ГОССТРОЙ УССР

Научно-исследовательский институт автоматизированных систем
планирования и управления в строительстве (НИИАСС)

УДК 539.3

В.С.Карпиловский

КОНСТРУИРОВАНИЕ НЕСОВМЕСТНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Киев - 1980

I. ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) является вариационно-разностным методом со специальным выбором системы аппроксимирующих функций / [1-3] /. Поэтому доказательство сходимости МКЭ сводится, согласно [4], к проверке следующих условий:

а) все функции системы принадлежат энергетическому пространству рассматриваемого положительно определенного оператора;

б) система функций линейно-независима;

в) система функций полна в энергетическом пространстве.

Анализ данных условий обычно не представляет особых затруднений. В работах [5-8] разработан для прямоугольной равномерной сетки математический аппарат проверки системы функций метода Ритца на полноту и оценки скорости сходимости МКЭ как в энергетическом пространстве рассматриваемой задачи, так и в $L_2(\Omega)$.

Однако существуют так называемые "несовместные" конечные элементы (КЭ), у которых не выполнено условие принадлежности аппроксимирующих функций энергетическому пространству. Примером может быть хорошо известный конечный элемент Клафа / [1, 9-13] /. В работах [3, 14-18] приведены различные доказательства сходимости МКЭ для данного конечного элемента, но при этом рассматривались частные случаи краевых условий.

В настоящей работе исследуются несовместные конечные элементы. Доказана достаточность некоторых критериев аппроксимации, устойчивости и сходимости для таких КЭ. Рассматриваемые критерии накладывают самые слабые ограничения на связи КЭ между собой и их легко можно применить для построения новых конечных элементов. Построены новые прямоугольные /р. 6, 7/ и треугольный /р. 8/ элементы плиты и доказана их сходимость. У прямоугольных КЭ только часть аппроксимирующих функций несовместна. Треугольный КЭ отличается своей простотой: при его построении не требуется делать сложную замену системы координат и аппроксимирующие функции - полиномы 4-го порядка. Матрица жесткости (МЖ) треугольного КЭ не зависит от порядка нумерации узлов.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МКЭ

Краевая задача. В односвязной области Ω n -мерного евклидова пространства R_n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ ищется решение уравнения порядка $2p$.

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=p} (-1)^{|\beta|} D^{\beta} A_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u = f(x) \tag{2.1}$$

удовлетворяющее на $\partial\Omega$ заданным однородным граничным условиям. $\alpha, \beta, \gamma \in R_n$ - мультииндексы, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

$$D^{\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\gamma_n}}$$

Краевую задачу (I) можно записать в операторном виде

$$Au = f \tag{2.2}$$

Предполагается, что оператор A самосопряжен /$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$/ и сильно эллиптичен. Тогда задача (2) эквивалентна следующей вариационной задаче: в классе функций $\dot{W}_2^p(\Omega)$ из пространства Соболева $W_2^p(\Omega)$ / [19, 20] /, удовлетворяющих главным краевым условиям, найти такую функцию, которая минимизирует функционал

$$\dot{I}(u) = [u,u]_{\Omega} - 2\int_{\Omega} f u \, d\Omega \tag{2.3}$$

где

$$[u,v]_{\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|,|\beta|=p} A_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u D^{\beta} v \, dx, \quad u,v \in \dot{W}_2^p(\Omega)$$

Очевидно, что

$$[u,v]_{\Omega} = [v,u]_{\Omega}, \quad [u,u]_{\Omega} \geq C \|u\|^2_{2,p,\Omega} \tag{2.4}$$

Для упрощения обозначений различные константы обозначаются одной буквой С.

где
$$\|u\|^2_{2,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le p} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 d\Omega$$

К о н е ч н ы е   э л е м е н т ы. Для приближенного решения краевой задачи (2), область непрерывного изменения аргумента Ω разбивается на конечные элементы:

$$\Omega_h = \{ \bar\Omega = \bigcup_r \bar\Omega_r ,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset ,\ i \ne j \} \qquad (2.5)$$

Каждый КЭ Ω_r характеризуется следующими свойствами:

а) геометрией. Обычно КЭ имеют форму простейших геометрических фигур: прямоугольника, треугольника, тетраэдра, параллелепипеда, сектора и т.д. ;

б) дискретными точками (узлами) на линиях (поверхностях) раздела КЭ, общими для граничащих элементов. Через X_h обозначим множество всех узлов разбиения Ω_h ;

в) степенями свободы каждого узла $x^{(k)} \in X_h \cap \bar\Omega_r$

В качестве степеней свободы в МКЭ берутся значения функции и некоторых ее производных в данной точке ;

г) законом аппроксимации по области Ω_r .

Существенной характеристикой разбиения (2.5) является максимальный диаметр конечных элементов, равный

$$h = \max_r \sup_{x,y \in \Omega_r} |x - y|$$

С т е п е н и   с в о б о д ы. Если в узле сетки $x^{(k)}$ определено s_k степеней свободы, то каждой степени свободы можно поставить в соответствие дифференциальный оператор:

$$L_{ks} = \sum_{|\beta| = j_{ks}} \lambda^\beta_{ks} D^\beta ,\ \lambda^\beta_{ks} = const ,\ s = 1, 2, \dots , s_k . \qquad (2.6)$$

где $j_{ks} \le s_0$ - максимального порядка дифференцирования. Т.к. в каждом узле всегда первая степень свободы - перемещение, то $L_{k,1} = 1$.

Разные степени свободы узла не могут иметь один и тот же геометрический смысл, и поэтому все дифференциальные операторы L_{ks} / $s = 1, 2, \ldots, s_k$ / линейно-независимы.

Если, например, в узле определены вертикальное перемещение W и два угла поворота относительно осей OX и OY то /рис. 6.1/

$$L_{k,1} = 1, \quad L_{k2} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{k,3} = -\frac{\partial}{\partial x} \qquad (2.7)$$

$s = 1, 2, 3, \quad s_0 = 1$

Система координатных функций. На каждом КЭ Ω_r введем линейно-независимые степени функций

$$\{\varphi_{ks}^{r}(x),\ \varphi_{ks}^{r} \in C^{p_0}(\bar{\Omega}_r),\ s = 1, 2, \ldots, s_k,\ x^{(k)} \in X_h \cap \bar{\Omega}_r\} \qquad (2.8)$$

p_0 непрерывно-дифференцируемых функций на $\bar{\Omega}_r$. $p_0 \ge max(p, s_0)$

В МКЭ данные системы функций должны удовлетворять следующим условиям:

$$supp\ \varphi_{ks}^{r} = \bar{\Omega}_r, \quad L_{ks}\varphi_{ij}^{r}(x^{(k)}) = \delta_k^i \cdot \delta_s^j$$

$$s = 1, 2, \ldots, s_k,\ j = 1, 2, \ldots, s_i, \quad x^{(k)}, x^{(i)} \in X_h \cap \bar{\Omega}_r \qquad (2.9)$$

δ_k^i - символ Кронекера.

Рассмотрим систему функций

$$\{\varphi_{ks}(x), \varphi_{ks} = \sum_{r} \varphi_{ks}^{r},\ x^{(k)} \in X_h, s = 1, 2, \ldots, s_k\} \qquad (2.10)$$

функций в данной системе столько, сколько степеней свободы разбиения Ω_h. Из (2.9) следует, что каждая функция системы (2.10) обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{supp} \varphi_{ks} = \bigcup_{x^{(k)} \in \bar{\Omega}_r} \bar{\Omega}_r , \quad L_{ks} \varphi_{ij} (x^{(k)}) = \delta_k^i \cdot \delta_s^j \tag{2.11}$$

т.е. носителем функции φ_{ks} является звезда конечных элементов узла $x^{(k)}$.

Любой функции $u(x) \in C^{s_0}(\Omega)$ можно поставить в соответствие функцию:

$$\omega_h(\varphi, u) = \sum_{x^{(k)} \in X_h} \sum_{s=1}^{s_k} L_{ks}(u)(x^{(k)}) \varphi_{ks}(x) \tag{2.12}$$

Из свойств (2.11) системы функций $\{\varphi_{ks}\}$ получаем, что вычисляя s степень свободы функции $\omega_h(\varphi, u)$ в точке $x^{(k)}$ получим $L_{ks}(u)(x^{(k)})$ $-s$ степень свободы функции $u(x)$.

Обозначим через $H_{\varphi,h}$ пространство сеточных функций вида

$$\xi(\varphi, x) = \sum_{x^{(k)} \in X_h} \sum_{s=1}^{s_k} q_{ks} \varphi_{ks}(x) \tag{2.13}$$

удовлетворяющих в граничных узлах главным краевым условиям задачи (2), q_{ks} - произвольные числовые коэффициенты.

М а т р и ц а   ж е с т к о с т и. Для каждого КЭ в МКЭ составляется матрица жесткости следующего вида:

$$K_r = \begin{pmatrix} K^r_{\ell_1 \ell_1} & \dots & K^r_{\ell_1 \ell_i} \\ \vdots & & \vdots \\ K^r_{\ell_i \ell_1} & \dots & K^r_{\ell_i \ell_i} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

где $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i$ - номера узлов конечного элемента.

K^r_{ij} - подматрицы, описывающие взаимодействие i и j узлов элемента и имеющие следующий вид:

$$K_{ij}^{z}=\begin{pmatrix} K_{ij11}^{z} & \dots & K_{ij1s_j}^{z} \\ \\ K_{ijs_i1}^{z} & \dots & K_{ijs_is_j}^{z} \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

K_{ijet}^{z} - обобщенное усилие в узле i по направлению степени свободы e, отвечающее единичному перемещению узла j по направлению t, при условии, что остальные перемещения всех узлов элемента равны нулю.

$$K_{ijet}^{z}=[\varphi_{ie}^{z},\varphi_{jt}^{z}]_{\Omega_z} \qquad (2.16)$$

Система разрешающих уравнений. Введем вектор обобщенных перемещений некоторого узла

$$\bar{q}_i=\{q_{i1},q_{i2},\dots,q_{is_i}\}^T$$

Если общее число узлов равно N, то вектор $\bar{q}$ узловых перемещений (степеней свободы) системы для разбиения Ω_h будет иметь вид:

$$\bar{q}=\{\bar{q}_1^T,\bar{q}_2^T,\dots,\bar{q}_N^T\}^T \qquad (2.17)$$

Вектор обобщенных узловых сил $\bar{f}$ равен

$$\bar{f}=\{\bar{f}_1^T,\bar{f}_2^T,\dots,\bar{f}_N^T\}^T \qquad (2.18)$$

где $\bar{f}_i^T=\{f_{i1},f_{i2},\dots,f_{i,s_i}\}$ - вектор обобщенных узловых сил i узла, имеющего s_i степеней свободы.

$$f_{ij}=\int_{\Omega} f\varphi_{is}\,d\Omega,\quad s=1,2,\dots,s_i \qquad (2.19)$$

Используя выше введенные обозначения систему разрешающих уравнений МКЭ, согласно [I, 2] можно записать в виде:

$$H\bar{q} = \bar{f} \qquad (2.20)$$

H - матрица жесткости всей системы.

$$H = \begin{pmatrix} \sum\limits_{r\in 11} K_{11}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in 1N} K_{1N}^{r} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{r\in N1} K_{N1}^{r} & \dots & \sum\limits_{r\in NN} K_{NN}^{r} \end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

где $r\in ij$ означает суммирование по всем элементам, содержащим узлы i и j.

Из определения системы функций (2.10) и вида подматриц K_{ij}^{r} (2.15) получаем, что

$$\sum_{r\in ij} K_{ij}^{r} = \begin{pmatrix} K_{ij11} & \dots & K_{ij1s_j} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{ijs_i1} & \dots & K_{ijs_is_j} \end{pmatrix} \qquad (2.22)$$

и

$$K_{ijet} = \sum_{r} [\varphi_{ie}^{r}, \varphi_{jt}^{r}]_{\Omega_r}$$

$$e = 1,2,\dots,s_i, \qquad t = 1,2,\dots,s_j \qquad (2.23)$$

Ф у н к ц и о н а л. Разрешающую систему уравнений (2.20) можно получить из условия минимума функционала

$$I_h(u_h) = \|u_h\|_{A,*}^{2} - 2(f, u_h) \qquad (2.24)$$

на множестве функций u_h вида (2.13) из $H_{\varphi,h}$.

Здесь введены следующие обозначения

$$\|u_h\|^2_{A,*} = [u_h, u_h]_{\Omega,*}\ , \quad \|u_h\|^2_{2,*} = \sum_{r} \|u_h\|^2_{2,\Omega_r}$$

$$[u_h, v_h]_{\Omega,*} = \sum_{r} [v_h, u_h]_{\Omega_r}\ , \quad u_h, v_h \in H_{\varphi,h}$$

Отличие функционала (2.24) от функционала (2.3) вызвано тем, что система функций (2.10) $\{\varphi_{ks}\}$ для несовместных КЭ может не принадлежать $\dot{W}_2^p$ - энергетическому пространству краевой задачи (2.2). В силу (2.8) функционал $\dot{I}_h(u_h)$ определен на любой функции из $H_{\varphi,h}$.

3. КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно работе [4] система функций (2.10) должна быть полна в $\dot{W}_2^p(\Omega)$ в следующем смысле: пусть u – произвольный элемент рассматриваемого класса; каково бы ни было число $\varepsilon>0$ существует такое число $h_0>0$, что если максимальный диаметр конечных элементов $h<h_0$, то существует такая функция $\xi(\varphi,x)$ вида (2.13), что

$$\| u(x) - \xi(\varphi,x) \|_{A,*} < \varepsilon \qquad (3.1)$$

В МКЭ условие (3.1) проверяется следующим образом: для произвольной функции $u(x) \in W_2^\ell$, $\ell>p$ рассматривается функция $\omega_h(\varphi,u)$ вида (2.12). Т.к. коэффициенты $\omega_h(\varphi,u)$ при функциях $\varphi_{ks} / k=1,2,\dots,N, s=1,2,\dots,S_k$ зависят от $u(x)$, то, раскладывая их в ряд Тейлора и рассматривая разность $u-\omega_h(\varphi,u)$, доказывается (3.1). При этом определяется порядок аппроксимации функции $u(x)$ функцией $\omega_h(\varphi,u)$

Недостатком такого подхода является невозможность применить его на этапе конструирования КЭ, когда система координатных функций еще не определена. В работах [4-7] был предложен новый подход к доказательству полноты и порядка аппроксимации для равномерных прямоугольных сеток. В настоящей работе данный критерий развит для областей произвольной геометрической формы, для произвольных разбиений (2.5) Ω_h.

Функцию $\omega_h(\varphi,u)$ можно представить в следующем виде:

$$\omega_h(\varphi,u) = \sum_{r} \omega_{h,r}(\varphi,u) \qquad (3.2)$$

$$\omega_{h,r}(\varphi,u) = \sum_{x^{(k)} \in X_h \cap \bar{\Omega}_r} \sum_{s=1}^{S_k} L_{ks}(u)(x^{(k)}) \varphi_{ks}(x)$$

Рассмотрим конкретный КЭ Ω_r. Пусть существует произвольная точка $z^{(r)}$, относительно которой Ω_r звездна. Разложим $L_{ks}(u)(x^{(k)})$ в ряд до порядка m в точке $z^{(r)}$:

$$L_{ks}(u)(x^{(k)})=\sum_{|\alpha|\geq j_{ks}}^{m} L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^{\alpha}}{\alpha!}\right)(x^{(k)})D^{\alpha}u(z^{(r)})+Q_{rks}^{m+1} \qquad (3.3)$$

где $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$, $\alpha!=\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!$

$\alpha\geq\beta$ означает $\alpha_1\geq\beta_1,\ \alpha_2\geq\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n\geq\beta_n$.

Q_{rks}^{m+1} – остаток ряда.

Т.е.

$$\omega_{h,r}(\varphi,u)=\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\bar{\Omega}_r}\sum_{s=1}^{s_k}\sum_{|\alpha|=j_{ks}}^{m}$$

$$L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^{\alpha}}{\alpha!}\right)(x^{(k)})D^{\alpha}u(z^{(r)})\varphi_{ks}^{r}(x)+Q_r^{m+1}=$$

$$=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\left\{\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\Omega_r}\sum_{s=1}^{s_k}L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^{\alpha}}{\alpha!}\right)(x^{(k)})\varphi_{ks}^{r}(x)\right\}\cdot D^{\alpha}u(z^{(r)})+Q_r^{m+1} \qquad (3.4)$$

где Q_r^{m+1} – суммарный остаток.

Разложив $u(x)$ в ряд относительно точки $z^{(r)}$ получаем, что если выполнена система тождеств $x\in\bar{\Omega}_r,\ |\alpha|\leq m$

$$\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\bar{\Omega}_r}\sum_{s=1}^{s_k}L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^{\alpha}}{\alpha!}\right)(x^{(k)})\varphi_{ks}^{r}(x)\equiv\frac{(x-z^{(r)})^{\alpha}}{\alpha!} \qquad (3.5)$$

то степень пространства $H_{\varphi,h}$, порожденного системой функций (2.10), будет на КЭ Ω_r равна $m+1$: любой полином степени m представим через данную систему функций на данном конечном элементе.

Будем говорить, что система функций (2.10) удовлетворяет на КЭ Ω_r критерию полноты порядка m, если справедливы тождества (3.5)

Лемма 3.1. Пусть на КЭ Π_r для точки $z^{(r)}$ выполнена система тождеств (3.5). Тогда данная система тождеств выполнена для любой точки $y \in \bar{\Pi}_r$.

Доказательство. Пусть $y \in \bar{\Pi}_r$. Тогда

$$\frac{(x^{(k)}-y)^\alpha}{\alpha!} = \frac{(x^{(k)}-z^{(r)}+z^{(r)}-y)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{(x^{(k)}-z^{(r)})^\gamma}{\gamma!} \frac{(z^{(r)}-y)^\beta}{\beta!}$$

$$\sum_{x^{(k)} \in X_h \cap \bar{\Pi}_r} \sum_{s=1}^{S_k} L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^\alpha}{\alpha!}\right)(x^{(k)})\,\varphi_{ks}^r(x) =$$

$$= \sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{(z^{(r)}-y)^\beta}{\beta!} \sum_{x^{(k)} \in X_h \cap \bar{\Pi}_r} \sum_{s=1}^{S_k} L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^\gamma}{\gamma!}\right)\varphi_{ks}^r(x) =$$

$$= \sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{(z^{(r)}-y)^\beta}{\beta!} \frac{(x-z^{(r)})^\gamma}{\gamma!} = \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}$$

Т.е. тождества (3.5) выполнены для точки y.

Лемма 3.2. Если для системы функций (2.10) на КЭ Π_r выполнен критерий полноты (3.5) порядка m, то для любой функции $V(x) \in C_2^{p_0}(\bar{\Pi})$, $0 < \ell \le m+1$ справедливо тождество

$$V(x) - \omega_r(\varphi, V) = Y_{\ell,r}(V,x) - \omega_h(\varphi, Y_{\ell,r}(V,x)) \qquad (3.6)$$

где

$$Y_{\ell,r}(V,x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} V((1-t)z^{(r)}+tx)\,dt \qquad (3.7)$$

Доказательство. Разложим V на Π_r в ряд относительно точки $z^{(r)}$:

$$V(x)=\sum_{|\gamma|=0}^{\ell-1} D^{\gamma} V(z^{(\tau)}) \frac{(x-z^{(\tau)})^{\gamma}}{\gamma!} + r_{\ell,\tau}(V,x) \qquad (3.8)$$

Рассмотрим функции $V_{\gamma}(x)=(x-z^{(\tau)})^{\gamma}/\gamma!$, $|\gamma|\le S-1$

Из критерия полноты (3.5) получаем, что

$$V_{\gamma}(x)-\omega_{\tau}(\varphi, V_{\gamma}(x))=0 \qquad (3.9)$$

Т.е. из (3.9) следует справедливость (3.6).

Теорема 3.I. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω такова, что любую $V(x)\in W_2^{m+1}(\Omega)$ можно продолжить на все R_n с сохранением класса, и разбиение (2.5) Ω на конечные элементы удовлетворяет условиям:

а) для любого КЭ Ω_{τ} существует хотя бы одна точка $z^{(\tau)}$, относительно которой Ω_{τ} звездна;

б) для любого КЭ Ω_{τ} существует шар $S_{\rho,\tau}$ радиуса ρ, вложенный в Ω_{τ}, такой, что $\rho\ge Ch$ при $h\to 0$;

в) $\min\limits_{k\ne e}|x^{(k)}-x^{(e)}|\ge Ch.$

Если система функций (2.8) удовлетворяет на любом КЭ Ω_{τ} критерию полноты порядка m и справедлива оценка

$$|D^{\beta}\varphi_{ks}^{\tau}(x)|\le Ch^{j_{ks}-|\beta|},\ x\in\bar{\Omega}_{\tau},\ |\beta|\le m \qquad (3.10)$$

то существует функция $V_h(x)\in H_{\varphi,h}$ вида (2.13), что

$$\| D^{\alpha}(V(x)-V_h(x))\|_{2,*}\le Ch^{m+1-|\alpha|}\|V(x)\|_{2,m+1,\Omega} \qquad (3.11)$$

$|\alpha|\le m.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $V(x)\in W_2^{m+1}(\Omega)$ и продолжим ее на все R_n с сохранением класса.

В работе [19] показано, что всегда существует такая функция $\bar{V}_h(x)\in C^{\infty}(R_n)$, что для $0\le \ell< m+1$

$$\|V(x)-\bar{V}_h(x)\|_{2,\ell,R_n}\le Ch^{m+1-\ell}\|V(x)\|_{2,m+1,R_n} \qquad (3.12)$$

и

$$|D^\alpha \bar V_h(x)| \le C h^{-\frac{n}{2}} \|V(x)\|_{2,\ell,S_h(x)}\,, \quad x\in\Omega,\ |\alpha|=\ell \qquad (3.13)$$

где $S_h(x)$ шар радиуса h с центром в точке X, а константы не зависят от $V(x)$, $|\alpha|\le \ell$

Т.к. $D^\alpha Y_{\ell,\tau}(\bar V_h, X) = Y_{\ell-|\alpha|,\tau}(D^\alpha \bar V_h, X)$, то по лемме 3.I

$$\|D^\alpha(\bar V_h - \omega_{h\tau}(\varphi,\bar V_h))\|_{2,\Omega_\tau} = \|D^\alpha(Y_{\ell,\tau}(\bar V_h, X) - \omega_{h,\tau}(\varphi,\bar V_h))\|_{2,\Omega_\tau} =$$

$$= \|Y_{\ell-|\alpha|}(D^\alpha \bar V_h, X) - \sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\bar\Omega_\tau} \sum_{s=1}^{s_k} Y_{\ell-j_{ks}}(L_{ks}(\bar V_h), X_k) D^\alpha \varphi^\tau_{ks}(x)\|_{2,\Omega_\tau}$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что

$$|Y_{\ell-|\alpha|}(D^\alpha \bar V_h, X)| \le C h^{\ell-|\alpha|-\frac{n}{2}} \|V(x)\|_{2,\ell,S_h(x)} \le$$

$$\le C h^{\ell-|\alpha|-\frac{n}{2}} \|V(x)\|_{2,\ell,T_{h,\tau}}$$

где

$$T_{h,\tau} = \bigcup_{x\in\bar\Omega_\tau} S_h(x)$$

Из данного неравенства и свойств разбиения Ω_h, указанных в условии теоремы, получаем:

$$\|D^\alpha(\bar V_h - \omega_{h,\tau}(\varphi,\bar V_h))\|_{2,\Omega_\tau} \le C h^{\ell-|\alpha|} \|V(x)\|_{2,\ell,T_{h,\tau}}$$

т.к. из условия следует, что $\operatorname{mes}\Omega_\tau \ge C h^{\frac{n}{2}}$

Из свойств разбиения Ω_h также следует:

$$\|D^\alpha(\bar V_h - \omega_h(\varphi,\bar V_h))\|_{2,*} = \Big(\sum_\tau \|D^\alpha(\bar V_h - \omega_h(\varphi,\bar V_h))\|^2_{2,\Omega_\tau}\Big)^{\frac12} \le$$

$$\le C h^{\ell-|\alpha|}\Big(\sum_\tau \|V(x)\|^2_{2,\ell,T_{h,\tau}}\Big)^{\frac12} \le C h^{\ell-|\alpha|} \|V(x)\|_{2,\ell,\Omega} \qquad (3.14)$$

так как каждая точка $X\in\Omega$ содержится в конечном числе областей $T_{h,\tau}$ при $h\to 0$. Но

$$\|D^\alpha(V(x)-\omega_h(\varphi,\bar V_h))\|_{2,*} \le \|D^\alpha(V(x)-\bar V_h(x))\|_{2,*} +$$
$$+ \|D^\alpha(\bar V_h(x)-\omega_h(\varphi,\bar V_h(x))\|_{2,*}$$

и из неравенств (3.I2 - 3.I4) следует справедливость теоремы 3.I.

4. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ СИСТЕМЫ

Условие положительной определенности МЖ для вычислительной схемы МКЭ (2.20) имеет вид: на множестве функций из $H_{\varphi,h}$ вида (2.13) должно выполняться неравенство при $h \to 0$

$$\| \zeta(\varphi, x) \|_{A,*} \geq C \| \zeta(\varphi, x) \|_{2,\Omega} \qquad (4.1)$$

Если система функций (2.10) совместна, то справедливость данного неравенства очевидна. Если рассмотреть задачу нахождения собственных чисел

$$\mathcal{A} u - \mu u = 0 \,, \quad u \in W^{2p}(\Omega) \qquad (4.2)$$

$\mathcal{A}$ - оператор краевой задачи (2.2), то для геометрически неизменяемых систем $C \geq \mu_1$ - наименьшего собственного числа задачи (4.2).

Для несовместных же функций проверка условия (4.1) нетривиальна. В работе [14] при исследовании КЭ Клафа данное неравенство удалось доказать только для частного случая краевых условий. В настоящей работе проведено исследование устойчивости МКЭ для несовместных аппроксимаций.

Л е м м а 4.1. Пусть на КЭ Ω_z введены две системы функций вида (2.8)

$$\left\{ \varphi^z_{ks}(x),\ s=1,2,\dots,s_k,\ x^{(k)} \in X_h \cap \bar{\Omega}_z \right\}$$
$$\left\{ \psi^z_{ks}(x),\ s=1,2,\dots,s_k,\ x^{(k)} \in X_h \cap \bar{\Omega}_z \right\} \qquad (4.3)$$

и каждая из данных систем удовлетворяет критерию полноты (3.5) порядка $p-1$.

Тогда существует константа $C>0$, что для матриц жесткости $K_{z,\varphi}$ и $K_{z,\psi}$ вида (2.14) справедливо неравенство

$$K_{z,\varphi} \geq C\, K_{z,\psi} \qquad (4.4)$$

Т.е. при любых одинаковых коэффициентах для функций $\rho(\varphi,x)$ и $\rho(\psi,x)$ вида (2.13) справедливо неравенство

$$[\rho(\varphi,x),\rho(\varphi,x)]_{\Omega_z} \geqslant C\,[\rho(\psi,x),\rho(\psi,x)]_{\Omega_z} \qquad (4.5)$$

Доказательство. Т.к. системы функций (4.3) удовлетворяют на Ω_z критерию полноты порядка $p-1$, то матрицы жесткости $K_{z,\varphi}$ и $K_{z,\psi}$ имеют одинаковые собственные векторы, соответствующие нулевому собственному числу. Число таких векторов равно $(n+1-p)!/n!/(p-1)!$ – числу одночленов x^α, для которых $\|x^\alpha\|_A=0$, $|\alpha|\leq p-1$. В силу линейной независимости функций других нулевых собственных векторов, отличных от выше указанных, не будет. Взяв константу C, равной отношению минимального отличного от нуля собственного числа матрицы $K_{z,\varphi}$ к максимальному собственному числу матрицы $K_{z,\psi}$, получим (4.4). Что и требовалось доказать.

Рассмотрим КЭ Ω_z и $\Omega_{z,\delta}$ у которых:

а) области Ω_z и $\Omega_{z\delta}$ подобны с коэффициентом подобия δ;

б) $\varphi_{ks}(x)=\delta^{-j_{ks}}\varphi_{ks\delta}(\delta x)$ $\qquad (4.6)$

Конечные элементы Ω_z и $\Omega_{z\delta}$ назовем подобными.

Лемма 4.2. Пусть на КЭ Ω_z введены две системы функций (4.3), соответствующие одним и тем же степеням свободы (2.6) и $K_{z,\varphi}$, $K_{z,\psi}$ – соответствующие матрицы жесткости (2.14). Если конечные элементы Ω_z и $\Omega_{z\delta}$ подобны, то для соответствующих $K_{z\varphi\delta}$ и $K_{z\psi\delta}$ справедливо:

$$K_{z\varphi\delta} \geqslant K_{z\psi\delta}\cdot C \qquad (4.7)$$

где $C=\mathrm{const}$, не зависящая от δ.

Доказательство. Рассмотрим диагональную матрицу

$$Z = [Z_K]_{x_K \in \bar{\Omega}_\tau}, \quad Z_K = [\delta^{\nu_{KS}}]_{S=1}^{S_K} \qquad (4.8)$$

Тогда
$$K_{\tau\varphi\delta} = Z K_{\tau\varphi} \cdot Z \cdot \delta^{n-2p}$$
$$K_{\tau\psi\delta} = Z K_{\tau\psi} Z \cdot \delta^{n-2p} \qquad (4.9)$$

Из (4.4), (4,5) и равенств (4.9) следует, что C в (4.7) зависит только от матриц жесткости $K_{\tau\varphi}$ и $K_{\tau\psi}$ и не зависит от δ . Из леммы (4.1) следует справедливость неравенства (4.7).

Т е о р е м а 4.1. Пусть для любого разбиения (2.5) области Ω на конечные элементы при $h \to 0$ выполнены условия:

а) число классов подобных конечных элементов ограничено ;

б) системы функций (2.8) удовлетворяют на каждом КЭ Ω_τ критерию полноты (3.5) порядка $\tau \geq p-1$;

в) системе функций (2.10) можно поставить в соответствие аналогичную систему совместных функций, удовлетворяющую критерию полноты порядка $p-1$.

Тогда МЖ (2.21) вычислительной схемы МКЭ (2.20) положительно определена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 4.I получаем, что

$$K_{\tau,\varphi} \geq C_\tau K_{\tau,\psi}, \quad C_\tau = const$$

где $K_{\tau,\varphi}$, $K_{\tau;\psi}$ - матрицы жесткости КЭ Ω_τ , построенные соответственно по несовместной и совместной системам функций. Но тогда в силу ограниченности числа классов подобных конечных элементов из леммы 4.2 получаем:

$$H_\varphi \geq C H_\psi, \quad C = \min_\tau C_\tau > 0. \qquad (4.10)$$

H_φ, H_ψ - матрицы жесткости (2.2I) всей системы (2.20), построенные по системам функций $\{\varphi\}$ и $\{\psi\}$.

Для совместных функций МЖ H_ψ (2.2I) системы алгебраических уравнений (2.20) при $h \to 0$ положительно определена, т.к. положительно определен оператор A краевой задачи (2.2). Из неравенства (4.I0) следует положительная определенность матрицы H_φ .

Т е о р е м а 4.2. Пусть для любого разбиения (2.5) области на конечные элементы при $h \to 0$ выполнены условия:

а) системы функций (2.8) удовлетворяют на каждом КЭ критерию полноты (3.5) порядка $\tau \geqslant p-1$;

б) системе функций (2.I0) можно поставить в соответствие аналогичную систему совместных функций, удовлетворяющую критерию полноты порядка $p-1$;

в) $K_{\tau,\varphi} \geqslant C K_{\tau,\psi}$, $C = const$

Тогда матрица жесткости (2.2I) системы (2.20) положительно определена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. аналогично доказательству теоремы 4.I.

5. СХОДИМОСТЬ

Если система функций (2.10) совместна, то доказательство сходимости метода конечных элементов - доказательство сходимости вариационного метода /[1-8] /.

Т е о р е м а 5.1. Если система функций (2.10) $\{\varphi_{ks}\} \subset \dot{W}_2^p(\Omega)$ /совместна/ и выполнены условия теоремы (3.1), то для $m \geq p$

$$\|D^\alpha(u-u_h)\|_{2,*} \leq Ch^{m+1-|\alpha|}\|u\|_{2,m+1,\Omega}, \quad |\alpha| \geq 2p-m-1$$

$$\|D^\alpha(u-u_h)\|_{2,*} \leq Ch^{2(m+1-p)}\|u\|_{2,m+1,\Omega}, \quad |\alpha| \leq 2p-m-1 \qquad (5.1)$$

где $u(x)$ - решение дифференциальной задачи (2.2), а $u_h(x)$ - задачи (2.20).

Эти показатели степени h оптимальны.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 3.7 работы [3] , т.к. выполнение критерия полноты порядка m означает, что степень пространства $H_{\varphi,h}$ метода конечных элементов равна m .

Если система функций (2.10) несовместна, то для доказательства сходимости МКЭ необходим более сложный анализ. В работе [20] введено так называемое кусочное тестирование:

$$\int_\Omega Ax^\alpha\varphi_{ks}\,d\Omega - [x^\alpha, \varphi_{ks}]_{\Omega,*} = 0, \quad |\alpha| = p \qquad (5.2)$$

$s = 1, 2, \ldots, S_k, \quad x^{(k)} \in X_h.$

В работе [18] с помощью критерия (5.2) проанализирована часть несовместных КЭ. Недостатком данного критерия является необходимость анализировать каждую функцию системы (2.10) на соответствующей звезде элементов. В настоящей работе рассматривается более конструктивный критерий, который требует существования системы совместных функций $\{\psi_{ks}\}$ вида (2.10), удовлетворяющей на каждом КЭ критерию полноты порядка $m=p-1$ и равенствам

$$[x^\alpha, \varphi_{ks}^{r}-\psi_{ks}^{r}]_{\Pi_r}=0\ ,\quad p\le|\alpha|\le\ell \qquad (5.3)$$

Лемма 5.1. Для любой функции $f(x)$ из $L_2(\Pi_r)$ на каждом КЭ Π_r существует функция $V_r(x)=\sum\limits_{x^{(k)}\in X_h\cap\Pi_r}\sum\limits_{s=1}^{S_k} q_{ks}^{r}\varphi_{ks}^{r}$ что для любой функции φ_{ks}^{r} системы (2.8) выполнены равенства:

$$[V_r(x), \varphi_{ks}^{r}]_{\Pi_r}=\int\limits_{\Pi_r} f(\varphi_{ks}^{r}-\psi_{ks}^{r})\,d\Pi \qquad (5.4)$$

$x^{(k)}\in X_h\cap\bar{\Pi}_r$, $s=1,2,\dots,S_k$.

и

$$[V_r, V_r]_{\Pi_r}^{\frac{1}{2}}\le C h^{p}\|f\|_{2,\Pi_r} \qquad (5.5)$$

Доказательство. Дополним систему уравнений (5.4) подсистемой:

$$\int\limits_{\Pi_r} V_r(x)\,x^\alpha\,d\Pi=0\ ,\quad |\alpha|\le p-1 \qquad (5.6)$$

Уравнения (5.6) линейно-независимы, т.к. в противном случае не существует линейно-независимая система функций, удовлетворяющая критерию полноты (3.5) порядка $p-1$.

Матрица подсистемы (5.4) - матрица жесткости K_r конечного элемента Π_r , имеющая нулевое собственное значение кратности $(n+p-1)!/n!/(p-1)!$ число уравнений критерия полноты (3.5) порядка $p-1$, т.к. $[V_r, x^\alpha]=0$ для $|\alpha|\le p-1$.

Из критерия полноты (3.5) следует, что

$$\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\bar{\Pi}_r}\sum_{s=1}^{S_k} L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^\alpha}{\alpha!}\right)(x^{(k)})\,[\varphi_{ks}^{r}, \varphi_{ij}^{r}]_{\Pi_r}=$$

$$=[\frac{x^\alpha}{\alpha!}, \varphi_{ij}^{r}]_{\Pi_r}=0\ ,\quad |\alpha|\le p-1.$$

с другой стороны:

$$\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\bar{\Omega}_r}\sum_{s=1}^{S_k} L_{ks}\left(\frac{(x-z^{(r)})^\alpha}{\alpha!}\right)(x^{(k)})\int_\Omega f\cdot(\varphi_{ks}^r-\psi_{ks}^r)\,d\Omega=$$

$$=\left(f,\frac{x^\alpha-x^\alpha}{\alpha!}\right)=0\ ,\qquad |\alpha|\le p-1$$

Т.е. ранг расширенной матрицы системы (5.4) равен рангу системы. Выберем произвольный базисный минор данной системы и вычеркнем не вошедшие в него уравнения из системы. Т.к. таких уравнений столько же, сколько и уравнений подсистемы (5.6), то, следовательно, система (5.4), (5.6) разрешима.

Если данная система имеет два решения $V_{r1}(x)$ и $V_{r2}(x)$, то из (5.4) получим, что $[V_{r1}-V_{r2},V_{r1}-V_{r2}]_{\Omega_r}=0$. Но тогда $V_{r1}-V_{r2}=\sum_{|\alpha|=0}^{p-1}C_\alpha x^\alpha$ и из (5.4) следует, что $V_{r1}-V_{r2}\equiv 0$.

Рассмотрим подобный конечный элемент $\Omega_{r\delta}$. При нахождении для него функции $V_{r\delta}$ подсистема (5.4) примет вид:

$$K_r\,\delta^{j_{ks}}\,\bar{q}_{r\delta}=\delta^{2p-n}\int_{\Omega_r}f\,\varphi_{ij}\,d\Omega, \qquad (5.7)$$

где K_r – матрица жесткости КЭ Ω_r ;

$\bar{q}_{r\delta}$ – вектор узловых перемещений $\Omega_{r\delta}$.

Подсистема (5.6) запишется в следующем виде:

$$\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\bar{\Omega}_r}\sum_{s=1}^{S_k}\int_{\Omega_r}\varphi_{ks}(x)\cdot x^\alpha\,d\Omega\cdot\delta^{j_{ks}}q_{ks\delta}=0 \qquad (5.8)$$

Решая систему уравнений (5.7), (5.8) относительно неизвестных $\delta^{j_{ks}}q_{ks\delta}$ получаем, что

$$|q_{ks\delta}|\le C\,\delta^{2p-\frac{n}{2}-j_{ks}}\,\|f\|_{2,\Omega_r}$$

Но тогда

$$[V_{r\delta},V_{r\delta}]_{\Omega_{r\delta}}\le C\delta^{2p-n}\|f\|^2_{2,\Omega_r}\cdot\mathrm{mes}\,\Omega_{r\delta}\le$$

$$\le C\delta^{2p}\|f\|^2_{2,\Omega_r}.$$

Считая, что $\operatorname{mes}\Omega_z=1$ и положив $\delta=h$, получим неравенство (5.5), что и требовалось доказать.

Оценку (5.5) можно существенно повысить, если:

$$\int_{\Omega_z} x^{\alpha}(\varphi^z_{ks}-\psi^z_{ks})\,d\Omega=0, \quad |\alpha|\le t \qquad (5.9)$$

Лемма 5.2. Если выполнено (5.9), то для любой функции $f(x)$ из $W_2^{t+1}(\Omega)$ на КЭ Ω_z существует функция $V_z(x)=\sum_{x^{(k)}\in X_h\cap\Omega_z}\sum_{s=1}^{S_k} q^z_{ks}\varphi^z_{ks}$ удовлетворяющая равенствам (5.4) и неравенству

$$[V_z,V_z]^{\frac12}_{\Omega_z}\le C h^{\rho+t+1}\|f\|_{2,t+1,T_{h,z}} \qquad (5.10)$$

Доказательство. Согласно [19] построим для $f(x)$ функцию $\bar f_h(x)\in C^{\infty}(R_n)$, удовлетворяющую (3.12), (3.13). Тогда, используя (5.9), систему равенств (5.4) можно записать в виде

$$[V_z(x),\varphi^z_{ks}]_{\Omega_z}=\int_{\Omega_z}(f-\bar f_h+Q_{t+1}(\bar f_h))(\varphi^z_{ks}-\psi^z_{ks})\,d\Omega, \qquad (5.11)$$

где $Q_{t+1}(\bar f_h)$ – остаток от разложения $\bar f_h(x)$ в ряд до порядка t на КЭ Ω_z. По лемме 5.1 существует функция $V_z(x)$, удовлетворяющая (5.11) и

$$[V_z,V_z]^{\frac12}_{\Omega_z}\le C h^{\rho}\|f-\bar f_h+Q_{t+1}(\bar f_h)\|_{2,\Omega_z}$$

Используя свойства функции $\bar f_h$ получим (5.10), что и требовалось доказать.

Теорема 5.2. Если $f(x)\in L_2(\Omega)$, выполнены условия теоремы (3.1) и система функций (2.10):

а) удовлетворяет критерию полноты (3.5) порядка $m\ge\rho$;

б) критерию несовместности (5.3) порядка $\ell\ge\rho$;

в) матрица системы (2.20) $H\ge CE$ при $h\to 0$,

то

$$\|u_h-u\|_{A,*}\le C h^{t_1}\|u\|_{2,t_1+\rho,\Omega} \qquad (5.12)$$

$$\|u_h - u\|_{2,\Omega} \leq C h^{t_2} \|u\|_{2,t_1+p,\Omega} \tag{5.13}$$

где $t_1 = \min(p, m+1-p, \ell+1-p)$,

$t_2 = \min(p, \ell+1-p, m+1, 2(m+1-p))$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации функционала

$$J(\tilde{u}_h) = [\tilde{u}_h, \tilde{u}_h]_{\Omega,*} - 2[u, \tilde{u}_h]_{\Omega,*}, \tilde{u}_h \in H_{\varphi,h} \tag{5.14}$$

Для оценки решения данной задачи можно применить теорему 5.I, т.к. отсутствует погрешность за счет несовместности системы функций (2.I0). Т.е.

$$\|\tilde{u}_h - u\|_{A,*} \leq C h^{m+1-p} \|u\|_{2,m+1,\Omega}$$

$$\|\tilde{u}_h - u\|_{2,\Omega} \leq C h^{t} \|u\|_{2,m+1,\Omega} \tag{5.15}$$

где $t = \min(m+1, 2(m+1-p))$

Из (2.20) следует, что

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|^2_{A,*} = (f, u_h - \tilde{u}_h) - [u, u_h - \tilde{u}_h]_{\Omega,*} \tag{5.16}$$

Т.к. система функций $\{\psi_{ks}\}$ совместна, то

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|^2_{A,*} = (f, \varkappa(x)) - [u, \varkappa(x)]_{\Omega,*} \tag{5.17}$$

где $\varkappa(x) = u_h - \tilde{u}_h(x) - \omega_h(\psi, u_h - \tilde{u}_h)$

Из леммы (5.I) получим, что

$$(f, \varkappa(x)) = \sum_z [v_z(x), u_h - \tilde{u}_h]_{\Omega_z} \leq$$

$$\leq \left(\sum_z [v_z(x), v_z(x)]_{\Omega_z} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_h - \tilde{u}_h\|_{A,*} \leq$$

$$\leq C h^p \|f\|_{2,\Omega} \cdot \|u_h - \tilde{u}_h\|_{A,*} \tag{5.18}$$

Вторую часть равенства (5.16) можно оценить используя критерий (5.3). Построим согласно [I9] для функции u функцию $\bar{u}_h(x) \in C^\infty(R_n)$, удовлетворяющую (3.I2) и (3.I3). Разложив $\bar{u}_h(x)$ на каждом Ω_τ в ряд, согласно (5.3) и свойствам разбиения (2.5) из теоремы (3.1), получим, что

$$[u,\varkappa]_{\Omega,*}=\sum_\tau [u,\varkappa]_{\Omega_\tau}=\sum_\tau [Q_{\ell+1}(\bar{u}_h)+u-\bar{u}_h,\varkappa]_{\Omega_\tau}\le$$

$$\le Ch^{\ell+1-p}\Big(\sum_\tau \|u\|^2_{2,\ell+1,T_{h,\tau}}\Big)^{\frac12}\|\varkappa\|_{A,*}\le$$

$$\le Ch^{\ell+1-p}\|u\|_{2,\ell+1,\Omega}\cdot\|\varkappa\|_{A,*} \qquad (5.19)$$

По лемме (4.1)

$$\|\omega_h(\psi,u_h-\tilde{u}_h)\|_{A,*}\le C\|u_h-\tilde{u}_h\|_{A,*}$$

т.е.

$$\|\varkappa\|_{A,*}\le\|u_h-\tilde{u}_h\|_{A,*}+\|\omega_h(\psi,u_h-\tilde{u}_h)\|_{A,*}\le$$

$$\le C\|u_h-\tilde{u}_h\|_{A,*} \qquad (5.20)$$

Из (5.19) и (5.20) следует:

$$[u,\varkappa]_{\Omega,*}\le Ch^{\ell+1-p}\|u\|_{2,\ell+1,\Omega}\cdot\|u_h-\tilde{u}_h\|_{A,*} \qquad (5.21)$$

Т.к. $\|u_h-u\|_{A,*}\le\|u_h-\tilde{u}_h\|_{A,*}+\|\tilde{u}_h-u\|_{A,*}$
то, объединяя оценки (5.15), (5.18) и (5.21) получим, (5.12) и (5.13).

Т е о р е м а 5.3. Если выполнены условия теоремы 5.2 и для $f(x)$ из $W_2^{t+1}(\Omega)$ выполнены равенства (5.9), то

$$\|u_h-u\|_{A,*}\le Ch^{t_1}\|u\|_{2,t_1+p,\Omega} \qquad (5.22)$$

$$\|u_h-u\|_{2,\Omega}\le Ch^{t_2}\|u\|_{2,t_1+p,\Omega} \qquad (5.23)$$

где $t_1=\min(t+p+1,\ m+1-p,\ \ell+1-p)$,
$t_2=\min(t+p+1,\ \ell+1-p,\ m+1,\ 2(m+1-p))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 5.2 и леммы 5.2.

Если система функций (2.10) совместна, то равенство (5.3) и (5.9) верны при $t, \ell = +\infty$, и из теорема 5.3 эквивалентна теореме 5.1.

6. ПЕРВЫЙ ПОЛУСОВМЕСТНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Пусть прямоугольный элемент плиты лежит в плоскости XOY /рис.6.I/. В качестве степеней свободы узла K рассматривается три компоненты перемещений:

$w_к$ – перемещение в направлении оси OZ ;

$\alpha_к$ – угол поворота относительно оси OX ;

$\beta_к$ – угол поворота относительно оси OY .

На рис. 6.I показаны положительные направления поворотов. Их величины задаются векторами, направленными по соответствующим осям. Вектор узловых перемещений представим в следующем виде:

$$q_к=(w_к,\alpha_к,\beta_к)^T=\left(w_к,\frac{\partial}{\partial y}w_к,-\frac{\partial}{\partial x}w_к\right)^T \qquad (6.1)$$

Рассматриваемый КЭ имеет двенадцать степеней свободы (3 ст. свободы x 4 узла). Т.е. должна быть определена система (2.8) из двенадцати функций:

$$\{\varphi^z_{кe}(x,y),\ к=1,2,3,4,\ e=1,2,3\} \qquad (6.2)$$

Выписывая для данной системы функций и степеней свободы (2.7) критерий полноты (3.5) при $m=2$ получаем шесть функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\varphi^z_{1,1}+\varphi^z_{2,1}+\varphi^z_{3,1}+\varphi^z_{4,1}\equiv 1\\
&a(\varphi^z_{2,1}+\varphi^z_{4,1})-\varphi^z_{1,3}-\varphi^z_{2,3}-\varphi^z_{3,3}-\varphi^z_{4,3}\equiv x\\
&b(\varphi^z_{3,1}+\varphi^z_{4,1})+\varphi^z_{1,2}+\varphi^z_{2,2}+\varphi^z_{3,2}+\varphi^z_{4,2}\equiv y\\
&\frac{a^2}{2}(\varphi^z_{2,1}+\varphi^z_{4,1})-a(\varphi^z_{2,3}+\varphi^z_{4,3})\equiv\frac{x^2}{2}\\
&\frac{b^2}{2}(\varphi^z_{3,1}+\varphi^z_{4,1})+b(\varphi^z_{3,2}+\varphi^z_{4,2})\equiv\frac{y^2}{2}
\end{aligned} \qquad (6.3)$$

$$ab\,\varphi^z_{4,1} - b(\varphi^z_{3,3}+\varphi^z_{4,3}) + a(\varphi^z_{2,2}+\varphi^z_{4,2}) \equiv xy$$

Возьмем функции $\{\varphi^z_{k,2},\ \varphi^z_{k,3},\ k=1,2,3,4\}$ такими же, как и для совместного четырехугольного КЭ плиты с четырьмя степенями свободы узла /[2I, I3]/:

$$\begin{aligned}
&\varphi^z_{1,2} = b(1-3\xi^2+2\xi^3)\eta(1-\eta)^2,\\
&\varphi^z_{1,3} = -a\xi(1-\xi)^2(1-3\eta^2+2\eta^3),\\
&\varphi^z_{2,2} = b(3\xi^2-2\xi^3)\eta(1-\eta)^2,\\
&\varphi^z_{2,3} = a(\xi^2-\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3),\\
&\varphi^z_{3,2} = b(1-3\xi^2+2\xi^3)(-\eta^2+\eta^3),\\
&\varphi^z_{3,3} = -a\xi(1-\xi)^2(3\eta^2-2\eta^3),\\
&\varphi^z_{4,2} = b(3\xi^2-2\xi^3)(-\eta^2+\eta^3),\\
&\varphi^z_{4,3} = a(\xi^2-\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3),
\end{aligned} \qquad (6.4)$$

где $\xi = x/a,\ \eta = y/b.$

Подставляя (6.4) в (6.3) получим:

$$\begin{aligned}
\varphi^z_{1,1} &= 2(1-3\xi^2+2\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3) - (1-3\xi^2-\xi\eta-3\eta^2\\
&\quad +2\xi^3+3\xi^2\eta+3\xi\eta^2+2\eta^3-2\xi^3\eta-2\xi\eta^3),\\
\varphi^z_{2,1} &= 2(3\xi^2-2\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3) - (3\xi^2+\xi\eta-\\
&\quad -3\xi^2-3\xi^2\eta-3\xi\eta^2+2\xi^3\eta+2\xi\eta^3),\\
\varphi^z_{3,1} &= 2(1-3\xi^2+2\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3) - (\xi\eta+3\eta^2\\
&\quad -3\xi^2\eta-3\xi\eta^2-2\eta^3+2\xi^3\eta+2\xi\eta^3),\\
\varphi^z_{4,1} &= 2(3\xi^2-2\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3) - (-\xi\eta+3\xi^2\eta\\
&\quad +3\xi\eta^2-2\xi^3\eta-2\xi\eta^3).
\end{aligned} \qquad (6.5)$$

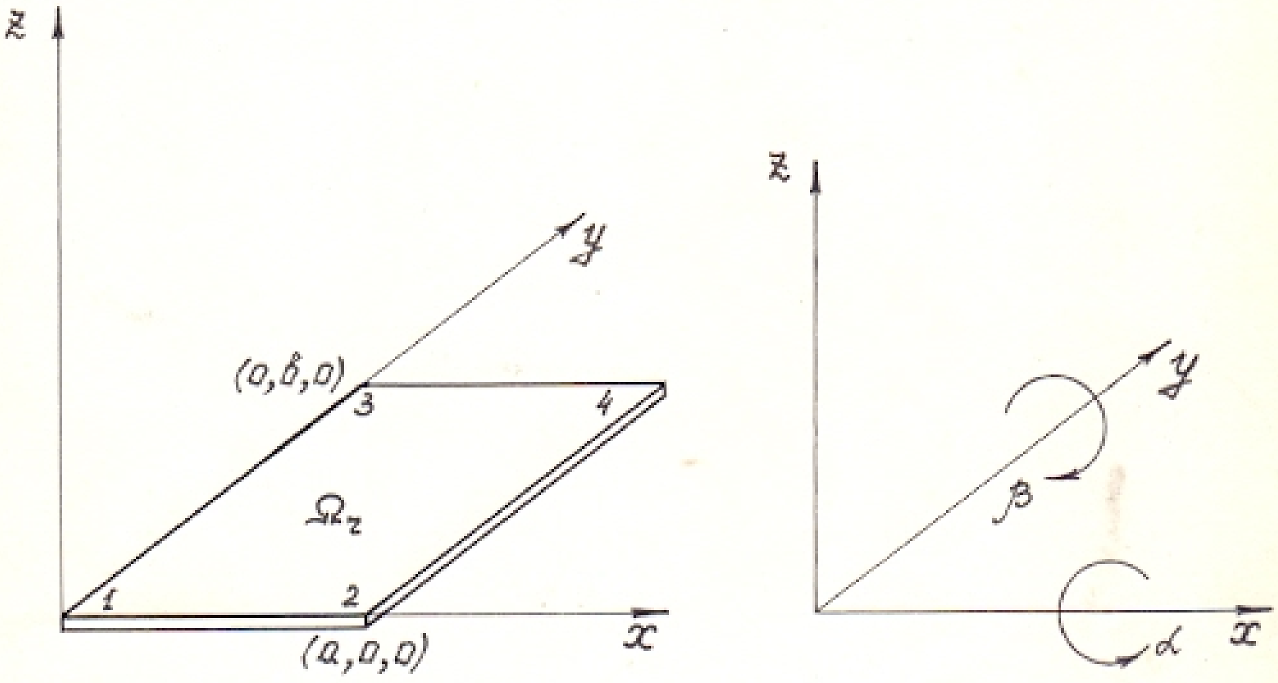

Рис. 6.I.

Подсистему функций (6.5) можно записать в виде:

$\varphi^{z}_{k,1}(x) = 2\,\psi^{z}_{k,1}(x) - \zeta^{z}_{k,1}(x)$, k = 1, 2, 3, 4,

где $\psi_{k,1}(x)$ - соответствующие функции для КЭ Богнера-Фокса-Шмидта /[21, 13]/ , а $\zeta^{z}_{k,1}(x)$ - функции для КЭ Клафа /[1,9 - 13]/ .

Известно, что функции $\{\varphi^{z}_{k,2}, \varphi^{z}_{k,3}, \psi^{z}_{k,1}, k=1,2,3,4\}$ вида (2.10) принадлежат $W_2^2(\Omega)$, а $\zeta_{k,1}$ - несовместны. Т.е. только часть построенной системы функций принадлежит соответствующему функциональному пространству вариационной задачи изгиба плиты.

Для задачи изгиба плиты скалярное произведение в имеет вид:

$$[v,w]_{\Omega} = D\iint_{\Omega}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}v\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}w + \frac{\partial^2}{\partial y^2}v\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}w + \nu\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}v\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}w + \frac{\partial^2}{\partial y^2}v\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}w\Big) + 2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}v\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}w\Big)\,dx\,dy \qquad (6.6)$$

где $D = E\delta^3/12/(1-\nu^2)$,

E - модуль упругости ;

δ - толщина пластинки ;

ν - коэффициент Пуассона.

Матрица жесткости K_z /см.(2.14)/ представлена на рис. 6.2. Коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_{24}$ имеют вид, где $\gamma = b^2/a^2$, $z = a^2/b^2$.

$$c_1 = \frac{176}{35}(\gamma + z) + 3.12 + 0.8\nu,$$

$$c_2 = \Big(\frac{4}{35}\gamma + \frac{52}{35}z + 0.32\Big)b^2,$$

$$c_3 = \Big(\frac{52}{35}\gamma + \frac{4}{35}z + 0.32\Big)a^2,$$

$$
K_r = \frac{D}{ab}
\begin{bmatrix}
C_1 & C_4 & C_5 & C_7 & C_8 & C_{10} & C_{13} & C_{14} & C_{16} & C_{19} & C_{20} & C_{22} \\
 & C_2 & C_6 & C_8 & C_9 & C_{11} & -C_{14} & C_{15} & C_{17} & -C_{20} & C_{21} & C_{23} \\
 & & C_3 & -C_{10} & -C_{11} & C_{12} & C_{16} & -C_{17} & C_{18} & -C_{22} & C_{23} & C_{24} \\
 & & & C_1 & C_4 & -C_5 & C_{19} & C_{20} & -C_{22} & C_{13} & C_{14} & -C_{16} \\
 & & & & C_2 & -C_6 & -C_{20} & C_{21} & -C_{23} & -C_{14} & C_{15} & -C_{17} \\
 & & & & & C_3 & C_{22} & -C_{23} & C_{24} & -C_{16} & C_{17} & C_{18} \\
 & & & & & & C_1 & -C_4 & C_5 & C_7 & -C_8 & C_{10} \\
 & & & & & & & C_2 & -C_6 & -C_8 & C_9 & -C_{11} \\
 & & \text{симметрично} & & & & & & C_3 & -C_{10} & C_{11} & C_{12} \\
 & & & & & & & & & C_1 & -C_4 & -C_5 \\
 & & & & & & & & & & C_2 & C_6 \\
 & & & & & & & & & & & C_3
\end{bmatrix}
$$

Рис. 6.2. Матрица жесткости полусовместного прямоугольного КЭ плиты.

$$
\begin{aligned}
c_4 &= \left(\frac{23}{35}\gamma + \frac{33}{14}z + 0.28 + 1.3\nu \right) b,\\
c_5 &= \left(-\frac{33}{14}\gamma - \frac{23}{35}z - 0.28 - 1.3\nu \right) a,\\
c_6 &= \left(-\frac{11}{35}(\gamma + z) - 0.02 - 1.2\nu \right) ab,\\
c_7 &= -\frac{176}{35}\gamma + \frac{34}{35}z - 3.12 - 0.8\nu,\\
c_8 &= \left(-\frac{23}{35}\gamma + \frac{9}{14}z - 0.28 - 1.3\nu \right) b,\\
c_9 &= \left(-\frac{4}{35}\gamma + \frac{18}{35}z - 0.32 \right) b^2,\\
c_{10} &= \left(-\frac{33}{14}\gamma + \frac{12}{35}z - 0.28 - 0.1\nu \right) a,\\
c_{11} &= \left(-\frac{11}{35}\gamma + \frac{13}{70}z - 0.02 - 0.1\nu \right) ab,\\
c_{12} &= \left(\frac{26}{35}\gamma - \frac{3}{35}z - 0.08 \right) a^2,\\
c_{13} &= \frac{34}{35}\gamma - \frac{176}{35}z - 3.12 - 0.8\nu,\\
c_{14} &= \left(-\frac{12}{35}\gamma + \frac{33}{14}z + 0.28 + 0.1\nu \right) b,\\
c_{15} &= \left(-\frac{3}{35}\gamma + \frac{26}{35}z - 0.08 \right) b^2,\\
c_{16} &= \left(-\frac{9}{14}\gamma + \frac{23}{35}z + 0.28 + 1.3\nu \right) a, \qquad (6.7)\\
c_{17} &= \left(-\frac{13}{70}\gamma + \frac{11}{35}z + 0.02 + 0.1\nu \right) ab,\\
c_{18} &= \left(\frac{18}{35}\gamma - \frac{4}{35}z - 0.32 \right) a^2,\\
c_{19} &= -\frac{34}{35}(\gamma + z) + 3.12 + 0.8\nu,\\
c_{20} &= \left(\frac{12}{35}\gamma + \frac{9}{14}z - 0.28 - 0.1\nu \right) b,\\
c_{21} &= \left(\frac{3}{35}\gamma + \frac{9}{35}z + 0.08 \right) b^2,\\
c_{22} &= \left(-\frac{9}{14}\gamma - \frac{12}{35}z + 0.28 + 0.1\nu \right) a,\\
c_{23} &= \left(-\frac{13}{70}(\gamma + z) + 0.02 \right) ab,\\
c_{24} &= \left(\frac{9}{35}\gamma + \frac{3}{35}z + 0.08 \right) a^2.
\end{aligned}
$$

7. ВТОРОЙ ПОЛУСОВМЕСТНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Рассмотрим прямоугольный КЭ плиты на рис. 6.I со степенями свободы узлов (6.I). Для системы функций (6.2) напишем критерий полноты (3.5) для m = 3. Тогда к тождествам (6.3) добавятся еще четыре:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{6}(\varphi^z_{2,1}+\varphi^z_{4,1})-\frac{a^2}{2}(\varphi^z_{2,3}+\varphi^z_{4,3})\equiv\frac{x^3}{6}\\
&\frac{b^3}{6}(\varphi^z_{3,1}+\varphi^z_{4,1})+\frac{b^2}{2}(\varphi^z_{3,2}+\varphi^z_{4,2})\equiv\frac{y^3}{6}\\
&\frac{a^2b}{2}\varphi^z_{4,1}-ab\,\varphi^z_{4,3}+\frac{a^2}{2}(\varphi^z_{2,2}+\varphi^z_{4,2})\equiv\frac{x^2y}{2}\\
&\frac{ab^2}{2}\varphi^z_{4,1}+ab\,\varphi^z_{4,2}-\frac{b^2}{2}(\varphi^z_{3,3}+\varphi^z_{4,3})\equiv\frac{xy^2}{2}
\end{aligned}\qquad (7.I)$$

Решая однородную систему (6.3), (7.I) относительно поправок $\{\Delta\varphi_{ke}, k=1,2,3,4,\ e=1,2,3\}$, получим

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi_{1,1}=2\left(-\frac{1}{a}\Delta\varphi_{1,3}+\frac{1}{b}\Delta\varphi_{1,2}\right),\\
&\Delta\varphi_{2,1}=-\Delta\varphi_{1,1},\ \Delta\varphi_{3,1}=-\Delta\varphi_{1,1},\ \Delta\varphi_{4,1}=\Delta\varphi_{1,1},\\
&\Delta\varphi_{2,3}=\Delta\varphi_{1,3},\ \ \Delta\varphi_{3,3}=-\Delta\varphi_{1,3},\ \Delta\varphi_{4,3}=-\Delta\varphi_{1,3},\\
&\Delta\varphi_{2,2}=-\Delta\varphi_{1,2},\ \Delta\varphi_{3,2}=\Delta\varphi_{1,2},\ \Delta\varphi_{4,2}=-\Delta\varphi_{1,2}
\end{aligned}\qquad (7.2)$$

Если $\{\varphi_{ke}\}$ – функции КЭ Клафа, удовлетворяющие критерию полноты (3.5) порядка m = 3, то, положив поправки равными:

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi_{1,3}=-\frac{a}{4}(\xi-3\xi^2+2\xi^3)(\eta-3\eta^2+2\eta^3),\\
&\Delta\varphi_{1,2}=\ \frac{b}{4}(\xi-3\xi^2+2\xi^3)(\eta-3\eta^2+2\eta^3)
\end{aligned}\qquad (7.3)$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{z}_{1,1}=(1-3\xi^2+2\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3),\\
&\varphi^{z}_{1,2}=b\left((1-\xi)\eta(1-\eta)^2+\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{1,3}=-a\left(\xi(1-\xi)^2(1-\eta)+\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{2,1}=(3\xi^2-2\xi^3)(1-3\eta^2+2\eta^3),\\
&\varphi^{z}_{2,2}=b\left(\xi\eta(1-\eta)^2-\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{2,3}=a\left((\xi^2-\xi^3)(1-\eta)-\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{3,1}=(1-3\xi^2+2\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3),\\
&\varphi^{z}_{3,2}=b\left((-\eta^2+\eta^3)(1-\xi)+\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{3,3}=a\left(-\xi(1-\xi)^2\eta+\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{4,1}=(3\xi^2-2\xi^3)(3\eta^2-2\eta^3),\\
&\varphi^{z}_{4,2}=b\left(\xi(-\eta^2+\eta^3)-\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\varphi^{z}_{4,3}=a\left((\xi^2-\xi^3)\eta+\frac{1}{4}\zeta\right),\\
&\zeta=(\xi-3\xi^2+2\xi^3)(\eta-3\eta^2+2\eta^3).
\end{aligned}
\qquad (7.4)
$$

Функции $\{\varphi^{z}_{k,1},\ k=1,2,3,4\}$ – также как и для КЭ Богнера-Фокса-Шмидта. Т.е. функции $\varphi_{k,1}$ совместны. Функции же $\{\varphi_{k,2}, \varphi_{k,3},\ k = 1, 2, 3, 4\}$ системы (7.4) имеют разрывы нормальной производной на границах КЭ.

Матрица жесткости данного КЭ представлена на рис. 6.2 с коэффициентами (7.5)

$$
\begin{aligned}
&c_1=\frac{156}{35}(\gamma+\tau)+2.88,\\
&c_2=\left(\frac{1}{280}\gamma+\frac{233}{168}\tau+\frac{163}{600}-\frac{13}{60}\nu\right)b^2,\\
&c_3=\left(\frac{233}{168}\gamma+\frac{1}{280}\tau+\frac{163}{600}-\frac{13}{60}\nu\right)a^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_4 &= \left(\frac{9}{140}\gamma + \frac{303}{140}z + 0.22 + \nu\right)b, \\
c_5 &= \left(-\frac{303}{140}\gamma - \frac{9}{140}z - 0.22 - \nu\right)a, \\
c_6 &= \left(-\frac{1}{35}(\gamma+z) - 1.05\nu - 0.005\right)ab, \\
c_7 &= -\frac{156}{35}\gamma + \frac{54}{35}z - 2.88, \\
c_8 &= \left(-\frac{9}{140}\gamma + \frac{117}{140}z - 0.22 - \nu\right)b, \\
c_9 &= \left(-\frac{1}{280}\gamma + \frac{103}{168}z - \frac{163}{600} + \frac{13}{60}\nu\right)b^2, \\
c_{10} &= \left(-\frac{303}{140}\gamma - \frac{9}{140}z - 0.22\right)a, \\
c_{11} &= \left(-\frac{1}{35}(\gamma+z) - 0.005 - 0.05\nu\right)ab, \\
c_{12} &= \left(\frac{121}{168}\gamma + \frac{1}{280}z - \frac{37}{600} + \frac{7}{60}\nu\right)a^2, \\
c_{13} &= \frac{54}{35}\gamma - \frac{156}{35}z - 2.88, \\
c_{14} &= \left(\frac{9}{140}\gamma + \frac{303}{140}z + 0.22\right)b, \\
c_{15} &= \left(\frac{1}{280}\gamma + \frac{121}{168}z + \frac{7}{60}\nu - \frac{37}{600}\right)b^2, \\
c_{16} &= \left(-\frac{117}{140}\gamma + \frac{9}{140}z + 0.22 + \nu\right)a, \\
c_{17} &= \left(\frac{1}{35}(\gamma+z) + 0.005 + 0.05\nu\right)ab, \\
c_{18} &= \left(\frac{103}{168}\gamma - \frac{1}{280}z - \frac{163}{600} + \frac{13}{60}\nu\right)a^2, \\
c_{19} &= -\frac{54}{35}(\gamma+z) + 2.88, \\
c_{20} &= \left(-\frac{9}{140}\gamma + \frac{117}{140}z - 0.22\right)b, \\
c_{21} &= \left(-\frac{1}{280}\gamma + \frac{47}{168}z + \frac{37}{600} - \frac{7}{60}\nu\right)b^2, \\
c_{22} &= \left(-\frac{117}{140}\gamma + \frac{9}{140}z + 0.22\right)a, \\
c_{23} &= \left(\frac{1}{35}(\gamma+z) + 0.005 + 0.05\nu\right)ab, \\
c_{24} &= \left(\frac{47}{168}\gamma - \frac{1}{280}z + \frac{37}{600} - \frac{7}{60}\nu\right)a^2.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

8. ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПЛИТЫ

Пусть треугольный КЭ лежит в плоскости XOY /рис.8.I/ и вектор узловых перемещений имеет вид (6.I). Сделаем замену координат:

$$\xi = \frac{1}{a}\left(x - \frac{b}{c}y\right), \quad \eta = \frac{y}{c} \qquad (8.I)$$

Треугольник преобразуется такой заменой к прямоугольному равнобедренному треугольнику с катетом, равным единице /рис. 8.Iб/. Вектор степеней свободы узла для системы координат (8.I) имеет вид:

$$\tilde{q}_k = \left\{ w_k, \frac{\partial}{\partial\eta} w_k, -\frac{\partial}{\partial\xi} w_k \right\}^T \qquad (8.2)$$

Т.к. КЭ Ω_τ имеет девять степеней свободы (3 узла х 3 ст. свободы), то на нем должна быть определена система девяти функций

$$\{ \varphi_{kl}(\xi,\eta),\ k=1,2,3,\ l=1,2,3 \} \qquad (8.3)$$

Существует такая система полиномов третьего порядка

$$\{ \mathcal{J}_{kl}(\xi,\eta),\ k=1,2,3,\ l=1,2,3 \} \qquad (8.4)$$

что выполнено (2.9):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{11} = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3, \\
&\mathcal{J}_{12} = \eta(1-\eta)^2 - \xi^2\eta - 0.5\mathcal{J}, \\
&\mathcal{J}_{13} = -\xi(1-\xi)^2 + \xi\eta^2 + 0.5\mathcal{J}, \\
&\mathcal{J}_{21} = 3\xi^2 - 2\xi^3,\ \mathcal{J}_{22} = \xi^2\eta + 0.5\mathcal{J},\ \mathcal{J}_{23} = \xi^2 - \xi^3, \\
&\mathcal{J}_{31} = 3\eta^2 - 2\eta^3,\ \mathcal{J}_{32} = -\eta^2 + \eta^3,\quad \mathcal{J}_{33} = -\eta^2\xi - 0.5\mathcal{J}, \\
&\mathcal{J} = \xi\eta(1-\xi-\eta).
\end{aligned} \qquad (8.5)$$

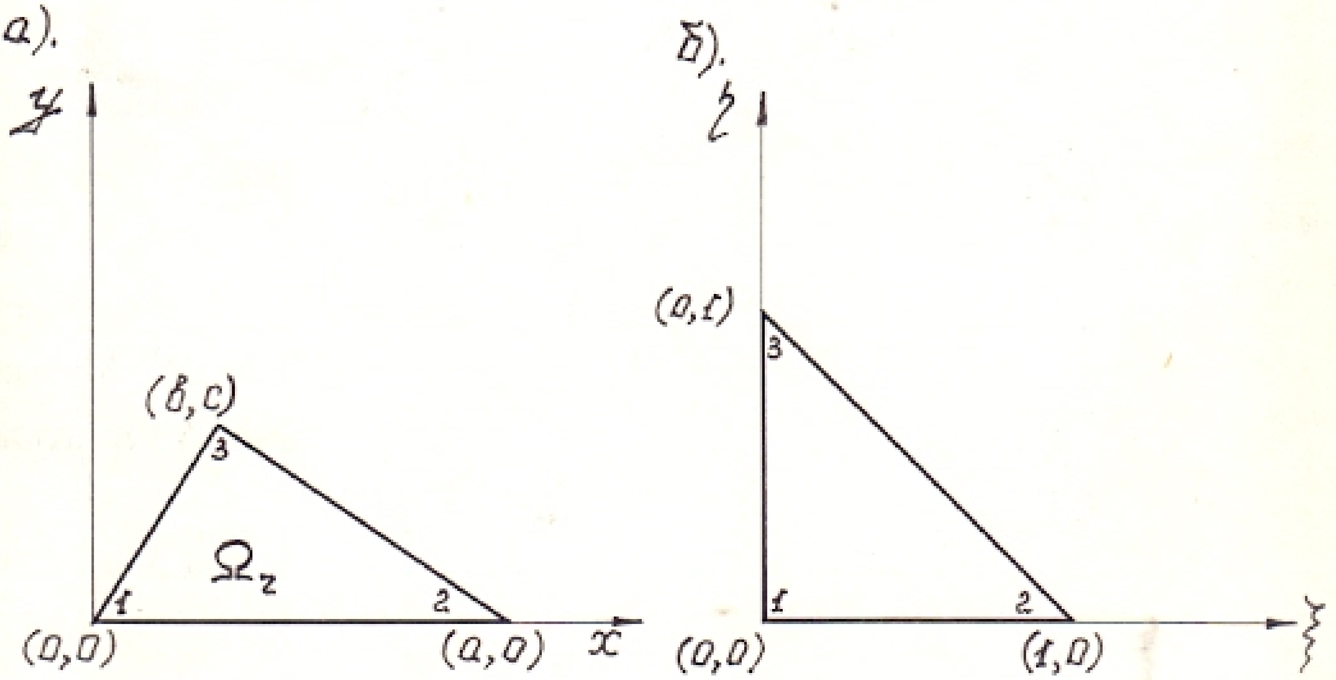

Рис. 8.I

Рассмотрим систему функций для КЭ Коупера / [22] / с шестью степенями свободы узла, соответствующие степеням свободы (8.2):

$$\{ \Psi_{\kappa\ell}(\xi,\eta),\ \kappa=1,2,3,\ \ell=1,2,3 \} \qquad (8.6)$$

Систему функций (8.3) будем искать в виде:

$$\varphi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)=\zeta_{\kappa\ell}(\xi,\eta)+a_{\kappa\ell}\chi_1(\xi,\eta)+b_{\kappa\ell}\chi_2(\xi,\eta) + c_{\kappa\ell}\chi_3(\xi,\eta) \qquad (8.7)$$

где

$$\chi_1(\xi,\eta)=\xi\eta(1-\xi-\eta),\ \chi_2(\xi,\eta)=\xi^2\eta(1-\xi-\eta),\ \chi_3(\xi,\eta)=\xi\eta^2(1-\xi-\eta)$$

– функции, для которых степени свободы (8.2) во всех узлах равны нулю.

Коэффициенты $\{a_{\kappa\ell}, b_{\kappa\ell}, c_{\kappa\ell}, \kappa=1,2,3,\ \ell=1,2,3\}$ определим так, чтобы был выполнен критерий несовместности (5.3) для $\ell=\rho=2$:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\varphi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)\,d\Omega=\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Psi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)\,d\Omega,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\varphi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)\,d\Omega=\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Psi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)\,d\Omega, \qquad (8.8)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\varphi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)\,d\Omega=\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\Psi_{\kappa\ell}(\xi,\eta)\,d\Omega.$$

Решив девять систем третьего порядка, получаем искомую систему функций (8.3) для треугольного КЭ:

$$\varphi_{11}=\zeta_{11}+6(1-\lambda_1-\lambda_2)\chi_1+12(\lambda_2-1)\chi_2+12(\lambda_1-1)\chi_3,$$

$$\varphi_{12}=\zeta_{12}+(1.5-3\lambda_2)\chi_1+(6\lambda_2-4)\chi_2-2\chi_3,$$

$$\varphi_{13}=\zeta_{13}+(3\lambda_1-1.5)\chi_1+2\chi_2+(4-6\lambda_2)\chi_3,$$

$$\varphi_{21}=\zeta_{21}+(1-\lambda_1-\lambda_3)(12\chi_3-6\chi_1)+12(1-\lambda_3)\chi_2,$$

$$\varphi_{22}=\zeta_{22}+(3\lambda_3-1.5)\chi_1+(4-6\lambda_3)\chi_2+(2-6\lambda_3)\chi_3,$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{23} &= \gamma_{23} + (1-\lambda_1-\lambda_3)(6\chi_3 - 3\chi_1) + 6(1-\lambda_3)\chi_2, \\
\varphi_{31} &= \gamma_{31} + (\lambda_2-\lambda_3)(6\chi_1 - 12\chi_2) + 12\lambda_3\chi_3, \\
\varphi_{32} &= \gamma_{32} + (\lambda_3-\lambda_2)(3\chi_1 - 6\chi_2) - 6\lambda_3\chi_3, \\
\varphi_{33} &= \gamma_{33} + (3\lambda_3 - 1.5)\chi_1 + (4-6\lambda_3)\chi_2 + (2-6\lambda_3)\chi_3,
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

где

$$
\lambda_1 = \frac{b}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{ab}{a^2+b^2}, \quad \lambda_3 = \frac{(a-b)a}{c^2+(a-b)^2}
$$

Для вектора узловых степеней свободы (6.I) система координатных функций $\{\mu_{k\ell},\ k = 1, 2, 3,\ \ \ell = 1, 2, 3\}$ примет вид:

$$
\begin{aligned}
\mu_{k1} &= \varphi_{k1}, \\
\mu_{k2} &= c\varphi_{k2}, \\
\mu_{k3} &= a\varphi_{k3} - b\varphi_{k2}, \quad k = 1,2,3.
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

Необходимо отметить, что система координатных функций (8.I0) не зависит от порядка нумерации узлов треугольника при переходе к глобальной системе координат.

9. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТРОЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Первый полусовместный КЭ: Система координатных функций (6.4), (6.5):

а) удовлетворяет критерию полноты (6.3) порядка $m = 2$;

б) существует система совместных функций (соответствующие функции для КЭ Богнера- Фокса- Шмидта), что выполнен критерий несовместности (5.3) для $\ell = 2$.

Лемма 9.1. Если при разбиении области на полусовместные прямоугольные КЭ плиты выполнено при $h \to 0$ условие

$$\max_{r} \left\{ \frac{a_r}{b_r}, \frac{b_r}{a_r} \right\} \leq \gamma \qquad (9.1)$$

то матрица жесткости системы положительно определена.

Доказательство. Т.к., для построенных полусовместных КЭ существует соответствующая совместная система функций, удовлетворяющая критерию полноты при $m = 1$, то в неравенстве (4.7) леммы 4.2 константа зависит только от соотношения сторон прямоугольника. Ограничивая это соотношение (условие δ теоремы 3.1 эквивалентно (9.1)), мы тем самым ограничиваем константу в (4.7). Но тогда из теоремы 4.2 следует справедливость леммы.

Теорема 9.1. Для первого полусовместного КЭ, если выполнено условие (9.1) леммы 9.1,

$$\|u_h - u\|_{A,\varkappa} \leq C h \|u\|_{2,4,\Omega}.$$
$$\|u_h - u\|_{2,\Omega} \leq C h^2 \|u\|_{2,4,\Omega}. \qquad (9.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. следует из теоремы (5.3) и леммы 9.I.

В т о р о й   п о л у с о в м е с т н ы й   КЭ. Система координатных функций (7.4):

а) удовлетворяет критерию полноты (6.3), (7.I) порядка $m = 3$;

б) существует система совместных функций, что выполнен критерий несовместности (5.3) для $\ell = 3$.

Т е о р е м а 9.2. Для второго полусовместного КЭ, если выполнено (9.I),

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{A,*} &\le Ch^2 \|u\|_{2,4,\Omega} \\ \|u_h - u\|_{2,\Omega} &\le Ch^2 \|u\|_{2,4,\Omega} \end{aligned} \qquad (9.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы (5.3).

Т р е у г о л ь н ы й КЭ. Выпишем для треугольника на рис. 8.I б и для вектора степеней свободы (8.2) тождества критерия полноты для $m = 2$:

$$\begin{aligned} &\varphi_{11} + \varphi_{21} + \varphi_{31} \equiv 1, \\ &\varphi_{21} - \varphi_{13} - \varphi_{23} - \varphi_{33} \equiv \xi, \\ &\varphi_{31} + \varphi_{12} + \varphi_{22} + \varphi_{32} \equiv \eta, \\ &\frac{\varphi_{21}}{2} - \varphi_{23} \equiv \frac{\xi^2}{2}, \\ &-\varphi_{33} + \varphi_{22} \equiv \xi\eta, \\ &\frac{\varphi_{31}}{2} + \varphi_{32} \equiv \frac{\eta^2}{2}. \end{aligned} \qquad (9.4)$$

Система координатных функций для треугольника (8.9):

а) удовлетворяет критерию полноты (9.4) порядка $m = 2$;

б) существует такая система совместных функций, что выполнен критерий несовместности (5.3) для $\ell = 2$ по построению.

Л е м м а 9.2. Если при разбиении области Ω на треугольные КЭ выполнено при $h \to 0$ условие δ теоремы (3.1), то матрица жесткости системы положительно определена.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Т.к. существует соответствующая совместная система функций, удовлетворяющая критерию полноты при $m = 1$, то в неравенстве (4.7) леммы 4.2 константа зависит только от углов треугольника. Условие δ теоремы (3.1) ограничивает область изменения этих углов и тем самым область изменения константы в 4.7. Из теоремы 4.2 следует справедливость леммы.

Т е о р е м а 9.3. Для треугольного КЭ, если выполнено условие δ теоремы (3.1),

$$\|u_h - u\|_{A,*} \leq ch\|u\|_{2,4,\Omega}$$
$$\|u_h - u\|_{2,\Omega} \leq ch\|u\|_{2,4,\Omega} \qquad (9.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 5.3 и леммы 9.2.

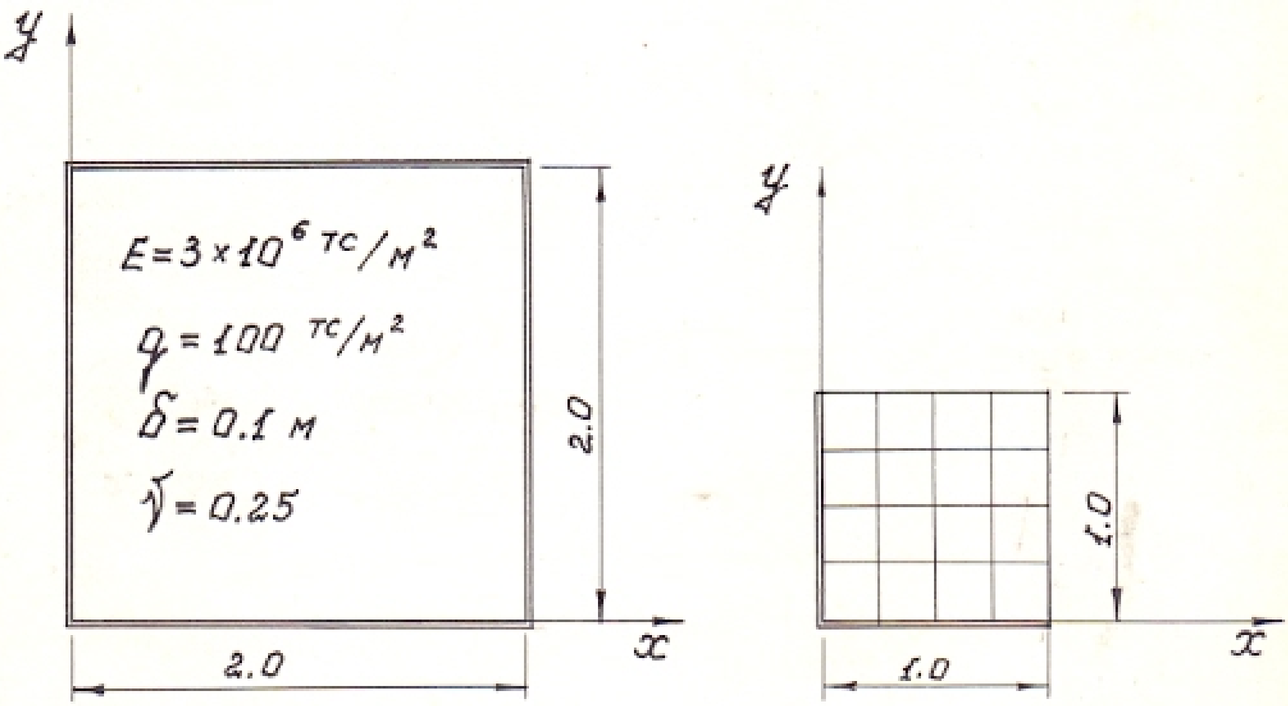

Рис. 9.I

В таблице 9.I приведены прогибы центра прямоугольной шарнирно-опертой по краю пластины под равномерной нагрузкой (рис. 9.I), полученные в использованием полусовместных КЭ. Точное решение $W(1,1)$ = 24, 374I.

Таблица 9.I

Конечный элемент	Сетка М К Э		
	4 x 4	8 x 8	I6 x I6
Первый полусовместный	23,671	24,202	24,26
Второй полусовместный	25,886	24,759	24,494

Интересно отметить, что данные КЭ дают приближения с разных сторон к точному решению.

В таблице 9.2 приведены прогибы центра данной пластины, полученные по различным расчетным схемам с использованием треугольного элемента и КЭ Клафа. Расчетные схемы приведены на рис. 9.2.

Таблица 9.2

Схема на рис.	а	б	в	г	д	е
Прогиб	23,52	24,I6	21,56	23,65	22,46	24,03

Численные эксперименты показывают, что МКЭ для треугольного КЭ сходится по перемещниям с порядком h^2. Т.е., по-видимому, должна существовать совместная система функций, чтобы критерий несовместности (5.3) был выполнен для ℓ = 3.

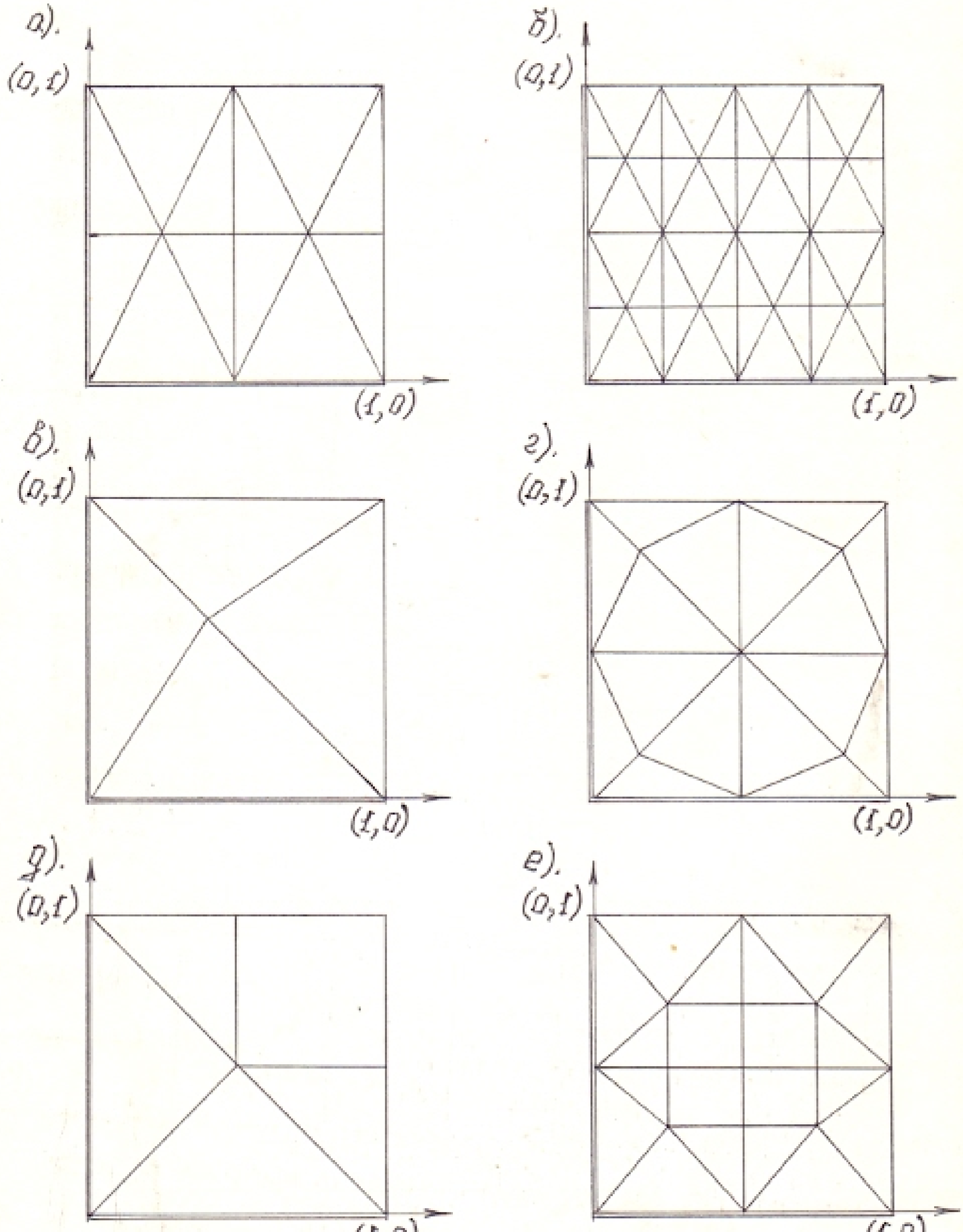

Рис. 9.2

БИБЛИОГРАФИЯ

I. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. - М., Энергия, 1971.

2. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. - М.: Стройиздат, 1977.

3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977.

4. Михлин С.Г. О вариационно-разностном методе для многомерных краевых задач. - Зап.научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1971, т.23.

5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике.- М.: Наука, 1970.

6. Демьянович Ю.К., Михлин С.Г. О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств. - Зап.научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1973, т.35.

7. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация.- Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат ин-та АН СССР, 1974, т.48.

8. Strang G. Approximation in the finite element method. - Numerische Math., 1972, 19, 1

9. Adini A., Clough R.W. Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method and Report to Nat. Sci Found / USA, G.7337, 1961.

I0. Мелош Р. Основы получения матриц для прямого метода жесткостей.- Ракетная техника и космонавтика, 1963, I,7.

II. Клаф Р. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости. - В сб.: Расчет строительных конструкций с применением ЭВМ, М., Ред. А.Ф.Смирнов, Стройиздат, 1967.

I2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.,: Мир, 1975.

13. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1974.

14. Miyoshi T. Convergence of finite element solutions represented by a non-conforming basis.- Kumamoto J. Sci Math., 1972, 9, 1.

15. Nitsche J.A. Convergence of Nonconforming Methods.- Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations. New York.e.a., 1974

16. Шойхет Б.А. Сходимость МКЭ при использовании несовместных конечных элементов.- Доклад на семинаре по методу конечных элементов при ЛПИ., Л., 1975.

17. Евзеров И.Д. О координатных функциях метода конечных элементов.- В сб.: Численные методы решения задач строительной механики. Киевский инж.-стр. ин-т, 1979, вып.34.

18. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method (University of Maryland at Baltimore), Academic Press, New York, 1973.

19. Головкин К.К. О приближении функций в произвольных нормах,- Труды МИ АН СССР, 1964, 70.

20. Baseley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Triangular elements in plate bending-conforming and nonconforming solutions, Wright Patterson. I., 1965.

21. Bogner F.K., Fox R.L., Schmit L.A. The Generation of Interelement.- Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae.- Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Forge Inst. of Techn., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.

22. Cowper G.R., Kosko E., Lindberg G.M., Olson M.D. Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element. AIAA J., 1969, 7.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

УКРАИНСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ГОСПЛАНА УССР

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

Киев, Горького, 180 Тел. 61-00-21, 67-10

13.02.81 № 296

На №

СПРАВКА

о депонировании рукописи № 2153

Выдана настоящая гр. КАРПИЛОВСКОМУ В.С.

в том, что Государственной республиканской научно-технической библиотекой УкрНИИНТИ Госплана УССР депонирована в справочно-информационном фонде его рукопись "Конструирование несовместных конечных элементов".

Реферат /библиографическое описание/ настоящей рукописи опубликован в библиогр. указателе ВИНИТИ "Депонированные рукописи", 1980, № 10/108/, с. 89

В соответствии с Инструкцией о порядке депонирования рукописных работ по естественным, техническим и общественным наукам, утвержденной постановлением Государственного комитета СССР по науке и технике, Президиума Академии наук СССР, Министерства высшего и среднего специального образования СССР и Главного управления по охране государственных тайн в печати при Совете Министров от 14 мая 1971 г. № 157/13, авторы депонированных рукописей сохраняют права, вытекающие из законодательства об авторском праве, но не могут претендовать на выплату гонорара; депонированные рукописи приравниваются к опубликованным печатным изданиям.

Зам. директора М.С.Цыганкова