Omega_r} \mathbf{A}_1 \left( \frac{1}{2} x_i^2 y_i \boldsymbol{\varphi}_{i1} + \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i2} - x_i y_i \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3 &= \left\{ \frac{1}{2}xy^2, xy, -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{\lambda} \right\}^T - \sum_{i \in \Omega_r} \mathbf{A}_1 \left( \frac{1}{2}x_i y_i^2 \boldsymbol{\varphi}_{i1} + x_i y_i \boldsymbol{\varphi}_{i2} - \left( \frac{1}{2}y_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i3} \right), \\ \zeta_4 &= \left\{ \frac{1}{6}y^3, \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{\lambda}, 0 \right\}^T - \sum_{i \in \Omega_r} \mathbf{A}_1 \left( \frac{1}{6}y_i^3 \boldsymbol{\varphi}_{i1} + \left( \frac{1}{2}y_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \boldsymbol{\varphi}_{i2} \right).\end{aligned}\quad (7.5.16)$$

Отличные от нуля функции (7.5.16) имеют, как правило, разрывы на сторонах элемента.

Сформируем из невязок (7.5.16) вектора:

$$\boldsymbol{\omega}_k = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \zeta_k^1 + \zeta_k^3 \\ \frac{\partial}{\partial y} \zeta_k^1 - \zeta_k^2 \end{array} \right\}, \quad k=1,2,3,4. \quad (7.5.17)$$

Компоненты функций (7.2.7) зададим следующим образом:

$$\mu_k^4 = \omega_k^1 + a_k, \quad \mu_k^5 = \omega_k^2 + b_k, \quad k=1,2,3,4. \quad (7.5.18)$$

Константы  $a_k, b_k$  в (7.5.18) находим из уравнений критерия несовместности (7.5.10).

Дополним систему аппроксимирующих функций (7.2.7) отличными от нуля и линейно-независимыми функциями (7.5.18), соотнеся их с некоторыми внутренними степенями свободы. При этом, фактически, будет обеспечено условие постоянства перерезывающих сил для соответствующих тестов.

Вместо того, чтобы вводить внутренние степени свободы, можно «разбросать» функции (7.2.7) по аппроксимациям элемента, задавая в (7.2.4)

$$\varphi_{ij}^m = \sum_k c_{ij}^k \mu_k^m, \quad i=1 \div N, j=1,2,3, m=4,5, \quad (7.5.19)$$

где  $c_{ij}^k$  – коэффициенты, для определения которых придется решать системы уравнений, основанные на тождествах критерия полноты.

Пусть используются высокоточные элементы, для которых выполнены для аппроксимаций  $\chi_i$  тождества критерия полноты порядка  $p=2$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i^2 \chi_i \equiv \frac{1}{2} x^2, \quad \sum_{(i) \in \Omega_r} x_i y_i \chi_i \equiv xy, \quad \frac{1}{2} \sum_{(i) \in \Omega_r} y_i^2 \chi_i \equiv \frac{1}{2} y^2. \quad (7.5.20)$$

Для сохранения симметрии в расчетных схемах положим, используя первое и последнее тождества (7.5.7) [118]:

$$\begin{aligned}\varphi_{i2}^1 &= \frac{1}{3} \chi_i \left( \sum_{j \in \Omega_r} y_j \chi_j - y_i \right) = \frac{1}{3} \chi_i (y - y_i), \\ \varphi_{i3}^1 &= -\frac{1}{3} \chi_i \left( \sum_{j \in \Omega_r} x_j \chi_j - x_i \right) = -\frac{1}{3} \chi_i (x - x_i).\end{aligned}\quad (7.5.21)$$

Но тогда:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Omega_r} x_i \phi_{i2}^1 &= \frac{1}{3} \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i x_i (y - y_i) = \frac{1}{3} \left( y \sum_{i \in \Omega_r} x_i \chi_i - \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i x_i y_i \right) = 0, \\
\sum_{i \in \Omega_r} y_i \phi_{i2}^1 &= \frac{1}{3} \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i y_i (y - y_i) = \frac{1}{3} \left( y \sum_{i \in \Omega_r} y_i \chi_i - \sum_{i \in \Omega_r} y_i^2 \chi_i \right) = 0, \\
\sum_{i \in \Omega_r} x_i \phi_{i3}^1 &= -\frac{1}{3} \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i x_i (x - x_i) = -\frac{1}{3} \left( x \sum_{i \in \Omega_r} x_i \chi_i - \sum_{i \in \Omega_r} x_i^2 \chi_i x_i y_i \right) = 0, \\
\sum_{i \in \Omega_r} y_i \phi_{i3}^1 &= -\frac{1}{3} \sum_{i \in \Omega_r} \chi_i y_i (x - x_i) = -\frac{1}{3} \left( y \sum_{i \in \Omega_r} x_i \chi_i - \sum_{i \in \Omega_r} x_i y_i \chi_i \right) = 0. \quad (7.5.22)
\end{aligned}$$

Следовательно, будут выполнены тождества (7.5.6) критерия полноты второго порядка.

Проверим выполнение двух оставшихся тождеств (7.5.7), чтобы убедиться в выполнении критерия полноты 3-го порядка:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i^2 y_i \phi_{i1}^1 + \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \phi_{i2}^1 - x_i y_i \phi_{i3}^1 \right) = \\
&\sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i^2 y_i \chi_i + \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{3} \chi_i (y - y_i) + x_i y_i \frac{1}{3} \chi_i (x - x_i) \right) = \\
&\sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i^2 y_i \chi_i + \frac{1}{6} x_i^2 \chi_i (y - y_i) + \frac{1}{3} x_i y_i \chi_i (x - x_i) \right) = \frac{1}{2} x^2 y, \\
&\sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i y_i^2 \phi_{i1}^1 + x_i y_i \phi_{i2}^1 - \left( \frac{1}{2} y_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \phi_{i3}^1 \right) = \\
&\sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i y_i^2 \chi_i + x_i y_i \frac{1}{3} \chi_i (y - y_i) + \left( \frac{1}{2} y_i^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{3} \chi_i (x - x_i) \right) = \\
&\sum_{i \in \Omega_r} \left( \frac{1}{2} x_i y_i^2 \chi_i + \frac{1}{3} x_i y_i \chi_i (y - y_i) + \frac{1}{6} y_i^2 \chi_i (x - x_i) \right) = \frac{1}{2} x y^2. \quad (7.5.23)
\end{aligned}$$

Для построения аппроксимаций (7.2.4) в методе *JDR* можно использовать аппроксимирующие функции конечных элементов *теории тонких пластин Кирхгофа-Лява*.<sup>1</sup>

Пусть в (7.2.6):

$$\begin{aligned}
\phi_{ij}^1 &= \psi_{ij}, \quad \phi_{ij}^2 = \phi_{ij}^3 = \chi_i, \\
\phi_{i1}^2 &= \phi_{i1}^3 = \phi_{i2}^3 = \phi_{i3}^2 = \phi_{ij}^4 = \phi_{ij}^5 = 0, \quad i=1 \div N, j=1,2,3,
\end{aligned} \quad (7.5.24)$$

где

- $\psi_{ij}$  – система аппроксимирующих функций элемента тонкой пластины Кирхгофа-Лява, соответствующая степеням (7.2.2). Как правило, они удовлетворяют тождествам критерия полноты второго порядка, если не

<sup>1</sup> Численные эксперименты не дали, правда, увеличения точности расчетов при значительном усложнении построения соответствующих аппроксимаций.

третьего. При этом для совместности уже достаточно, чтобы они принадлежали пространству Соболева  $W_2^1$ , а не  $W_2^2$ ;

- $\chi_i$  – система аппроксимирующих функций элемента плоской задачи теории упругости.

По невязкам (7.5.16) строим функции (7.5.17). Вычисляем константы в (7.5.18) из уравнений (7.5.10). Анализируем построенную систему функций (10) и дополняем систему аппроксимирующих функций (7.2.4) *отличными от нуля и линейно-независимыми* функциями, соотнеся их с некоторыми внутренними степенями свободы.

*Ошибкой будет задать функции, соответствующие углам поворота, через производные  $\psi_{ij}$ :*

$$\varphi_{i2}^j = \frac{\partial}{\partial y} \psi_{ij}, \quad \varphi_{i3}^j = -\frac{\partial}{\partial x} \psi_{ij} \quad i=1 \div N, j=1,2,3. \quad (7.5.25)$$

Зависимость аппроксимаций функций углов поворота от вертикальных перемещений приводит к существенному сужению искомого пространства для решения вариационной задачи. Так, например, при расчете шарнирно опертой пластины получим *нулевые перерезывающие силы* при хорошей сходимости по перемещениям и моментам.

## 7.6. Треугольные элементы метода JDR

### 7.6.1. Треугольник с узлами в вершинах (JDR3)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 7.3-1.

Преобразованием (6.4.1) приводим его к прямоугольному треугольнику с единичными катетами.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) зададим линейные аппроксимации (4.4.5). Тогда, учитывая (7.5.14), получаем полиномы второго порядка:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^1 &= \varphi_{12}^2 = \varphi_{13}^3 = 1 - \xi - \eta, \\ \varphi_{12}^1 &= \frac{c}{2} \eta (1 - \xi - \eta), \\ \varphi_{13}^1 &= -\frac{1}{2} (1 - \xi - \eta) (a\xi + b\eta), \\ \varphi_{21}^1 &= \varphi_{22}^2 = \varphi_{23}^3 = \xi, \\ \varphi_{22}^1 &= \frac{c}{2} \xi \eta, \\ \varphi_{23}^1 &= -\frac{1}{2} \xi (a\xi + b\eta - a), \\ \varphi_{31}^1 &= \varphi_{32}^2 = \varphi_{33}^3 = \eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{32}^1 &= \frac{c}{2}\eta(\eta-1), \\
\varphi_{33}^1 &= -\frac{1}{2}\eta(a\xi + b\eta - b) \\
\psi_{i1}^2 = \psi_{i1}^3 &= 0, \quad i=1,2,3, \quad \psi_{ij}^4 = \psi_{ij}^5 = 0, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3.
\end{aligned} \tag{7.6.1}$$

Невязки (7.5.16) равны:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^3}{6} - \frac{a^3}{6}\xi - \frac{b^3}{6}\eta - \frac{a^2}{4}\xi(x-a) - \frac{b^2}{4}\eta(x-b) \\ 0 \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\xi + \frac{b^2}{2}\eta \end{array} \right\}, \\
\zeta_2 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2y}{2} - \frac{b^2c}{2}\eta - \frac{a^2}{4}\xi y - \frac{b^2}{4}\eta(y-c) - \frac{bc}{2}\eta(x-b) \\ \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\xi - \frac{b^2}{2}\eta \\ -xy + bc\eta \end{array} \right\}, \\
\zeta_3 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{xy^2}{2} - \frac{bc^2}{2}\eta - \frac{bc}{2}\eta(y-c) - \frac{c^2}{4}\eta(x-b) \\ xy - bc\eta \\ -\frac{y^2}{2} + \frac{c^2}{2}\eta \end{array} \right\}, \\
\zeta_4 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^3}{6} - \frac{c^3}{6}\eta - \frac{c^2}{4}\eta(y-c) \\ \frac{y^2}{2} - \frac{c^2}{2}\eta \\ 0 \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.6.2}$$

Строим вектора (7.5.17):

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{12c} \left\{ \begin{array}{l} a^2c + 3(b-a)by \\ (a-b)(-a^2 + 3bx) \end{array} \right\}, & \omega_2 &= \frac{2b-a}{4} \left\{ \begin{array}{l} y \\ -x \end{array} \right\}, \\
\omega_3 &= \frac{c}{4} \left\{ \begin{array}{l} y \\ -x+b \end{array} \right\}, & \omega_4 &= \frac{c^2}{12} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -1 \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

Подставив (7.6.3) в (7.5.18), находим значения констант  $a_k, b_k$  из уравнений критерия несовместности (7.5.10). Отбрасывая функции, равные нулю и линейнонезависимые, получаем только одну функцию (7.2.7):

$$\mu_1 = \{0, 0, 0, c(3\eta-1), a+b-3(a\xi + b\eta)\}^T, \tag{7.6.4}$$

соответствующую внутренней степени свободы.

### 7.6.2. Шестиузловой треугольник (JDR6)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 4.4-2а. Преобразование (4.4.3) приводит его к виду на рис. 4.4-2б.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) определим аппроксимации (4.4.8). Т.к. функции (4.4.8) удовлетворяют тождествам критерия полноты второго порядка (7.5.20), то можно использовать формулы (7.5.21) для задания  $\varphi_{i2}^1, \varphi_{i3}^1$ . При этом будут выполнены все тождества критерия полноты третьего порядка (7.5.7), а все невязки (7.5.16) равны нулю.

### 7.6.3. Изопараметрический шестиузловой треугольник (JDR6IP)

Изопараметрическим преобразованием (4.4.32) с помощью системы функций (4.4.8) приводим его к треугольнику, изображенному на рис. 4.4-9б.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) определим аппроксимации (4.4.8).

Строим невязки (7.5.16) и, соответственно, функции (7.5.17). Подставив полученные функции в (7.5.18), находим значения констант  $a_k, b_k$  из уравнений критерия несовместности (7.5.10).

Если узлы 4, 5, 6 находятся на серединах сторон элемента, то имеем линейный Якобиан преобразования. Т.к. функции (4.4.8) удовлетворяют тождествам критерия полноты второго порядка (7.5.20), то можно использовать формулы (7.5.21) для задания  $\varphi_{i2}^1, \varphi_{i3}^1$ . При этом будут выполнены все тождества критерия полноты третьего порядка (7.5.7), а все невязки (7.5.16) равны нулю.

## 7.7. Прямоугольные элементы JDR

### 7.7.1. Четырехузловой элемент (JDR4RIC)

Рассмотрим прямоугольник, изображенный на рис. 7.7-1а. Выполним преобразование системы координат в единичный квадрат:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (7.7.1)$$

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) зададим полилинейные аппроксимации (4.4.10). Тогда, учитывая (7.5.14):

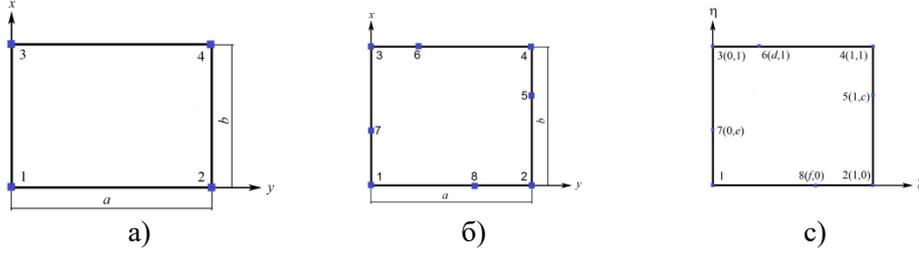


Рис. 7.7-1. Прямоугольные элементы

$$\begin{aligned}
 \varphi_{11}^1 &= \varphi_{12}^2 = \varphi_{13}^3 = (1-\xi)(1-\eta), \\
 \varphi_{12}^1 &= \frac{b}{2}(1-\xi)\eta(1-\eta), \\
 \varphi_{13}^1 &= -\frac{a}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta), \\
 \varphi_{21}^1 &= \varphi_{22}^2 = \varphi_{23}^3 = \xi(1-\eta), \\
 \varphi_{22}^1 &= \frac{b}{2}\xi\eta(1-\eta), \\
 \varphi_{23}^1 &= -\frac{a}{2}\xi(\xi-1)(1-\eta), \\
 \varphi_{31}^1 &= \varphi_{32}^2 = \varphi_{33}^3 = (1-\xi)\eta, \\
 \varphi_{32}^1 &= \frac{b}{2}(1-\xi)\eta(\eta-1), \\
 \varphi_{33}^1 &= -\frac{a}{2}\xi(1-\xi)\eta, \\
 \varphi_{41}^1 &= \varphi_{42}^2 = \varphi_{43}^3 = \xi\eta, \\
 \varphi_{42}^1 &= \frac{b}{2}\xi\eta(\eta-1), \\
 \varphi_{43}^1 &= -\frac{a}{2}\xi(\xi-1)\eta, \\
 \psi_{i1}^2 &= \psi_{i1}^3 = 0, \quad i=1,2,3,4, \quad \psi_{ij}^4 = \psi_{ij}^5 = 0, \quad i=1,2,3,4, \quad j=1,2,3.
 \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

Невязки (7.5.16) равны:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= \frac{a^2}{12} \begin{Bmatrix} a(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) \\ 0 \\ -6\xi(\xi-1) \end{Bmatrix}, & \zeta_2 &= \frac{a^2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi(\xi-1) \\ 0 \end{Bmatrix}, \\
 \zeta_3 &= \frac{b^2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\eta(\eta-1) \end{Bmatrix}, & \zeta_4 &= \frac{b^2}{12} \begin{Bmatrix} b(\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ 6\eta(\eta-1) \\ 0 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.7.3}$$

Строим вектора (7.5.17):

$$\omega_1 = \frac{a^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = \frac{a^2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi(1-\xi) \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{b^2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta(1-\eta) \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_4 = \frac{b^2}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.7.4)$$

Подставив (7.7.4) в (7.5.18), находим значения констант  $a_k, b_k$  из уравнений критерия несовместности (7.5.10). Отбрасывая функции равные нулю, получаем две функции (7.2.7):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1 &= \{0, 0, 0, 0, 1 - 6\xi + 6\xi^2\}^T, \\ \boldsymbol{\mu}_2 &= \{0, 0, 0, 1 - 6\eta + 6\eta^2, 0\}^T, \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

соответствующие внутренним степеням свободы.

### 7.7.2. Восьмиузловой прямоугольный элемент (JDR8RIC)

Рассмотрим прямоугольник, изображенный на рис. 7.7-1b. Преобразование (7.7.1) приводит его к виду на рис. 7.7-1c.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) определим аппроксимации (4.4.15). Т.к. функции (4.4.15) удовлетворяют тождествам критерия полноты второго порядка (7.5.20), то можно использовать формулы (7.5.21) для задания  $\varphi_{i2}^1, \varphi_{i3}^1$ . При этом будут выполнены все тождества критерия полноты третьего порядка (7.5.7), а все невязки (7.5.16) равны нулю.

## 7.8. Четырехугольные элементы JDR

### 7.8.1. Изопараметрический четырехузловой элемент (JDR4I)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 7.4-1.

Преобразованием (4.4.32) приводим его к единичному квадрату, используя полилинейные аппроксимации (4.4.13).

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) используем полилинейные аппроксимации (4.4.13). Применив (7.5.14):

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^1 &= \varphi_{i2}^2 = \varphi_{i3}^3 = \chi_i, \quad i=1,2,3,4, \\ \varphi_{12}^1 &= \frac{1}{2}y\chi_1, & \varphi_{13}^1 &= -\frac{1}{2}x\chi_1, \\ \varphi_{22}^1 &= \frac{1}{2}y\chi_2, & \varphi_{23}^1 &= -\frac{1}{2}(x-a)\chi_2, \\ \varphi_{32}^1 &= \frac{1}{2}(y-c)\chi_3, & \varphi_{33}^1 &= -\frac{1}{2}(x-b)\chi_3, \\ \varphi_{42}^1 &= \frac{1}{2}(y-e)\chi_4, & \varphi_{43}^1 &= -\frac{1}{2}(x-d)\chi_4. \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

Строим невязки (7.5.16) и, соответственно, функции (7.5.17). Подставив полученные функции в (7.5.18), находим значения констант  $a_k, b_k$  из уравнений критерия несовместности (7.5.10). Для прямоугольника остаются только две функции (7.7.5).

### 7.8.2. Изопараметрический восьмиузловой элемент (JIDR8I)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 4.4-10а.

Изопараметрическим преобразованием (4.4.32) приводим его к единичному квадрату, используя кубические аппроксимации (4.4.16).

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) возьмем функции (4.4.16) и воспользуемся формулами (7.5.14).

Строим невязки (7.5.16) и, соответственно, функции (7.5.17). Подставив полученные функции в (7.5.18), находим значения констант  $a_k, b_k$  из уравнений критерия несовместности (7.5.10).

Для параллелограмма, если узлы 5, 6, 7, 8 находятся на серединах сторон элемента, то имеем линейный Якобиан преобразования. Следовательно, функции  $\varphi_{i2}^1, \varphi_{i3}^1$  можно определить по формулам (7.5.21). В этом случае будет выполнен критерий полноты 3-го порядка, а все невязки (7.5.16) равны нулю.

### 7.8.3. Четырехузловой элемент (JIDRSA)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 6.6-1а.

Преобразованием (2.12.6) приводим его к четырехугольнику, изображенному на рис. 6.6-1б.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) возьмем функции (4.4.23) и воспользуемся формулами (7.5.14).

Строим невязки (7.5.16) и, соответственно, функции (7.5.17). Подставив полученные функции в (7.5.18), находим значения констант  $a_k, b_k$  из уравнений критерия несовместности (7.5.10).

### 7.8.4. Восьмиузловой элемент (JIDR8SA)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 6.6-1а, у которого узлы находятся на сторонах элемента. Преобразованием (2.12.6) приводим его к четырехугольнику, изображенному на рис. 6.6-1б.

В каждом узле  $i$ -го элемента вводится три степени свободы (7.2.2).

В системе аппроксимирующих функций (7.2.6) возьмем функции (4.4.24).

Функции  $\varphi_{i2}^1, \varphi_{i3}^1$  определяем по формулам (7.5.21), т.к. выполнен критерий полноты 2-го порядка для функций (4.4.24). Т.е. все невязки (7.5.16) равны нулю.

## 7.9. Тесты

Все описанные в данной главе конечные элементы используют или полиномиальные аппроксимации поля перемещений по всему телу, или кусочнополиномиальные. При этом по построению всегда выполнены условия

критерия полноты (2.5.7) порядка  $p \geq 1$  для всех рассмотренных элементов, а для несовместных элементов - критерий несовместности порядка 1.

Все рассмотренные элементы обеспечивают, как минимум, первый порядок сходимости по напряжениям, а по перемещениям - второй. Для совместных элементов с промежуточными узлами на сторонах, удовлетворяющих критерию полноты порядка  $p=3$ , скорости сходимости увеличиваются.

Для элементов задействованы все приведенные в статье аппроксимации, соответствующие «внутренним» степеням свободы элементов.

В таблице 7.9-1 приведены цифровые коды типов элементов, которые приняты в вычислительном комплексе SCAD [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

**Таблица 7.9-1.** Типы элементов для расчета плит средней толщины

Тип элемента	Число узлов	Описание
111	4	прямоугольный, <i>JIDR4R</i> , разд.7.7.1
112	3	треугольный, <i>JIDR3</i> , разд.7.6.1
115	3-6	треугольный, <i>JIDR</i> , п.7.6.1, 7.6.2
116	4-8	четырёхугольный, <i>JIDRIP</i> , разд.7.8.1, 7.8.2
118	3-6	треугольный, <i>JIDRIP</i> , разд.7.6.3
119	4	четырёхугольный, <i>JIDRSA</i> , разд.7.8.3
120	4-8	четырёхугольный, <i>JIDRSA</i> , разд.7.8.3, 7.8.4.
512	3	треугольный, <i>DSG3M</i> , разд.7.3.2
517	4	четырёхугольный, <i>MITC4</i> , <i>IP</i> , п.7.4
518	3	треугольный, <i>DSG3</i> , разд.7.3.1

### 7.9.1. Патологические (patch) тесты

Все патологические тесты, приведенные в разд. 6.7.1, выполнены с точностью до вычислительной погрешности.

### 7.9.2. Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки

Рассмотрим свободно опертую по периметру прямоугольную пластину под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки (рис. 6.7-2). Зададим, как и в разд. 6.7.2:

$$E = 30000 \text{ кПа}, \nu = 0.3, h = 0.2 \text{ м}, a = 2.4 \text{ м}, b = 4.8 \text{ м}, p = 1.0 \text{ кПа}.$$

По контуру плиты задано шарнирное закрепление:

$$w|_r = 0, \quad \theta_x(0, y) = \theta_x(a, y) = 0, \quad \theta_y(x, 0) = \theta_y(x, b) = 0.$$

Для исследования режима запыриания толщина пластины варьировалась от  $h=0.001=a/2400$  до  $h=1.2=a/2$ .

Таблица 7.9-2. Перемещения, моменты и перерезывающие силы в прямоугольной пластине

Тип сетки	Тип элемента	Перемещение $w_A$ (m)						Момент $M_{x,A}$ (кНм/m)						Перерезывающая сила $Q_{x,B}$ (кН/m)					
		Сетка						Сетка						Сетка					
		2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16	2x2	4x4	8x8	16x16		
A	111, 116, JIDR4	-0.2302	-0.2382	-0.2393	-0.2396	0.585	0.5847	0.5852	0.5856	1.1523	0.9224	1.0376	1.0782						
	517, MTC4	-0.2364	-0.2384	-0.2394	-0.2397	0.5736	0.5809	0.5845	0.5854	0.8226	0.9676	1.0415	1.0787						
B	112, 115, 118	-0.1838	-0.2311	-0.2377	-0.2393	0.4276	0.5581	0.5788	0.5841	0.9327	1.0717	1.108	1.1274						
	512, DSG3M	-0.1773	-0.2298	-0.2374	-0.2392	0.4141	0.5594	0.5802	0.5847	0.8837	1.0436	1.0943	1.1209						
C	518, DSG3	-0.0879	-0.2171	-0.2367	-0.2393	0.2172	0.5315	0.5765	0.5838	1.2419	1.0958	1.0861	1.1369						
	116, JIDR4I	-0.2097	-0.237	-0.2388	-0.2395	0.4737	0.5695	0.5819	0.5854	1.1062	1.1911	0.9985	1.0187						
D	120, JIDR8A4	-0.2165	-0.2372	-0.2388	-0.2395	0.4761	0.5692	0.582	0.5854	0.6731	0.8911	0.9635	1.0125						
	517, MTC4	-0.2335	-0.2385	-0.2389	-0.2395	0.454	0.5872	0.5852	0.5867	0.7938	0.9263	0.9666	1.0028						
E	112, 115, 118	-0.1941	-0.2317	-0.2379	-0.2393	0.4239	0.5473	0.5802	0.5854	1.5143	0.8798	0.8864	0.9576						
	512, DSG3M	-0.1678	-0.2254	-0.2368	-0.239	0.3675	0.5381	0.5812	0.5865	1.3025	0.8454	0.8922	0.9639						
F	518, DSG3	-0.1627	-0.222	-0.2375	-0.2393	0.3379	0.5152	0.5815	0.5861	1.3485	0.7916	0.807	0.8326						
	111, 116, 120	-0.2404	-0.2398	-0.2398	-0.2398	0.6078	0.5906	0.5869	0.586	0.7642	0.9301	1.035	1.0773						
G	115, JIDR6SA	-0.2414	-0.2399	-0.2398	-0.2398	0.659	0.6019	0.5894	0.5866	0.8142	1.0022	1.0659	1.0912						
	118, JIDR6I	-0.2406	-0.2398	-0.2398	-0.2409	0.649	0.5996	0.599	0.5865	0.9167	1.0437	1.086	1.1017						
H	116, JIDR8I	-0.2417	-0.2396	-0.2397	-0.2398	0.6671	0.5985	0.5874	0.5861	0.5796	0.8685	1.0047	1.0616						
	120, JIDR8SA-	-0.243	-0.2398	-0.2398	-0.2398	0.6886	0.6053	0.59	0.5868	0.6678	0.8929	0.9995	1.0595						
	115, JIDR6SA	-0.2424	-0.2398	-0.2398	-0.2398	0.6849	0.604	0.5902	0.587	0.8495	0.9604	1.0436	1.082						
	118, JIDR6I	-0.2427	-0.2398	-0.2398	-0.2398	0.6836	0.6032	0.5902	0.5869	0.8572	1.0045	1.0657	1.0925						

Расчетные схемы 2x2 приведены на рис. 7.7.3. Они такие же, как и для тонкой плиты. В таблице 7.9-2 даны результаты расчета для тонкой пластинки при  $h=0.08=a/30$ .

Аналитическое решение данной задачи<sup>1</sup>:

$$w|_A = 0.239759m,$$

$$M_x|_A = 0.585695(kHm/m), M_y|_A = 0.266978(kHm/m),$$

$$Q_x|_B = 1.11602(kH/m).$$

### 7.9.3. Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим защемленную по контуру правильную шестиугольную пластину под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки, рассмотренную в разд. 6.7.3.

Получено численное решение данной задачи по теории Рейсснера-Миндлина с высокой степенью точности<sup>2</sup>: в центре пластины в точке А:

$$w_A = -38.749 \text{ mm}, M_x = 0.6511 \text{ kHm/m}^3.$$

Результаты расчетов для расчетных схем, приведенных на рис. 6.7-6, приведены в таблице 7.9-3.

**Таблица 7.9-3.** Перемещения и моменты в центре шестиугольной пластинки

Тип сетки	Тип элемента	Перемещение $w_A$ (mm)				Момент $M_{x,A}$ (kHm/m)			
		Сетка				Сетка			
		1x1	2x2	4x4	8x8	1x1	2x2	4x4	8x8
А	517, MITC4	-36.619	-37.916	-38.57	-38.704	0.7259	0.6573	0.656	0.6524
	116, JIDR4I	-27.752	-35.899	-38.081	-38.584	0.5335	0.6405	0.6479	0.6504
	120, JIDR4SA	-29.89	-35.932	-38.09	-38.586	0.5236	0.6439	0.6478	0.6504
В	112, JIDR3	-21.339	-34.954	-37.885	-38.53	0.418	0.6197	0.645	0.6497
	512, DSG3M	-25.151	-36.226	-38.215	-38.613	0.501	0.6536	0.6551	0.6526
	518, DSG3	-21.051	-34.293	-38.079	-38.655	0.3563	0.6328	0.6495	0.6507
С	116, JIDR8	-36.853	-38.559	-38.717	-38.743	0.7235	0.6602	0.654	0.6518
	120, JIDR8SA	-37.37	-38.614	-38.734	-38.747	0.7317	0.6657	0.6549	0.6521
Д	115, 118, JIDR6	-37.47	-38,66	-38.739	-38.747	0.6842	0.6613	0.6538	0.6518

<sup>1</sup> Аналитическое решение по пространственной теории  $w|_A = 0.239663$ , по теории Кирхгофа-Лява –  $w|_A = 0.238907m$ , значения моментов и перерезывающих сил совпадают.

<sup>2</sup> Решения выполнялись различными типами конечных элементов. Максимальный порядок системы уравнений – 2747925.

<sup>3</sup> Сравните с решением по теории тонких пластин Кирхгофа-Лява, приведенное в разд. 6.7.7.

## Глава 8. Осесимметричная задача теории упругости

### 8.1. Тела вращения

**Телом вращения** называется объёмное тело, возникающее при вращении плоской геометрической фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости. Пусть, как изображено на рис. 8.1-1а, это будет ось  $OZ$ , относительно которой симметричны также нагрузки и связи.

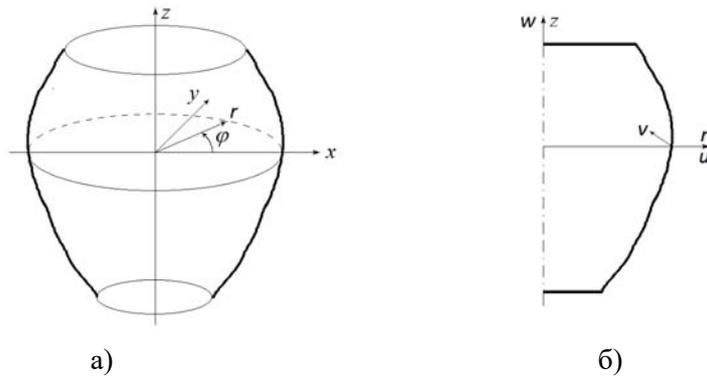


Рис. 8.1-1. Тело вращения

Введем цилиндрическую систему координат  $r\varphi z$  и рассмотрим произвольное сечение тела плоскостью, проходящей через ось  $OZ$ :

$u$  и  $w$  – перемещения вдоль соответствующих осей в системе координат  $rz$  (рис. 8.1-1б):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \{ \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{r\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{\varphi z} \}^T - \text{деформации};$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \{ \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z} \}^T - \text{нормальные и касательные напряжения}.$$

Т.к.  $OZ$  является осью симметрии, то перемещения точек в этой плоскости не зависят от  $\varphi$ :

$$u(\mathbf{x}) = u(r, z), \quad w(\mathbf{x}) = w(r, z). \quad (8.1.1)$$

**Геометрические уравнения** (3.1.4) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial r} u, & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} u, & \varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} w, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial r} w, & \gamma_{r\varphi} &= \gamma_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

**Физические уравнения** для изотропного материала следуют из (3.1.7):

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 2G\varepsilon_r + \lambda\vartheta, & \sigma_{rz} &= G\tau_{rz}, \\
\sigma_\varphi &= 2G\varepsilon_\varphi + \lambda\vartheta, & \sigma_{\varphi\varphi} &= 0, \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\vartheta, & \sigma_{\varphi z} &= 0,
\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

где  $\vartheta = \frac{\partial}{\partial r}u + \frac{u}{r} + \frac{\partial}{\partial z}w$  – объемная деформация;

$\lambda$  и  $G$  – коэффициенты Ляме (3.1.8).

Из **уравнений равновесия** (3.1.2) для изотропного материала:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2G)\frac{\partial}{\partial r}\Delta + 2G\frac{\partial}{\partial r}\omega &= F_r, \\
(\lambda + 2G)\frac{\partial}{\partial z}\Delta - 2G\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) &= F_z,
\end{aligned} \tag{8.1.4}$$

$\omega$  – усредненный угол поворота (3.1.16) вокруг оси, ортогональной плоскости сечения

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial}{\partial r}w\right), \tag{8.1.5}$$

$F_r$  и  $F_z$  – радиальная и осевая нагрузки по кругу, образованному вращением точки тела вокруг оси  $OZ$ .

В самом общем случае, используя (3.1.10), получим физические уравнения и уравнения равновесия для анизотропного материала.

*Краевыми условиями* в точках на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$  могут быть:

- **кинематические**, когда заданы значения перемещений. Если на части поверхности заданы обе нулевые компоненты перемещений, то говорят о жестком защемлении. Данные краевые условия являются главными при решении вариационной задачи минимизации функционала Лагранжа;
- **статические граничные условия** – равенство внутренних усилий поверхностным нагрузкам в точках границы. Данные краевые условия являются естественными при решении вариационной задачи минимизации функционала Лагранжа;
- в силу симметрии на оси  $OZ$ :  $u(0,z)=0$ .

Введем дифференциальный оператор геометрии  $A$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{8.1.6}$$

Тогда в матричной форме:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \tag{8.1.7}$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица упругости (3.1.9) для изотропного материала и (3.1.10) – для анизотропного.

**Функционал Лагранжа**

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{ADu})^T \mathbf{ADu} d\Omega - \int_{\Omega} (F_r u + F_z w) d\Omega = \\ & \pi \int_F r (\mathbf{ADu})^T \mathbf{ADu} dF - 2\pi \int_F r (F_r u + F_z w) dF, \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

где  $F$  – плоская геометрическая фигура, образующая тело вращения.

**8.2. Степени свободы и аппроксимации**

Осесимметричная задача теории упругости сводит трехмерную пространственную задачу к двумерной. Т.к. уравнения равновесия имеют второй порядок дифференцирования, то для построения конечных элементов используют, как правило, аппроксимирующие функции плоской задачи теории упругости, описанные в *Главе 4*. Использование схем численного интегрирования с внутренними точками позволяет обойти особенности подинтегрального выражения в (8.1.8), которое вырождается при  $r=0$ .

**Элементы с двумя степенями свободы в узле**

Классические конечные элементы в каждом узле имеют по две степени свободы:  $u_i, w_i, i=1,2,\dots,N_r$ , где  $N_r$  – число узлов элемента.

Вводится система функций (р.4.4):

$$\{\varphi_{ij}^r(r, z), (i) \in \Omega_r, j = 1, 2\}, \quad (8.2.1)$$

а поле перемещений представляется в виде:

$$\mathbf{u}(r, z) = \sum_{(i) \in \Omega_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r), \quad (8.2.2)$$

$$\varphi_{i,1}^r = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_{i,2}^r = \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_i \end{Bmatrix}, \quad \psi_i \in \mathcal{R}^1, i=1,2,\dots,N_r. \quad (8.2.3)$$

Конечные элементы имеют  $2N_r$  степеней свободы, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{u_1, v_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}\}, \text{ и, соответственно, } \{\varphi_{1,1}^r, \varphi_{1,2}^r, \dots, \varphi_{N_r,1}^r, \varphi_{N_r,2}^r\}. \quad (8.2.4)$$

При построении конечных элементов с двумя степенями свободы в узле можно использовать в (8.2.3) любые системы аппроксимирующих функций, приведенные в разд. 4.4.

**Элементы с квазивращательными и вращательными степенями свободы**

Более сложными являются элементы метода перемещений с тремя степенями свободы в узле, когда к значениям перемещений  $u_i, w_i$  добавляется *усредненный угол поворота* (8.1.5), который характеризует поворот бесконечно малого объема, окружающего точку  $\mathbf{x}$  [5]. Данная величина инвариантна относительно ортогональных преобразований систем координат.

При построении конечных элементов воспользуемся [117]:

- квазивращательными степенями свободы (разд. 4.5);
- совместными аппроксимациями (разд. 4.7).

При трех степенях свободы в узле конечные элементы имеют  $3N_r$  степеней свободы, которые при формировании матрицы жесткости элемента располагаются в следующем порядке:

$$\{u_1, v_1, \omega_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, \omega_{N_r}\} \text{ или } \{u_1, v_1, \theta_1, \dots, u_{N_r}, v_{N_r}, \theta_{N_r}\}, \quad (8.2.5)$$

и соответствующую им систему аппроксимирующих функций:

$$\{\varphi_{ij}^r(r, z), (i) \in \Omega_r, j = 1, 2, 3\}. \quad (8.2.6)$$

Поле перемещений для степеней свободы  $\theta_i / \omega_i$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \sum_{i=1}^{N_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r + \theta_i \varphi_{i,3}^r) = \\ & \sum_{i=1}^{N_r} \left\{ \begin{array}{l} u_i \varphi_{i1,u} + v_i \varphi_{i2,u} + \theta_i \varphi_{i3,u} \\ u_i \varphi_{i1,v} + v_i \varphi_{i2,v} + \theta_i \varphi_{i3,v} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Обозначим вектора нормали к стороне элемента в плоскости  $rOZ$ :

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{1}{a_{ij}} \begin{Bmatrix} n_{ij,r} \\ n_{ij,z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{ij}} \begin{Bmatrix} z_j - z_i \\ r_i - r_j \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_{ij} = \frac{1}{a_{ij}} \begin{Bmatrix} n_{ij,z} \\ -n_{ij,r} \end{Bmatrix}, \quad (8.2.8)$$

$a_{ij}$  – длина стороны  $ij$ .

При построении матриц жесткости осесимметричных элементов в связи с наличием особенности в подинтегральном выражении (8.1.8) на оси  $OZ$  имеет смысл использовать высокоточные схемы численного интегрирования.

### 8.3. Элементы с квазивращательными степенями свободы

#### 8.3.1. Треугольный элемент (QRDF3A)

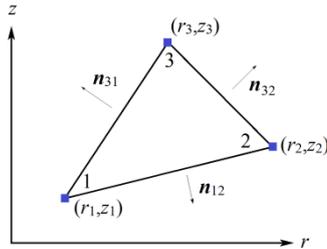


Рис. 8.3-1. Треугольный элемент

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис 8.3-1. Заменой координат (8.3.1) он преобразуется к прямоугольному треугольнику с единичными катетами.

$$\begin{aligned} r &= r_1 + (r_2 - r_1)\xi + (r_3 - r_1)\eta, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Условием (4.3.6) удовлетворяет следующая аппроксимация перемещений:

$$\begin{aligned}
u(r,z) &= (1-\xi-\eta)u_1 + \xi u_2 + \eta u_3 + \frac{1}{2}a_{12}n_{12,r}\xi\eta(\theta_2 - \theta_1) + \\
&\quad \frac{1}{2}a_{23}n_{32,r}\xi\eta(\theta_3 - \theta_2) + \frac{1}{2}a_{13}n_{13,r}(1-\xi-\eta)\eta(\theta_1 - \theta_3), \\
v(r,z) &= (1-\xi-\eta)v_1 + \xi v_2 + \eta v_3 + \frac{1}{2}a_{12}n_{12,z}\xi\eta(\theta_2 - \theta_1) + \\
&\quad \frac{1}{2}a_{23}n_{32,z}\xi\eta(\theta_3 - \theta_2) + \frac{1}{2}a_{13}n_{13,z}(1-\xi-\eta)\eta(\theta_1 - \theta_3), \quad (8.3.2)
\end{aligned}$$

а функции системы (8.2.6) имеют вид:

$\varphi_{i,j}, j=1,2$  – совпадают с линейными аппроксимациями (4.4.5);

$$\begin{aligned}
\varphi_{13} &= \frac{1-\xi-\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} a_{13}n_{13,r}\eta - a_{12}n_{12,r}\xi \\ a_{13}n_{13,z}\eta - a_{12}n_{12,z}\xi \end{array} \right\}, \\
\varphi_{23} &= \frac{\xi}{2} \left\{ \begin{array}{l} a_{12}n_{12,r}(1-\xi-\eta) - a_{23}n_{32,r}\eta \\ a_{12}n_{12,z}(1-\xi-\eta) - a_{23}n_{32,z}\eta \end{array} \right\}, \\
\varphi_{33} &= \frac{\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} a_{23}n_{32,r}\xi - a_{13}n_{13,r}(1-\xi-\eta) \\ a_{23}n_{32,z}\xi - a_{13}n_{13,z}(1-\xi-\eta) \end{array} \right\}. \quad (8.3.3)
\end{aligned}$$

Функции (8.3.3) могут привести к геометрической изменяемости систем уравнений, если не заданы закрепления дополнительных степеней свободы.

Для условий (4.3.7) получаем полиномы 3-й степени:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \dots + \delta((\theta_1 + \theta_2) \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + (\theta_2 + \theta_3) \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + (\theta_1 + \theta_3) \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x})) = \\
&\dots + \delta(\theta_1 (\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x})) + \theta_2 (\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x})) + \theta_3 (\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}))), \quad (8.3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}a_{12}n_{12}\xi(1-\xi-\eta)(1-2\xi-\eta), \\
\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}a_{23}n_{32}\xi\eta(\xi-\eta), \\
\boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}a_{13}n_{13}(1-\xi-\eta)\eta(\xi+2\eta-1). \quad (8.3.5)
\end{aligned}$$

Тогда в (4.3.8):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}_i &= \boldsymbol{\psi}_{i,3}, \quad i=1,2,3 - \text{функции (8.3.3)}, \\
\boldsymbol{\zeta}_1 &= \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\zeta}_2 = \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\zeta}_3 = \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}). \quad (8.3.6)
\end{aligned}$$

### 8.3.2. Четырехузловой изопараметрический элемент (QRDF3AIP)

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис 8.3-2. Заменой системы координат (8.3.7) с использованием функций (4.4.13) он преобразуется к единичному квадрату.

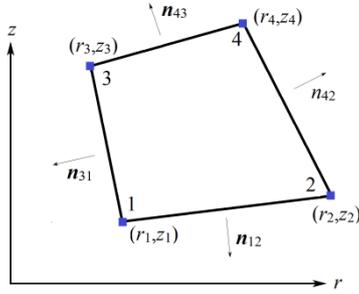


Рис. 8.3-2. Четырехугольный элемент

$$\begin{cases} r = \Phi_x(\xi, \eta) = r_1 + \sum_{i=1}^{N_r} (r_i - r_1) \psi_i(\xi, \eta) \\ z = \Phi_y(\xi, \eta) = z_1 + \sum_{i=1}^{N_z} (z_i - z_1) \psi_i(\xi, \eta) \end{cases} \quad (8.3.7)$$

Условиям (4.3.6) удовлетворяет следующая аппроксимация перемещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \dots + \frac{a_{12} \mathbf{n}_{12}}{2} \xi(1-\xi)(1-\eta)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a_{24} \mathbf{n}_{42}}{2} \xi \eta(1-\eta)(\theta_4 - \theta_2) + \\ a_{34} \mathbf{n}_{43} \xi(1-\xi) \eta(\theta_3 - \theta_4) + \frac{a_{13} \mathbf{n}_{13}}{2} (1-\xi) \eta(1-\eta)(\theta_1 - \theta_3). \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Функции системы (8.2.6) имеют вид:

$\varphi_{i,j}, j=1,2$  – полилинейные аппроксимации (4.4.13);

$$\begin{aligned} \varphi_{13} &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2} (a_{13} \mathbf{n}_{13} \eta - a_{12} \mathbf{n}_{12} \xi), \\ \varphi_{23} &= \frac{\xi(1-\eta)}{2} (a_{12} \mathbf{n}_{12} (1-\xi) - a_{24} \mathbf{n}_{42} \eta), \\ \varphi_{33} &= \frac{(1-\xi)\eta}{2} (a_{34} \mathbf{n}_{43} \xi - a_{13} \mathbf{n}_{13} (1-\eta)), \\ \varphi_{43} &= \frac{\xi \eta}{2} (a_{24} \mathbf{n}_{42} (1-\eta) - a_{34} \mathbf{n}_{43} (1-\xi)). \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Иногда добавляют еще две функции (4.5.9).

Если потребовать выполнения условий (4.3.7), то получаем:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \dots + \delta \left( (\theta_1 + \theta_2) \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) + (\theta_2 + \theta_4) \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) + (\theta_3 + \theta_4) \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}) + (\theta_1 + \theta_3) \boldsymbol{\mu}_4(\mathbf{x}) \right), \quad (8.3.10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} a_{12} \mathbf{n}_{12} \xi(1-\xi)(1-\eta)(1-2\xi), \\ \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} a_{24} \mathbf{n}_{42} \eta(1-\eta) \xi(1-2\eta), \\ \boldsymbol{\mu}_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} a_{34} \mathbf{n}_{43} \xi(1-\xi) \eta(1-2\xi), \\ \boldsymbol{\mu}_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} a_{13} \mathbf{n}_{13} \eta(1-\eta)(1-\xi)(1-2\eta). \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Тогда в (4.3.8):

$$\begin{aligned} \chi_i &= \psi_{i,3}, \quad i=1,2,3,4 - \text{функции (8.3.9),} \\ \zeta_1 &= \mu_1(\mathbf{x}) + \mu_4(\mathbf{x}), & \zeta_2 &= \mu_1(\mathbf{x}) + \mu_2(\mathbf{x}), \\ \zeta_3 &= \mu_3(\mathbf{x}) + \mu_4(\mathbf{x}), & \zeta_4 &= \mu_2(\mathbf{x}) + \mu_4(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

### 8.3.3. Четырехузловой элемент с кусочно-полиномиальной аппроксимацией (QRDF4ASA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольный конечный элемент, который изображен на рис. 8.3-2. Линейным преобразованием (2.12.1) он преобразуется в четырехугольник, представленный на рис. 4.4-8б. Тогда в соответствии с условиями (4.3.6) можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \dots &+ \frac{1}{8} a_{12} \mathbf{n}_{12} \psi_8 (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{8} a_{13} \mathbf{n}_{13} \psi_7 (\theta_1 - \theta_3) + \\ &\frac{1}{8} a_{24} \mathbf{n}_{42} \psi_5 (\theta_4 - \theta_2) + \frac{1}{8} a_{34} \mathbf{n}_{43} \psi_6 (\theta_3 - \theta_4), \end{aligned} \quad (8.3.13)$$

где:  $\psi_i, i=1,2,3,4$  – функции системы (4.4.23),  $\psi_i, i=5,6,7,8$  – (4.4.24).

Функции системы (8.2.6) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}, j=1,2 - \text{аппроксимации (4.4.23);} \\ \varphi_{13} &= \frac{1}{8} (a_{13} \mathbf{n}_{13} \psi_7 - a_{12} \mathbf{n}_{12} \psi_8), \\ \varphi_{23} &= \frac{1}{8} (a_{12} \mathbf{n}_{12} \psi_8 - a_{24} \mathbf{n}_{42} \psi_5), \\ \varphi_{33} &= \frac{1}{8} (a_{34} \mathbf{n}_{43} \psi_6 - a_{13} \mathbf{n}_{13} \psi_7), \\ \varphi_{43} &= \frac{1}{8} (a_{24} \mathbf{n}_{42} \psi_5 - a_{34} \mathbf{n}_{43} \psi_6). \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Для выполнения условий (4.3.7) в представлении (4.5.10) воспользуемся полиномами третьей степени:

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8} \mathbf{n}_{12} \psi_8 (\xi - B\eta), \\ \mu_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_{42} \psi_5 (\xi - \eta), \\ \mu_3(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_{43} \psi_6 (\eta - A\xi), \\ \mu_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_{13} \psi_7 (A\xi - B\eta). \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Тогда в (4.3.8):

$$\begin{aligned} \chi_i &= \psi_{i,3}, \quad i=1,2,3,4 - \text{функции (8.3.14),} \\ \zeta_1 &= \mu_1(\mathbf{x}) + \mu_4(\mathbf{x}), & \zeta_2 &= \mu_1(\mathbf{x}) + \mu_2(\mathbf{x}), \\ \zeta_3 &= \mu_3(\mathbf{x}) + \mu_4(\mathbf{x}), & \zeta_4 &= \mu_2(\mathbf{x}) + \mu_4(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

## 8.4. Элементы с вращательными степенями свободы (DDF)

### 8.4.1. Треугольник с узлами в вершинах (DDF3A)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 8.3-1, и выполним преобразование системы координат (2.12.1) в треугольник, изображенный на рис. 2.12-3. Запишем (2.12.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} r = r_{11}\xi + r_{12}\eta + a_r \\ z = r_{21}\xi + r_{22}\eta + a_z \end{cases} \quad (8.4.1)$$

Построение будем делать на кусочных полиномах второго порядка.

Как и для элемента разд. 4.7.1, построим функции  $\lambda_i(\mathbf{x})$ ,  $i=1, 2, 3$ , которые на каждой из подобластей являются полиномами второго порядка, равны нулю на сторонах треугольника, непрерывны на  $\Omega$  и удовлетворяют условиям (2.1.7).

Получаем единственное решение:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{2}{3\rho} \begin{Bmatrix} r_{11} - r_{21} \\ r_{12} - r_{22} \end{Bmatrix} (1 - \xi - \eta) \gamma(\xi, \eta), \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{2}{3\rho} \begin{Bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{Bmatrix} (1 + 2\xi - \eta) \gamma(\xi, \eta), \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{2}{3\rho} \begin{Bmatrix} -r_{11} \\ -r_{12} \end{Bmatrix} (1 - \xi + 2\eta) \gamma(\xi, \eta), \end{aligned} \quad \gamma(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 - \xi - \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 1 + 2\xi - \eta, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ 1 - \xi + 2\eta, & \mathbf{x} \in \Omega_3 \end{cases} \quad (8.4.2)$$

$$P = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}.$$

Функции  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,3$  имеют разрывы  $\omega$  на границах  $\Omega_i$  (стороны элемента при стыковке, отрезки медиан), но  $\omega(\lambda_i(\mathbf{x}))$  непрерывны в узлах элемента.

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы, аналогично (4.6.12), зададим в следующем виде:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} (4\chi_i^r(\mathbf{x}) + \zeta(\mathbf{x})), \quad \zeta(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{x}) + \lambda_3(\mathbf{x}), \quad (8.4.3)$$

где  $\chi_i$  – функции (4.5.6) в системе координат  $\xi\eta$ .

Функции, соответствующие перемещениям:

$$\varphi_{ij}, j=1,2 - \text{аппроксимации} \quad (4.7.3)$$

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы, равные нулю на сторонах элемента функции (4.7.8).

### 8.4.2. Шестиузловой треугольник (DDF6ASA)

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 4.3-1, и выполним преобразование системы координат (2.12.1) в треугольник, изображенный на рис. 4.6-2b. Построение будем делать на полиномах третьего порядка на каждой из подобластей.

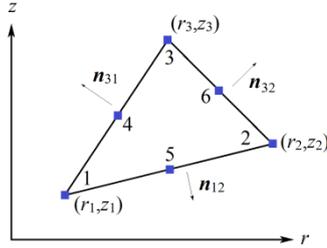


Рис. 8.4-1. Шестиузловой треугольный элемент

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы, зададим следующим образом:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=4}^6 \varphi_{k3}^r(\mathbf{x}) L_{k3}(\lambda_i(\mathbf{x})), \quad i=1,2,3, \quad (8.4.4)$$

где  $\lambda_i(\mathbf{x})$  – функции (8.4.2), а  $\varphi_{i3}^r(\mathbf{x})$ <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi_{43}^r(\mathbf{x}) &= \frac{Y_1}{\omega(Y_1)|_{x=x_5}}, & Y_1 &= \tau_{12} \begin{cases} \eta(\eta - \xi)(1 - \xi + 2\eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^3, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \cup \Omega_r^2 \end{cases}, \\ \varphi_{53}^r(\mathbf{x}) &= \frac{Y_2}{\omega(Y_2)|_{x=x_5}}, & Y_2 &= \tau_{13} \begin{cases} \xi(\xi - \eta)(1 + 2\xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^2, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r^1 \cup \Omega_r^3 \end{cases}, \\ \varphi_{63}^r(\mathbf{x}) &= \frac{Y_3}{\omega(Y_3)|_{x=x_5}}, & Y_3 &= \tau_{32} \begin{cases} \xi\eta(1 - \xi - \eta), & \mathbf{x} \in \Omega_r^1, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_r^2 \cup \Omega_r^3 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Функции, соответствующие перемещениям, получим из переведенных в заданную систему координат аппроксимаций (4.4.8) элемента без вращательных степеней свободы, корректируя их по (4.6.6) с помощью функций (8.4.5).

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы функции (4.7.8).

### 8.4.3. Четырехугольник с узлами в вершинах (DDF4ASA)

Рассмотрим выпуклый четырехугольник, изображенный на рис. 8.4-2 и выполним преобразование системы координат (2.12.1) в четырехугольник, изображенный на рис. 2.12-2б. Запишем (2.12.1) в виде (8.4.1).

Построим функции  $\lambda_i(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3,4$ , которые на каждой из подобластей являются полиномами второго порядка, равны нулю на сторонах четырехугольника и непрерывны на  $\Omega$ . Получаем формулы (4.7.7), в которых  $r_{ij}$  – коэффициенты преобразования (8.4.1).

Как и у треугольного элемента, функции  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,3,4$  имеют разрывы  $\omega_z$  на границах  $\Omega_i$  (стороны элемента при стыковке, отрезки диагоналей), но  $\omega_z(\lambda_i(\mathbf{x}))$  непрерывна в его узлах.

<sup>1</sup> Можно применить функции (4.6.13), что приведет к повышению степени полинома до 4-й.

Совместные функции, соответствующие вращательным степеням свободы, сохраняющие тождества (4.3.17), зададим с учетом опыта построения треугольных элементов:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}(4\chi_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^4 \mathcal{K}(i,k)\lambda_k(\mathbf{x})), \quad i=1,2,3,4, \quad (4.4.6)$$

$$\mathcal{K}(i,k) = \begin{cases} 1, & \text{сторона} \\ 0, & \text{диагональ} \end{cases}$$

где  $\chi_i(\mathbf{x})$ ,  $i=1,2,3,4$  – функции (4.5.12).

Функции, соответствующие перемещениям, получим из аппроксимаций (4.4.23) элемента без вращательных степеней свободы, корректируя их по (4.6.6) с помощью функций (4.7.7).

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы функции (4.7.10).

#### 8.4.4. Восьмиузловой четырехугольник (DDF8ASA)

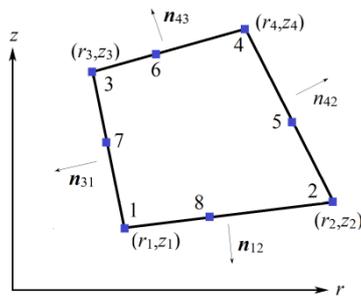


Рис. 8.4-2. Восьмиузловой четырехугольник

Рассмотрим выпуклый четырехугольник, изображенный на рис. 8.4-2 и отобразим его в четырехугольник, изображенный на рис. 12.2-2б. Запишем преобразование (2.12.1) в виде (8.4.1). Построение будем делать на полиномах третьего порядка на каждой из подобластей.

Функции, соответствующие вращательным степеням свободы в узлах, зададим следующим образом:

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \psi_{i3}^r(\mathbf{x}), \quad i=5,6,7,8,$$

$$\varphi_{i3}^r(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=5}^8 \varphi_{k3}^r(\mathbf{x})L_{k3}(\lambda_i(\mathbf{x})), \quad i=1,2,3,4, \quad (8.4.7)$$

$\psi_{i3}^r(\mathbf{x})$  – функции (4.6.34),  $\lambda_i(\mathbf{x})$  – функции (4.7.7).

Функции, соответствующие перемещениям, получим из аппроксимаций (4.4.24) элемента без вращательных степеней свободы, корректируя их с помощью функций  $\varphi_{i3}^r(\mathbf{x})$ ,  $i=1, 2, \dots, 8$ .

Можно увеличить точность расчета, добавив как соответствующие внутренним степеням свободы, функции (4.7.8).

## 8.5. Тесты

Вычисления для полиномиальных аппроксимаций были выполнены как с точным вычислением матриц жесткости, так и с использованием высокоточных схем численного интегрирования, приведенных в *Приложении*. Т.к. результаты тестов показали, что результаты вычислений отличаются незначительно, то ниже приведены результаты с численным интегрированием.

**Таблица 8.5-1.** Типы элементов для расчета осесимметричных конструкций

Степени <sup>1</sup> свободы	Тип элемента	Число узлов	Описание
$u, w$	61	4	прямоугольный, разд.4.4.5
	62	3	треугольный, разд.4.4.1
	64	4	четырёхугольный, $SA$ , разд.4.4.8
	66	4-8	четырёхугольный, $IP$ , разд.4.4.10
	65	3-6	треугольный, $SA$ , разд.4.4.3
	68	3-6	треугольный, $IP$ , разд.4.4.10
	70	4-8	четырёхугольный, $SA$ , разд.4.4.8
$u, w, \omega$	162	3	треугольный, $DDF3A$ , разд.8.4.1
	164	4	четырёхугольный, $DDF4ASA$ , разд.8.4.3
	165	3-6	треугольный, $DDF3ASA$ , разд.8.4
	170	4-8	четырёхугольный, $SA$ , разд.8.4
$u, w, \theta$	562	3	треугольный, $QRDF3AC$ , разд.8.3.1
	564	4	четырёхугольный, $QRDF4ACSA$ , разд.8.3.3
	566	4	четырёхугольный, $QRDFACIP$ , разд.8.3.2

Все тесты для элементов с квазивращательными степенями свободы выполнены при значении  $\delta=0.001$ .

Для элементов задействованы все приведенные в статье аппроксимации, соответствующие «внутренним» степеням свободы элементов.

В таблице 8.5-1 приведены цифровые коды типов элементов, которые используются в вычислительном комплексе *SCAD* [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

На оси  $OZ$  задаются краевые условия оси симметрии<sup>2</sup>:

$$u(0,z) = 0, \theta(0,z) = 0 \text{ или } \omega(0,z) = 0$$

### 8.5.1. Патологические (patch) тесты

#### **Прямоугольная пластина в условиях постоянных напряжений**

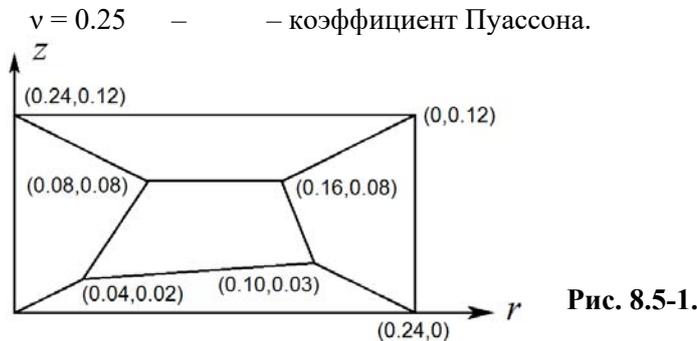
Рассматривается сечение тела вращения на рис. 8.5-1.

При этом:

$$E = 1.0 \cdot 10^6 \text{ кПа} \quad - \text{ модуль упругости;}$$

<sup>1</sup>  $\theta$  – квазивращательная,  $\omega$  – вращательная.

<sup>2</sup> Вычислительный комплекс *Scad* выполняет данные краевые условия автоматически.



Низ тела жестко закреплен. Запишем краевые условия:

$$u(z,0)=0, u(0,r)=0, w(z,0)=0, \theta(z,0)=0 \text{ или } \alpha(z,0)=0.$$

Зададим два нагружения:

- давление по верху тела интенсивностью  $p=100 \text{ кПа}$ ;
- равномерный нагрев тела до температуры  $100^\circ\text{C}$  при коэффициенте температурного линейного расширения  $1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ .

Данная задача имеет аналитическое решение.

Для всех рассмотренных в данной главе элементов результаты расчета совпадают с теоретическими с точностью до вычислительной погрешности.

**Таблица 8.5-1.** Теоретические значения напряжений и перемещений в теле

Загружение	Напряжения (кН)		Перемещения (мм)	
	$\sigma_r, \sigma_{\varphi r}$	$\sigma_z$	$w_A$	$u_A$
1	0	100	-0.012	0.144
2	0	0	0.144	0.288

Т.к. для всех элементов выполнены тождества критерия полноты (4.3.16) и, возможно, (4.3.17), то данные тесты являются критерием корректности программного кода.

### 8.5.2. Задача Ляме о замкнутой сферической оболочке, нагруженной изнутри и извне равномерно распределенными давлениями

Сферическая оболочка, изображенная на рис. 8.5-2, нагружена равномерно распределенными внутренним  $p_0$  и внешним  $p_1$  давлениями.

Задача имеет аналитическое решение [74]:

$$\sigma_r = C_1 - C_2, \quad \sigma_\varphi = C_1 + 0.5 \cdot C_2, \quad u_r = \frac{1-2\nu}{E} r C_1 + \frac{1+\nu}{2Er^2} C_2, \quad (8.5.1)$$

$$C_1 = \frac{p_0 a^3 - p_1 b^3}{b^3 - a^3}, \quad C_2 = \frac{b^3 a^3 (p_1 - p_0)}{r^3 (b^3 - a^3)}.$$

Зададим:

$E = 1 \text{ еб кПа}$  – модуль упругости материала;

$\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона;

$a = 2 \text{ м}, b = 4 \text{ м}, p_0 = -1000 \text{ кН}, p_1 = 0$ .

Таблица 8.5-2. Результаты расчета сферической оболочки

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	$u(2,0)$ , мм				$\sigma_r(2,0)$ , кПа				$\sigma_\theta(2,0)$ , кПа			
			A	A2	A4	A8	A	A2	A4	A8	A	A2	A4	A8
A	64,70	$r, w$	1.59	1.597	1.599	1.6	-808.44	-894.63	-946.71	-973.44	755.47	736.3	727.75	721.91
	66		1.58	1.595	1.6	1.6	-666.52	-815.44	-906.96	-953.3	844.71	779.13	750.5	733.37
	166	$r, w, \theta$	1.58	1.595	1.599	1.6	-667.96	-813.36	-906.45	-953.16	848.48	777.49	750.08	733.27
	169		1.58	1.595	1.599		-668.09	-813.39	-906.45	-953.17	844.86	777.5	752.5	733.88
B	170	$r, w, \omega$	1.56	1.591	1.598	1.6	-467.62	-714.6	-857.34	-928.88	811.35	772.86	749.68	733.52
	62,68		1.65	1.619	1.607	1.602	-785.9	-888.97	-945.52	-972.68	828.92	770.61	740.78	726.76
	65	$r, w$	1.65	1.62	1.607	1.602	-857.56	-927.98	-964.63	-982.33	796.32	753.57	732.08	722.37
	168	$r, w, \theta$	1.62	1.608	1.602	1.601	-737.57	-861.95	-922.4	-959.17	829.52	778.81	748.66	732.19
C	165	$r, w, \omega$	1.54	1.583	1.595	1.599	-508.68	-725.93	-863.44	-931.04	841.55	799.52	762.56	739.8
	66		1.59	1.596	1.599	1.6	-955.96	-971.66	-992.75	-998.17	746.39	706.44	712.36	713.81
	70	$r, w$	1.59	1.596	1.599	1.6	-987.14	-980.69	995.04	-998.74	717.28	699.36	710.48	713.33
	170	$r, w, \omega$	1.59	1.596	1.599	1.6	-954.45	-971.14	-992.65	-998.14	749.52	706.9	712.48	713.84
D	65	$r, w$	1.59	1.597	1.599	1.6	-984.42	-980.36	-999	-999.75	714.47	714.35	714.3	714.29
	68		1.59	1.597	1.599	1.6	-985.31	-980.43	-999.06	-999.76	715.09	714.4	714.3	714.29
	165	$r, w, \omega$	1.59	1.596	1.599	1.6	-903.33	-959.53	-993.69	-998.4	757.68	725.58	717.22	715.03

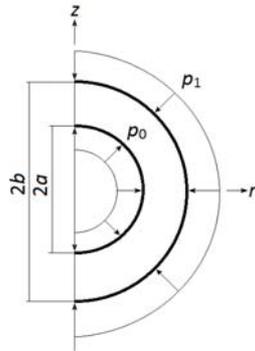


Рис. 8.5-2. Сферическая оболочка

На рис. 8.5-3 представлены базовые расчетные схемы с учетом осей симметрии с соответствующим заданием связей:

$$w(0,z)=0, \theta(0,z) = 0 \text{ или } \omega(0,z) = 0;$$

$$w(r,0)=0, \theta(r,0) = 0 \text{ или } \omega(r,0) = 0.$$

По (8.5.1) получаем решения в точке (2,0):

$$u_z(2,0) = 1.6 \text{ мм}, \sigma_r(2,0) = -1000 \text{ кПа}, \sigma_\phi(2,0) = 714.286 \text{ кПа}.$$

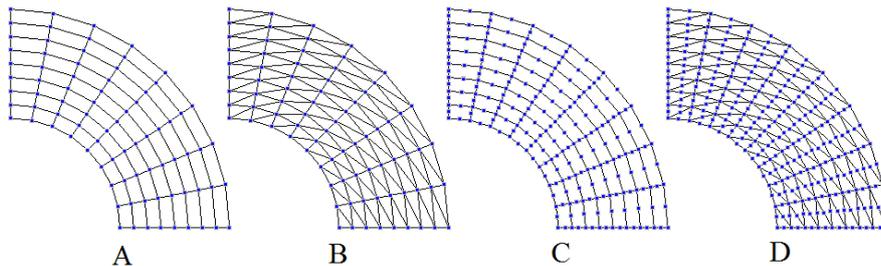


Рис. 8.5-3. Расчетные схемы сферической оболочки

В таблице 8.5-2 даны результаты расчетов. Сгущение сетки проводилось в прямоугольной системе координат  $rO\phi$ .

### 8.5.3. Задача Бусинеска о действии на упругое полупространство нормальной силы

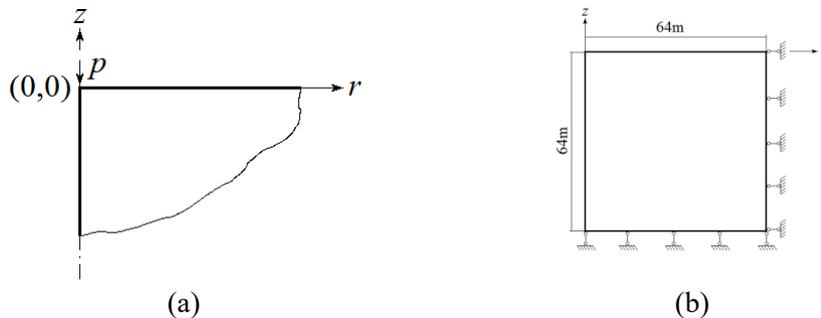


Рис. 8.5-4. Действие на упругое полупространство нормальной силы

Таблица 8.5-3. Результаты расчета задачи Бунинеска

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	$w(0,-4)$				$\sigma_r(0,-4)$				$\sigma_r(4,-4)$			
			A	A2	A4	A8	A	A2	A4	A8	A	A2	A4	A8
A	61,66	$r,w$	-3.882	-3.935	-3.935	-3.928	-47.664	-34.043	-30.967	-30.167	-1.46	-3.343	-4.006	-4.067
	64,70	$r,w$	-3.868	-3.975	-3.95	-3.931	-34.887	-31.788	-30.501	-30.053	-2.267	-3.811	-4.041	-4.074
	166	$r,w,\theta$	-4.196	-4.256	-4.256	-4.191	-48.463	-35.124	-32.787	-32.136	-1.586	-3.716	-4.076	-4.105
	169	$r,w,\theta$	-4.1895	-4.263	-4.2578	-4.1913	-48.483	-35.244	-32.761	-32.09	-1.617	-3.721	-4.076	-4.105
B	170	$r,w,\omega$	-3.820	-3.934	-3.929	-3.924	-35.954	-34.985	-31.104	-30.16	-2.393	-3.578	-3.943	-4.046
	62,68	$r,w$	-4.964	-4.48	-4.009	-3.934	-37.453	-41.313	-32.736	-30.458	-2.391	-3.25	-3.776	-3.99
	65	$r,w$	-5.097	-4.552	-4.023	-3.937	-31.276	-37.848	-32.481	-30.442	-2.373	-3.243	-3.775	-3.99
	168	$r,w,\theta$	-4.925	-4.38	-4.002	-3.934	-37.818	-40.874	-33.755	-30.498	-3.595	-3.98	-4.074	-3.99
C	165	$r,w,\omega$	-3.686	-3.917	-3.957	-3.937	-24.423	-27.202	-30.139	-30.146	-3.648	-3.909	-4.013	-4.061
	66	$r,w$	-3.757	-3.883	-3.921	-3.921	-7.128	-28.895	-29.396	-29.729	-3.794	-4.307	-4.129	-4.094
	70	$r,w$	-3.976	-3.929	-3.922	-3.921	-28.686	-29.907	-29.878	-29.85	-4.262	-4.11	-4.088	-4.084
	170	$r,w,\omega$	-4.03	-3.927	-3.921	-3.921	-20.254	-27.279	-29.371	-29.727	-4.773	-4.262	-4.129	-4.094
D	65	$r,w,\theta$	-4.134	-3.901	-3.92	-3.921	-32.101	-31.09	-30.102	-29.912	-4.296	-4.165	-4.107	-4.089
	68	$r,w,\omega$	-3.968	-3.894	-3.919	-3.921	-36.613	-29.654	-29.85	-29.912	-4.294	-4.184	-4.112	-4.089
	170	$r,w$	-3.969	-3.912	-3.919	-3.921	-35.524	-32.539	-30.312	-29.944	-4.496	-4.233	-4.123	-4.092

На упругое полупространство  $z \leq 0$  на рис. 8.5-4а действует в точке  $(0,0,0)$  нормальная сила  $p$ . Данная задача в пространственной постановке рассматривалась в разд. 3.6.5. Сохраним значения модуля упругости материала полупространства  $E=30000 \text{ кПа}$  и коэффициента Пуассона  $\nu=0.3$ .

Используя принцип Сен-Венана, как и в разд.3.6.4, 3.6.5, ограничимся областью  $64 \times 64 \text{ м}$  (см. рис. 8.5-4б).

Краевые условия в осесимметричной постановке:

$$u(0,z) = 0, \theta(0,z) = 0 \text{ или } \omega(0,z) = 0 \text{ – условия на оси } OZ;$$

$w(64,z)=0, w(r,64)=0$  – запрещены перемещения по нормали на большом расстоянии от исследуемой области.

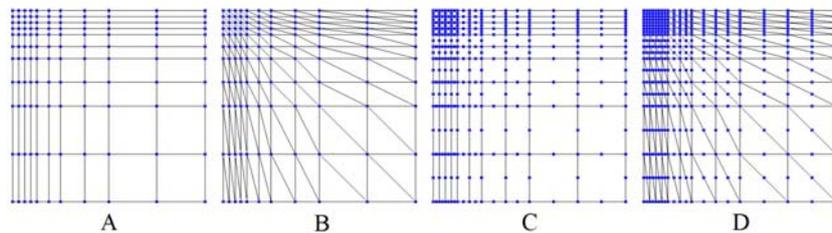


Рис. 8.5-5. Базовые расчетные схемы для задачи Бусинеска

На рис. 8.5-5 представлены базовые расчетные схемы. В табл. 8.5-4 даны результаты расчетов. Аналитическое решение данной задачи [103, 84] в точках  $(0,-4)$  и  $(4,-4)$ :

$$u_z(0,-4) = -4.13803 \text{ мм}, \sigma_z(0,-4) = -29.8116 \text{ кПа}, \sigma_r(4,-4) = -4.10991 \text{ кПа}.$$

#### 8.5.4. Толстая круглая в плане плита, жестко защемленная по боковой поверхности, под действием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки

Расчет плиты, представленный в разд. 3.6 на рис. 3.6-8, можно выполнить в осесимметричной постановке, как представлено на рис. 8.5-6.

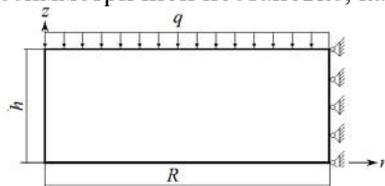


Рис. 8.5-6.

Упругое полупространство находится под действием равномерно распределенной по его поверхности прямоугольной в плане  $4 \times 4 \text{ м}$  поперечной нагрузки интенсивности  $100 \text{ кН/м}^2$  (рис. 3.6-6а). Решение для данной задачи впервые было получено Ф.Лява [70].

Зададим:

$E = 30000 \text{ кПа}$  – модуль упругости материала;

$\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона;

$$q=100 \text{ кН/м}^2$$

Краевые условия зададим:

$$u(0,z) = 0, \theta(0,z) = 0 \text{ или } \omega(0,z) = 0 - \text{условия на оси } OZ;$$

$$u(R,z) = w(R,z) = 0$$

На рис. 8.5-7. представлены варианты расчетных схем.

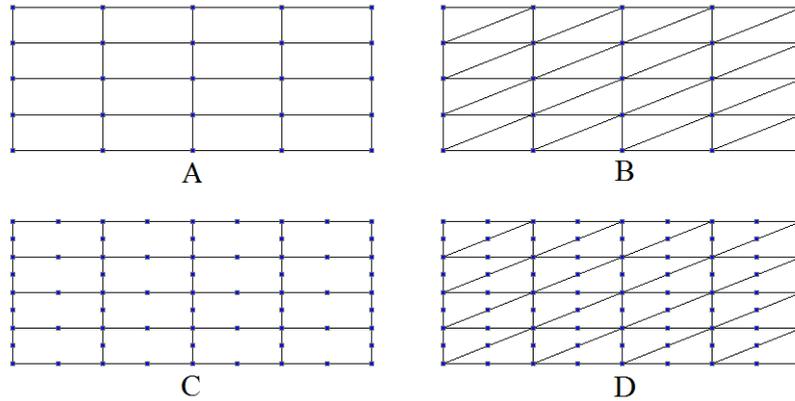


Рис. 8.5-7. Расчетные схемы для плиты

Таблица 8.5-4. Значения перемещений в толстой плите

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	w(0,0), mm				w(0,4), mm			
			4x4	8x8	16x16	32x32	4x4	8x8	16x16	32x32
A	61,66	r, w	-4.26	-4.458	-4.517	-4.535	-4.1	-4.289	-4.348	-4.366
	64,70		-4.303	-4.451	-4.521	-4.536	-4.135	-4.301	-4.352	-4.367
	166	r, w, $\theta$	-4.26	-4.453	-4.513	-4.533	-4.09	-4.285	-4.368	-4.366
	169		-4.37	-4.498	-4.532	-4.541	-4.19	-4.324	-4.361	-4.372
	170	r, w, $\omega$	-3.92	-4.3	-4.458	-4.514	-3.75	-4.13	-4.289	-4.345
B	62,68	r, w	-3.68	-4.221	-4.439	-4.511	-3.69	-4.141	-4.306	-4.354
	65		-3.69	-4.223	-4.439	-4.511	-3.69	-4.149	-4.307	-4.354
	168	r, w, $\theta$	-4.12	-4.392	-4.491	-4.525	-4.05	-4.392	-4.347	4.368
	165	r, w, $\omega$	-3.83	-4.147	-4.364	-4.465	-3.63	-3.947	-3.957	-4.264
C	66	r, w	-4.49	-4.525	-4.527	-4.541	-4.32	-4.356	-4.368	-4.373
	70		-4.51	-4.532	-4.539	-4.542	-4.35	-4.363	-4.37	-4.354
	170	r, w, $\omega$	-4.51	-4.532	-4.539	-4.542	-3.69	-4.141	-4.306	-4.354
D	65	r, w	-4.5	-4.523	-4.537	-4.542	-4.34	-4.355	-4.369	-4.372
	68		-4.48	-4.523	-4.356	-4.452	-4.32	-4.355	-4.368	-4.372
	165	r, w, $\omega$	-4.44	-4.512	-4.532	-4.54	-4.26	-4.341	-4.363	-4.37

Точные значения перемещений и напряжений получены сгущением сетки как для пространственной задачи (см. разд.3.6), так и в осесимметричной постановке:

$$w(0,0,4) = -4.5434 \text{ мм},$$

$$\sigma_r(0,0,4) = \sigma_\theta(0,0,4) = -3369.37 \text{ кПа},$$

$$w(0,0,0) = -4.3748 \text{ мм},$$

$$\sigma_r(0,0,0) = \sigma_\theta(0,0,0) = 3055.77 \text{ кПа}.$$

Таблица 8.5-5. Значения напряжений в толстой плите

Тип сетки	Тип элемента	Степени свободы	$\sigma_x(0,0)$ , кПа				$\sigma_x(0,4)$ , кПа			
			4x4	8x8	16x16	32x32	4x4	8x8	16x16	32x32
А	61,66	$r,w$	-3222.3	-3460.1	-3451.1	-3418.5	2936.7	3152.9	3139.5	3105.7
	70		-3210.9	-3418.8	-3421.3	-3401.2	2919.3	3110.7	3109.7	3088.3
	166	$r,w,\theta$	-3145.6	-3345.2	-3379.0	-3379.7	2851.8	3039.5	3068.1	3067.0
	169		-3182.9	-3344.7	-3377.9	-3379.1	2871.7	3035.3	3066.3	3066.3
	170		$r,w,\omega$	-2974.4	-3398.3	-3452.8	-3428.7	2683.1	3093.9	3143.2
В	62,68	$r,w$	-2669.1	-3322.3	-3436.0	-3424.3	1754.5	2672.1	2970.9	3040.2
	65		-2754.0	-3371.5	-3465.5	-3436.3	1864.7	2743.9	3009.3	3063.9
	168	$r,w,\theta$	-3112.0	-3324.2	-3361.6	-3365.5	2331.6	2613.8	2730.5	2787.5
	165	$r,w,\omega$	-2835.9	-3386.7	-3467.9	-3442.5	2244.8	2858.1	3044.3	3046.9
С	66	$r,w$	-3409.4	-3367.1	-3362.2	-3364.4	3099.4	3055.0	3049.2	3051.0
	70		-3347.6	-3351.6	-3358.6	-3363.6	3037.1	3039.1	3045.4	3050.2
	170	$r,w,\omega$	-3436.0	-3373.1	-3364.0	-3365.0	3124.6	3060.5	3050.8	3051.5
D	65	$r,w$	-3376.4	-3370.5	-3362.8	-3371.6	2988.5	3032.7	3042.7	3046.9
	68		-3412.6	-3370.5	-3364.9	-3371.8	3002.9	3032.7	3043.7	3047.2
	165	$r,w,\omega$	-3479.7	-3405.0	3374.6	-3372.3	2869.0	2992.8	3032.1	3045.0

В табл. 8.5-4 и 8.5-5 приведены результаты вычислений в точках (0,0) и (0,4).

## Глава 9. Оболочки

### 9.1. Типы оболочек

Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина  $h$ ) существенно меньше двух других характерных размеров. Поверхность, делящую толщину оболочки пополам, называют срединной. В теории оболочек все физические и геометрические уравнения выводятся для точек срединной поверхности.

Для характеристики поверхности оболочки часто используется понятие гауссовой кривизны:

$$G = \frac{1}{k_1 k_2}, \text{ где } k_1 \text{ и } k_2 \text{ – кривизны срединной поверхности.}$$

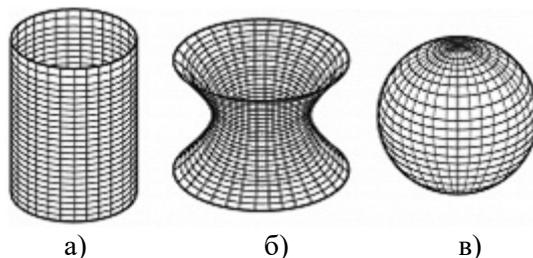


Рис. 9.1-1. Оболочки различной формы:

- а) – цилиндрическая оболочка кругового сечения;
- б) – гиперболический параболоид;
- в) – сферическая оболочка.

В зависимости от формы поверхности оболочки классифицируются на следующие группы:

- $G = 0$  – цилиндрические и их разновидности;
- $G > 0$  – двоякой положительной кривизны;
- $G < 0$  – гиперболические параболоиды (гипары);
- оболочки с вертикальной осью или горизонтальной осью вращения;
- составные оболочки, в том числе из гиперболических треугольных сводов; в виде панелей оболочек и неразрезных оболочек.

**Составные**, в том числе полигональные, оболочки составляют наиболее многочисленную и многообразную группу оболочек. Составными оболочками называют покрытия, образованные совокупностью элементов поверхностей, пересекающихся между собой. Каждый из элементов поверхности образуют составляющую оболочку, которую можно определить как тонкостенную оболочку, очерченную по единой геометрической поверхности. Комбинируя отдельные фрагменты геометрических поверхностей, получают составные пространственные покрытия зданий с различной конфигурацией плана.

Конечные элементы для расчета оболочек можно разбить на два класса: учитывающие и не учитывающие геометрию с помощью кривизн. Если не учитываются кривизны оболочки, то конструкция заменяется многогранником из плоских конечных элементов. При этом для пологих оболочек обеспечивается сходимость метода [26].

Для плоских конечных элементов оболочки, как правило, принимаются следующие гипотезы:

- тангенциальные перемещения  $u$ ,  $v$  не зависят от нормального прогиба  $w$ . Они связаны физическими и геометрическими уравнениями плоско-напряженной задачи теории упругости (разд. 4.1);
- физические и геометрические уравнения для нормального прогиба  $w$  могут быть как по теории тонких плит Киргхофа-Лява (разд. 6.1), так по теории плит средней толщины Рейсснера-Миндлина (разд. 7.1).

## 9.2. Степени свободы и аппроксимации

Классические плоские конечные элементы оболочки в каждом из  $i=1,2,\dots,N_r$  узлов элемента имеют по шесть степеней свободы:

$u_i, v_i, w_i$  – линейные перемещения соответственно по осям  $X, Y$  и  $Z$ ;

$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  – углы поворота вокруг соответственно осей  $X, Y$  и  $Z$ .

При этом для  $\theta_{zi}$  возможны следующие варианты (см. разд. 4.3):

- если для учета тангенциальных перемещений  $u, v$  воспользоваться элементами плоской задачи теории упругости с двумя степенями свободы узла, то получим соответствующие углу поворота  $\theta_z$  нулевые столбцы и строки матрицы жесткости (отсутствие реакции по углу поворота  $\theta_z$ ). Они необходимы для учета пространственной работы конструкции;
- $\theta_{zi} = \omega_i$  – усредненный угол поворота;
- $\theta_{zi}$  – вращательная/квазивращательная степень свободы.

Выбранным степеням свободы для элементов тонких оболочек (Киргхофа-Лява) соответствует система функций (разд. 6.2):

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y) = \{\varphi_{ij,u}, \varphi_{ij,v}, \varphi_{ij,w}\}^T, (i) \in \Omega_r, j = 1 \div 6\}, \quad (9.2.1)$$

а поле перемещений представляется в виде:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{(i) \in \Omega_r} (u_i \varphi_{i,1}^r + v_i \varphi_{i,2}^r + w_i \varphi_{i,3}^r + \theta_{x,i} \varphi_{i,4}^r + \theta_{y,i} \varphi_{i,5}^r + \theta_{z,i} \varphi_{i,6}^r). \quad (9.2.2)$$

Элементом оболочек средней толщины (Рейсснера-Миндлина) соответствует система функций (разд. 7.2):

$$\{\varphi_{ij}^r(x, y) = \{\varphi_{ij,u}, \varphi_{ij,v}, \varphi_{ij,w}, \varphi_{ij,\theta_x}, \varphi_{ij,\theta_y}, \varphi_{ij,\theta_z}, \varphi_{ij,\gamma_{xz}}, \varphi_{ij,\gamma_{yz}}\}^T, (i) \in \Omega_r, j = 1 \div 6\}. \quad (9.2.3)$$

а поле обобщенных перемещений представляется в виде:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{(i) \in \Omega_r} (u_i \boldsymbol{\varphi}_{i,1}^r + v_i \boldsymbol{\varphi}_{i,2}^r + w_i \boldsymbol{\varphi}_{i,3}^r + \theta_{x,i} \boldsymbol{\varphi}_{i,4}^r + \theta_{y,i} \boldsymbol{\varphi}_{i,5}^r + \theta_{z,i} \boldsymbol{\varphi}_{i,6}^r). \quad (9.2.4)$$

Независимо от «содержания»  $\gamma_i$  преобразование углов поворота в новую систему координат производится аналогично линейным степеням свободы:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix} = [s_{ij}]_{i,j=1}^3 \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \theta'_{x,j} \\ \theta'_{y,j} \\ \theta'_{z,j} \end{Bmatrix} = [s_{ij}]_{i,j=1}^3 \begin{Bmatrix} \theta_{x,j} \\ \theta_{y,j} \\ \theta_{z,j} \end{Bmatrix} \quad (9.2.5)$$

где  $[s_{ij}]_{i,j=1}^3$  – матрица преобразования.

### 9.3. Тесты

Все рассмотренные конечные элементы используют полиномиальные, кусочнополиномиальные или изопараметрические аппроксимации поля перемещений как для плоского напряженного состояния, так и для изгиба плит. При этом по построению для всех рассмотренных элементов всегда выполнены условия критерия полноты (2.5.7) и несовместности (2.7.3) соответствующего порядка, обеспечивающие сходимость метода.

Все рассмотренные элементы обеспечивают, как минимум, первый порядок сходимости по напряжениям, а по перемещениям – второй. Для совместных элементов с промежуточными узлами на сторонах скорости сходимости увеличиваются.

Для элементов задействованы все аппроксимации, соответствующие «внутренним» степеням свободы элементов. Все тесты для элементов с квазивращательными степенями свободы выполнены при значении  $\delta=0.001$ .

В таблицах 9.3-1 и 9.3-2 приведены цифровые коды типов элементов, которые приняты в вычислительном комплексе SCAD [15]. Данные коды используются при описании результатов числовых экспериментов.

**Таблица 9.3-1.** Типы элементов для расчета оболочек по теории Киргхофа-Лява

Тип элемента	Число узлов	Форма	Ст. свободы	Аппроксимирующие функции
41	4	прямоугольный	$u, v$	полилинейные, разд.4.4.5
			$w, \theta_x, \theta_y$	полусовместные, разд.6.3.3
42	3	треугольный	$u, v$	линейные, разд.4.4.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	IC, разд.6.4

Тип элемента	Число узлов	Форма	Ст. свободы	Аппроксимирующие функции
43	4	прямоугольный	$u, v$	полилинейные, разд.4.4.5
			$w, \theta_x, \theta_y$	$IC$ , разд.6.3.2
44	4	четырёхугольный	$u, v$	$SA$ , разд.4.4.8
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1
45	3-6	треугольный	$u, v$	$SA$ , разд.4.4.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.5.1, 6.5.4, вариант $A$
46	4-8	четырёхугольный	$u, v$	$SA$ , разд.4.4.8
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1, 6.6.3, вариант $B$
48	3-6	треугольный	$u, v$	$SA$ , разд.4.4.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.5.1, 6.5.4, вариант $B$
50	4-8	четырёхугольный	$u, v$	$SA$ , разд.4.4.8
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1, 6.6.3, вариант $A$
Элементы с вращательной степенью свободы $\omega_z(DDF)$				
91	4	прямоугольный	$u, v, \omega_z$	$DDF4RIC$ , разд.4.6.4
			$w, \theta_x, \theta_y$	полусовместные, разд.6.3.3
92	3	треугольный	$u, v, \omega_z$	$DDF3IC$ , разд.4.6.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	$IC$ , разд.6.4
93	4	прямоугольный	$u, v, \omega_z$	$DDF4RIC$ , разд.4.6.4
			$w, \theta_x, \theta_y$	$IC$ , разд.6.3.2
94	4	четырёхугольный	$u, v, \omega_z$	$DDF4ICSA$ , разд.4.6.6
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1
95	3-6	треугольный	$u, v, \omega_z$	$DDFSA$ , разд.4.7.1, 4.7.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1, 6.6.3
96	4-8	четырёхугольный	$u, v, \omega_z$	$DDFSA$ , разд.4.7.3, 4.7.4
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.5.1, 6.5.4
97	4-8	четырёхугольный	$u, v, \omega_z$	$DDFICSA$ , разд.4.6.6, 4.6.7,
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1, 6.6.3
Элементы с квазивращательной степенью свободы $\theta_z$				
591	4	прямоугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF4IP$ , разд.4.5.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	полусовместные, разд.6.3.3
592	3	треугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF3$ , разд.4.5.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	$IC$ , разд.6.4
593	4	прямоугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF4RIC$ , разд.4.5.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	$IC$ , разд.6.3.4
594	4	четырёхугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF4SA$ , разд.4.5.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	$SA$ , разд.6.6.1

**Таблица 9.3-2.** Типы элементов для расчета оболочек по теории Рейсснера-Миндлина

Тип элемента	Число узлов	Характеристика	Ст. свободы	Аппроксимирующие функции
141	4	прямоугольный	$u, v$	полилинейные, разд.4.4.5
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDR4RIC</i> , разд.7.7.1
142	3	треугольный	$u, v$	<i>SA</i> , разд.4.4.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDR3SA</i> , разд.7.6.1
143	4	четырёхугольный изопараметрич.	$u, v$	полилинейные, разд.4.4.5
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>MITC4</i> , п.7.4
144	4	четырёхугольный	$u, v$	<i>SA</i> , разд.4.4.8
			$w, \alpha, \beta$	<i>JIDR4SA</i> , разд.7.8.3,
145	3-6	треугольный	$u, v$	<i>SA</i> , разд. 4.4.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRSA</i> , разд.7.6.1, 7.6.2
146	4-8	четырёхугольный изопараметрич.	$u, v$	р.п.4.4.5, 4.4.6
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRIP</i> , разд.7.8.1, 7.8.2
147	3-6	треугольный, изопараметрич.	$u, v$	<i>IP</i> , разд.4.4.10
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRIP</i> , разд.7.6.3
148	3	треугольный	$u, v$	линейные, разд.4.4.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>DSG3M</i> , разд.7.3.2
149	3	треугольный	$u, v$	линейные, разд.4.4.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>DSG3</i> , разд.7.3.1
150	4-8	четырёхугольный	$u, v$	<i>SA</i> , разд.4.4.8
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDR4SA</i> , разд.7.8.3, 7.8.4.
Элементы с вращательной степенью свободы $\omega_z$				
191	4	прямоугольный	$u, v, \omega_z$	<i>DDF4RIC</i> , разд.4.6.4.
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDR4R</i> , разд.7.7.1
192	3	треугольный	$u, v, \omega_z$	<i>DDF3SA</i> , разд.4.7.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDR3SA</i> , разд.7.6.1
194	4	четырёхугольный	$u, v, \omega_z$	<i>DDFSA</i> , разд.4.7.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDR4SA</i> , разд.7.8.3.
195	3-6	треугольный	$u, v, \omega_z$	<i>DDFSA</i> , разд.4.7.1, 4.7.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRSA</i> , разд.7.6.1, 7.6.2
196	4-8	четырёхугольный	$u, v, \omega_z$	<i>DDFSA</i> , разд.4.7.3, 4.7.4.
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRSA</i> , разд.7.8.3, 7.8.4.
197	4-8	четырёхугольный	$u, v, \omega_z$	<i>DDFISA</i> , разд.4.6.6, 4.6.7.
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRSA</i> , разд.7.8.3, 7.8.4.
Элементы с квазивращательной степенью свободы $\theta_z$				
542	3	треугольный	$u, v, \theta_z$	<i>QRDF3IP</i> , разд.4.5.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>JIDRIP</i> , разд.7.6.1
543	4	четырёхугольный	$u, v, \theta_z$	<i>QRDF4IP</i> , разд.4.5.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	<i>MITC4</i> , п.7.4

Тип элемента	Число узлов	Характеристика	Ст. свободы	Аппроксимирующие функции
544	4	четырёхугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF4SA$ , разд.4.5.3
			$w, \theta_x, \theta_y$	$JIDR4SA$ , разд.7.8.3
546	4	четырёхугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF4IP$ , разд.4.5.2
			$w, \theta_x, \theta_y$	$JIDR4IP$ , разд.7.8.1
547	4	треугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF3IP$ , разд.4.5.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	$DSG3M$ , разд.7.3.2
548	3	треугольный	$u, v, \theta_z$	$QRDF3IP$ , разд.4.5.1
			$w, \theta_x, \theta_y$	$DSG3$ , разд.7.3.1

### 9.3.1. Патологические (patch) тесты

Все патологические тесты, приведенные в разд. 4.8.1. и 6.7.1 выполнены с точностью до вычислительной погрешности.

### 9.3.2. Цилиндрический резервуар под действием внутреннего давления жидкости

Цилиндрический вертикальный резервуар, изображенный на рис. 9.3-1, со стенкой постоянной толщины зашпелен в плоское днище и находится под воздействием линейно изменяющегося по высоте внутреннего давления жидкости с объемным весом  $\gamma$ .

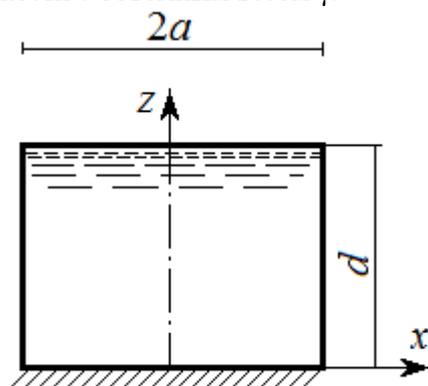


Рис. 9.3-1.

Пусть

$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ кПа}$  – модуль упругости;

$\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона;

$h = 0.01 \text{ м}$  – толщина стенки резервуара;

$a = 5.0 \text{ м}$  – радиус срединной поверхности стенки резервуара;

$d = 5.0 \text{ м}$  – высота резервуара;

На рис. 9.3-2 приведены расчетные схемы.

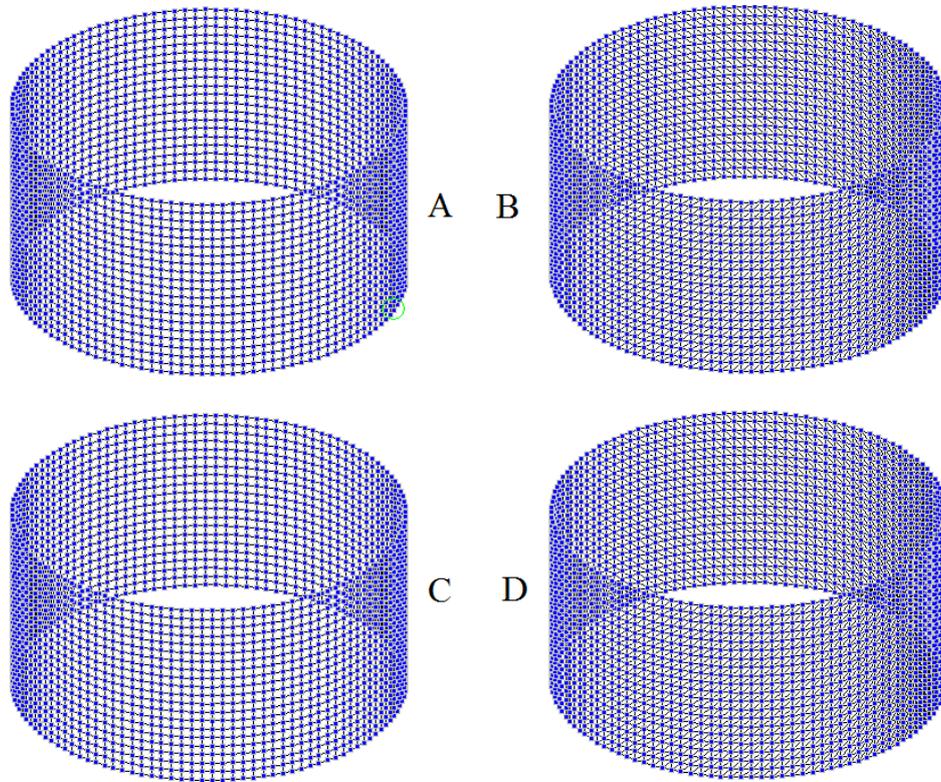


Рис. 9.3-2. Расчетные схемы оболочки

Табл. 9.3-3. Значения перемещений и напряжений  
для элементов тонких оболочек

Тип сетки	Тип элемента	Вращат. степень свободы	$w(0,5,0.5), mm$			$\sigma_x(0,5,0.5), MPa$		
			A	A2	A4	A	A2	A4
A	41	–	0.5847	0.5672	0.5615	24.792	23.795	23.575
	43	–	0.5847	0.5659	0.5611	24.792	23.816	23.579
	44,50	–	0.5899	0.5672	0.5615	24.645	23.795	23.575
	91,93	$\omega_z$	0.5585	0.5594	0.5595	23.855	23.581	23.521
	94,97	$\omega_z$	0.5575	0.5593	0.5595	23.811	23.578	23.52
	96	$\omega_z$	0.542	0.5551	0.5584	23.462	23.475	23.492
	591,593	$\theta_z$	0.5592	0.5591	0.5594	23.87	23.57	23.517
	594	$\theta_z$	0.5583	0.5591	0.5594	23.829	23.569	23.517
B	42	–	0.5474	0.5545	0.5582	21.345	22.989	23.374
	45	–	0.5483	0.5546	0.5582	21.349	22.992	23.374
	92	$\omega_z$	0.5462	0.5565	0.5588	22.259	23.21	23.425
	95	$\omega_z$	0.5289	0.554	0.5582	23.021	23.443	23.483
	592	$\theta_z$	0.5538	0.5584	0.5592	23.269	23.466	23.49

Тип сетки	Тип элемента	Вращат. степень свободы	$w(0,5,0.5), mm$			$\sigma_x(0,5,0.5), MPa$		
			A	A2	A4	A	A2	A4
C	50	–	0.563	0.5597	0.5596	23.887	23.576	23.519
	96	$\omega_z$	0.5654	0.5598	0.5596	23.815	23.539	23.511
	97	$\omega_z$	0.563	0.5589	0.5596	23.792	23.545	23.511
D	45	–	0.5577	0.5593	0.5595	24.108	23.651	23.538
	95	$\omega_z$	0.5546	0.5592	0.5595	23.848	23.593	23.524

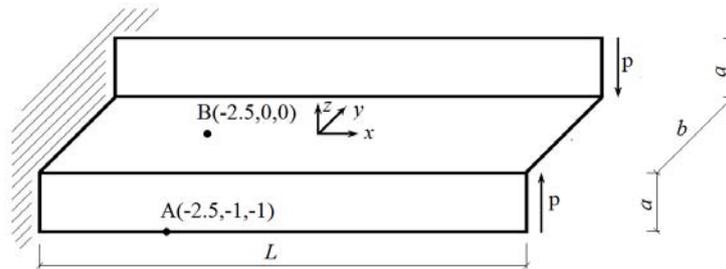
В табл. 9.3-3 и табл. 9.3-4 приведены вычисленные значения перемещений и напряжений рассматриваемой оболочки.

**Таблица 9.3-4.** Значения перемещений и напряжений для элементов оболочек средней толщины

Тип сетки	Тип элемента	Вращат. степень свободы	$w(0,5,0.5), mm$			$\sigma_x(0,5,0.5), MPa$		
			A	A2	A4	A	A2	A4
A	141,146	–	0.6081	0.5696	0.5618	25.923	23.976	23.609
	143	–	0.6055	0.5646	0.5633	25.796	23.757	23.246
	144,150	–	0.6137	0.5709	0.5622	25.564	23.948	23.604
	191	$\omega_z$	0.5731	0.5624	0.5602	24.709	23.718	23.549
	194,196	$\omega_z$	0.548	0.5576	0.5591	24.083	23.594	23.519
	197	$\omega_z$	0.5711	0.5623	0.5602	24.622	23.714	23.548
	543	$\theta_z$	0.5704	0.5581	0.552	24.567	23.521	23.201
	544	$\theta_z$	0.5701	0.562	0.5601	24.576	23.701	23.545
	546	$\theta_z$	0.5719	0.562	0.5601	24.656	23.703	23.545
B	142,145,147	–	0.5568	0.5557	0.5585	21.318	23.019	23.386
	148	–	0.5567	0.5557	0.5585	21.318	23.019	23.386
	149	–	0.5569	0.5557	0.5585	21.32	23.019	23.386
	192,195	$\omega_z$	0.5308	0.555	0.5585	23.27	23.489	23.495
	542	$\theta_z$	0.5571	0.5596	0.5595	23.439	23.51	23.502
	592	$\theta_z$	0.5538	0.5584	0.5592	23.269	23.466	23.49
C	146	–	0.5609	0.5595	0.5595	23.802	23.54	23.508
	150	–	0.5604	0.5595	0.5595	23.86	23.573	23.516
	196	$\omega_z$	0.5631	0.5595	0.5595	23.861	23.54	23.508
	197	$\omega_z$	0.5604	0.5595	0.5595	23.66	23.533	23.508
D	145	–	0.5578	0.5593	0.5595	24.104	23.649	23.535
	147	–	0.559	0.5591	0.5595	24.075	23.65	23.535
	195	$\omega_z$	0.5564	0.5593	0.5595	23.833	23.591	23.521

### 9.3.3. Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция

Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция, работающая на кручение и изгиб, представлена на рис. 9.3.3 [103]. Она защемлена по левому торцу, а на правом торце действует вертикальная распределенная нагрузка.



**Рис. 9.3-3.** Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция

Зададим:

$E = 2.1 \cdot 10^8$  кПа – модуль упругости;

$\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона;

$h = 0.1$  м – толщина пластин;

$a = 1$  м – ширина вертикальных пластин;

$b = 2$  м – ширина горизонтальной пластины;

$L = 10$  м – длина конструкции.

$p = 600$  кПа – вертикальная распределенная нагрузка по правым

кромкам.

Определяются напряжения  $\sigma_{xx}$  в точках A(2.5, -1, -1) и B(2.5, 0, 0).

**Таблица 9.3-5.** Значения напряжений в Z-образной конструкции для элементов тонких оболочек

Тип сетки	Тип элемента	Вращат. степень свободы	$\sigma_{xx}(-2.5, -1, -1), \text{МПа}$			$\sigma_{xx}(-2.5, 0, 0), \text{МПа}$		
			A	A2	A4	A	A2	A4
A	41,43	–	-98.87	-108.2	-110.0	31.75	35.47	36.6
	44,50	–	-95.38	-104.7	-107.7	34.03	36.13	36.78
	91,93	$\omega_z$	-115.0	-112.68	-111.2	36.79	36.94	36.99
	94,97	$\omega_z$	-114.5	-112.6	-111.2	36.63	36.9	36.98
	96	$\omega_z$	-96.61	-106.1	-108.7	32.49	35.85	36.73
	591,593	$\theta_z$	-114.9	-112.5	-111.1	36.88	36.91	36.97
	594	$\theta_z$	-114.8	-112.5	-111.1	36.85	36.9	36.97
B	42	–	-30.42	-67.26	-102.2	17.38	29.97	34.78
	45	–	-58.0	-87.42	-102.16	20.66	29.97	34.78
	92	$\omega_z$	-123.5	-122.6	-116.6	34.59	36.33	36.83
	95	$\omega_z$	-85.67	-101.9	-107.6	28.09	34.36	36.31
	592	$\theta_z$	-94.47	-109.2	-110.6	31.85	35.39	36.55
C	50	–	-109.5	-109.5	-109.5	37.05	37.0	37.0
	96	$\omega_z$	-109.4	-109.5	-109.5	37.34	37.04	37.02
	97	$\omega_z$	-110.1	-109.9	-109.8	37.05	37.04	37.02
D	45	–	-109.5	-109.5	-109.5	36.94	36.98	36.99
	95	$\omega_z$	-109.5	-109.5	-109.5	36.9	36.96	37.0

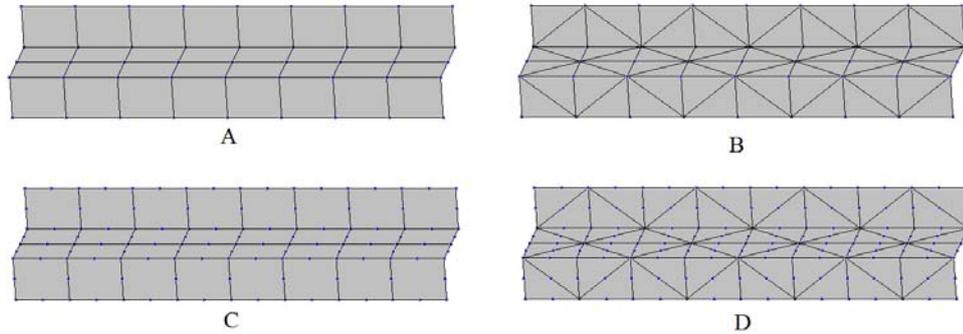


Рис. 9.3-4. Расчетные схемы Z-образной конструкции

В табл. 9.3-5 и табл. 9.3-6 приведены вычисленные значения напряжений в точках А и В рассматриваемой оболочки.

Таблица 9.3-6. Значения напряжений в Z-образной конструкции для элементов оболочек средней толщины

Тип сетки	Тип элемента	Вращат. степень свободы	$\sigma_{xx}(-2.5,-1,-1), \text{МПа}$			$\sigma_{xx}(-2.5,0,0), \text{МПа}$		
			А	А2	А4	А	А2	А4
А	141,146	–	-98.67	-108.4	-110.7	31.43	35.53	36.81
	143	–	-98.74	-109.0	-114.8	31.62	35.72	38.12
	144,150	–	-95.27	-104.9	-108.39	33.82	36.22	37.0
	191	$\omega_z$	-114.5	-112.9	-111.7	36.51	36.98	37.13
	194,196	$\omega_z$	-96.16	-106.27	-109.1	32.31	35.88	36.82
	197	$\omega_z$	-114.2	-112.8	-111.7	36.37	36.97	37.12
	543	$\theta_z$	-114.6	-113.3	-115.48	36.72	37.19	38.39
	544,546	$\theta_z$	-114.4	-112.7	-111.8	36.5	37.0	37.19
В	142,145,147	–	-57.59	-87.48	-102.6	20.26	30.01	34.93
	149	–	-58.22	-88.39	-103.2	20.5	30.34	36.13
	192,195	$\omega_z$	-85.35	-102.0	-107.9	27.95	34.34	36.37
	542	$\theta_z$	-92.31	-109.2	-107.9	31.05	35.32	36.37
	592	$\theta_z$	-94.47	-109.2	-110.6	31.85	35.39	36.55
С	146	–	-110.0	-110.3	-110.7	37.28	37.24	37.4
	150	–	-109.4	-110.3	-110.7	37.19	37.26	37.4
	196	$\omega_z$	-109.7	-110.0	-110.2	37.36	37.15	37.2
	197	$\omega_z$	-110.2	-110.4	-110.52	37.06	37.16	37.21
D	145	–	-109.8	-110.2	-110.6	36.89	37.22	37.37
	147	–	-110.1	-110.3	-110.7	37.15	36.26	37.41
	195	$\omega_z$	-109.8	-109.9	-110.25	36.96	37.09	37.21

Высокоточные вычисления со сгущением сетки с использованием разных типов элементов дают с точностью до 4-х цифр следующие значения<sup>1</sup>:

- по теории Кирхгофа-Лява:  
 $\sigma_{xx}(-2.5,-1,-1)=109.5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{xx}(-2.5,0,0)=37.0 \text{ МПа}$ .
- по теории Рейсснера-Миндлина:  
 $\sigma_{xx}(-2.5,-1,-1)=111.1 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{xx}(-2.5,0,0)=37.5 \text{ МПа}$ .

---

<sup>1</sup> В [103] приведены приближенные контрольные значения:  
 $\sigma_{xx}(-2.5,-1,-1)=108 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{xx}(-2.5,0,0)=36 \text{ МПа}$ .

## Приложение. Численное интегрирование

### П.1. Квадратурные и кубатурные формулы

При построении матриц МКЭ и вычислении местных нагрузок на конечные элементы вывод соответствующих формул, как правило, уже давно не выполняется. Использование формул численного интегрирования обеспечивает значительное упрощение соответствующих алгоритмов. А для полиномиальных аппроксимаций можно обеспечить даже точное вычисление всех требуемых выражений.

Если необходимо вычислить определенный интеграл по области  $\Omega \in \mathcal{R}^n$  от функции  $f(\mathbf{x})$ , обеспечивающей существование данного интеграла, то применяют приближенную *кубатурную* формулу

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \cong \sum_{i=1}^K C_i f(\mathbf{x}_i). \quad (\text{П.1.1})$$

Сумма в ее правой части называется *кубатурной суммой*, точки  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^n$  – *узлами кубатурной* формулы, а числа  $C_i$  – *коэффициентами (веса)*. При  $n=1$  формула и сумма в правой ее части называются *квадратурными*.

При сложной геометрии область интегрирования представляется как объединение простых, для которых известны формулы численного интегрирования (отрезок, треугольник, четырехугольник, тетраэдр и др.).

*Если в (П.1.1) имеет место равенство для произвольной функции  $f(\mathbf{x})$ , являющейся полиномом степени не выше  $p$ , то говорят, что порядок интегрирования кубатурной формулы равен  $p$ .*

Выбирая для конечных элементов соответствующие кубатурные формулы с требуемым порядком интегрирования, можно обеспечить, во многих случаях, или абсолютную точность вычислений, или такую точность, что превышает погрешность метода. Высокую точность получаем, соответственно, для полиномиальных аппроксимаций.

В *Приложении* приведены коэффициенты и координаты узлов кубатурных формул, которые были использованы при реализации конечных элементов, описанных в данной книге. Схемы более высокого порядка используются для решения нелинейных задач. Более точные схемы можно найти, например, в [46, 47, 58] и других работах.

### П.2. Квадратурные формулы

Преобразуем произвольный отрезок  $[x_a, x_b]$ , лежащий на оси  $Ox$  к мастер-элементу  $[-1, 1]$  на оси  $Ox'$ :

$$x = x_a + 0.5(x_b - x_a)(x' + 1)$$

$J(x') = 0.5(x_b - x_a)$  – его Якобиан в (2.10.3).

**Таблица П.2-1.** Квадратурные формулы на отрезке  $[-1, 1]$ .

Число точек	Порядок	№№ точек	Весовой коэффициент	Координата точки $x_i$	Комментарии
1	1	1	2	0	Ф-ла прямоугольников
2	1	1-2	1	$\pm 1$	Формула трапеций
2	3	1-2	1	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	Формула Гаусса
3	2	1,3	$\frac{1}{3}$	$\pm 1$	Формула Симпсона
		2	$\frac{4}{3}$	0	
3	5	1,3	$\frac{5}{9}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	Формула Гаусса
		2	$\frac{8}{9}$	0	
4	7	1,4	$0.5 - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	Формула Гаусса
		2,3	$0.5 + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	
5	9	1,5	$\frac{161}{450} - \frac{13}{90}\sqrt{0.7}$	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	Формула Гаусса
		2,4	$\frac{161}{450} + \frac{13}{90}\sqrt{0.7}$	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	
		3	$\frac{128}{450}$	0	

### П.3. Кубатурные формулы на плоскости

#### П.3.1. Прямоугольник

Рассматривается прямоугольник, лежащий в плоскости XOY, изображенный на рис. П.3-1а, который преобразуется в квадрат, изображенный на рис. П.3-1б с координатами узлов  $(\pm 1, \pm 1)$ .



**Рис. П.3-1.** Прямоугольник и его мастер-элемент

Преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\frac{x'+1}{2} + (x_C - x_A)\frac{y'+1}{2} \\ y = y_A + (y_B - y_A)\frac{x'+1}{2} + (y_C - y_A)\frac{y'+1}{2} \end{cases}, J(x',y') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{bmatrix}, \quad (\text{П.3.1}).$$

$$|\det(J(x',y'))| = 0.25 |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

**Таблица П.3-1.** Кубатурные формулы для квадрата ( $\pm 1, \pm 1$ ).

Число точек	Порядок	№№ точек	Весовой коэффициент	Координаты точки		Комментарии
				$x_i$	$y_i$	
1	1	1	4	0	0	Метод среднего
4	3	1-4	1	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	Формула Гаусса
8	5	1-2	$\frac{40}{49}$	$\pm \sqrt{\frac{7}{15}}$	0	
		3-4	$\frac{40}{49}$	0	$\pm \sqrt{\frac{7}{15}}$	
		5-8	$\frac{9}{49}$	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$	
9	5	1	$\frac{64}{81}$	0	0	Формула Гаусса
		2-3	$\frac{25}{81}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	0	
		4-5	$\frac{40}{81}$	0	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	
		6-9	$\frac{25}{81}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	
12	7	1-2	$\frac{98}{405}$	$\pm \sqrt{\frac{6}{7}}$	0	$\alpha = \sqrt{\frac{114-3\sqrt{583}}{287}}$ $\beta = \sqrt{\frac{114+3\sqrt{583}}{287}}$
		3-4	$\frac{98}{405}$	0	$\pm \sqrt{\frac{6}{7}}$	
		5-8	$\frac{307}{810} + \frac{923}{270\sqrt{583}}$	$\pm \alpha$	$\pm \alpha$	
		9-12	$\frac{307}{810} - \frac{923}{270\sqrt{583}}$	$\pm \beta$	$\pm \beta$	

Во многих случаях можно использовать кубатурную формулу, полученную как произведение двух квадратурных формул при независимой аппроксимации по X и Y:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \cong \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K C_{ij} f(\mathbf{x}_{ij}), \quad (\text{П.3.2})$$

где  $C_{ij} = C_i C_j$  и  $\mathbf{x}_{ij} = (x_i, x_j)$ , а  $C_i$  и  $x_i$  – коэффициенты и координаты точек соответствующей квадратурной формулы.

Если функции МКЭ являются также независимыми произведениями одномерных аппроксимаций, то такие схемы, обеспечивающие высокую точность по каждому из направлений, могут являться оптимальными по сравнению с лучшими двумерными схемами.

### П.3.2. Треугольник

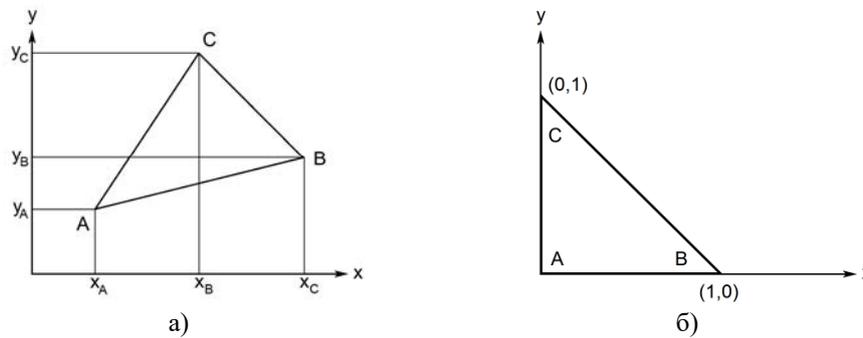


Рис. П.3-2. Треугольник и его мастер-элемент

Таблица П.3-2. Кубатурные формулы для треугольника.

Число точек	Порядок	Весовой коэффициент	Координаты точки		Комментарии
			$x_i$	$y_i$	
1	1	0.5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Метод среднего
3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	Формула Гаусса
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	
		$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	
4	3	$-\frac{9}{32}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Формула Гаусса
		$\frac{25}{96}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
		$\frac{25}{96}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	
		$\frac{25}{96}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	

Число точек	Порядок	Весовой коэффициент	Координаты точки		Комментарии
			$x_i$	$y_i$	
7	3	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Формула Ньютона-Котеса
		$\frac{1}{15}$	0.5	0	
		$\frac{1}{15}$	0.5	0.5	
		$\frac{1}{15}$	0	0.5	
		$\frac{1}{40}$	1	0	
		$\frac{1}{40}$	0	1	
		$\frac{1}{40}$	0	0	
7	5	$\frac{9}{80}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Формула Радона: $C_1 = \frac{155 - \sqrt{15}}{2400}$ $\alpha_1 = \frac{6 - \sqrt{15}}{21}$ $C_2 = \frac{155 + \sqrt{15}}{2400}$ $\alpha_2 = \frac{6 + \sqrt{15}}{21}$
		$C_1$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	
		$C_1$	$\alpha_1$	$1-2\alpha_1$	
		$C_1$	$1-2\alpha_1$	$\alpha_1$	
		$C_2$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	
		$C_2$	$\alpha_2$	$1-2\alpha_2$	
		$C_2$	$1-2\alpha_2$	$\alpha_2$	
12	6	$C_1$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$C_1 = 0.050844906370207$ $\alpha_1 = 0.873821971016996$ $\beta_1 = 0.063089014491502$ $C_2 = 0.116786275726379$ $\alpha_2 = 0.249286745170910$ $\beta_2 = .501426509658179$ $C_3 = 0.082851075618374$ $\alpha_3 = 0.636502499121399$ $\beta_3 = 0.310352451033785$
		$C_1$	$\beta_1$	$\alpha_1$	
		$C_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	
		$C_2$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	
		$C_2$	$\beta_2$	$\alpha_2$	
		$C_2$	$\alpha_2$	$\beta_2$	
		$C_3$	$\alpha_3$	$\beta_3$	
		$C_3$	$\alpha_3$	$1-\alpha_3-\beta_3$	
		$C_3$	$\beta_3$	$\alpha_3$	
		$C_3$	$\beta_3$	$1-\alpha_3-\beta_3$	
		$C_3$	$1-\alpha_3-\beta_3$	$\alpha_3$	
		$C_3$	$1-\alpha_3-\beta_3$	$\beta_3$	

Число точек	Порядок	Весовой коэффициент	Координаты точки		Комментарии
			$x_i$	$y_i$	
16	8	$C_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$C_1 = 0.1443156076777870$
		$C_2$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$C_2 = 0.1032173705347183$
		$C_2$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\alpha_2 = 0.1705693077517602$
		$C_2$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\beta_2 = 0.6588613844964796$
		$C_3$	$\alpha_3$	$\alpha_3$	$C_3 = 0.0324584976231981$
		$C_3$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$\alpha_3 = 0.0505472283170310$
		$C_3$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\beta_3 = 0.8989055433659380$
		$C_4$	$\alpha_4$	$\alpha_4$	$C_4 = 0.0950916342672846$
		$C_4$	$\beta_4$	$\alpha_4$	$\alpha_4 = 0.4592925882927232$
		$C_4$	$\alpha_4$	$\beta_4$	$\beta_4 = 0.0814148234145537$
		$C_5$	$\alpha_5$	$\beta_5$	$C_5 = 0.0272303141744350$
		$C_5$	$\alpha_5$	$1-\alpha_5-\beta_5$	$\alpha_5 = 0.2631128296346381$
		$C_5$	$\beta_5$	$\alpha_5$	$\beta_5 = 0.0083947774099576$
		$C_5$	$\beta_5$	$1-\alpha_5-\beta_5$	
$C_5$	$1-\alpha_5-\beta_5$	$\alpha_5$			
$C_5$	$1-\alpha_5-\beta_5$	$\beta_5$			

Рассматривается треугольник, лежащий в плоскости  $ХОУ$ , изображенный на рис. П.3-2а, который преобразуется в прямоугольный треугольник с единичными катетами, изображенный на рис. П.3-2б. Преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)x' + (x_C - x_A)y' \\ y = y_A + (y_B - y_A)x' + (y_C - y_A)y' \end{cases} \text{ и } J(x', y') = \begin{bmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{bmatrix}, \quad (\text{П.3.3})$$

$$|\det(J(x', y'))| = |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

## П.4. Кубатурные формулы в трехмерном пространстве

### П.4.1. Параллелепипед

Рассматривается параллелепипед с параллельными координатным плоскостям гранями, изображенный на рис. П.4-1а, который преобразуется в куб на рис. П.4-1б с координатами узлов  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

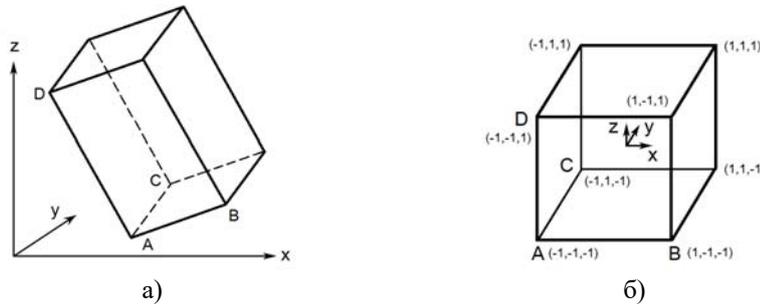


Рис. П.4-1. Параллелепипед и его мастер-элемент

Преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \frac{x'+1}{2} + (x_C - x_A) \frac{y'+1}{2} + (x_D - x_A) \frac{z'+1}{2} \\ y = y_A + (y_B - y_A) \frac{x'+1}{2} + (y_C - y_A) \frac{y'+1}{2} + (y_D - y_A) \frac{z'+1}{2} \\ z = z_A + (z_B - z_A) \frac{x'+1}{2} + (z_C - z_A) \frac{y'+1}{2} + (z_D - z_A) \frac{z'+1}{2} \end{cases}, \quad (\text{П.4.1})$$

$$J(\mathbf{x}') = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{bmatrix}.$$

Во многих случаях можно использовать кубатурную формулу, полученную как произведение трех квадратурных формул при независимой аппроксимации по X, Y и Z:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \cong \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K C_{ijk} f(\mathbf{x}_{ijk}), \quad (\text{П.4.2})$$

где  $C_{ij} = C_i C_j C_k$  и  $\mathbf{x}_{ijk} = \{x_i, x_j, x_k\}$ , а  $C_i$  и  $x_i$  – коэффициенты и координаты точек соответствующей квадратурной формулы.

Таблица П.4-1. Кубатурные формулы для куба.

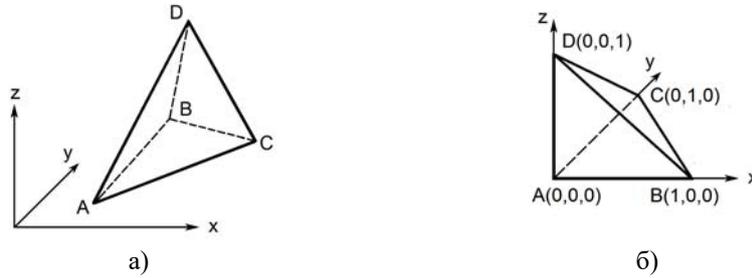
Число точек	Порядок	№№ точек	C	Координаты точки			Комментарии
				$x_i$	$y_i$	$z_i$	
1	1	1	8	0	0	0	Метод среднего
6	3	1-2	$\frac{4}{3}$	$\pm 1$	0	0	
		3-4	$\frac{4}{3}$	0	$\pm 1$	0	
		5-6	$\frac{4}{3}$	0	0	$\pm 1$	
8	3	1-8	1	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	Формула Гаусса

Число точек	Порядок	№№ точек	С	Координаты точки			Комментарии
				$x_i$	$y_i$	$z_i$	
14	5	1-2	$\frac{320}{361}$	$\pm a$	0	0	$a = \sqrt{\frac{19}{30}}$ , $b = \sqrt{\frac{19}{33}}$
		3-4	$\frac{320}{361}$	0	$\pm a$	0	
		5-6	$\frac{320}{361}$	0	0	$\pm a$	
		9-14	$\frac{121}{361}$	$\pm b$	$\pm b$	$\pm b$	
34	7	1-2	$\frac{1078}{3645}$	$\pm a$	0	0	$a = \sqrt{\frac{6}{7}}$ , $b = \sqrt{\frac{960-33\sqrt{238}}{2726}}$ $c = \sqrt{\frac{960+33\sqrt{238}}{2726}}$ $d_1 = \frac{43}{135} + \frac{829\sqrt{238}}{136323}$ $d_2 = \frac{43}{135} - \frac{829\sqrt{238}}{136323}$
		3-4	$\frac{1078}{3645}$	0	$\pm a$	0	
		5-6	$\frac{1078}{3645}$	0	0	$\pm a$	
		7-10	$\frac{343}{3645}$	$\pm a$	$\pm a$	0	
		11-14	$\frac{343}{3645}$	$\pm a$	0	$\pm a$	
		15-18	$\frac{343}{3645}$	0	$\pm a$	$\pm a$	
		19-26	$d_1$	$\pm b$	$\pm b$	$\pm b$	
		27-34	$d_2$	$\pm c$	$\pm c$	$\pm c$	

Если функции МКЭ являются также независимыми произведениями одномерных аппроксимаций, то такие схемы, обеспечивающие высокую точность по каждому из направлений, могут являться оптимальными по сравнению с лучшими трехмерными схемами.

#### П.4.2. Тетраэдр

Рассматривается тетраэдр, изображенный на рис. П.4-2а, который преобразуется в тетраэдр с единичными ребрами, изображенный на рис. П.4-2б.



**Рис. П.4-2.** Тетраэдр и его мастер-элемент

Преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_a + (x_b - x_a)x' + (x_c - x_a)y' + (x_d - x_a)z' \\ y = y_a + (y_b - y_a)x' + (y_c - y_a)y' + (y_d - y_a)z' \\ z = z_a + (z_b - z_a)x' + (z_c - z_a)y' + (z_d - z_a)z' \end{cases} \quad (\text{П.4.3})$$

$$J(x', y', z') = \begin{bmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a & x_d - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a & y_d - y_a \\ z_b - z_a & z_c - z_a & z_d - z_a \end{bmatrix}.$$

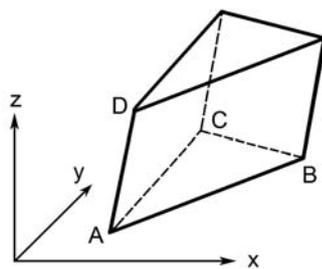
**Таблица П.4-2.** Кубатурные формулы для тетраэдра

Число точек	Порядок	Весовой коэффициент	Координаты точки			Комментарии
			$x_i$	$y_i$	$z_i$	
1	1	$\frac{1}{6}$	0.25	0.25	0.25	метод среднего
4	2	$\frac{1}{24}$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	Формула Гаусса $\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}$ , $\beta = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$
		$\frac{1}{24}$	$\beta$	$\alpha$	$\alpha$	
		$\frac{1}{24}$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	
		$\frac{1}{24}$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	
5	3	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
		$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	

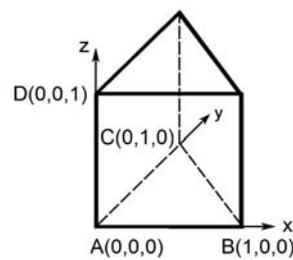
Число точек	Порядок	Весовой коэффициент	Координаты точки			Комментарии
			$x_i$	$y_i$	$z_i$	
11	4	$-\frac{74}{5625}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\alpha = \frac{14 + \sqrt{70}}{56}$ $\beta = \frac{14 - \sqrt{70}}{56}$
		$\frac{343}{45000}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	
		$\frac{343}{45000}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{11}{14}$	
		$\frac{343}{45000}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{1}{14}$	
		$\frac{343}{45000}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	
		$\frac{56}{2250}$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	
		$\frac{56}{2250}$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	
		$\frac{56}{2250}$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	
		$\frac{56}{2250}$	$\beta$	$\alpha$	$\alpha$	
		$\frac{56}{2250}$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	
		$\frac{56}{2250}$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$	

### П.4.3. Треугольная призма

Рассматривается треугольная призма, изображенная на рис. П.4-3а, которая преобразуется в призму, изображенную на рис. П.4-3б.



а)



б)

Рис. П.4-3. Треугольная призма и ее мастер элемент

Преобразование имеет вид (П.4.3).

Как правило, кубатурные формулы для данной области рассматриваются как произведение кубатурной формулы для треугольника и квадратурной формулы:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \cong \sum_{i=1}^{K_1} Q_i \sum_{j=1}^{K_2} C_j f(x_i, y_i, z_j), \quad (\text{П.4.4})$$

где  $K_1$ ,  $Q_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$  и  $K_2$ ,  $C_j$ ,  $z_j$  — число узлов, их координаты и веса соответствующих кубатурной и квадратурной формул.

## Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). – М.: Наука, 1987. – 360с.
2. Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Строительная механика. Компьютерные технологии и моделирование. Учебник. – М.: Изд-во СКАД СОФТ; Издательский дом АСВ, 2014. – 911 с.
3. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1024с.
4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
5. Белкин А.Е., Гаврюшин С.С. Расчёт пластин методом конечных элементов. – М.: МГТУ, 2008. – 232с.
6. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 446с.
7. Бритвин Е.И., Пейсин А., Эйсенбергер М. Деформируемый в своей плоскости треугольный конечный элемент с вращательными степенями свободы. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018, №1. – С.53–59.
8. Бритвин Е.И., Пейсин А., Эйсенбергер М. Деформируемый в своей плоскости четырехугольный конечный элемент с вращательными степенями свободы в узлах. Часть 1. Прямоугольный элемент. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018, №3. – С.54–62.
9. Бритвин Е.И., Пейсин А., Эйсенбергер М. Деформируемый в своей плоскости четырехугольный конечный элемент с вращательными степенями свободы в узлах. Часть 2. Произвольный четырехугольник. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018, №4. – С.50–54.
10. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. – Киев: Будівельник, 1973. – 488 с
11. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 544с.
12. Вериженко В.Е., Карпиловский В.С., Пискунов В.Г. и др. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. – Киев: Вища школа, 1987. – 200с.
13. Власов В.З. Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Гос. изд-во ф.-м литературы, 1960. – 492с.
14. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
15. Вычислительный комплекс SCAD++. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, АСВ, 2018. – 980 с.
16. Вычислительный комплекс для прочностного анализа конструкций методом конечных элементов SCAD. Верификационные примеры. Линейная статика.  
URL: [https://scadsoft.com/tests\\_scad/](https://scadsoft.com/tests_scad/)
17. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
18. Головкин К.К. О приближении функций в произвольных нормах. //Труды МИАН СССР. – 1964, том 70. – С. 26–37
19. Городецкий А.С., Карпиловский В.С. Методические рекомендации по исследованию и конструированию конечных элементов. – Киев: Из-во НИИАСС, 1981. – 48с.  
URL: <https://scadsoft.com/download/GorKarpil1981.pdf>

20. Городецкий А.С., Карпиловский В.С. О связи метода конечных элементов с вариационно–разностными методами. // Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. 24, Киев, Будівельник, 1974. – С.32–42.
21. Динамический расчет зданий и сооружений. (Справочник проектировщика). – М.: Стройиздат, 1979. – 320с.
22. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Гл. ред. ф.–м. наук, 1982. – 568с.
23. Евзеров И.Д. Оценки погрешности несовместных конечных элементов плиты. Деп. в УкрНИИНТИ, №1467. – Киев, 1979. – 9с.
24. Евзеров И.Д. Оценки погрешности по перемещениям при использовании несовместных конечных элементов. // Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1983, том 14, №5. – С. 24–31.
25. Евзеров И.Д. Сходимость МКЭ в случае не принадлежащих энергетическому пространству базисных функций. // Вычисления с разреженными матрицами. – Новосибирск: ВЦСО АН СССР. 1981. – С. 54–61.
26. Евзеров И.Д., Здоренко В.С. Сходимость плоских конечных элементов тонкой оболочки. // Строительная механика и расчет сооружений. 1984, №1. – С.35–40
27. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
28. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. – М.: Мир, 1986. – 318с.
29. Зенкеич О.К., Ченг Ю.К. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974. – 238 с.
30. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704с.
31. Калманок А.С. Расчет балок–стенок. – М.: Госстройиздат, 1956. – 151с.
32. Карпиловский В.С. Исследование и конструирование некоторых типов конечных элементов для задач строительной механики. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.03 – «Строительная механика». – Киев: Национальный транспортный университет (КАДИ), 1982. – 179 с.
33. Карпиловский В.С., Кудашов В.И., Цветков Д.Н. Библиотека изопараметрических конечных элементов вычислительного комплекса «ЛИРА» // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. 1987, №7. – С.28–32.
34. Карпиловский В.С., Лоза И.В. Несовместный четырехугольный конечный элемент балки–стенки. Деп. в УкрНИИНТИ, №2446УК–86, 1985. – 24с.
35. Карпиловский В.С. Новый совместный четырехугольный конечный элемент балки–стенки с вращательными степенями свободы. // Сборник трудов II Международной научно–практической конференции «Сучасні методи і проблемно–орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (Киев, 26–27 сентября 2018 года). Киев: 2018. – С.57–59.
36. Карпиловский В.С. Конструирование несовместных конечных элементов. Киев: Деп. в УкрНИИНТИ, 1980, №2153. 49с. URL: <https://scadsoft.com/download/Karpil1980.pdf>
37. Карпиловский В.С. Треугольный шестиузловой конечный элемент плиты. // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура, 1989, №6. – С. 35–39.
38. Карпиловский В.С. Четырехугольный восьмиузловой конечный элемент плиты // Строительная механика и расчет сооружений, 1990, №2. – С. 13–17.
39. Карпиловский В.С. Четырехугольные конечные элементы для решения плоской задачи теории упругости. // Системы автоматизированного проектирования объектов строительства. – Киев: Будівельник, 1991. – С.35–43.

40. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
41. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320с.
42. Клаф Р. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости. – В сб.: Расчет строительных конструкций с применением ЭВМ/под ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Стройиздат, 1967. – С. 142–170.
43. Клемперт Ю.З., Париков В.И., Сливкер В.И., О процедуре вычисления матрицы жесткости призматического стержня. // Расчет пространственных конструкций. Вып.16. – М.: Стройиздат, 1974. – С. 179–189.
44. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. Упругие рамы, фермы и комбинированные системы. – М.: 1949. – 259с.
45. Крамарева И.В., Либликин С.В., Паутов А.Н., Толкачев И.Н. Плоский треугольный оболочечный совместный конечный элемент. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Изд-во Горьковского университета, 1986. – С.54– 60.
46. Крылов В.И. Приближённое вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500с.
47. Крылов В. И, Шульгина Л. Г Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, Физмат, 1976. – 304с.
48. Лалин В. В.,Яваров А. В.,Орлова Е.С.,Гулов А. Р. Метод конечных элементов с точными функциями формы в задачах устойчивости стержня Тимошенко. // Гидротехническое строительство. 2019, №6. – С.45–52. URL: <http://www.gts.energy-journals.ru/index.php/GTS/article/view/655>
49. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Физматлит, 2003. – 264с.
50. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416с.
51. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М. Наука, 1980. – 512с.
52. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М: ГИТТЛ, 1955. – 491с.
53. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
54. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.: 1935. – 674 с.
55. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416с.
56. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. –М.: Наука,1970. – 512с.
57. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.–М.: Наука,1966. – 432с.
58. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. –М.: Наука, 1981. – 336 с.
59. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – Киев: Будівельник, 1980. – 232 с.
60. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 882с.
61. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехтеориздат, 1948. – 333с.
62. Обен Ж.–П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384с.
63. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, 1932, № 10. – С. 1425–1435.
64. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 689с.

65. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Особенности алгоритмизации метода перемещений при учете дополнительных связей // Метод конечных элементов и строительная механика: Тр.ЛПИ, №349, 1976. – С.28–36.
66. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: Изд-во. ДМК Пресс, 2007. – 596с.
67. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия и тождественные проблемы. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – Том 1 – 704с., том 2 – 672с., том 3 – 388с.
68. Пискунов В.Г., Карпиловский В.С. и др. Расчет крановых конструкций методом конечных элементов. – М.: Машиностроение, 1991. – 240с.
69. Подгорный А. Н., Марченко Г. А., Пустынников В. И. Основы и методы прикладной теории упругости. – Киев: Вища школа, 1981. – 328с.
70. Погорелов И.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 518с
71. Постнов В.А. Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344с.
72. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, том 1, 1968. – 832с.
73. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1979. – 744с.
74. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высшая школа, 1977. – 216с.
75. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
76. Ржаницына А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400с.
77. Розин Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Изд-во. СПбГТУ, 1998. – 530с.
78. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – СПб.: Изд-во. СПбГТУ, 1978. – 222с.
79. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – 237 с.
80. Самарский А.А. Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 415с.
81. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа, 1982. – 264с.
82. Свойский Ф.М. Граничные условия для конечных элементов с вращательными степенями свободы. – СПб.: НОУ Экспресс, 2005. – 106с.
83. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005. – 708с.
84. Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1947. – 308с.
85. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 333с.
86. Соляник–Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости. – М.: Стройиздат, 1987. – 338с.
87. Справочник по динамике сооружений. / Под ред. Б.Г.Корнеева и И.М.Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 512с.
88. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349с.

89. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512с.
90. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.:Наука, 1975. – 576с.
91. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636с.
92. Тимошенко С.П. – Курс теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1972. – 508с.
93. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1948. – 388с.
94. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 880с.
95. Тер-Мартirosян, Механика грунтов, Москва. – М.: ИАСВ, 2009. – 552с.
96. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Наука, 1975. – 592с.
97. Adini A., Clough R.W. Analysis of plate bending by the finite element Method. – NSF Report, G7337, 1961.
98. Allman D J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis // Computers and structures, 1984, Vol. 19, pp. 1–8. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90197-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90197-4)
99. Allman D.J. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis // International journal for numerical methods in engineering, 1988, Vol. 26, pp. 717–730. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620260314>
100. Allman D.J. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations // International journal for numerical methods in engineering. 1988. V.26. P. 2645–2655. DOI: [10.1002/NME.1620261205](https://doi.org/10.1002/NME.1620261205)
101. Baseley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Triangular elements in plate bending. – Conforming and nonconforming solutions // Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics (Nov. 1966), pp. 547–576, Wright Patterson AFB, Oct. 1965
102. Bathe K.J. Finite Element Procedures. New Jersey, Prentice Hall, 1996, 1038p.
103. Bathe K.J. Dvorkin, E.N. A four–node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. // Int. J. Num. Meth. Engrg., 1985, Vol. 21, pp. 367–383. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620210213>
104. Bletzinger K.U, Bischoff M, Ramm E: A unified approach for shear–locking–free triangular and rectangular shell finite elements. // Computers & Structures, 2000, Vol. 75, pp. 321–334. DOI: [10.1016/S0045-7949\(99\)00140-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00140-6)
105. Bogner F.K., Fox R.L., Schmit L.A. The Generation of Interelement Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas // Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright–Patterson Air Force Base, Ohio, October 1965, pp. 397–444.
106. Chapelle D., Bathe K.J. The Finite Element Analysis of Shells Fundamentals. – Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003. – 330p.
107. Cazzani A, Atluri S.N. Four–nodes mixed finite elements, using unsymmetric stressed, for linear analysis of membranes // Computational Mechanics, 1993, 11, pp. 229–251
108. Chen X.M., Cen S., Sun J.Y., Li Y.G. Four–Node Generalized Conforming Membrane Elements with Drilling DOFs Using Quadrilateral Area Coordinate Methods. // Mathematical Problems in Engineering, 2015, Vol. 3–4, pp. 1–13. DOI: [10.1155/2015/328612](https://doi.org/10.1155/2015/328612)
109. Choo Y.S., Choi N., Lee B.C. Choo Y.S., Choi N., Lee B.C. Quadrilateral and triangular 22plate elements with rotational degrees of freedom based on the hybrid Trefftz method. //

- Finite Elements in Analysis and Design, 2006, Vol. 42(11), pp. 1002–1008. DOI: 10.1016/j.finel.2006.03.006
110. Clough R.M., Tocher J. Finite elements stiffness matrices for the analysis of plate bending // Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. – Ohio, 1965
111. Cook R. A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, Vol. 24(8), pp. 1499–1508. DOI: 10.1002/nme.1620240807
112. Cook R.D. On the Allman triangle and a related quadrilateral element // Computers and structures. 1986, Vol. 22(6), pp. 1065–1067. DOI: 10.1016/0045-7949(86)90167-7
113. Fellipia C.A. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Vol. 192(16–18), pp. 2125–2168. DOI: 10.1016/S0045-7825(03)00253-6
114. Fraeijs de Veubeke B. A conforming finite element for plate bending. // International Journal of Solids and Structures, 1968, Vol. 4, pp. 95–108. DOI:10.1016/0020-7683(68)90035-8
115. Irons B.M., Razzaque A. Experience with the path test. // In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to Partial Differential Equations, Academic Press, 1972, pp. 557–587.
116. Iura M., Atluri S.N. Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom // Computational Mechanics, 9, 1992, pp.417–428. DOI:10.1007/BF00364007
117. Karpilovskiy V.S. Finite Elements of the Plane Problem of the Theory of Elasticity with Drilling Degrees of Freedom. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2020, Vol. 16(1), pp. 48–72. DOI:10.22337/2587-9618
118. Karpilovskiy V.S. Finite Elements for the Analysis of Reissner–Mindlin Plates With Joint Interpolation of Displacements and Rotations (JIDR). // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021, Vol. 17(3), pp. 49–63, DOI:10.22337/2587-9618-2021-17-3-49-63
119. Luo Y., An Efficient 3D Timoshenko Beam Element with Consistent Shape Functions // Adv. Theor. Appl. Mech. 2008. Vol. 1(3), pp. 95–106.
120. Macneal R.H., Harder, R.L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. // Finite elements in analysis and design, 1985, Vol. 1, pp. 3–20. DOI: 10.1016/0168-874X(85)90003-4
121. MacNeal R.H., Harder R.L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite Element Anal. Des., 1987, Vol. 1, pp.1793-1799. DOI:10.1016/016-874x(85)90003-4
122. MacNeal R.H., Harder R.L. A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom // Computers and structures. 1988. V.28. JSbl. pp.75-84. URL:[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90094-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90094-6)
123. MacNeal R.H., Harder R.L. A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. // Computers and structures, 1988, Vol. 28(1), pp. 75–84. DOI:10.1016/0045-7949(88)90094-6
124. Makieta R.N., Marcal P.V. Finite Element Analysis of Nonlinear Structures // Journal Structural Division. – Proc./ASCE, 1968, Vol. 94(9), pp.2081–2105. URL:<https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002066>
125. Oden J.T. Finite Elements of Nonlinear Continua. – New York: McGraw Hill Book Company, 1972. – 432p.
126. Oden J.T. Finite Elements of Nonlinear Continua. – Dover Publications, 2006. – 456p.

127. Robinson J: An evaluation of lower order membranes as contained in the MSC/NASTRAN, ASAS and PAFEC systems. Report to the Royal Aircraft Establishment, Farnborough (MOD Contract No. A93b/494), September 1979
128. Wilson E.L, Ibrahimbegovic A. Thick shell and solid elements with independent rotation fields //International journal for numerical methods in engineering, 1991, Vol. 31(7), pp. 1393–1414. DOI: 10.1002/nme.1620310711
129. White D W, Abel J F 1989 Testing of shell finite element accuracy and robustness. Finite Elements // Finite Elements in Analysis and Design, 1989, Vol.6(2), pp. 129-151. URL: [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(89\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0168-874X(89)90040-1)
130. Xiao–Ming Chen, Song Cen, Jian–Yun Sun, Yun–Gui L. Four–Node Generalized Conforming Membrane Elements with Drilling DOFs Using Quadrilateral Area Coordinate Methods //Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2015, Article ID 328612, 13p. URL: <https://doi.org/10.1155/2015/328612>
131. Yunus .M., Saigal S., Cook R.D. On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom// International journal for numerical methods in engineering, 1989, Vol. 28, pp.785–800. DOI: 10.1002/nme.1620280405
132. Zhang H., Kuong J.S. Eight–node membrane element with drilling degrees of freedom for analysis of in–plane stiffness of thick floor plates// International journal for numerical methods in engineering, 2008, Vol. 76(13), pp. 2117–2136. DOI: 10.1002/nme.2395
133. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. 3 volumes. Plenta Tree, Butterworth–Heinemann, 2000, Vol. 1, 690p., Vol. 2, 459p., Vol. 3, 334p.

## Оглавление

Список обозначений .....	3
Глава 1. Задачи теории упругости .....	6
1.1. Конструкция и ее расчетная схема .....	6
1.2. Гипотезы .....	10
1.3. Основные задачи .....	14
1.4. Вариационные задачи .....	20
Глава 2. Метод конечных элементов .....	25
2.1. Конечные элементы метода перемещений .....	25
2.2. О связи с проекционно-сеточными методами .....	31
2.3. Гибридная схема МКЭ .....	32
2.4. О погрешности решения .....	34
2.5. Критерий полноты .....	37
2.6. Устойчивость дискретной задачи .....	41
2.7. Критерий несовместности .....	42
2.8. Оценки скорости сходимости метода .....	44
2.9. Внутренние степени свободы конечных элементов .....	47
2.10. О системах координат .....	49
2.11. Построение систем аппроксимирующих функций .....	52
2.12. Метод подобластей ( <i>SubAreas, SA</i> ) .....	54
Глава 3. Трехмерная задача теории упругости .....	59
3.1. Основные уравнения .....	59
3.2. Степени свободы трехмерных конечных элементов .....	68
3.3. Конечные элементы с полиномиальными аппроксимациями .....	69
3.3.1. Тетраэдр с узлами в вершинах .....	70
3.3.2. 10-ти узловой тетраэдр .....	70
3.3.3. Прямой параллелипипед с узлами в вершинах .....	71
3.3.4. Прямой 20-ти узловой параллелипипед .....	72
3.3.5. Прямая треугольная призма с узлами в вершинах .....	73
3.3.6. Прямая треугольная 15-ти узловая призма .....	73
3.4. Изопараметрические конечные элементы .....	74
3.5. О точности элементов .....	77
3.6. Тесты .....	78
3.6.1. Патологические (patch) тесты .....	79
3.6.2. Расчет толстой прямоугольной плиты .....	81
3.6.3. Расчет толстой круглой плиты .....	82
3.6.4. Задача Лява .....	83
3.6.5. Задача Бусинеска о действии на упругое полупространство нормальной силы .....	85
Глава 4. Плоская задача теории упругости .....	86
4.1. Плоское напряженное состояние .....	86
4.2. Плоская деформация .....	91

4.3.	Степени свободы и аппроксимации .....	92
4.4.	Элементы с двумя степенями свободы узла .....	96
4.4.1.	Треугольник с узлами в вершинах .....	96
4.4.2.	Шестиузловой треугольник .....	97
4.4.3.	Треугольные элементы ( <i>SA</i> ).....	98
4.4.4.	Треугольники серендипового типа .....	99
4.4.5.	Прямоугольник с узлами в вершинах .....	100
4.4.6.	Восьмиузловой прямоугольник.....	100
4.4.7.	Прямоугольные элементы серендипового типа.....	101
4.4.8.	Четырехугольные элементы ( <i>SA</i> ) .....	102
4.4.9.	Четырехугольники с двумя узлами на стороне.....	107
4.4.10.	Изопараметрические элементы .....	108
4.5.	Элементы с квазивращательными степенями свободы ( <i>QRDF</i> ).....	109
4.5.1.	Трехузловой элемент ( <i>QRDF3</i> ).....	109
4.5.2.	Четырехузловой изопараметрический элемент ( <i>QRDF4IP</i> ) .....	111
4.5.3.	Четырехузловой элемент ( <i>QRDF4SA</i> ).....	112
4.6.	Несовместные элементы ( <i>DDFIC</i> ).....	114
4.6.1.	Алгоритм построения несовместных элементов .....	114
4.6.2.	Треугольник с узлами в вершинах ( <i>DDF3IC</i> ) .....	115
4.6.3.	Шестиузловой треугольник ( <i>DDF6IC</i> ) .....	117
4.6.4.	Прямоугольник с узлами в вершинах ( <i>DDF4RIC</i> ).....	119
4.6.5.	Прямоугольник с промежуточными узлами на сторонах ( <i>DDF8IC</i> ) ..	120
4.6.6.	Четырехугольник ( <i>DDF4ISA</i> ) .....	121
4.6.7.	Восьмиузловой четырехугольник ( <i>DDF8ISA</i> ).....	122
4.7.	Совместные элементы ( <i>DDFSA</i> ) .....	124
4.7.1.	Треугольник с узлами в вершинах ( <i>DDF3SA</i> ).....	124
4.7.2.	Треугольник шестиузловой ( <i>DDF6SA</i> ) .....	125
4.7.3.	Четырехугольник с узлами в вершинах ( <i>DDF4SA</i> ).....	126
4.7.4.	Восьмиузловой четырехугольник ( <i>DDF8SA</i> ).....	127
4.8.	Тесты .....	127
4.8.1.	Патологические (patch) тесты .....	128
4.8.2.	Температурные деформации .....	130
4.8.3.	Узкая прямоугольная пластина .....	130
4.8.4.	Пластина с прямым изгибом.....	133
4.8.5.	Задача Cook .....	135
4.8.6.	Изгиб неограниченного клина сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине (задача Инглиса) .....	137
4.8.7.	Изгиб прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне.....	138
4.8.8.	Анализ результатов .....	140
Глава 5.	Стержни.....	142
5.1.	Гипотезы .....	142
5.2.	Сжато-растянутый стержень.....	143
5.3.	Балка Бернулли .....	144
5.3.1.	Уравнения.....	144
5.3.2.	Учет сдвиговых деформаций.....	146
5.3.3.	Преднапряжение и сдвиг .....	147

5.3.4.	Степени свободы и аппроксимирующие функции .....	148
5.4.	Балка Тимошенко .....	151
5.5.	Кручение .....	155
5.6.	Пространственный стержень .....	156
5.7.	Тесты .....	157
Глава 6.	Тонкие плиты (теория Кирхгоффа-Лява) .....	159
6.1.	Теория изгиба тонких пластин Кирхгоффа-Лява .....	159
6.2.	Степени свободы и аппроксимации .....	164
6.3.	Прямоугольные конечные элементы .....	166
6.3.1.	Элемент Богнера-Фокса-Шмидта .....	166
6.3.2.	Элемент Клафа .....	168
6.3.3.	Полусовместный элемент .....	168
6.4.	Несовместный треугольный элемент с 9-ю степенями свободы .....	169
6.5.	Совместные треугольные элементы .....	172
6.5.1.	Трехузловой элемент Клафа-Точера с 9-ю степенями свободы ( <i>PLSA3</i> ) .....	172
6.5.2.	Элемент Клафа-Точера с 12-ю степенями свободы .....	175
6.5.3.	Еще один метод построения системы аппроксимирующих функций Клафа-Точера .....	176
6.5.4.	Шестиузловой треугольный элемент с 18-ю степенями свободы ( <i>PLSA6</i> ) .....	176
6.5.5.	Трехузловой элемент Купера с 18-ю степенями свободы .....	180
6.6.	Совместные четырехугольные элементы ( <i>SA</i> ) .....	182
6.6.1.	Элемент с 12-ю степенями свободы ( <i>PLSA4</i> ) .....	182
6.6.2.	Элемент с 16-ю степенями свободы .....	186
6.6.3.	Элемент с 24-мя степенями свободы ( <i>PLSA8</i> ) .....	186
6.7.	Тесты .....	192
6.7.1.	Патологические (patch) тесты .....	192
6.7.2.	Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки .....	194
6.7.3.	Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой .....	196
Глава 7.	Изгиб плит средней толщины (теория Рейсснера-Миндлина) .....	198
7.1.	Теория изгиба плит средней толщины .....	198
7.2.	Степени свободы и аппроксимации .....	202
7.3.	Треугольники <i>DSG3</i> .....	204
7.3.1.	Элемент <i>DSG3</i> .....	204
7.3.2.	Элемент <i>DSG3M</i> .....	206
7.4.	Изопараметрический четырехугольник с узлами в вершинах ( <i>MITC4</i> ) .. .....	207
7.5.	Совместная интерполяция перемещений и углов поворота ( <i>Joint interpolation of displacements and rotations, JIDR</i> ) .....	209
7.5.1.	Критерии полноты и несовместности для элементов теории Рейсснера-Миндлина .....	209
7.5.2.	Системы аппроксимирующих функций .....	212
7.6.	Треугольные элементы метода <i>JIDR</i> .....	215
7.6.1.	Треугольник с узлами в вершинах ( <i>JIDR3</i> ) .....	215

7.6.2.	Шестиузловой треугольник ( <i>JIDR6</i> ).....	217
7.6.3.	Изопараметрический шестиузловой треугольник ( <i>JIDR6IP</i> ).....	217
7.7.	Прямоугольные элементы <i>JIDR</i> .....	217
7.7.1.	Четырехузловой элемент ( <i>JIDR4RIC</i> ).....	217
7.7.2.	Восьмиузловой прямоугольный элемент ( <i>JIDR8RIC</i> ).....	219
7.8.	Четырехугольные элементы <i>JIDR</i> .....	219
7.8.1.	Изопараметрический четырехузловой элемент ( <i>JIDR4I</i> ).....	219
7.8.2.	Изопараметрический восьмиузловой элемент ( <i>JIDR8I</i> ).....	220
7.8.3.	Четырехузловой элемент ( <i>JIDRSA</i> ).....	220
7.8.4.	Восьмиузловой элемент ( <i>JIDR8SA</i> ).....	220
7.9.	Тесты.....	220
7.9.1.	Патологические (patch) тесты.....	221
7.9.2.	Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки.....	221
7.9.3.	Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой.....	223
Глава 8.	Осесимметричная задача теории упругости.....	224
8.1.	Тела вращения.....	224
8.2.	Степени свободы и аппроксимации.....	226
8.3.	Элементы с квазивращательными степенями свободы.....	227
8.3.1.	Трехузловой элемент ( <i>QRDF3A</i> ).....	227
8.3.2.	Четырехузловой изопараметрический элемент ( <i>QRDF3AIP</i> ).....	228
8.3.3.	Четырехузловой элемент с кусочно-полиномиальной аппроксимацией ( <i>QRDF4ASA</i> ).....	230
8.4.	Элементы с вращательными степенями свободы ( <i>DDF</i> ).....	231
8.4.1.	Треугольник с узлами в вершинах ( <i>DDF3A</i> ).....	231
8.4.2.	Шестиузловой треугольник ( <i>DDF6ASA</i> ).....	231
8.4.3.	Четырехугольник с узлами в вершинах ( <i>DDF4ASA</i> ).....	232
8.4.4.	Восьмиузловой четырехугольник ( <i>DDF8ASA</i> ).....	233
8.5.	Тесты.....	234
8.5.1.	Патологические (patch) тесты.....	234
8.5.2.	Задача Ляме о замкнутой сферической оболочке, нагруженной изнутри и извне равномерно распределенными давлениями.....	235
8.5.3.	Задача Бусинеска о действии на упругое полупространство нормальной силы.....	237
8.5.4.	Толстая круглая в плане плита, жестко защемленная по боковой поверхности, под действием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки.....	239
Глава 9.	Оболочки.....	242
9.1.	Типы оболочек.....	242
9.2.	Степени свободы и аппроксимации.....	243
9.3.	Тесты.....	244
9.3.1.	Патологические (patch) тесты.....	247
9.3.2.	Цилиндрический резервуар под действием внутреннего давления жидкости.....	247
9.3.3.	Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция.....	249
Приложение.	Численное интегрирование.....	253
П.1.	Квадратурные и кубатурные формулы.....	253
П.2.	Квадратурные формулы.....	253

---

П.3.	Кубатурные формулы на плоскости.....	254
П.3.1.	Прямоугольник.....	254
П.3.2.	Треугольник.....	256
П.4.	Кубатурные формулы в трехмерном пространстве.....	258
П.4.1.	Параллелепипед.....	258
П.4.2.	Тетраэдр.....	260
П.4.3.	Треугольная призма.....	262
	Литература.....	264
	Оглавление.....	271

Наукове видання

**Віктор Семенович Карпіловський**

*ORCID* : 0000-0002-9437-0373

*ScadGroup Ltd.*

03037, Україна, м.Київ, вул. Освіти, б. 3А, оф. 2

тел: +38 044 249 71 91(3)

*E-mail*: [kvs@scadsoft.com](mailto:kvs@scadsoft.com)

<http://www.scadsoft.com>

**Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності.**

– Київ: «Софія А», 2022. – 275 с.

Формат 70x100/16. Ум. друк. арк. 20.3

Видавництво "Софія-А"

04053, Україна, м. Київ, вул. Обсерваторна, б. 12Б

тел.: +38 044 272 28 52, +38 044 272 29 31

факс: +38 044 272 28 77

*E-mail*: [sofiya\\_a@ukr.net](mailto:sofiya_a@ukr.net)