УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ К РАСЧЕТУ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ

Фиалко С.Ю. *(Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, г. Киев)*

Представлены высокоэффективные методы решения систем конечноэлементных уравнений высокого порядка (100 000 — 500 000 уравнений и выше), возникающие при создании МКЭ моделей многоэтажных зданий. Обсуждаются вопросы эффективности применения как прямых методов для разреженных матриц, так и итерационных. Выводы иллюстрируются числовым примером из коллекции задач вычислительного комплекса SCAD.

Наличие эффективных графических препроцессоров и автоматических генераторов сеток в современных расчетных конечноэлементных программах с одной стороны и непрерывно возрастающие требования к детальности расчетных моделей с другой приводит к необходимости решать системы уравнений высокого порядка (100 000 — 500 000 и выше). В работе обсуждаются аспекты применения как прямых методов для разреженных матриц (от английского sparse direct solvers) [1], так и итерационных методов.

Применение метода конечных элементов (МКЭ) в математическом плане приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{K}$ —симметричная матрица жесткости, $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ — векторы решения и нагрузки соответственно. Ограничимся рассмотрением такого класса задач, когда матрица $\mathbf{K}$ — положительно определенная.

Когда размерность задачи (1) невелика, особых проблем при ее решении обычно не возникает (при условии, что расчетная модель корректна). Когда же порядок системы уравнений становится высоким, объем вычислений, время анализа и требования к ресурсам компьютера катастрофически нарастают.

На сегодняшний день наиболее распространенными методами для анализа большеразмерных МКЭ моделей конструкций многоэтажных зданий являются прямые методы для разреженных матриц (ПМРМ). Обзор их приведен в [1—3, 6, 11, 14]. Наряду с ПМРМ для решения больших МКЭ задач в механике деформируемого твердого тела эффективно применяют итерационные методы. Однако большинство задач строительной механики, возникающих при моделировании конструкций многоэтажных зданий, плохо обусловлены из-за большого разброса жесткостей, наличия разнотипных конечных элементов, нерегулярных сеток и т.д.. Плохая обусловленность системы уравнений (1) является причиной того, что классические итерационные методы сходятся либо очень медленно, либо вообще не сходятся. Эффективным способом борьбы с плохой обусловленностью является предобуславливание (от английского preconditioning). Суть его состоит в переходе от задачи (1) к задаче $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, где матрица предобуславливания $\mathbf{B}$ должна быть положительно определенной, система уравнений $\mathbf{B}\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{K}\mathbf{x}_k$, k — номер шага итерации, должна решаться значительно быстрее, чем (1), и число обусловленности $C(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}) < C(\mathbf{K})$ (см. [2, 4, 12, 13]). В настоящее время наиболее распространенными в задачах механики являются следующие способы построения предобуславливания: метод неполной факторизации Холецкого ICCG (от английского incomplete Cholesky conjugate gradient method) [13] и многоуровневые (многосеточные) методы [4, 12]. В работах автора [2, 7—10] реализован метод сопряженных градиентов с агрегатным многоуровневым предобуславливанием AMIS (aggregation multilevel iterative solver). Данный метод объединяет достоинства метода сопряженных градиентов и агрегатного многоуровневого предобуславливания, идея которого предложена в [5]. Метод работает на любых типах конечных элементов, включенных в библиотки конечных элементов коммерческих и научных программ.

Начиная с некоторой размерности задачи итерационный метод становится более быстрым, чем прямой, так как количество операций итерационного метода при увеличении размерности задачи возрастает медленнее, чем количество операций прямого метода [2]. Чем эффективнее упорядочение прямого метода, тем медленнее нарастает продолжительность решения. Данная закономерность носит общий характер. Поэтому для успешного решения больших задач огромное значение имеет разработка устойчивых к плохой обусловленности итерационных методов, а также прямых методов, использующих эффективное упорядочение.

На рис. 2 изображена МКЭ модель многоэтажного здания. В таблице 1 приведено сопоставление эффективности для различных методов решения.

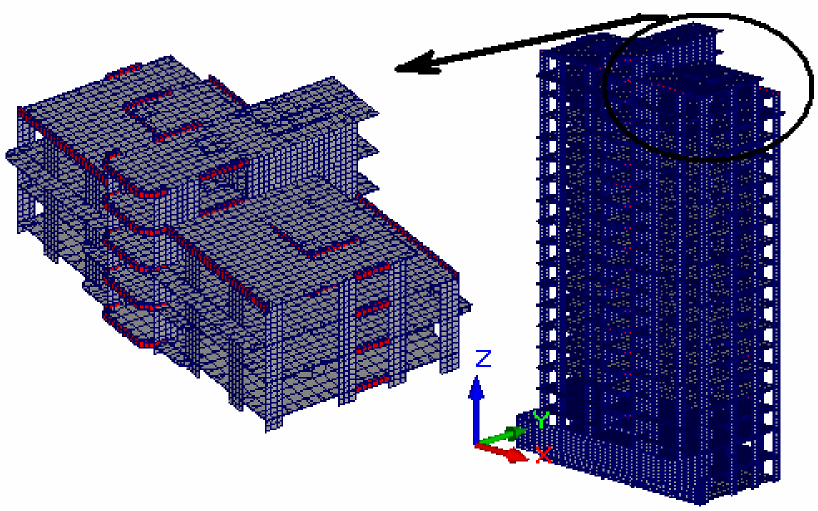

Рис.2

МКЭ модель многоэтажного здания в г. Киеве. 55034 узлов, 63357 конечных элементов, 326 838 уравнений

Расчетная модель взята из коллекции задач SCAD group (www.scadgroup.com). Среди прямых методов решения МКЭ задач в течение многих лет применяется профильный метод с упорядочением на основе обратного алгоритма Катхилла-Маккки [1]. Среди итерационных методов широко используется метод сопряженных градиентов с предобуславливанием типа неполной факторизации Холецкого (ICCG). Поэтому мы будем называть эти методы «традиционными». Как альтернатива традиционным методам в данной работе рассматриваются многофронтальный метод с упорядочением по алгоритму минимальной степени MFM(MDA) [3] (для данной задачи этот метод упорядочения оказался более предпочтительным, чем метод вложенных сечений [1]) и агрегатный многоуровневый итерационный метод AMIS. Многофронтальный метод реализован автором в программных комплексах SCAD и Robot-Millennium (http://robot-structures.com/us/), метод ICCG — в Robot-Millennium.

Настоящая версия агрегатного многоуровневого метода, использующая технологии разреженных матриц для решения задачи на уровне агрегатной модели, разработана автором в программе SOLVER, поддерживающей интерфейс данных с программой SCAD.

Таблица 1

Метод	Время решения	Количество итераций для каждого нагружения
Профильный	12 ч 12 мин 06 с	—
ICCG	2 ч 40 мин 21 с	2943 / 3016 / 935/ 2463
MFM(MDA)	2 ч 05 мин 39 с	—
AMIS	29 мин 29 с	46 / 59 / 44 /47

Многофронтальный метод позволил сократить время решения задачи более чем в пять раз по сравнению с профильным методом.

Для итерационных методов мы считаем решение сошедшимся, если $(\|\mathbf{r}_k\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2 < tol) \wedge (\|\mathbf{r}_k\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty < tol)$, где $\mathbf{r}_k, \mathbf{x}_k$ — векторы невязки и решения на k-ом шаге итерации, $tol = 10^{-3}$. Данная задача является плохо обусловленной, о чем свидетельствует большое количество итераций традиционного метода ICCG, необходимое для получения решения с заданной точностью.

Задача содержит 4 нагружения. Для прямых методов время решения слабо зависит от количества нагружений, а для итерационных методов каждое нагружение означает запуск итерационного процесса с самого начала. Тем не менее ICCG метод, медленно сходящийся на данной задаче, для четырех нагружений потребовал почти столько же времени, что и многофронтальный метод. А агрегатный многоуровневый метод позволил сократить время решения почти в 4 раза по сравнению с многофронтальным методом.

Вычисления проведены на компьютере Pentium-III (процессор Intel 1000 МГц, оперативная память 512 МБ).

Заключение. Использование технологии разреженных матриц в сочетании с идеологией многофронтального метода позволяет сдержать рост количества операций при факторизации матрицы жесткости. Для итерационных методов решения больших МКЭ задач наиболее существенным фактором является устойчивость к плохой обусловленности. Современные вычислительные комплексы должны предоставлять пользователю как эффективные прямые методы, так и итерационные. Такая стратегия позволяет серьезно продвинуться в решении больших МКЭ задач, не прибегая к технологии дорогостоящих параллельных вычислений.

Литература

1. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. — 333 с.
2. Фиалко С.Ю. Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечно-элементных задач строительной механики. — В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И, Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. К.: Сталь, 2002, —552 - 569 с.
3. Фиалко С.Ю. Многофронтальный метод для решения больших конечно-элементных задач применительно к исследованию напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с массивными ребрами. //Прикл. механика, — 2003—39, 4.
4. Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. //Mathematics of Computations. — 1977—31, 138.—P. 333-390.
5. Bulgakov V.E., Kuhn G. High-performance multilevel iterative aggregation solver for large finite-element structural analysis problems. //Int. j. Numer. Methods Eng. — 1995— 38.— P. 3529-3544.
6. Duff I.S. Parallel implementation of multifrontal scheme. //Parallel Comput.—1986.— 3—P.193—204.
7. Fialko S.Yu. The high-performance aggregation element-by-element iterative solver for the large-scale complex shell structural problems. //Arch. of Civ. Eng..— 1999 — XLV, 2.— P. 193-207.
8. Fialko S., High-performance aggregation element-by-element Ritz-gradient method for structure dynamic response analysis. //CAMES — 2000.— 7. — P. 537-550.
9. Fialko S.Yu. High-performance iterative and sparse direct solvers in Robot software for static and dynamic analysis of large-scale structures. Proceedings of the second European conference on computational mechanics, Cracow, Poland, June 26-29. "Vesalius"—2001, Cracow. P. 352—353.
10. Fialko S. Aggregation Multilevel Iterative Solver for Analysis of Large-Scale Finite Element Problems of Structural Mechanics: Linear Statics and Natural Vibrations. LNCS 2328, p. 663 ff, http://link.springer.de/link/service/series/0558/tocs/t2328.htm
11. Irons B. A frontal solution of program for finite element analysis. //Int. J. Numer. Meth. Engrg.—1970,— 2, P. 5—32.
12. Hackbush W., Trottenberg U. Multigrid Methods.— Springer-Verlag, Berlin, 1992.
13. Papadrakakis M. Solving large –scale problems in mechanics.— Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1993. — 705 p.
14. Scott J.A. A parallel frontal solver for finite element applications. //Int. J. Numer. Meth. Engng.—2001.— 50.—P. 1131—1144