SCAD Office
Версия 23

ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ

Том 1

Электронное издание

Киев • 2024

© SCAD Soft

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **10**

ВК SCAD. МАТРИЦА ВЕРИФИКАЦИИ **11**

Линейная статика **34**

Плоская ферма под действием сосредоточенной силы 35
Плоская шарнирно-стержневая система под действием сосредоточенной силы 37
Плоская ферма с силовым, температурным и кинематическим воздействиями 40
Плоская шарнирно-стержневая система из элементов различного материала под действием изменения температуры....42
Плоская шарнирно-стержневая система из элементов одинакового материала под действием изменения температуры....44
Пространственная шарнирно-стержневая система под действием сосредоточенной силы ...46
Консольная балка под действием сосредоточенной нагрузки....49
Консольная балка под действием сосредоточенной поперечной силы 51
Вертикальный консольный стержень квадратного поперечного сечения, нагруженный продольной и поперечной сосредоточенными нагрузками на свободном конце 54
Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенной силой и равномерно-распределенным давлением 58
Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами 60
Защемленная по концам балка, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой....62
Балка, защемленная с двух концов, под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных продольных и поперечных сил и изгибающего момента 64
Двухпролетная свободно опертая балка с промежуточной податливой опорой под действием сосредоточенных поперечных сил, расположенных в середине пролетов....66
Балка на упругом горизонтальном основании под действием сосредоточенных вертикальных сил 68
Балка, лежащая на упругом горизонтальном основании свободно опертая по краям под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальной силы и изгибающего момента....71
Балка, защемленная по двум торцам, под действием поперечного смещения одного из них74
Плоская система из двух соосных стержней под действием изменения температуры....76
Напряженно-деформированное состояние шарнирно опертой балки при продольно-поперечном изгибе 78
Система перекрестных стержней под действием распределенной нагрузки и сосредоточенной силы в их плоскости....80
Консольная рама под действием сосредоточенной силы....83
Однопролетная шарнирно опертая плоская рама с двухскатным ригелем под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальных и горизонтальных сил и изгибающего момента....86
Пространственная стержневая система с упругими связями под действием сосредоточенной силы 89
Кольцо, нагруженное в его плоскости распределенной нагрузкой....94
Полуциркульная арка постоянного поперечного сечения с шарнирным опиранием под действием сосредоточенной силы в ее плоскости 97
Деформированное состояние разрезного кругового кольца, нагруженного двумя взаимно перпендикулярными силами P_x и P_y, лежащими в плоскости кольца....100
Консольный кривой брус, нагруженный поперечной сосредоточенной силой на свободном конце....103
Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения под действием в его плоскости сосредоточенных сил и момента на свободном конце....108

Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения под действием из его плоскости сосредоточенной силы на свободном конце 112
Однопролетная балка с предварительно напряженной затяжкой, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой 116
Двухпролетная одноэтажная рама под действием постоянной поперечной единичной силы, перемещающейся вдоль пролетов ригеля с малой скоростью. Построение линий влияния внутренних усилий в сечениях рамы 118
Изгиб прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне 122
Чистый изгиб квадратной пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, защемленной по одной стороне и свободно опертой по центру противоположной стороны 126
Сжатие и изгиб симметричного клина сосредоточенными силами, приложенными к его вершине (задача Мичелла) 132
Изгиб симметричного клина сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине (задача Инглиса) 136
Изгиб симметричного клина равномерно распределенной нагрузкой, расположенной на поверхности одной из граней клина (задача Леви) 140
Плотина треугольной формы, воспринимающая воздействия собственного веса и гидростатического давления 144
Действие на плоскость сосредоточенного момента и сосредоточенной силы 148
Изгиб кривого бруса узкого прямоугольного сечения силой, приложенной к незакрепленному концу (задача Головина) 157
Одностороннее растяжение пластины с малым круговым отверстием (задача Кирша) 162
Напряженно-деформированное состояние круговой шарнирно опертой пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой 174
Напряженно-деформированное состояние круговой защемленной по краям пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой 179
Напряженно-деформированное состояние кольцевой шарнирно опертой пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой 184
Прямоугольная узкая консольная пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки 188
Кручение прямоугольной консольной узкой пластины парой сосредоточенных сил 190
Квадратная пластина, свободно опертая по периметру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой 193
Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки 197
Прямоугольная пластина, свободно опертая в трех вершинах, под действием из ее плоскости сосредоточенной силы и сосредоточенных моментов 205
Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой 208
Прямоугольная защемленная по контуру пластина постоянной толщины при температурном нагружении 212
Толстая квадратная шарнирно-опертая пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки 216
Двухреберная балка под действием равномерно распределенных нагрузок, приложенных в плоскости ребер 220
Криволинейная в плане коробчатая балка пролетного строения моста под действием сосредоточенной силы 226
Цилиндрическая оболочка со свободно опертыми торцами под равномерным внутренним давлением 238
Цилиндрический вертикальный резервуар со стенкой постоянной толщины с плоским днищем под действием внутреннего давления жидкости 245

Цилиндрическая оболочка со свободными торцами при градиенте температуры по толщине (в радиальном направлении) 252
Толстая квадратная в плане плита, шарнирно опертая по боковым граням, под действием поперечной нагрузки, распределенной по верхней грани по закону косинуса....259
Толстая круглая в плане плита, жестко защемленная по боковой поверхности, под действием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки 265
Цилиндрическое тело, свободное от закреплений, под действием продольной равномерно распределенной по торцам нагрузки 268
Квадратной вадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной круглого поперечного сечения, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки....271
Квадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной квадратного поперечного сечения, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки..276
Упругое полупространство под действием равномерно распределенной по поверхности прямоугольной в плане поперечной нагрузки. Задача Лява 280
Определение внутренних усилий при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля....290

Линейная динамика 292

Плоская ферма под действием мгновенных импульсов, сосредоточенных в неопорных узлах нижнего пояса....293
Свободные колебания пространственного трубопровода, защемленного по торцам (задача Ховгарда)....299
Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной внезапно приложенной постоянной силы 304
Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы 312
Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы при учете рассеивания энергии на внутреннее трение 335
Свободно опертая балка с распределенной массой под действием поперечной гармонической возмущающей силы, расположенной в середине пролета 358
Свободно опертая балка с распределенной массой под действием постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки с постоянной скоростью 365
Свободно опертая балка с распределенной массой под действием равномерно распределенного мгновенного импульса (удар балки о неподвижные опоры) 371
Свободно опертая балка с распределенной массой под действием кинематического возмущения опор (сейсмическое воздействие)....379
Консольная невесомая стойка с сосредоточенной массой на свободном торце под действием горизонтального кинематического смещения опоры (расчет по сейсмограмме)....382
Свободные колебания круговой шарнирно опертой по контуру пластины 388
Свободные колебания круговой жестко защемленной по контуру пластины 407
Свободные колебания квадратной консольной пластины 426
Свободные колебания квадратной шарнирно опертой по периметру пластины....434
Свободные колебания прямоугольной шарнирно опертой по периметру пластины 457
Свободные колебания квадратной жестко защемленной по периметру пластины 480
Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам 503
Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам....532
Свободные колебания консольной открытой цилиндрической оболочки 562
Плоская рама под действием равномерно распределенного мгновенного импульса 569
Сейсмический отклик балки по линейно-спектральной теории....580
Неоднородное демпфирование. Возврат в положение статического равновесия 582
Неоднородное демпфирование 584

Линейная устойчивость 588
Устойчивость шарнирно-опертой балки под действием сосредоточенной продольной силы 589
Устойчивость балки, защемленной по двум торцам, под действием сосредоточенной продольной силы 591
Устойчивость консольной стойки со ступенчатым изменением поперечного сечения, нагруженной продольными сжимающими силами, приложенными к промежуточным и торцевым сечениям..... 593
Устойчивость системы из трех одинаково нагруженных стоек разной жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями 599
Устойчивость системы из трех различно нагруженных стоек одинаковой жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями 602
Устойчивость системы из трех различно нагруженных стоек разной жесткости, связанных между собой бесконечно жесткими на изгиб ригелями 605
Устойчивость рамы из двух шарнирно опертых одинаково нагруженных абсолютно жестких стоек, жестко связанных между собой ригелем 608
Устойчивость трехпролетной двухэтажной рамы под действием сосредоточенных продольных сил на стойки в узлах сопряжения с ригелями 610
Устойчивость круговой двухшарнирной арки постоянного сечения при гидростатическом давлении 612
Устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы прямоугольного поперечного сечения поперечной силой, приложенной на свободном торце (прямой изгиб)..... 615
Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной продольной сжимающей силы, центрально приложенной на свободном торце (центральное сжатие)..... 618
Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, центрально приложенной на свободном торце (прямой изгиб)..... 622
Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной к верхнему ребру свободного торца (прямой изгиб) 626
Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб) 630
Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб) 633
Устойчивость свободно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных продольных изгибающих сил, приложенных к верхним ребрам торцов и равных по значению (продольный изгиб)..... 636
Устойчивость свободно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных продольных изгибающих сил, приложенных к верхним ребрам торцов и равных по значению (продольный изгиб) 640
Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)..... 644
Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки по продольной оси его верхней грани (прямой изгиб) 648
Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб) 652

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси верхней грани (поперечный изгиб) 655
Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)..... 658
Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)..... 661
Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб) 664
Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб) 667
Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб) 670
Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по ее продольной оси нагрузки (прямой изгиб)..... 673
Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки по продольной оси ее верхней полки (прямой изгиб)..... 676
Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластинки равномерно сжатой в одном направлении 679
Устойчивость квадратной шарнирно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении 683
Устойчивость квадратной шарнирно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении при кинематическом воздействии 686
Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины при чистом сдвиге 689
Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, равномерно сжатой в продольном направлении (модель 1) 693
Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, равномерно сжатой в продольном направлении (модель 2) 698
Устойчивость прямоугольной ортотропной свободно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении 704
Устойчивость цилиндрической тонкостенной оболочки со свободно опертыми торцами под равномерным внешним давлением..... 709

Нелинейная статика **713**

Трехпролетная балка с заделкой одного торца и тремя жесткими односторонними опорами под действием сосредоточенных сил над ними 714
Абсолютно твердое тело, раскрепленное пятью пружинами одинаковой жесткости, работающими только на растяжение, под воздействием сосредоточенной силы 716
Круговая тоннельная обделка под действием заданного активного вертикального и горизонтального давления грунта и пассивного давления упругого отпора грунта в зоне контакта 719
Контакт с отставанием для слоя и основания при действии на слой сосредоточенной поперечной силы 735
Гибкая нить с опорами в одном уровне под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки 738

Гибкое кольцо, нагруженное двумя взаимно уравновешенными радиально сжимающими силами 740
Гибкая длинная прямоугольная пластина, шарнирно опертая по продольным кромкам, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки. 744
Гибкая квадратная шарнирно опертая по периметру пластина, нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой 749
Гибкая круговая шарнирно опертая по контуру пластина, нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой 753
Двухвантовая мачта под действием статических нагрузок и сил предварительного натяжения 757
Квадратная мембрана с податливым контуром 763

Патологические тесты 765

Прямоугольная пластина в условиях постоянных напряжений на срединной поверхности 766
Прямоугольная пластина в условиях постоянных кривизн 775
Куб в условиях постоянных напряжений по объему 784
Прямолинейная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных продольной и поперечных сил и крутящего момента 789
Криволинейная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных поперечных сил 821
Скрученная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных поперечных сил 836
Свободно опертая плоская квадратная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре. 845
Заделанная по наружным кромкам плоская квадратная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре 863
Свободно опертая плоская прямоугольная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре 882
Заделанная по наружным кромкам плоская прямоугольная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре. 911
Открытая цилиндрическая оболочка прямоугольная в плане и свободно опертая по криволинейным кромкам под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки 942
Свободная оболочка полусферы с круговым полюсным отверстием под действием двух ортогональных пар взаимно уравновешенных радиально растягивающих и радиально сжимающих сил на экваторе 972
Почти несжимаемый толстостенный цилиндр в условиях плоской деформации под действием равномерно распределенного внутреннего давления 1015

Энергетический анализ 1027

Рама под действием различных вертикальных сил 1028
Рама под действием вертикальных сил 1030
Симметричная рама под действием вертикальных сил — выявление "слабых" элементов 1032

Монтаж 1034

Статический расчет напряженно-деформированного состояния здания с учетом генетической нелинейности 1035
Определение напряженно-деформированного состояния с учетом генетической нелинейности (режим «Монтаж») 1038

Перекрепление стойки двухпролетной одноэтажной рамы под действующей постоянной нагрузкой....1041
Последовательный монтаж сталежелезобетонной однопролетной балки....1045

Спектры ответа 1049
Спектр ответа абсолютных ответных ускорений линейного осциллятора, установленного в середине пролета свободно опертой балки с распределенной массой под действием кинематического возмущения опор (сейсмическое воздействие)....1050

Амплитудно-частотные характеристики 1055
Амплитудно-частотная характеристика системы с одной степенью свободы....1056

Элементы стальных конструкций 1060
Расчет прочности и жесткости сварной балки двутаврового сечения....1061
Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения....1065
Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения....1069
Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения....1073
Расчет прочности и жесткости сварной балки двутаврового сечения....1077
Расчет центрально-сжатой колонны из сварного двутаврового профиля....1081
Расчет прочности и жесткости балок настила для нормального типа балочной клетки....1085
Расчет прочности и жесткости балок настила для усложненного типа балочной клетки....1089
Расчет прочности и жесткости второстепенных балок для усложненного типа балочной клетки....1093
Расчет прочности и жесткости главных балок балочных клеток....1098
Расчет центрально-сжатой колонны сварного двутаврового сечения....1103
Расчет центрально-сжатой колонны из электросварной трубы....1107
Расчет верхнего пояса фермы из неравнополочных уголков....1111

Элементы железобетонных конструкций 1115

Расчеты по СНиП 2.03.01-84* 1116
Расчет прочности балки прямоугольного сечения....1117
Расчет прочности таврового сечения....1121
Расчет прочности стеновой панели....1125

Расчеты по СНиП 52-01-2003 1129
Расчет прочности балки прямоугольного сечения....1130
Расчет ребра ТТ-образной плиты перекрытия по несущей способности на действие поперечных сил....1134
Расчет свободно опертой балки прямоугольного сечения на действие поперечных сил....1141
Расчет колонны многоэтажного рамного каркаса по несущей способности на действие поперечной силы....1145
Пример продавливания у края плиты....1151
Расчет железобетонной плиты фундамента по раскрытию нормальных трещин....1160

Введение

Данный документ содержит верификационные примеры, при помощи которых исследуется достоверность результатов, полученных в вычислительном комплексе **SCAD**. В верификационных примерах численные результаты, полученные в вычислительном комплексе **SCAD**, сопоставляются с известными теоретическими решениями (точными и приближенными) в областях статики, динамики и устойчивости конструкций, а также с экспериментальными данными и с численными результатами, полученными с помощью других независимых вычислительных комплексов.

Для всех верификационных примеров приведены исчерпывающие исходные данные с расчетными схемами, необходимыми пояснениями и описаниями конечно-элементных моделей, а также даны ссылки на публикации, которые являются источниками принятых целевых решений (теоретических и экспериментальных). Для большинства верификационных примеров имеются аналитические формулы для вычисления результатов по теоретическим решениям. Результаты расчета в вычислительном комплексе **SCAD** отображаются в табличном и графическом представлении.

Различия между результатами, полученными в вычислительном комплексе **SCAD**, и целевыми результатами (теоретическими и экспериментальными) представлены как относительные отклонения в % прежде всего для экстремальных значений (максимальных и минимальных) целевого решения, а также для значений, имеющих существенный вклад в напряженно-деформированное состояние системы, который, например, можно оценить как отношение исследуемого значения к максимальному экстремальному по той или иной теории прочности. Вычисление отклонений не производилось в областях непосредственной близости к нулевым решениям и к решениям с особенностями, а также в областях, где имеется искажение решений принятыми граничными условиями.

ВК SCAD. МАТРИЦА ВЕРИФИКАЦИИ

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
Линейная статика							
1.	SSLL09	Плоская ферма под действием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.00
						Усилия	0.00
2.	SSLL11	Плоская шарнирно-стержневая система под действием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.00
3.	SSLL12	Плоская ферма с силовым, температурным и кинематическим воздействиями	Сосредоточенная статическая нагрузка, начальное перемещение, температурное воздействие	По аналитическому решению	1	Перемещения	0.02
						Усилия	0.00
4.	T1	Плоская шарнирно-стержневая система из элементов различного материала под действием изменения температуры	Температурное воздействие	По аналитическому решению	1	Усилия	0.00
5.	T2	Плоская шарнирно-стержневая система из элементов одинакового материала под действием изменения температуры	Температурное воздействие	По аналитическому решению	1	Напряжения	0.00
6.	CS01	Пространственная шарнирно-стержневая система под действием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	4	Усилия	0.00
7.	4.1	Консольная балка под действием сосредоточенной нагрузки	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Перемещения	0.00
						Усилия	0.00
8.	CS06	Консольная балка под действием сосредоточенной поперечной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.00
					30	Перемещения	0.07
9.	4.9	Вертикальный консольный стержень квадратного поперечного сечения, нагруженный продольной и поперечной сосредоточенными нагрузками на свободном конце	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Перемещения	0.00
						Напряжения	0.00
					50	Перемещения	0.12
						Напряжения	1.67
					37	Перемещения	0.06
						Напряжения	1.29
10.	4.3	Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенной силой и равномерно-распределенным давлением	Сосредоточенная и распределенная статические нагрузки	По аналитическому решению	2	Перемещения	0.00
						Усилия	0.00
11.	4.5	Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Перемещения	0.00
12.	4.4	Защемленная по концам балка, нагруженная	Распределенная статическая	По аналитическому	2	Перемещения	0.00

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
		равномерно-распределенной нагрузкой	нагрузка	решению		Усилия	0.00
13.	SSLL01	Балка, защемленная с двух концов, под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных продольных и поперечных сил и изгибающего момента	Сосредоточенная и распределенная статические нагрузки	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.05
						Усилия	0.00
14.	SSLL03	Двухпролетная свободно опертая балка с промежуточной податливой опорой под действием сосредоточенных поперечных сил, расположенных в середине пролетов	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10, 51	Перемещения	0.00
						Усилия	0.00
15.	SSLL15	Балка на упругом горизонтальном основании под действием сосредоточенных вертикальных сил	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	3	Перемещения	0.06
						Усилия	0.00
					3, 51	Перемещения	1.63
						Усилия	0.28
16.	SSLL16	Балка, лежащая на упругом горизонтальном основании свободно опертая по краям под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальной силы и изгибающего момента	Сосредоточенная и распределенная статические нагрузки	По аналитическому решению	3	Перемещения	0.00
						Усилия	0.00
					3, 51	Перемещения	0.00
						Усилия	0.08
17.	CS09	Балка, защемленная по двум торцам, под действием поперечного смещения одного из них	Начальное перемещение	По аналитическому решению	2	Усилия	0.00
18.	B1	Плоская система из двух соосных стержней под действием изменения температуры	Температурное воздействие	По аналитическому решению	2	Напряжения	0.00
19.	4.8	Напряженно-деформированное состояние шарнирно опертой балки при продольно-поперечном изгибе	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 51	Перемещения	0.11
						Усилия	0.03
					2, 51	Перемещения	0.07
						Усилия	0.01
20.	SSLL10	Система перекрестных стержней под действием распределенной нагрузки и сосредоточенной силы в их плоскости	Сосредоточенная и распределенная статические нагрузки	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.12
						Усилия	0.12
21.	SSLL05	Консольная рама под действием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.02
						Усилия	0.00

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
22.	SSLL14	Однопролетная шарнирно опертая плоская рама с двухскатным ригелем под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальных и горизонтальных сил и изгибающего момента	Сосредоточенная и распределенная статические нагрузки	По аналитическому решению	2	Перемещения	0.10
						Усилия	0.00
23.	SSLL04	Пространственная стержневая система с упругими связями под действием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10, 51	Перемещения	0.01
						Усилия	0.01
24.	4.7	Кольцо, нагруженное в его плоскости распределенной нагрузкой	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.00
						Усилия	0.86
25.	SSLL08	Полуциркульная арка постоянного поперечного сечения с шарнирным опиранием под действием сосредоточенной силы в ее плоскости	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.05
26.	4.6	Деформированное состояние разрезного кругового кольца, нагруженного двумя взаимно перпендикулярными силами P_x и P_y, лежащими в плоскости кольца	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Перемещения	0.00
27.	4.38	Консольный кривой брус, нагруженный поперечной сосредоточенной силой на свободном конце	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Перемещения	0.03
					50	Перемещения	0.03
					37	Перемещения	0.03
28.	SSLL06	Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения под действием в его плоскости сосредоточенных сил и момента на свободном конце	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.07
29.	SSLL07	Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения под действием из его плоскости сосредоточенной силы на свободном конце	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Перемещения	0.07
						Усилия	0.18
30.	SSLL13	Однопролетная балка с предварительно напряженной затяжкой, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой	Распределенная статическая нагрузка, предварительное натяжение	По аналитическому решению	1, 2	Перемещения	0.00
						Усилия	0.00/

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
31.	Influence Line	Двухпролетная одноэтажная рама под действием постоянной поперечной единичной силы, перемещающейся вдоль пролетов ригеля с малой скоростью. Построение линий влияния внутренних усилий в сечениях рамы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2	Усилия	0.69
32.	KSLS01	Изгиб прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне	Распределенная по линии статическая нагрузка	По аналитическому решению	21	Перемещения	4.56
33.	4.29	Чистый изгиб квадратной пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, защемленной по одной стороне и свободно опертой по центру противоположной стороны	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	30, 2	Напряжения	1.69
					30, 100	Напряжения	1.69
34.	4.22	Сжатие и изгиб симметричного клина сосредоточенными силами, приложенными к его вершине (задача Мичелла)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50, 100	Напряжения	0.16
35.	4.23	Изгиб симметричного клина сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине (задача Инглиса)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50, 100	Напряжения	2.21
36.	4.24	Изгиб симметричного клина равномерно распределенной нагрузкой, расположенной на поверхности одной из граней клина (задача Леви)	Распределенная по линии статическая нагрузка	По аналитическому решению	50	Напряжения	0.89
37.	4.25	Плотина треугольной формы, воспринимающая воздействия собственного веса и гидростатического давления	Распределенная поверхностная и распределенная по линии статические нагрузки	По аналитическому решению	30, 25	Напряжения	1.70
38.	4.26	Действие на плоскость сосредоточенного момента и сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	30, 100	Напряжения	6.60
39.	4.21	Изгиб кривого бруса узкого прямоугольного сечения силой, приложенной к незакрепленному концу (задача Головина)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50, 100	Напряжения	1.67
40.	4.27	Одностороннее растяжение пластины с	Распределенная по линии	По аналитическому	30, 25	Напряжения	5.15

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
		малым круговым отверстием (задача Кирша)	статическая нагрузка	решению	30, 25	Напряжения	1.17
41.	4.14	Напряженно-деформированное состояние круговой шарнирно опертой пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50, 45	Перемещения	0.46
						Усилия	2.70
42.	4.15	Напряженно-деформированное состояние круговой защемленной по краям пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50, 45	Перемещения	0.59
						Усилия	6.48
43.	4.16	Напряженно-деформированное состояние кольцевой шарнирно опертой пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50	Перемещения	0.78
						Усилия	1.72
44.	SSLS01	Прямоугольная узкая консольная пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	11	Перемещения	0.00
45.	SSLS27	Кручение прямоугольной консольной узкой пластины парой сосредоточенных сил	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	11	Перемещения	0.20
46.	4.17	Квадратная пластина, свободно опертая по периметру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	20	Перемещения	0.09
						Усилия	0.09
47.	SSLS24	Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	20	Перемещения	0.38
						Усилия	1.57
					20	Перемещения	0.18
						Усилия	0.60
					20	Перемещения	0.00
						Усилия	0.64
48.	SSLS26	Прямоугольная пластина, свободно опертая в трех вершинах, под действием из ее плоскости сосредоточенной силы и сосредоточенных моментов	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	20	Перемещения	0.00
49.	4.19	Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	44, 42	Перемещения	0.77
						Усилия	0.69

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
50.	4.20	Прямоугольная защемленная по контуру пластина постоянной толщины при температурном нагружении	Температурный градиент по толщине	По аналитическому решению	41	Перемещения	–
						Усилия	0.00
						Напряжения	0.00
51.	RMP	Толстая квадратная шарнирно-опертая пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	150	Перемещения	0.07
					150	Перемещения	0.00
					150	Перемещения	0.00
52.	4.34	Двухреберная балка под действием равномерно распределенных нагрузок, приложенных в плоскости ребер	Распределенная по линии статическая нагрузка	По аналитическому решению	27	Напряжения	0.92
53.	4.35	Криволинейная в плане коробчатая балка пролетного строения моста под действием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По эксперименту	150	Перемещения	9.9
						Напряжения	10,9
54.	4.31	Цилиндрическая оболочка со свободно опертыми торцами под равномерным внутренним давлением	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	44	Перемещения	0.19
						Усилия	0.83
55.	4.32	Цилиндрический вертикальный резервуар со стенкой постоянной толщины с плоским днищем под действием внутреннего давления жидкости	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	44	Перемещения	1.47
						Усилия	5.73
56.	4.33	Цилиндрическая оболочка со свободными торцами при градиенте температуры по толщине (в радиальном направлении)	Температурный градиент по толщине	По аналитическому решению	44	Перемещения	6.67
						Напряжения	1.04
57.	4.36a	Толстая квадратная в плане плита, шарнирно опертая по боковым граням, под действием поперечной нагрузки, распределенной по верхней грани по закону косинуса	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	36	Перемещения	0.3
						Напряжения	1.65
58.	4.37	Толстая круглая в плане плита, жестко защемленная по боковой поверхности, под действием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	35, 37	Перемещения	7.59
						Напряжения	9.12
59.	SSLV01	Цилиндрическое тело свободное от закреплений под действием продольной равномерно распределенной по торцам нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	61	Перемещения	0.00

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
60.	Flate_plate_Circular_column.spr	Квадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной круглого поперечного сечения, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	15, 20, 100	Напряжения	2.3
61.	Flate_plate_Square_column.spr	Квадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной квадратного поперечного сечения, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	20, 100	Напряжения	9.45
62.	Lave.spr	Упругое полупространство под действием равномерно распределенной по поверхности прямоугольной в плане поперечной нагрузки. Задача Лява.	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	37	Перемещения	3.2
						Напряжения	7.75
Линейная динамика							
1.	5.11	Плоская ферма под действием мгновенных импульсов, сосредоточенных в неопорных узлах нижнего пояса	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	1	Собственные частоты	5.10
						Перемещения	2.46
2.	5.1	Свободные колебания пространственного трубопровода, защемленного по торцам (задача Ховгарда)	Модальный анализ	По аналитическому решению	5	Собственные частоты	8.26
3.	5.12_Sudd_L	Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной внезапно приложенной постоянной силы	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	2	Собственные частоты	0.00
						Перемещения	0.09
						Усилия	0.91
4.	5.12_Harm_L	Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	2	Собственные частоты	0.00
						Перемещения	6.16
5.	Тест 5.12 Harm L Damp	Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	2	Собственные частоты	0.00

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
		гармонической возмущающей силы при учете рассеивания энергии на внутреннее трение				Перемещения	6.39
6.	Тест 5.13	Свободно опертая балка с распределенной массой под действием поперечной гармонической возмущающей силы, расположенной в середине пролета	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	3	Собственные частоты	0.73
						Перемещения	3.68
7.	Тест DIN B ML	Свободно опертая балка с распределенной массой под действием постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки с постоянной скоростью	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	3	Собственные частоты	0.73
						Перемещения	0.18
8.	Тест DIN B IL	Свободно опертая балка с распределенной массой под действием равномерно распределенного мгновенного импульса (удар балки о неподвижные опоры)	Распределенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	3	Собственные частоты	0.73
						Перемещения	0.36
						Усилия	14.06
9.	Тест DIN B SL	Свободно опертая балка с распределенной массой под действием кинематического возмущения опор (сейсмическое воздействие)	Динамическое смещение	По аналитическому решению	3	Собственные частоты	0.05
						Перемещения	0.80
						Усилия	0.73
10.	5.14	Консольная невесомая стойка с сосредоточенной массой на свободном торце под действием горизонтального кинематического смещения опоры (расчет по сейсмограмме)	Динамическое смещение	По аналитическому решению	5	Собственные частоты	0.00
						Перемещения	0.39
11.	5.7	Свободные колебания круговой шарнирно опертой по контуру пластины	Модальный анализ	По аналитическому решению	20, 15	Собственные частоты	1.57
12.	5.6	Свободные колебания круговой жестко защемленной по контуру пластины	Модальный анализ	По аналитическому решению	20, 15	Собственные частоты	1.89
13.	5.5	Свободные колебания квадратной консольной пластины	Модальный анализ	По аналитическому решению	20	Собственные частоты	0.91
14.	5.2	Свободные колебания квадратной шарнирно опертой по периметру пластины	Модальный анализ	По аналитическому решению	20	Собственные частоты	0.79
15.	5.3	Свободные колебания прямоугольной шарнирно опертой по периметру пластины	Модальный анализ	По аналитическому решению	20	Собственные частоты	0.50

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
16.	5.4	Свободные колебания квадратной жестко защемленной по периметру пластины	Модальный анализ	По аналитическому решению	20	Собственные частоты	0.81
17.	Тест 5.8 S	Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам	Модальный анализ	По аналитическому решению	50	Собственные частоты	0.86
18.	Тест 5.8 C	Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам	Модальный анализ	По аналитическому решению	50	Собственные частоты	2.38
19.	Тест 5.9	Свободные колебания консольной открытой цилиндрической оболочки	Модальный анализ	По эксперименту	50	Собственные частоты	1.97
20.	DI_F.SPR	Плоская рама под действием равномерно распределенного мгновенного импульса	Импульс	По аналитическому решению	2	Собственные частоты	0.00
						Перемещения	0.00
						Усилия	1.25
21.	LinSpectral	Сейсмический отклик балки по линейно-спектральной теории	Динамическое смещение	По аналитическому решению	3	Собственные частоты	0,06
						Перемещения	1.75
						Напряжения	1.85
Линейная устойчивость							
1.	CB01	Устойчивость шарнирно-опертой балки под действием сосредоточенной продольной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Критическая сила	0.00
2.	CB02	Устойчивость балки, защемленной по двум торцам, под действием сосредоточенной продольной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	10	Критическая сила	0.00
3.	Leg of varying section	Устойчивость консольной стойки со ступенчатым изменением поперечного сечения, нагруженной продольными сжимающими силами, приложенными к промежуточным и торцевым сечениям	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2	Критическая сила	0.00
						Свободная длина стоек	0.00
					150	Критическая сила	2.93
						Свободная длина стоек	—
4.	Frame 5a1	Устойчивость системы из трех одинаково нагруженных стоек разной жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 100	Критическая сила	0.01
						Свободная длина стоек	0.00
5.	Frame 5a2	Устойчивость системы из трех различно нагруженных стоек одинаковой жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 100	Критическая сила	0.00
						Свободная длина стоек	0.00
6.	Frame 5б	Устойчивость системы из трех различно нагруженных стоек разной жесткости, связанных между собой бесконечно жесткими на изгиб ригелями	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 100	Критическая сила	0.00
						Свободная длина стоек	0.00

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
7.	Frame leg hard	Устойчивость рамы из двух шарнирно опертых одинаково нагруженных абсолютно жестких стоек, жестко связанных между собой ригелем	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 100	Критическая сила	0.00
8.	6.1	Устойчивость трехпролетной двухэтажной рамы под действием сосредоточенных продольных сил на стойки в узлах сопряжения с ригелями	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 100	Критическая сила	0.00
9.	Arch hinged	Устойчивость круговой двухшарнирной арки постоянного сечения при гидростатическом давлении	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2	Критическая нагрузка	0.23
10.	6.2	Устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы прямоугольного поперечного сечения поперечной силой, приложенной на свободном торце (прямой изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	150	Критическая сила	4.50
11.	Stability Bar 1	Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной продольной сжимающей силы, центрально приложенной на свободном торце (центральное сжатие)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	0.01
					150	Критическая сила	0.48
					37	Критическая сила	0.58
12.	Stability Bar 2	Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, центрально приложенной на свободном торце (прямой изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	0.76
					150	Критическая сила	2.28
					37	Критическая сила	0.31
13.	Stability Bar 3	Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной к верхнему ребру свободного торца (прямой изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5, 100	Критическая сила	0.64
					150	Критическая сила	1.80
					37	Критическая сила	4.26

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
14.	Stability Bar 4	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	0.59
					150, 5	Критическая сила	1.28
15.	Stability Bar 5	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	0.64
					150, 5	Критическая сила	5.36
16.	Stability Bar 6	Устойчивость свободно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных продольных изгибающих сил, приложенных к верхним ребрам торцов и равных по значению (продольный изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5, 100	Критическая сила	0.01
					150, 5	Критическая сила	0.48
17.	Stability Bar 7	Устойчивость свободно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных продольных изгибающих сил, приложенных к верхним ребрам торцов и равных по значению (продольный изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5, 100	Критическая сила	0.02
					150, 5	Критическая сила	8.18
18.	Stability Bar 8	Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая нагрузка	0.45
					150	Критическая нагрузка	3.30
					37	Критическая нагрузка	5.73
19.	Stability Bar 9	Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки по продольной оси его верхней грани (прямой изгиб)	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5, 100	Критическая нагрузка	0.20
					150	Критическая нагрузка	1.71
					37	Критическая нагрузка	3.67

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
20.	Stability Bar 10	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	0.52
					150, 5	Критическая сила	2.91
21.	Stability Bar 11	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси верхней грани (поперечный изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5, 100	Критическая сила	1.21
					150, 5	Критическая сила	4.03
22.	Stability Bar 12	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	3.19
					150, 5	Критическая сила	9.42
23.	Stability Bar 13	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая нагрузка	0.53
					150, 5	Критическая нагрузка	2.44
24.	Stability Bar 14	Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая нагрузка	2.27
					150, 5	Критическая нагрузка	7.25
25.	Stability Flanged Beam 1	Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	1.19
					150	Критическая сила	3.52

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
26.	Stability Flanged Beam 2	Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая сила	1.38
					150	Критическая сила	1.65
27.	Stability Flanged Beam 3	Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по ее продольной оси нагрузки (прямой изгиб)	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая нагрузка	1.21
					150	Критическая нагрузка	0.98
28.	Stability Flanged Beam 4	Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки по продольной оси ее верхней полки (прямой изгиб)	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5	Критическая нагрузка	1.54
					150	Критическая нагрузка	1.87
29.	6.6	Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластинки равномерно сжатой в одном направлении	Распределенная по линии статическая нагрузка	По аналитическому решению	44	Критические напряжения	1.95
					50		0.00
30.	6.7	Устойчивость квадратной шарнирно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении	Распределенная по линии статическая нагрузка	По аналитическому решению	44	Критические напряжения	1.26
					50		0.00
31.	6.8	Устойчивость квадратной шарнирно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении при кинематическом воздействии	Начальное перемещение	По аналитическому решению	44	Критические напряжения	1.27
					50		0.00
32.	6.9	Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины при чистом сдвиге	Распределенная по линии статическая нагрузка	По аналитическому решению	44	Критические напряжения	3.26
					50		0.05
33.	6.10 а модель 1	Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, равномерно сжатой в продольном направлении (модель 1)	Распределенная по линии и сосредоточенная статические нагрузки	По аналитическому решению	50, 5	Критические напряжения	0.10

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
34.	6.10 a модель 2	Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, равномерно сжатой в продольном направлении (модель 2)	Распределенные по линии статические нагрузки	По аналитическому решению	50	Критические напряжения	2.55
35.	6.10 b	Устойчивость прямоугольной ортотропной свободно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении	Распределенные по линии статические нагрузки	По аналитическому решению	50	Критические напряжения	0.03
36.	6.11 S	Устойчивость цилиндрической тонкостенной оболочки со свободно опертыми торцами под равномерным внешним давлением	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	50	Критическое давление	1.94
Нелинейная статика							
1.	Contact 1	Трехпролетная балка с заделкой одного торца и тремя жесткими односторонними опорами под действием сосредоточенных сил над ними	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	2, 352	Перемещения	0.00
						Усилия	1.67
2.	Contact 2	Абсолютно твердое тело, раскрепленное пятью пружинами одинаковой жесткости, работающими только на растяжение, под воздействием сосредоточенной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	100, 352	Усилия	0.07
3.	Tunnel lining	Круговая тоннельная обделка под действием заданного активного вертикального и горизонтального давления грунта и пассивного давления упругого отпора грунта в зоне контакта	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	5, 352	Усилия	0.01
4.	Contact 3	Контакт с отставанием для слоя и основания при действии на слой сосредоточенной поперечной силы	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	30, 352	Размер зоны контакта	3.77
5.	NL CANAT	Гибкая нить с опорами в одном уровне под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	302	Перемещения	0.02
						Усилия	0.34
6.	Ring	Гибкое кольцо, нагруженное двумя взаимно уравновешенными радиально сжимающими силами	Сосредоточенная статическая нагрузка для формы упругой линии бесперегибного рода	По аналитическому решению	310	Перемещения	3.29
						Усилия	0.05

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
7.	NEL	Гибкая длинная прямоугольная пластина, шарнирно опертая по продольным кромкам, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	341	Перемещения	0.06
						Напряжения	4.26
8.	7.6	Гибкая квадратная шарнирно опертая по периметру пластина, нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	344	Перемещения	1.87
						Напряжения	1.80
9.	7.7	Гибкая круговая шарнирно опертая по контуру пластина, нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	342, 344	Перемещения	1.14
						Напряжения	1.67
10.	Mast	Двухвантовая мачта под действием статических нагрузок и сил предварительного натяжения	Сосредоточенная и распределенная статические нагрузки	По аналитическому решению	5, 308	Усилия	0.23
11.	Плита-мембрана 4	Квадратная мембрана с податливым контуром	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	Экспериментальные данные	341	Перемещения	5.84
Патологические тесты							
1.	Patch test Constant stress Shell	Прямоугольная пластина в условиях постоянных напряжений на срединной поверхности	Начальное перемещение	По аналитическому решению	42	Напряжения	0.00
					44	Напряжения	0.00
					45	Напряжения	0.00
					50	Напряжения	0.00
2.	Patch test Constant curvature Shell	Прямоугольная пластина в условиях постоянных кривизн	Начальное перемещение	По аналитическому решению	42	Напряжения	0.00
					44	Напряжения	0.00
					45	Напряжения	0.00
					50	Напряжения	0.00
3.	Patch test Constant stress Solid	Куб в условиях постоянных напряжений по объему	Начальное перемещение	По аналитическому решению	32	Напряжения	0.00
					34	Напряжения	0.00
					36	Напряжения	0.00
					37	Напряжения	0.00
4.	Straight cantilever beam	Прямолинейная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных продольной и поперечных сил и крутящего момента	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42 регулярная сетка	Перемещения	96.85
					42 трапецеидальная сетка	Перемещения	98.52
					42 параллелограммная сетка	Перемещения	97.78
					142 регулярная сетка	Перемещения	96.85
					142 трапецеидальная сетка	Перемещения	98.52

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
					142 параллелограммная сетка	Перемещения	97.78
					44 регулярная сетка	Перемещения	90.65
					44 трапецеидальная сетка	Перемещения	97.31
					44 параллелограммная сетка	Перемещения	96.57
					144 регулярная сетка	Перемещения	90.37
					144 трапецеидальная сетка	Перемещения	97.22
					144 параллелограммная сетка	Перемещения	96.11
					45 регулярная сетка	Перемещения	3.29
					45 трапецеидальная сетка	Перемещения	3.69
					45 параллелограммная сетка	Перемещения	2.97
					145 регулярная сетка	Перемещения	4.08
					145 трапецеидальная сетка	Перемещения	4.25
					145 параллелограммная сетка	Перемещения	4.13
					50 регулярная сетка	Перемещения	2.51
					50 трапецеидальная сетка	Перемещения	2.79
					50 параллелограммная сетка	Перемещения	2.78
					150 регулярная сетка	Перемещения	3.37
					150 трапецеидальная сетка	Перемещения	3.53
					150 параллелограммная сетка	Перемещения	3.43
					36 регулярная сетка	Перемещения	97.48
					36 трапецеидальная сетка	Перемещения	98.96
					36 параллелограммная сетка	Перемещения	98.59

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
					37 регулярная сетка	Перемещения	15.05
					37 трапецеидальная сетка	Перемещения	24.81
					37 параллелограммная сетка	Перемещения	15.09
5.	Curved cantilever beam	Криволинейная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных поперечных сил	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42	Перемещения	97.50
					142	Перемещения	97.50
					44	Перемещения	92.76
					144	Перемещения	92.59
					45	Перемещения	2.74
					145	Перемещения	2.57
					50	Перемещения	1.41
					150	Перемещения	1.95
					36	Перемещения	92.77
					37	Перемещения	6.01
6.	Twisted cantilever beam	Скрученная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных поперечных сил	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42	Перемещения	16.21
					142	Перемещения	14.63
					44	Перемещения	65.00
					144	Перемещения	65.23
					45	Перемещения	0.70
					145	Перемещения	24.74
					50	Перемещения	27.24
					150	Перемещения	24.55
					36	Перемещения	79.38
					37	Перемещения	0.63
7.	Bending of square flat plate Simply supported	Свободно опертая плоская квадратная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.39
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.32
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.00
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.00
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	24.64
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.39
			Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.95
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.54
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.01
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.02
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	25.08
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.38
8.	Bending of square flat plate Clamped supported	Заделанная по наружным кромкам плоская квадратная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.71
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.63
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.00
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.00
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	27.91

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.08
			Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	1.71
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	1.05
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.04
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.07
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	27.66
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.18
9.	Bending of rectangular flat plate Simply supported	Свободно опертая плоская прямоугольная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.10
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.45
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.00
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.00
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	28.81
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.02
			Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	12.54
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	7.68
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.65
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.68
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	43.08
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.09
10.	Bending of rectangular flat plate Clamped supported	Заделанная по наружным кромкам плоская прямоугольная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	1.34
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.04
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.04
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.04
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	30.29
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.00
			Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	20.79
					44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	12.04
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	2.02
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	1.85
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	45.90
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.21
11.	Scordelis-Lo	Открытая цилиндрическая оболочка	Распределенная поверхностная	По аналитическому	42, сетка КЭ 8x8	Перемещения	15.04

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
	roof	прямоугольная в плане и свободно опертая по криволинейным кромкам под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки	статическая нагрузка	решению	44, сетка КЭ 8x8	Перемещения	4.70
					45, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.94
					50, сетка КЭ 8x8	Перемещения	0.87
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	4.86
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.58
12.	Quadrant of a spherical shell	Свободная оболочка полусферы с круговым полюсным отверстием под действием двух ортогональных пар взаимно уравновешенных радиально растягивающих и радиально сжимающих сил на экваторе	Сосредоточенная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, сетка КЭ 32x32	Перемещения	1.38
					44, сетка КЭ 32x32	Перемещения	0.85
					45, сетка КЭ 32x32	Перемещения	1.38
					50, сетка КЭ 32x32	Перемещения	0.85
					36, сетка КЭ 128x128	Перемещения	62.77
					37, сетка КЭ 128x128	Перемещения	0.32
13.	Nearly incompressible thick cylinder	Почти несжимаемый толстостенный цилиндр в условиях плоской деформации под действием равномерно распределенного внутреннего давления	Распределенная поверхностная статическая нагрузка	По аналитическому решению	42, коэффициент Пуассона 0.49	Перемещения	1.05
					42, коэффициент Пуассона 0.499	Перемещения	1.15
					42, коэффициент Пуассона 0.4999	Перемещения	1.17
					44, коэффициент Пуассона 0.49	Перемещения	1.94
					44, коэффициент Пуассона 0.499	Перемещения	2.04
					44, коэффициент Пуассона 0.4999	Перемещения	2.05
					45, коэффициент Пуассона 0.49	Перемещения	3.08
					45, коэффициент Пуассона 0.499	Перемещения	3.20
					45, коэффициент Пуассона 0.4999	Перемещения	3.22
					50, коэффициент Пуассона 0.49	Перемещения	3.04
					50, коэффициент Пуассона 0.499	Перемещения	3.20

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
					50, коэффициент Пуассона 0.4999	Перемещения	3.18
					36, коэффициент Пуассона 0.49	Перемещения	15.48
					36, коэффициент Пуассона 0.499	Перемещения	64.07
					36, коэффициент Пуассона 0.4999	Перемещения	94.65
					37, коэффициент Пуассона 0.49	Перемещения	0.54
					37, коэффициент Пуассона 0.499	Перемещения	1.19
					37, коэффициент Пуассона 0.4999	Перемещения	11.36
Энергетический анализ							
1.	Energy94A	Рама под действием различных вертикальных сил	Узловая нагрузка	По аналитическому решению	2	Оценка роли подсистем при потере устойчивости	—
2.	Energy94B	Рама под действием вертикальных сил	Узловая нагрузка	По аналитическому решению	2	Оценка роли подсистем при потере устойчивости	—
3.	Energy	Симметричная рама под действием вертикальных сил — выявление "слабых" элементов	Узловая нагрузка	По аналитическому решению	2	Оценка роли подсистем при потере устойчивости	—
Монтаж							
1.	Test-01	Статический расчет напряженно-деформированного состояния здания с учетом генетической нелинейности	Распределенные нагрузки	Сравнение с решением ANSYS	44,5	перемещения	2.5
						усилия	6.6
2.	Truss	Определение напряженно-деформированного состояния с учетом генетической нелинейности	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	1	перемещения	0.21
						усилия	0.91
3.	Rearrange_Frame	Перекрепление стойки двухпролетной одноэтажной рамы под действующей постоянной нагрузкой	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	5	усилия	0.0
4.	Wiring_Girder.MPR	Последовательный монтаж сталежелезобетонной однопролетной балки	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	5,44,100	перемещения	1.29

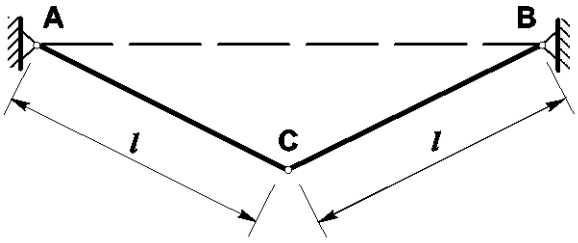
	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
Спектры ответа							
1.	DIN_B_RS	Определение спектра ответа ответных ускорений линейного осциллятора	Акселерограмма	Сравнение с расчетом по Abaqus	5	Частота, при которой реализуется максимальное ускорение	0.0
						Максимальное ускорение	0.95
Амплитудно-частотные характеристики							
1.	АЧХ	Построение амплитудно-частотной характеристики одномассовой упругой системы при гармоническом возбуждении	Сосредоточенная динамическая нагрузка	По аналитическому решению	51	Частота, при которой реализуется максимальное перемещение	0.0
						Максимальное перемещение	0.65
Элементы стальных конструкций							
1.	4.1 Section Resistance_Example_4.1	Расчет прочности и жесткости сварной балки двутаврового сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
2.	4.2 Section Resis-tance_Exampl e_4.2	Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
3.	4.3 Section Resistance_Example_4.3	Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
4.	4.4 Section Resis-tance_Example_4.4	Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
5.	4.5 Section Resis-tance_Example_4.5	Расчет прочности и жесткости сварной балки двутаврового сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
6.	4.6 Section Resistance_Example_4.6	Расчет центрально-сжатой колонны из сварного двутаврового профиля	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
7.	3.1 Beam_Example_3.1	Расчет прочности и жесткости балок настила для нормального типа балочной клетки	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0

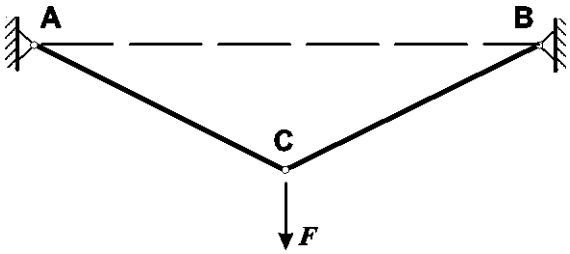
	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
8.	3.2 Beam_Example_3.2	Расчет прочности и жесткости балок настила для усложненного типа балочной клетки	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
9.	3.3 Beam_Example_3.3	Расчет прочности и жесткости второстепенных балок для усложненного типа балочной клетки	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
10.	3.4 Beam_Example_3.4	Расчет прочности и жесткости главных балок балочных клеток	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
11.	5.1 Column_Example_5.1	Расчет центрально-сжатой колонны сварного двутаврового сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
12.	5.3 Column_Example_5.3	Расчет центрально-сжатой колонны из электросварной трубы		По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
13.	7.1 Truss_Element_Example_7.1	Расчет верхнего пояса фермы из неравнополочных уголков		По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.0
Элементы железобетонных конструкций							
Расчеты по СНиП 2.03.01-84*							
1.	SCAD 3 SNiP	Расчет прочности балки прямоугольного сечения	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	2	Факторы использования ограничений	4.2
2.	SCAD 7 SNiP	Расчет прочности таврового сечения	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	2	Факторы использования ограничений	3.0
3.	SCAD 12 SNiP	Расчет прочности стеновой панели	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	4.1
Расчеты по СНиП 52-01-2003							
1.	SCAD 6 SP	Расчет прочности балки прямоугольного сечения	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	2	Факторы использования ограничений	1.9
2.	SCAD 12.1.SP и SCAD 12.2.SP	Расчет ребра ТТ-образной плиты перекрытия по несущей способности на действие поперечных сил	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	2	Факторы использования ограничений	1.4
3.	SCAD 13 SP	Расчет свободно опертой балки прямоугольного сечения на действие поперечных сил	Распределенные нагрузки	По аналитическому решению	2	Факторы использования ограничений	1.7
4.	SCAD 34 SP	Расчет колонны многоэтажного рамного каркаса по несущей способности на действие поперечной силы	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5	Факторы использования ограничений	0.4
5.	SCAD 41 SP-2003 и SCAD 41 SP-2012	Пример продавливания у края плиты	Узловые нагрузки	По аналитическому решению	5, 41, 51	Факторы использования ограничений	0.1

	Шифр	Название теста	Сочетание нагрузок и воздействий	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Проверяемые параметры	Отклонение %
6.	SCAD 43 SP	Расчет железобетонной плиты фундамента по раскрытию нормальных трещин	Сосредоточенный момент	По аналитическому решению	2	Факторы использования ограничений	4.9

Линейная статика

Плоская ферма под действием сосредоточенной силы





Цель: Определение напряженно-деформированного состояния плоской фермы от воздействия сосредоточенной силы.

Имя файла с исходными данными: **SSLL09_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Плоская ферма состоит из двух одинаковой длины и жесткости поперечного сечения наклонных нисходящих стержней, расположенных симметрично относительно вертикальной оси, шарнирно соединенных в общем узле (точка C) и шарнирно опертых по противоположным узлам (точки A и B). В общем узле стержней фермы приложена вертикальная сосредоточенная сила F. Определить вертикальное перемещение общего узла стержней фермы Z и продольные силы в стержнях фермы N.

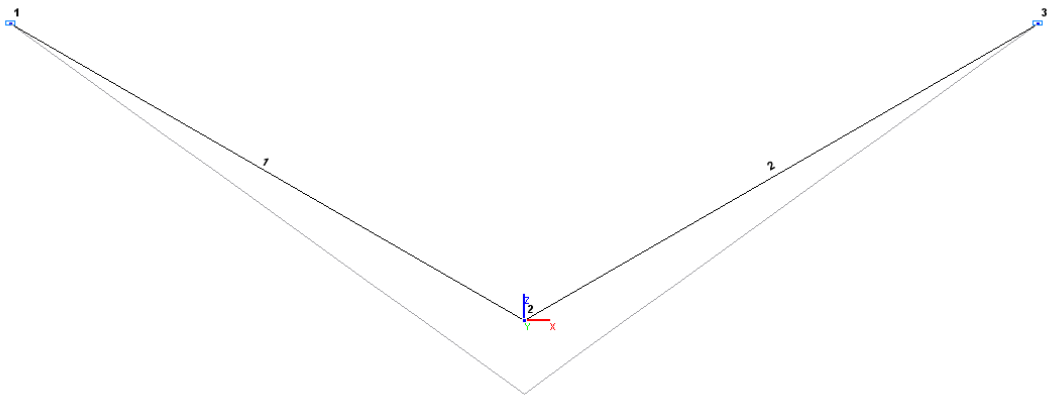
Ссылки: S. Timoshenko, Resistance des materiaux, t.1, Bruxelles, Edition Polytechnique Beranger, 1963, p. 10.

Исходные данные:

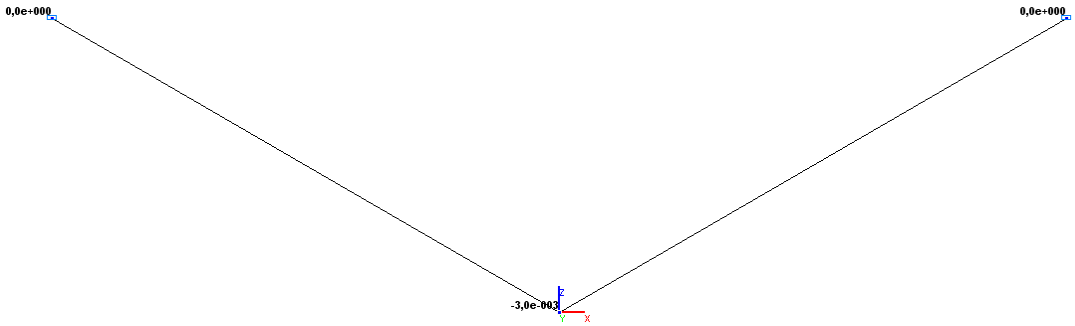
$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости стержней фермы;
$l = 4.5$ м	- длина стержней фермы;
$\theta = 30^{o}$	- угол наклона стержней к горизонту;
$A = 3.0 \cdot 10^{-4}$ м^2	- площадь поперечного сечения стержней;
$F = 2.1 \cdot 10^{4}$ Н	- значение вертикальной сосредоточенной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система, 2 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z для шарнирных опорных узлов. Количество узлов в расчетной схеме – 3.

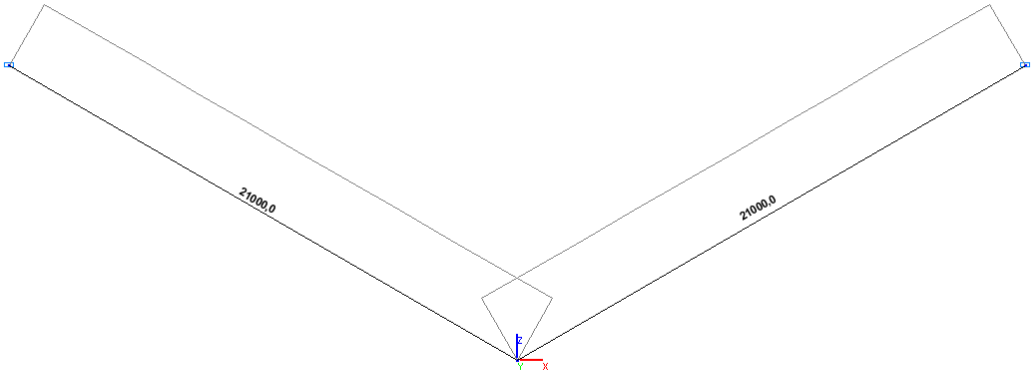
Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Значения продольных сил N (Н)

Сравнение решений:

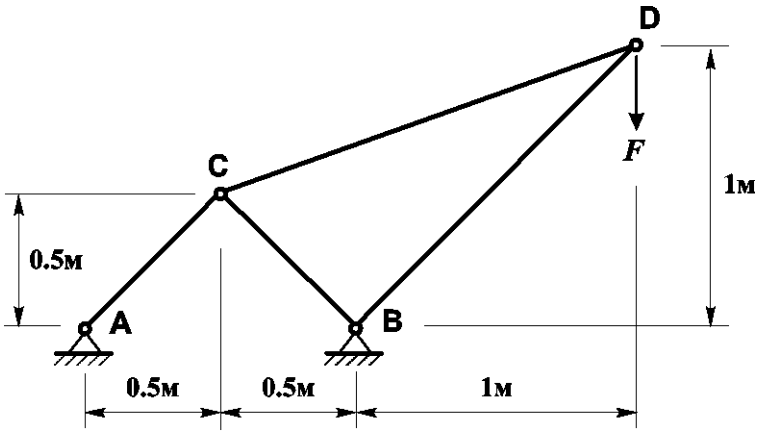
Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Вертикальное перемещение Z (точка C), м	$-3.0000\cdot10^{-3}$	$-3.0000\cdot10^{-3}$	0.00
Продольная сила *N* (стержень AC), Н	21000.0	21000.0	0.00
Продольная сила *N* (стержень BC), Н	21000.0	21000.0	0.00

Замечания: При аналитическом решении вертикальное перемещение общего узла стержней фермы Z и продольные силы в стержнях фермы *N* определяются по следующим формулам:

$$Z = \frac{F \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \sin^2(\theta)};$$

$$N = \frac{F}{2 \cdot \sin(\theta)}.$$

Плоская шарнирно-стержневая система под действием сосредоточенной силы



Цель: Определение деформированного состояния плоской шарнирно-стержневой системы от воздействия сосредоточенной силы.

Имя файла с исходными данными: **SSLL11_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Плоская шарнирно-стержневая система состоит из четырех наклонных стержней. В первой паре стержни имеют одинаковые длины и жесткости поперечного сечения, являются восходящими к общему узлу (точка C) и шарнирно опираются по противоположным узлам (точки A и B). Во второй паре стержни имеют одинаковые жесткости поперечного сечения, являются восходящими к общему узлу (точка D) и крепятся по противоположным узлам (точки C и B) к одному из стержней первой пары. В общем узле второй пары стержней приложена вертикальная сосредоточенная сила F. Определить горизонтальные X и вертикальные Z перемещения общих узлов первой (точка C) и второй (точка D) пар стержней системы.

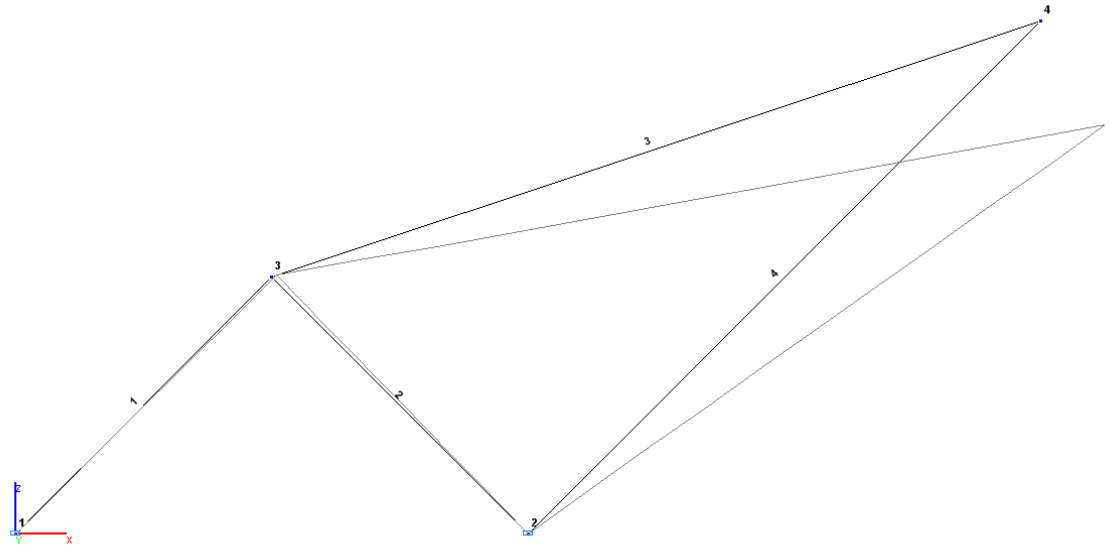
Ссылки: S. S. Rao, The finite element method in engineering, 4 ed, Elsevier science end technology books, 2004, p. 313.

Исходные данные:

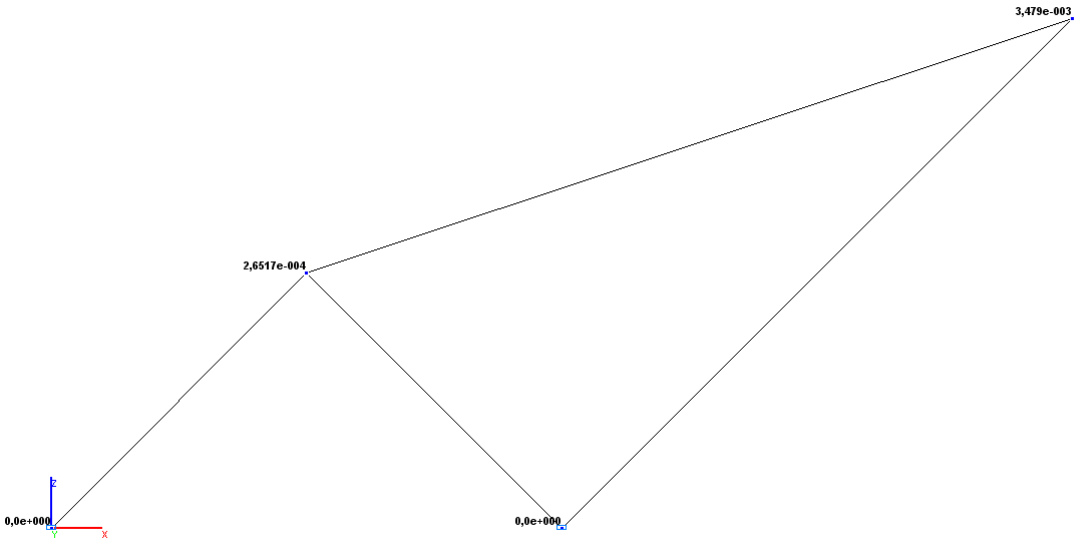
$E = 2.0 \cdot 10^{10}$ Па — модуль упругости стержней системы;
$X_A = 0.0$ м — координаты узла A;
$Y_A = 0.0$ м
$X_B = 1.0$ м — координаты узла B;
$Y_B = 0.0$ м
$X_C = 0.5$ м — координаты узла C;
$Y_C = 0.5$ м
$X_D = 2.0$ м — координаты узла D;
$Y_D = 1.0$ м
$A_{AC} = 2.0 \cdot 10^{-4}$ м^2 — площадь поперечного сечения стержня AC;
$A_{BC} = 2.0 \cdot 10^{-4}$ м^2 — площадь поперечного сечения стержня BC;
$A_{CD} = 1.0 \cdot 10^{-4}$ м^2 — площадь поперечного сечения стержня CD;
$A_{BD} = 1.0 \cdot 10^{-4}$ м^2 — площадь поперечного сечения стержня BD;
$F = 1.0 \cdot 10^{3}$ Н — значение вертикальной сосредоточенной силы.

***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система, 4 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей: по направлениям степеней свободы X, Z для шарнирно опертых узлов (точки A и B). Количество узлов в расчетной схеме – 4.

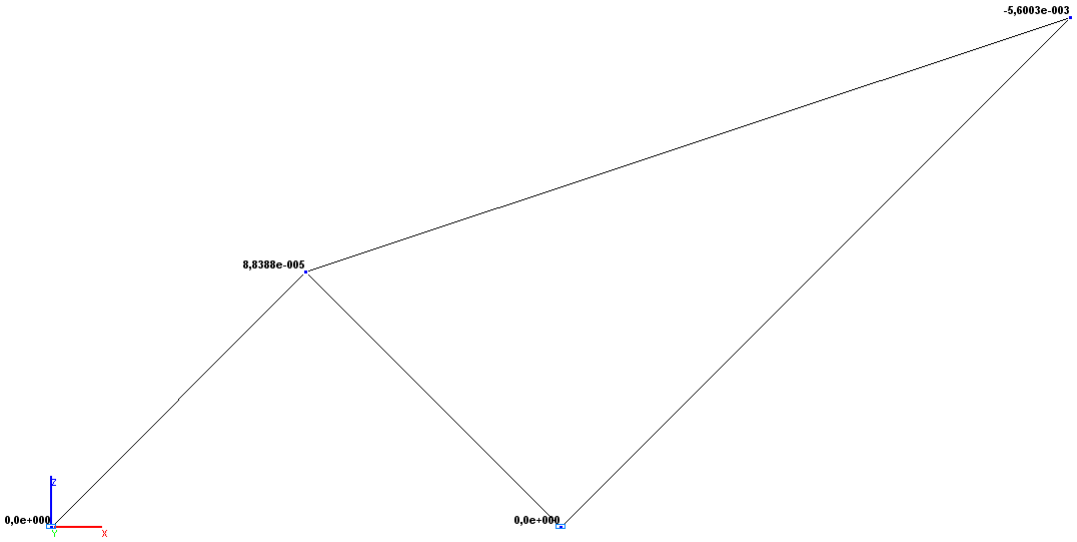
Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Значения горизонтальных перемещений X (м)

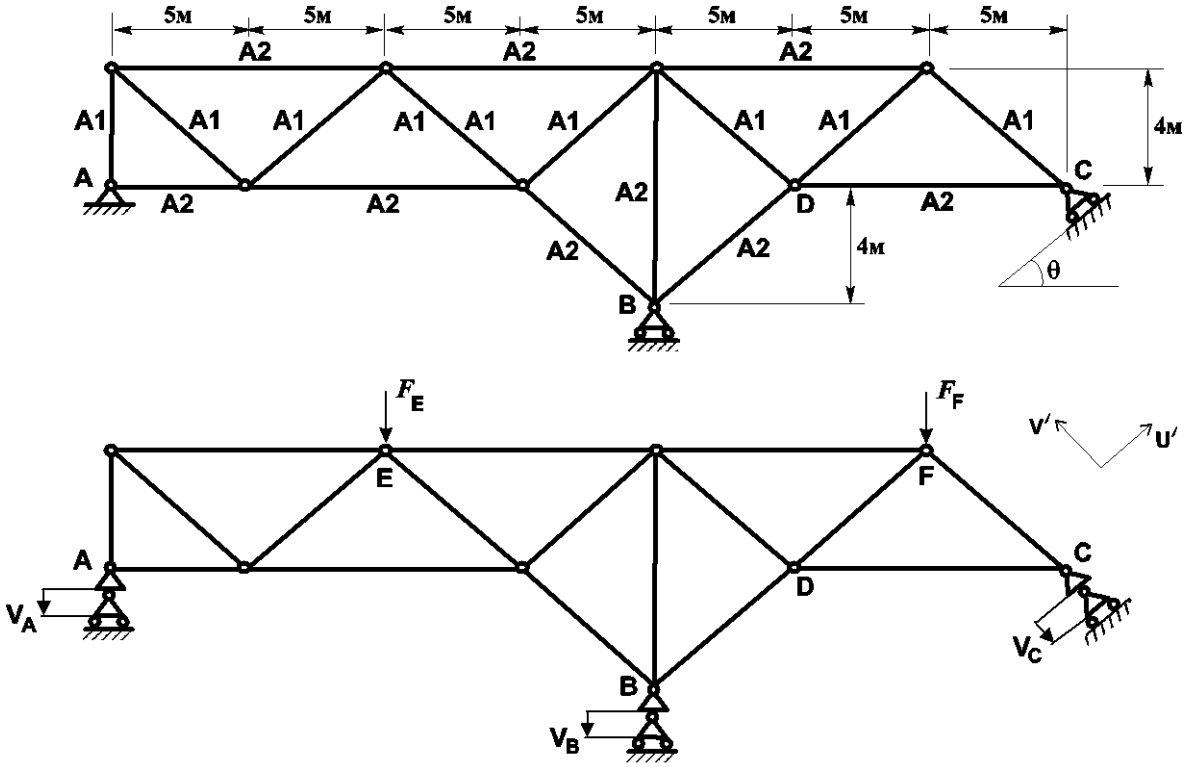


Значения вертикальных перемещений Z (м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Горизонтальное перемещение X (точка C), м	$2.6517 \cdot 10^{-4}$	$2.6517 \cdot 10^{-4}$	0.00
Вертикальное перемещение Z (точка C), м	$0.8839 \cdot 10^{-4}$	$0.8839 \cdot 10^{-4}$	0.00
Горизонтальное перемещение X (точка D), м	$34.7903 \cdot 10^{-4}$	$34.7903 \cdot 10^{-4}$	0.00
Вертикальное перемещение Z (точка D), м	$-56.0035 \cdot 10^{-4}$	$-56.0035 \cdot 10^{-4}$	0.00

Плоская ферма с силовым, температурным и кинематическим воздействиями



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния фермы при силовом, температурном и кинематическом воздействиях.

Имя файла с исходными данными: **SSLL12_v11.3.spr**

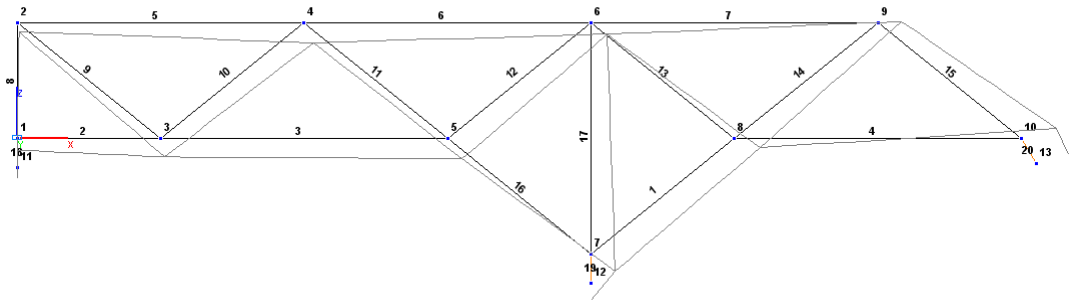
Формулировка задачи: Двухпролетная ферма нагружена двумя сосредоточенными силами F_E и F_F в узлах верхнего пояса, равномерно нагрета по всем поперечным сечениям ее элементов на величину ΔT и подвержена воздействию смещения ее опор на величины v_A, v_B и v_C. Определить продольное усилие N в опорном подкосе BD и вертикальное перемещение v (Z) в точке D узла его сопряжения с нижним поясом и элементами решетки.

Ссылки: M. Laredo, Resistence des materiaux, Paris, Dunod, 1970, p.579.

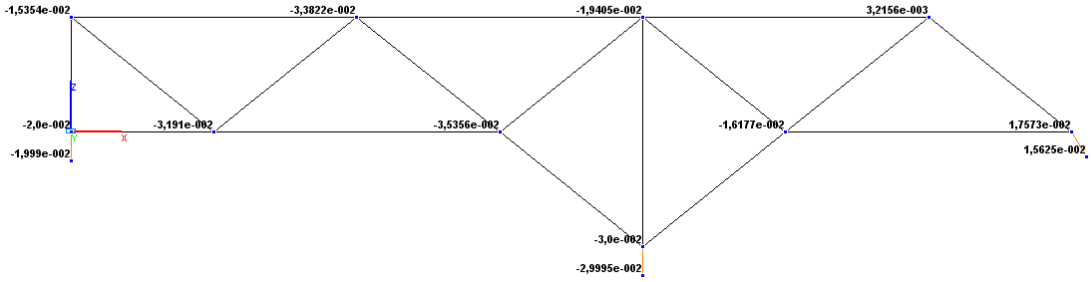
Исходные данные:
Элементы решетки A1:
$EF = 2.961 \cdot 10^8$ Н – продольная жесткость;
Элементы верхнего и нижнего поясов, опорных подкосов и опорной стойки A2:
$EF = 5.922 \cdot 10^8$ Н – продольная жесткость;
Элементы, моделирующие связи в опорных узлах по направлениям v_A, v_B и v_C (нуль-элементы):
$EF = 10^{10}$ Н – продольная жесткость;
Граничные условия:
$\theta = 30^o$ – угол наклона опорной площадки в узле C;
Свойства материала:
$\alpha = 10^{-5}$ 1/ºC – коэффициент линейного расширения;
Нагрузки и воздействия:
$F_E = 1.5 \cdot 10^5$ Н
$F_F = 1.0 \cdot 10^5$ Н
$\Delta T = 150$ ºC
$v_A = 0.020$ м
$v_B = 0.030$ м
$v_C = 0.015$ м.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система. Элементы решетки: А1 – 8 элементов типа 1, элементы верхнего и нижнего поясов, опорных подкосов и опорной стойки А2 – 9 элементов типа 1; элементы, моделирующие связи в опорных узлах по направлениям v_A, v_B и v_C – 3 элемента типа 154. Обеспечение граничных условий по направлению u_A достигается за счет наложения соответствующей жесткой связи. Количество узлов в расчетной схеме – 13.

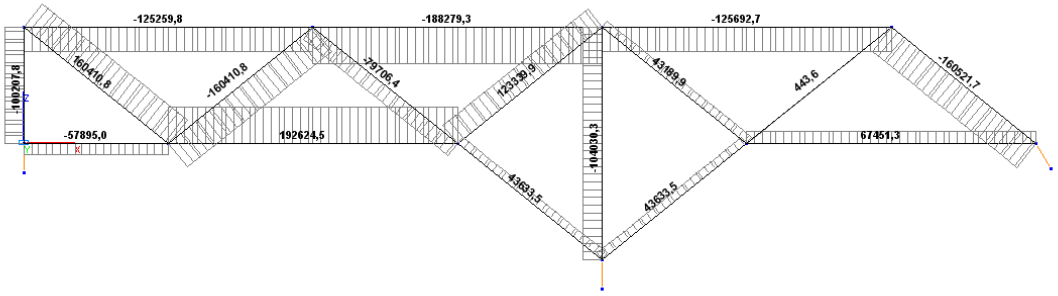
Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Значения вертикальных перемещений v (Z) (м)

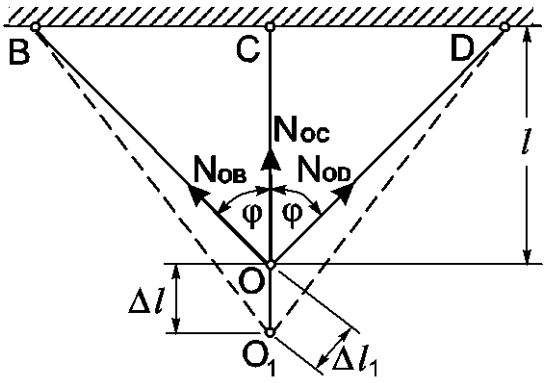


Значения продольных сил N (Н)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Вертикальное перемещение v_D (Z), м	$-1.6180\cdot10^{-2}$	$-1.6177\cdot10^{-2}$	0.02
Продольное усилие N_{BD}, Н	43633.0	43633.5	0.00

Плоская шарнирно-стержневая система из элементов различного материала под действием изменения температуры



***Цель*:** Определение напряженного состояния плоской шарнирно-стержневой системы из элементов различного материала от воздействия изменения температуры.

Имя файла с исходными данными: **T1_v11.3.spr**

Формулировка задачи:
Три стержня плоской системы шарнирно сопряжены в общем узле (O) и шарнирно оперты в противоположных узлах (B, C, D). Опорные узлы расположены на одной горизонтальной прямой симметрично относительно вертикальной оси (OC), общий узел лежит на вертикальной оси. Вертикальный стержень (OC) выполнен из стали, наклонные стержни (OB, OD) выполнены из меди. Система подвергается воздействию от изменения температуры Δt относительно температуры сборки. Определить продольные усилия *N* в каждом стержне.

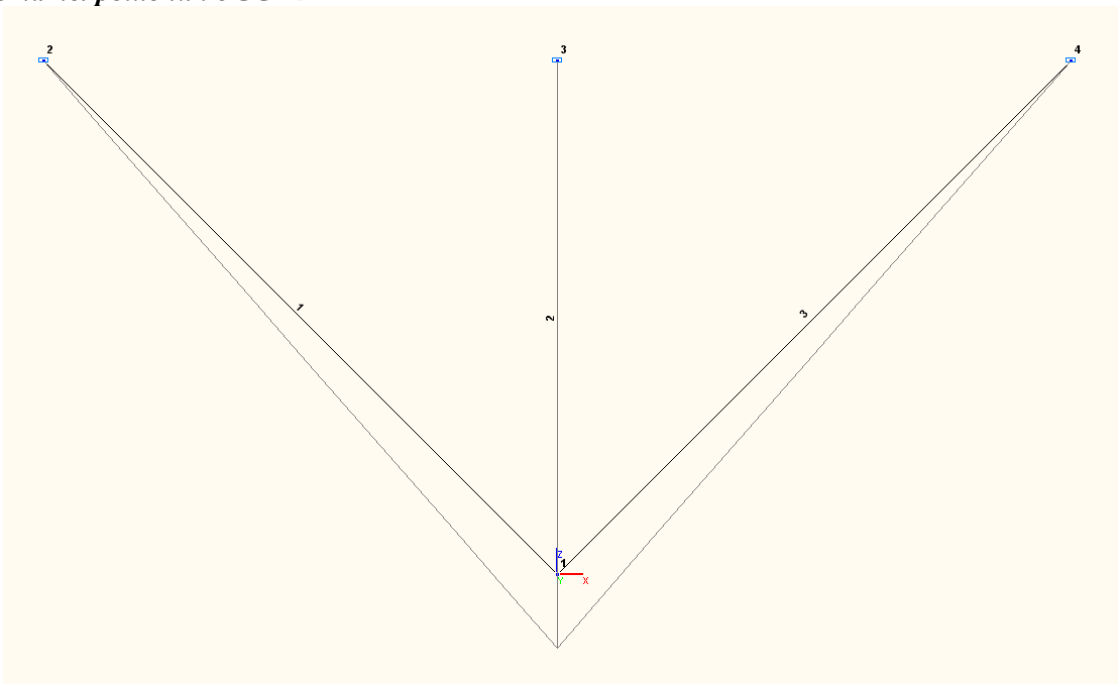
Ссылки: С.П. Тимошенко, Сопротивление материалов, том первый: Элементарная теория и задачи, Москва, Наука, 1965, стр. 34.

Исходные данные:

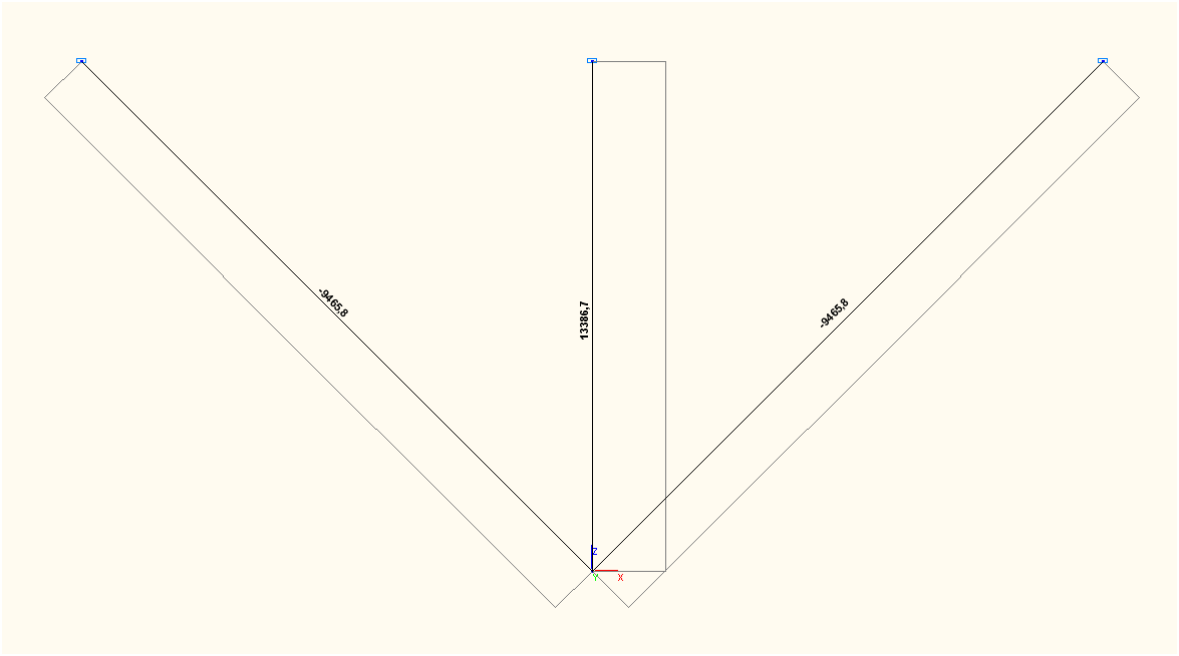
$E_s = 2.0 \cdot 10^6$ кгс/см^2	– модуль упругости стали;
$E_c = 1.0 \cdot 10^6$ кгс/см^2	– модуль упругости меди;
$\alpha_s = 1.25 \cdot 10^{-5}$ 1/ ºC	– коэффициент линейного температурного расширения стали;
$\alpha_c = 1.65 \cdot 10^{-5}$ 1/ ºC	– коэффициент линейного температурного расширения меди;
l = 100.0 см	– длина вертикального стержня;
φ = 45 º	– угол сопряжения наклонных стержней с вертикальным стержнем;
$A_s = 5.0 \cdot 5.0$ см^2	– площадь поперечного сечения вертикального стального стержня;
$A_c = 5.0 \cdot 5.0$ см^2	– площадь поперечного сечения наклонного медного стержня;
Δt = 50 ºC	– изменение температуры системы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система, 3 элемента типа 1. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей в опорных узлах по направлениям степеней свободы X, Z. Воздействие от изменения температуры системы Δt относительно температуры сборки задается равномерным вдоль продольных осей всех стержневых элементов. Количество узлов в расчетной схеме 4.

Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Эпюра продольных сил N (кгс)

Сравнение решений:

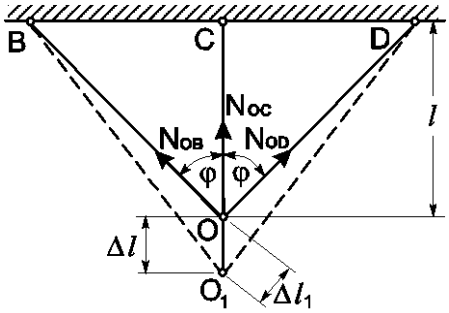
Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Продольная сила *N* (стержень OC), кгс	13386.7	13386.7	0.00
Продольная сила *N* (стержни OB и OD), кгс	-9465.8	-9465.8	0.00

Замечания: При аналитическом решении продольные усилия *N* в стержнях системы определяются по следующим формулам:

$$N_{OC} = \frac{\Delta t \cdot \left(\frac{\alpha_c}{cos^2(\varphi)} - \alpha_s \right) \cdot E_s \cdot A_s}{1 + \frac{1}{2 \cdot cos^3(\varphi)} \cdot \frac{E_s \cdot A_s}{E_c \cdot A_c}};$$

$$N_{OB} = N_{OD} = -\frac{\Delta t \cdot \left(\frac{\alpha_c}{cos^2(\varphi)} - \alpha_s \right) \cdot E_s \cdot A_s}{2 \cdot cos(\varphi) + \frac{1}{cos^2(\varphi)} \cdot \frac{E_s \cdot A_s}{E_c \cdot A_c}}.$$

Плоская шарнирно-стержневая система из элементов одинакового материала под действием изменения температуры



Цель: Определение напряженного состояния плоской шарнирно-стержневой системы из элементов одинакового материала от воздействия изменения температуры.

Имя файла с исходными данными: **T2_v11.3.spr**

Формулировка задачи: Три стержня плоской системы шарнирно сопряжены в общем узле (O) и шарнирно оперты в противоположных узлах (B, C, D). Опорные узлы расположены на одной горизонтальной прямой симметрично относительно вертикальной оси (OC), общий узел лежит на вертикальной оси. Вертикальный (OC) и наклонные (OB, OD) стержни выполнены из стали. Система подвергается воздействию от изменения температуры Δt относительно температуры сборки. Определить нормальные напряжения σ в поперечных сечениях стержней системы.

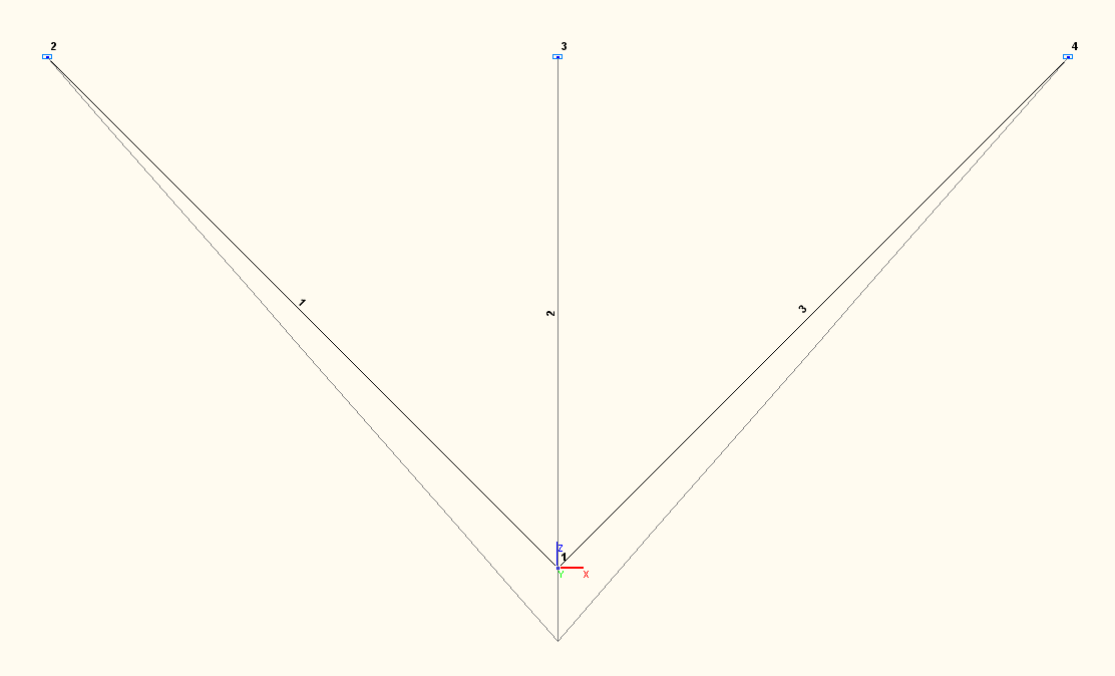
***Ссылки*:** С.П. Тимошенко, Сопротивление материалов, том первый: Элементарная теория и задачи, Москва, Наука, 1965, стр. 35.

Исходные данные:

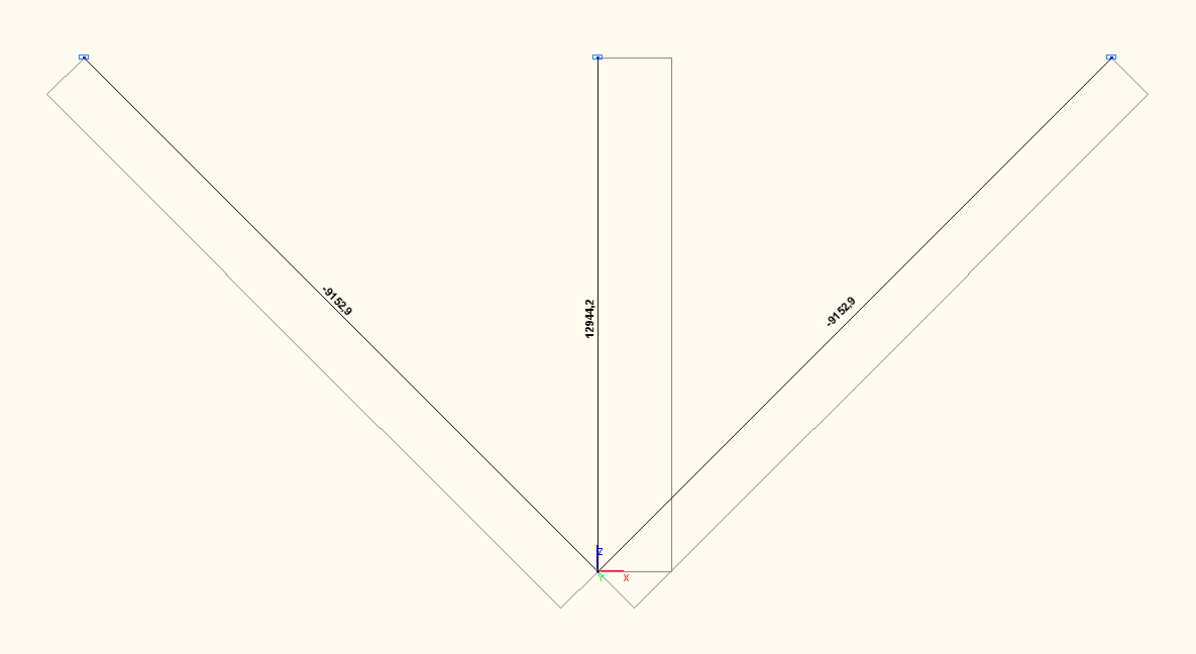
$E_s = 2.0 \cdot 10^6$ кгс/см^2	- модуль упругости стали;
$\alpha_s = 1.25 \cdot 10^{-5}$ 1/ ºC	- коэффициент линейного температурного расширения стали;
l = 100.0 см	- длина вертикального стержня;
φ = 45 º	- угол сопряжения наклонных стержней с вертикальным стержнем;
A = 5.0·5.0 см^2	- площадь поперечного сечения вертикального и наклонных стержней;
Δt = 50 ºC	- изменение температуры системы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система, 3 элемента типа 1. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей в опорных узлах по направлениям степеней свободы X, Z. Воздействие от изменения температуры системы Δt относительно температуры сборки задается равномерным вдоль продольных осей всех стержневых элементов. Количество узлов в расчетной схеме – 4.

Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Эпюра продольных сил N (кгс)

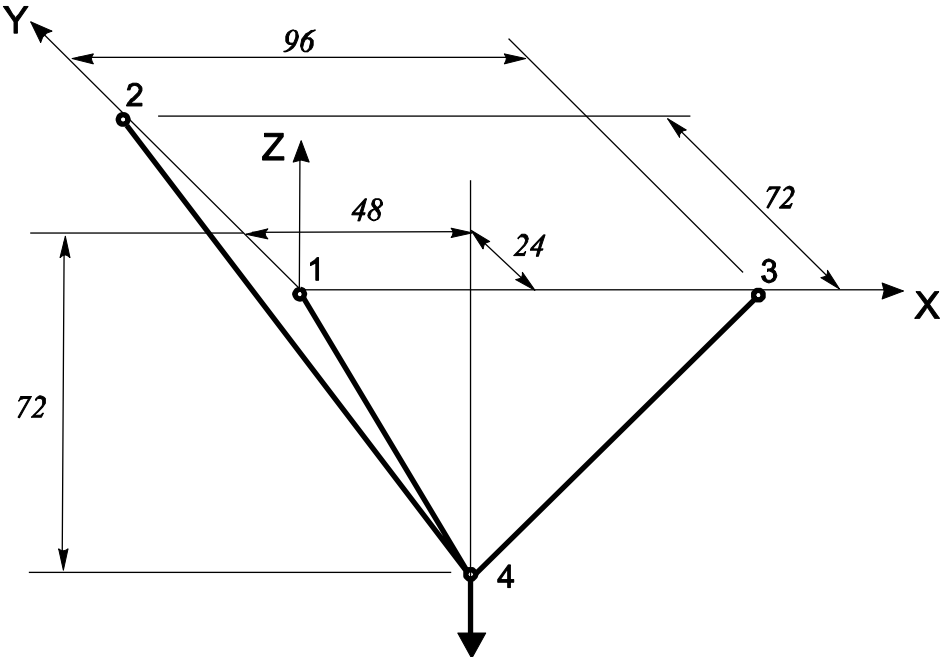
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Норм. напряжения σ (стержень OC), кгс/см^2	517.768	12944.2 / (5.0 * 5.0) = = 517.768	0.00
Норм. напряжения σ (стержни OB и OD), кгс/см^2	-366.116	-9152.9 / (5.0 * 5.0) = = -366.116	0.00

Замечания: При аналитическом решении нормальные напряжения σ в поперечных сечениях стержней системы определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{OC} = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \alpha_s \cdot E_s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)}{2 \cdot \cos^3(\varphi) + 1}; \qquad \sigma_{OB} = \sigma_{OD} = \frac{\Delta t \cdot \alpha_s \cdot E_s \cdot \sin^2(\varphi)}{2 \cdot \cos^3(\varphi) + 1}.$$

Пространственная шарнирно-стержневая система под действием сосредоточенной силы



Цель: Определение напряженного состояния в элементах пространственной шарнирно-стержневой системы от воздействия сосредоточенной силы.

Имя файла с исходными данными: **CS01_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Три стержня пространственной системы шарнирно сопряжены в общем узле (4) и шарнирно оперты в противоположных узлах (1, 2, 3). Опорные узлы расположены в одной горизонтальной плоскости, общий узел лежит вне этой плоскости и нагружен вертикальной сосредоточенной силой *P*. Определить продольные усилия *N* в каждом стержне.

Ссылки: F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., D.F. Mazurek, P.J. Cornwell, E.R. Eisenberg, Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics, New York, McGraw-Hill Co., 1962, p. 47.

Исходные данные:

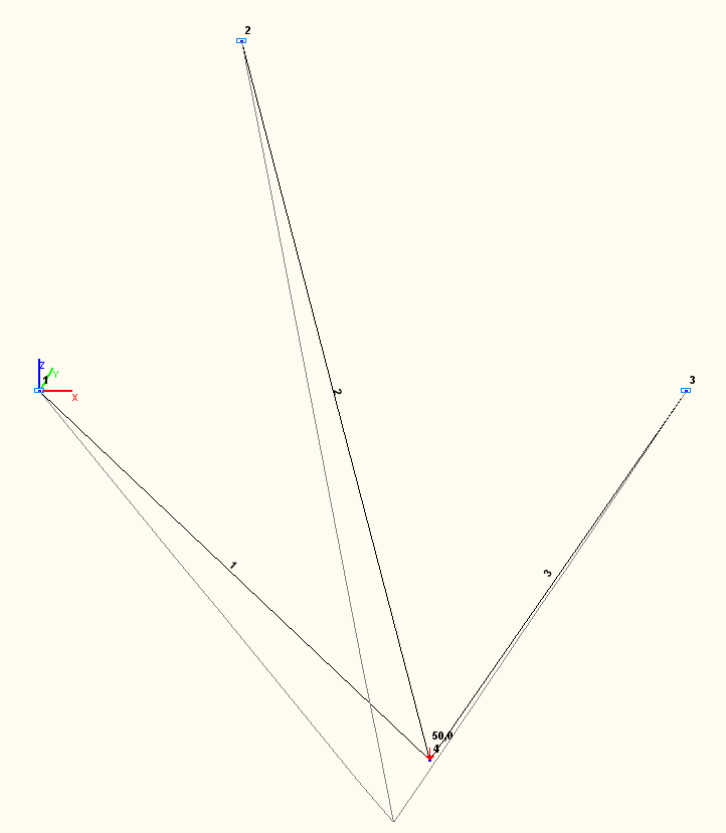
$E = 3.0 \cdot 10^7$ Па – модуль упругости,
$A = 1.0$ м^2 – площадь поперечного сечения стержней;
$P = 50$ Н – значение сосредоточенной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема - пространственная шарнирно-стержневая система, 3 стержневых элемента типа 4. Обеспечение граничных условий в опорных узлах достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Y, Z. Количество узлов в расчетной схеме – 4.

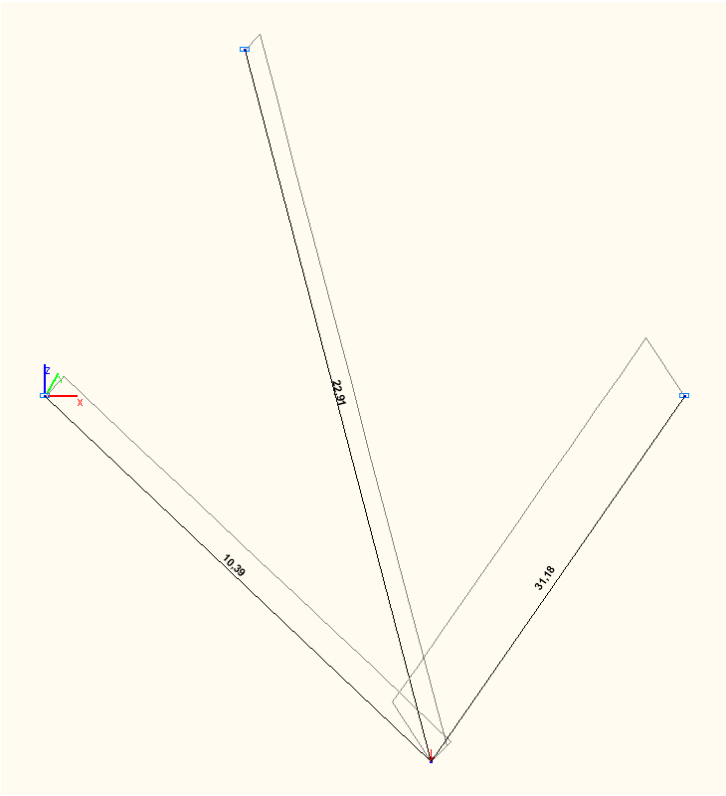
Координаты узлов:

Узел	X (м)	Y (м)	Z (м)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	72.0	0.0
3	96.0	0.0	0.0
4	48.0	24.0	-72.0

Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Эпюра продольных сил N (Н)

Сравнение решений:

Значения продольных сил *N* (Н)

Стержень (узлы)	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1 (1-4)	10.39	10.39	0.00
2 (2-4)	22.91	22.91	0.00
3 (3-4)	31.18	31.18	0.00

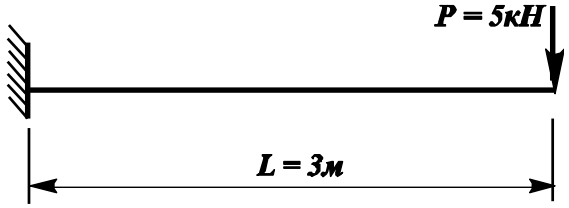
Замечания: При аналитическом решении продольные усилия *N* в элементах пространственной шарнирно-стержневой системы при вертикальной сосредоточенной нагрузке определяются по следующим формулам:

$$N_1 = -\frac{P \cdot (x_3 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_2) \cdot \sqrt{x_4^{\,2} + y_4^{\,2} + z_4^{\,2}}}{x_3 \cdot y_2 \cdot z_4};$$

$$N_2 = -\frac{P \cdot y_4 \cdot \sqrt{x_4^{\,2} + (y_2 - y_4)^2 + z_4^{\,2}}}{y_2 \cdot z_4};$$

$$N_3 = -\frac{P \cdot x_4 \cdot \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + y_4^{\,2} + z_4^{\,2}}}{x_3 \cdot z_4}.$$

Консольная балка под действием сосредоточенной нагрузки



Цель: Расчет на изгиб в силовой плоскости под сосредоточенной силой, без учета деформаций поперечного сдвига. Проверяются значения максимальных поперечного перемещения, угла поворота и изгибающего момента.

Имя файла с исходными данными: **Пример 4.1.SPR**

Формулировка задачи: Консольная балка нагружается на свободном конце сосредоточенной силой *P*. Определить максимальные значения поперечного перемещения *w*, угла поворота θ и изгибающего момента *M*.

Ссылки: Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В., Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наук. думка, 1988, стр. 263.

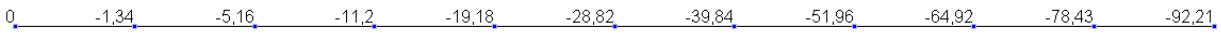
Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$L = 3$ м	- длина балки;
$I = 2.44 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения;
$P = 5$ кН	- значение сосредоточенной силы.

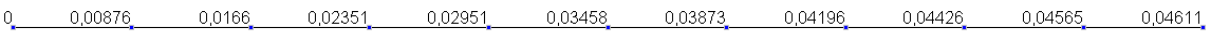
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 10 стержневых элементов типа 5, 11 узлов.

Результаты решения в SCAD:

Эпюра изгибающего момента M (кН·м)



Значения поперечных перемещений w(мм)



Значения углов поворота θ (рад)

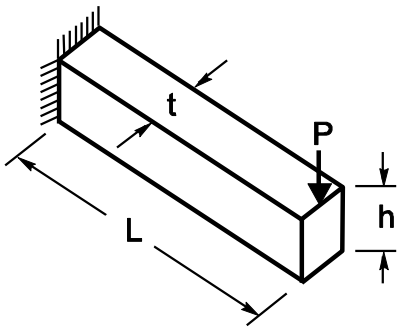
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Поперечное перемещение *w*, мм	-92.21	-92.21	0.00
Угол поворота *Θ*, рад	0.04611	0.04611	0.00
Изгибающий момент *M*, кН·м	-15.0	-15.0	0.00

Замечания: При аналитическом решении максимальные значения поперечного перемещения *w*, угла поворота θ и изгибающего момента *M* определяются по следующим формулам:

$$w = -\frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}; \qquad \theta = \frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}; \qquad M = -P \cdot L.$$

Консольная балка под действием сосредоточенной поперечной силы



Цель: Определение деформированного состояния консольной балки от воздействия сосредоточенной поперечной силы.

Файлы с исходными данными:

CS06_c_v11.3.SPR	стержневая расчетная модель
CS06_п_v11.3.SPR	плосконапряженная расчетная модель

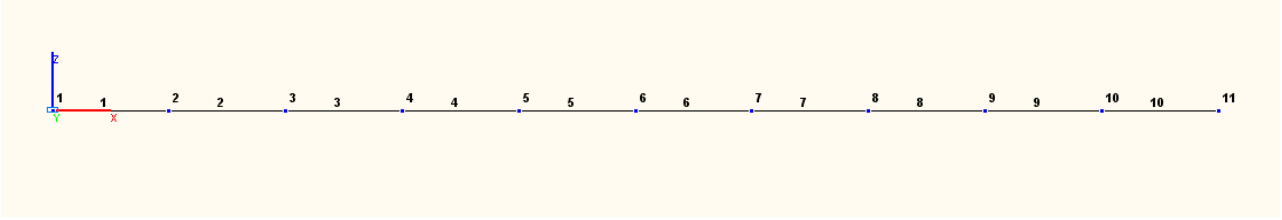
Формулировка задачи: Консольная балка прямоугольного сечения нагружается на свободном торце сосредоточенной поперечной силой *P*. Определить перемещение z свободного торца балки с учетом влияния поперечного сдвига.

Исходные данные:

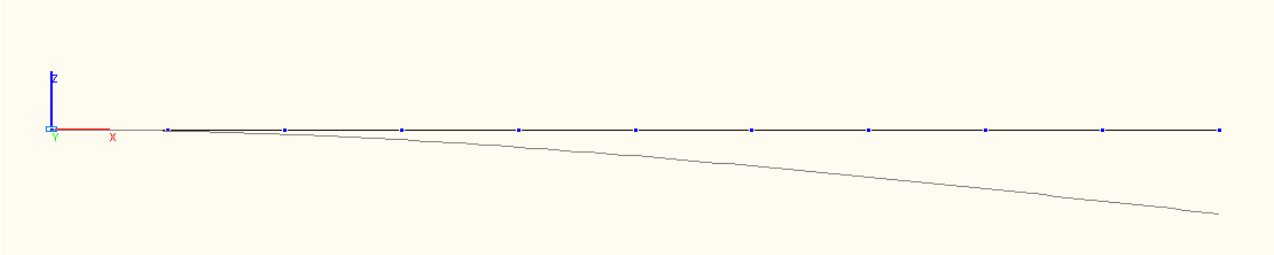
$E = 3.0 \cdot 10^7$ Па	- модуль упругости,
ν = 0.0	- коэффициент Пуассона,
L = 10.0 м	- длина балки;
t = 0.1 м	- ширина поперечного сечения балки;
h = 1.0 м	- высота поперечного сечения балки;
k = 1.2	- коэффициент сдвига;
P = 1.0 Н	- значение сосредоточенной силы

Конечно-элементная модель: Рассматриваются две расчетные модели:
Стержневая модель (С), расчетная схема – плоская рама, 10 элементов типа 10. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий на защемленном торце достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Z, UY. Количество узлов в расчетной схеме – 11.
Плосконапряженная модель (П), 10 восьмиузловых элементов типа 30. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий на защемленном торце достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Z. Количество узлов в расчетной схеме – 53.

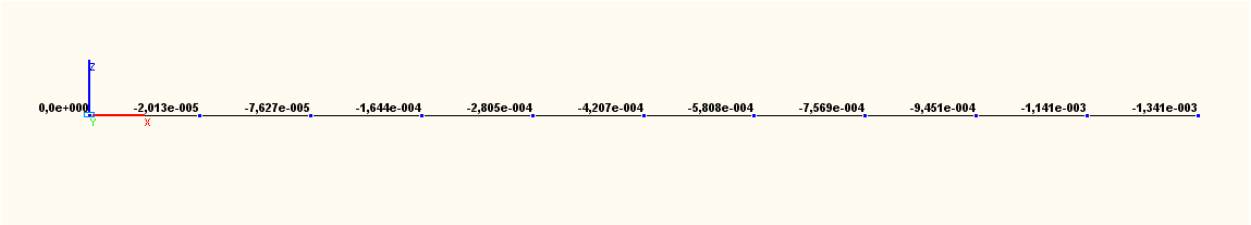
Результаты решения в SCAD



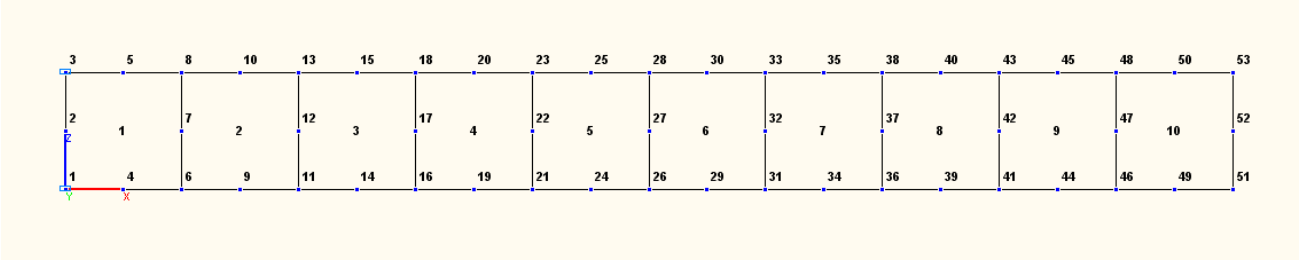
Расчетная схема. Стержневая модель



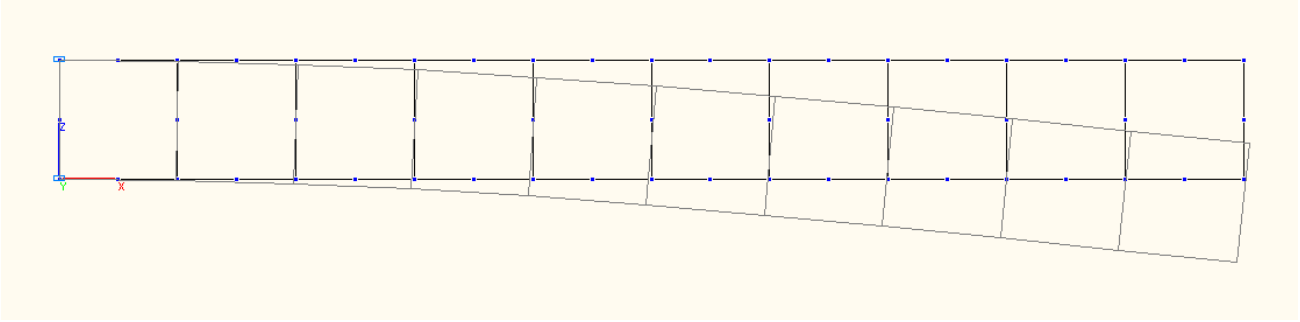
Деформированная схема. Стержневая модель



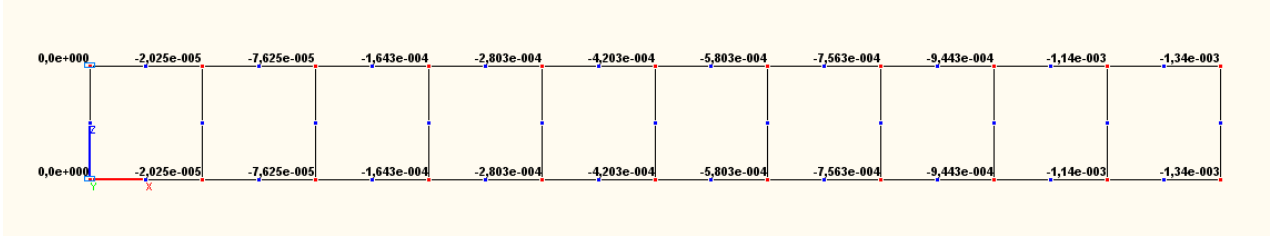
Перемещения z (м). Стержневая модель



Расчетная схема. Плосконапряженная модель



Деформированная схема. Плосконапряженная модель



Перемещения z (м). Плосконапряженная модель

Сравнение решений:

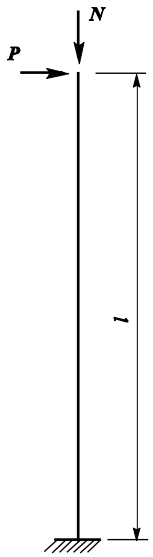
Модель	**Перемещения z, м**	**Отклонения, %**
Стержневая (С)	$-1.341 \cdot 10^{-3}$	0.00

Модель	Перемещения z, м	Отклонения, %
Плосконапряженная (П)	$-1.340\cdot10^{-3}$	0.07
Теория	$-1.341\cdot10^{-3}$	–

Замечания: При аналитическом решении перемещение z свободного торца балки с учетом влияния поперечного сдвига от действия сосредоточенной поперечной силы определяется по следующей формуле:

$$z = \frac{4 \cdot P \cdot L^3}{E \cdot t \cdot h^3} \cdot \left(1 + \frac{k \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{2 \cdot L^2} \right).$$

Вертикальный консольный стержень квадратного поперечного сечения, нагруженный продольной и поперечной сосредоточенными нагрузками на свободном конце



Цель: Проверка соответствия результатов для моделей различных размерностей.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Задача 4.9_с.SPR	Стержневая расчетная модель
Задача 4.9_п.SPR	Оболочечная расчетная модель
Задача 4.9_о.SPR	Объемная расчетная модель

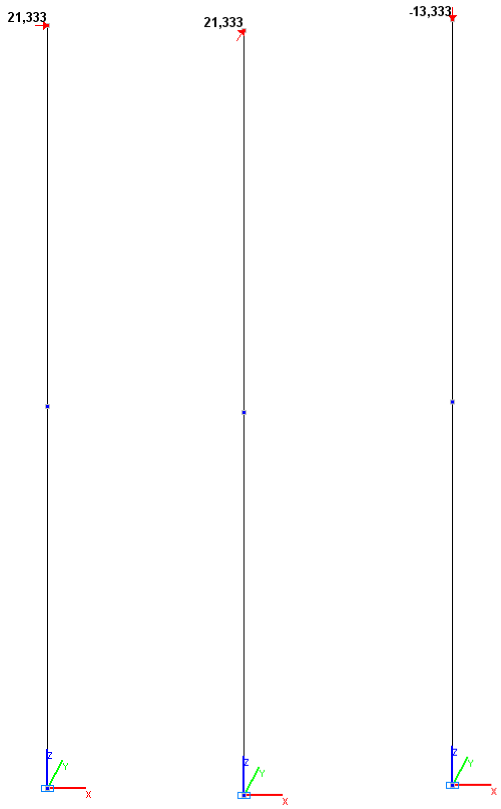
Формулировка задачи: Определить перемещения свободного конца x, y, z и максимальные напряжения в защемленном сечении σ_z.

Исходные данные:

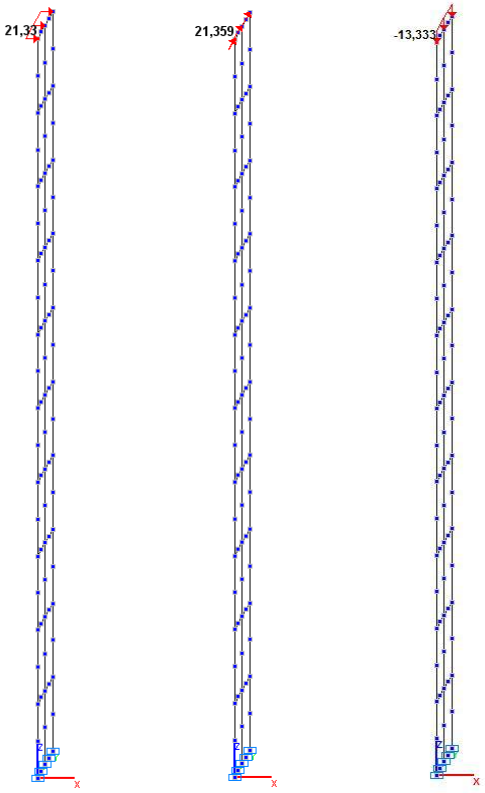
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона;
$b = h = 0.5$ м - размеры поперечного сечения консольного стержня;
$l = 10$ м - высота консольного стержня;
$P_x = 10$ кН - значение сосредоточенной силы, действующей вдоль оси X общей системы координат (загружение 1);
$P_y = 10$ кН - значение сосредоточенной силы, действующей вдоль оси Y общей системы координат (загружение 2);
N = 10000кН - значение сосредоточенной силы, действующей вдоль оси Z общей системы координат (загружение 3).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:
Стержневая модель (С), 2 элемента типа 5, 3 узла;
Оболочечная модель (П), 20 элементов, типа 50, 85 узлов;
Объемная модель (О), 10 элементов, типа 37, 128 узлов.

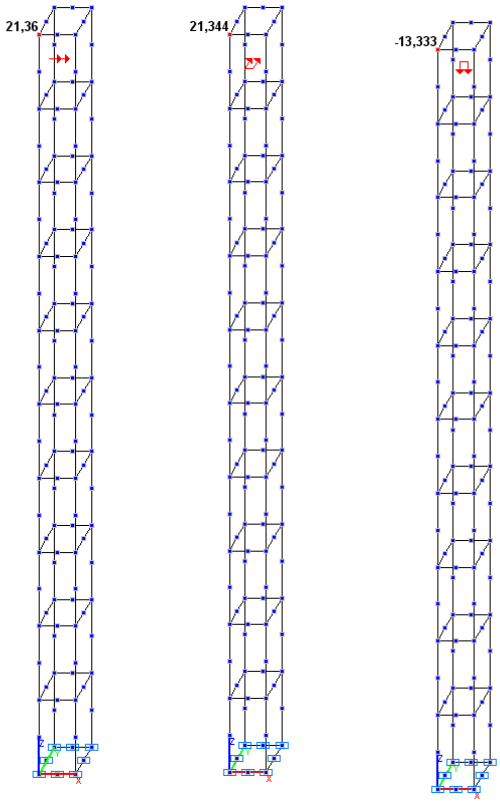
Результаты решения в SCAD



Значения перемещения x, y , z в стержневой модели (мм)



Значения перемещения x, y , z в оболочечной модели (мм)



Значения перемещения x, y , z в объемной модели (мм)

Сравнение решений:

Модель	**Загружение 1**			
	Перемещения x (мм)	**Отклонения, %**	**Напряжения σ_z (кПа)**	**Отклонения, %**
Стержневая (С)	21.333	0.00	4800	0.00
Оболочечная (П)	21.330	0.01	4819	0.40
Объемная (О)	21.336	0.01	4738	1.29
Теория	21.333	–	4800	–

Модель	**Загружение 2**			
	Перемещения y (мм)	**Отклонения, %**	**Напряжения σ_z (кПа)**	**Отклонения, %**
Стержневая (С)	21.333	0.00	4800	0.00
Оболочечная (П)	21.359	0.12	4720	1.67
Объемная (О)	21.345	0.06	4743	1.19
Теория	21.333	–	4800	–

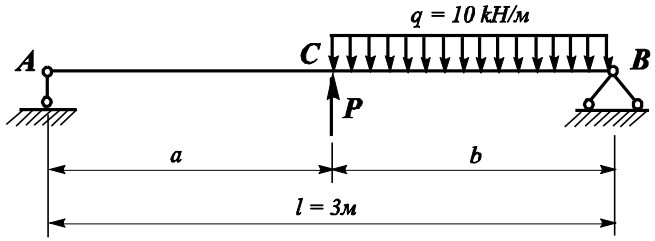
Модель	**Загружение 3**			
	Перемещения z (мм)	**Отклонения, %**	**Напряжения σ_z (кПа)**	**Отклонения, %**
Стержневая (С)	-13.333	0.00	-40000	0.00
Оболочечная (П)	-13.333	0.00	-40000	0.00
Объемная (О)	-13.333	0.00	-40000	0.00
Теория	-13.333	–	-40000	–

Замечания: При аналитическом решении по недеформированным схемам перемещения свободного конца x, y, z и максимальные напряжения в защемленном сечении σ_z определяются по формулам:

$$x = \frac{4 \cdot Px \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3}; \qquad y = \frac{4 \cdot Py \cdot l^3}{E \cdot h \cdot b^3}; \qquad z = \frac{N \cdot l}{E \cdot b \cdot h};$$

$$\sigma_z(Px) = \frac{6 \cdot Px \cdot l}{b \cdot h^2}; \qquad \sigma_z(Py) = \frac{6 \cdot Py \cdot l}{h \cdot b^2}; \qquad \sigma_z(N) = \frac{N}{b \cdot h}.$$

Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенной силой и равномерно-распределенным давлением



Цель: Комбинированное нагружение (поперечное давление, сосредоточенная сила) в одной плоскости без учета деформаций поперечного сдвига. Проверяются перемещения и усилия.

***Имя файла с исходными данными*: 4.3.SPR**

Формулировка задачи: Шарнирно опертая балка нагружается сосредоточенной силой P и равномерно распределенным давлением q. Определяются перемещения w, углы поворота θ, поперечные силы Q и изгибающие моменты M.

Ссылки: Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наук. думка, 1988.

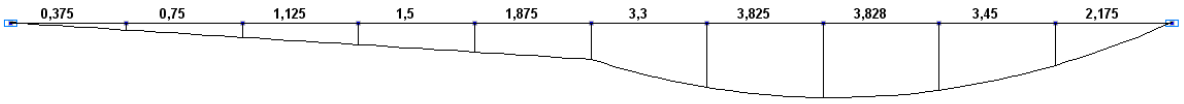
Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$l = 3$ м	- длина балки;
$F = 14.2 \cdot 10^{-4}$ м^2	- площадь поперечного сечения;
$I = 2.44 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции;
$P = -5$ кН	- значение сосредоточенной силы;
$q = 10$ кН/м	- значение давления;
$a = b = 1.5$ м	- геометрический размер.

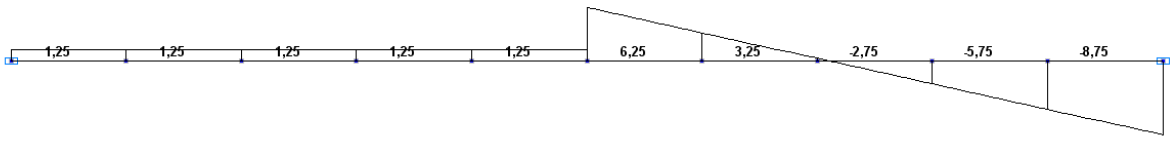
Конечно-элементная модель:

Расчетная схема – плоская рама, 10 стержневых элементов, 11 узлов.

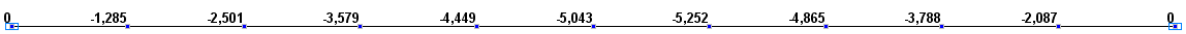
Результаты решения в SCAD



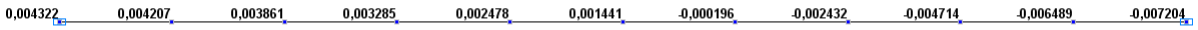
*Эпюра изгибающего момента M (кН*м)*



Эпюра поперечной силы Q (кН)



Значение поперечных перемещений w (мм)



Значение углов поворота θ (рад)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Прогиб в точке С, мм	-5.043	-5.043	0.00
Угол поворота в точке В, рад	$-7.204\cdot10^{-3}$	$-7.204\cdot10^{-3}$	0.00
Изгибающий момент в точке С, кН·м	1.875	1.875	0.00
Поперечная сила в точке А, кН	1.25	1.25	0.00
Поперечная сила в точке В, кН	-8.75	-8.75	0.00

Замечания: При аналитическом решении прогиб в точке С может быть вычислен по следующей формуле («Справочник по сопротивлению материалов» стр. 295, 297):

$$w_C = \frac{P\cdot a^2\cdot b^2}{3\cdot E\cdot I\cdot(a+b)} + \frac{q\cdot a\cdot b^3\cdot(4\cdot a+b)}{24\cdot E\cdot I\cdot(a+b)}.$$

Угол поворота в точке В вычисляется по следующей формуле («Справочник по сопротивлению материалов» стр. 295, 297):

$$\theta_B = \frac{P\cdot b\cdot(2\cdot a^2+a\cdot b)}{6\cdot E\cdot I\cdot(a+b)} - \frac{q\cdot b^2\cdot(4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2)}{24\cdot E\cdot I\cdot(a+b)}.$$

Изгибающий момент в точке С вычисляется по следующей формуле:

$$M_C = \frac{P\cdot a\cdot b}{a+b} + \frac{q\cdot a\cdot b^2}{2\cdot(a+b)}.$$

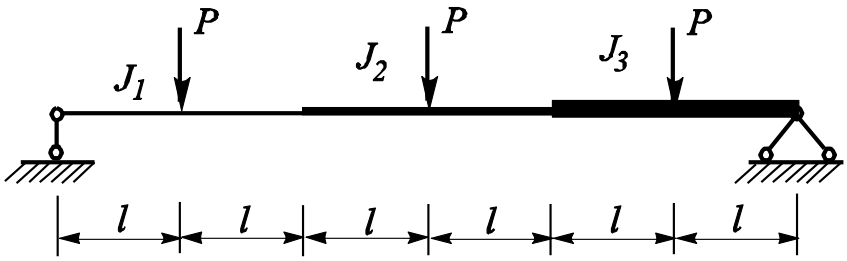
Поперечная сила в точке А вычисляется по следующей формуле:

$$Q_A = \frac{P\cdot b}{a+b} + \frac{q\cdot b^2}{2\cdot(a+b)}.$$

Поперечная сила в точке В вычисляется по следующей формуле:

$$Q_B = -\frac{P\cdot a}{a+b} - \frac{q\cdot(2\cdot a+b)\cdot b}{2\cdot(a+b)}.$$

Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами



Цель: Деформированное состояние трехступенчатой шарнирно опертой балки нагруженной сосредоточенными силами без учета деформаций поперечного сдвига. Проверяются поперечные перемещения и углы поворота.
Имя файла с исходными данными: **4.5.SPR**

Формулировка задачи: Трехступенчатая шарнирно опертая балка нагружается тремя сосредоточенными силами *P*. Определить углы поворота опорных сечений и поперечные перемещения в местах приложения сил.

Ссылки: Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наук. думка, 1988.

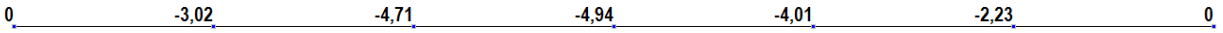
Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$l = 1$ м	- длина половины пролета балки каждого сечения;
$F = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2	- площадь поперечного сечения;
$I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции;
P = 1 кН	- значение нагрузки.

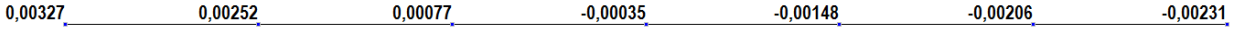
$I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 2 : 3$
$F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 6 стержневых элементов типа 5, 7 узлов.

Результаты решения в SCAD



Значения поперечных перемещений w (мм)



Значения углов поворота θ (рад)

Сравнение решений:

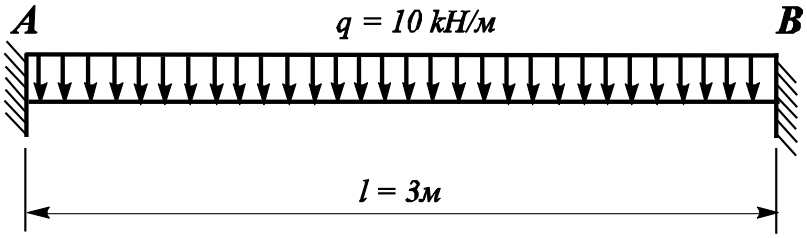
Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Поперечные перемещения, мм			
w (l)	-3.02	-3.02	0.00
w (3l)	-4.94	-4.94	0.00
w (5l)	-2.23	-2.23	0.00
Углы поворота, рад			
θ (0)	0.00327	0.00327	0.00
θ (6l)	-0.00231	-0.00231	0.00

Замечания: При аналитическом решении углы поворота опорных сечений и прогибы в местах приложения сосредоточенных сил определяются по формулам:

$$w(l) = -\frac{653 \cdot P \cdot l^3}{216 \cdot E \cdot I_1}; \qquad w(3 \cdot l) = -\frac{89 \cdot P \cdot l^3}{18 \cdot E \cdot I_1}; \qquad w(5 \cdot l) = -\frac{481 \cdot P \cdot l^3}{216 \cdot E \cdot I_1};$$

$$\theta(0) = \frac{707 \cdot P \cdot l^2}{216 \cdot E \cdot I_1}; \qquad \theta(6 \cdot l) = -\frac{499 \cdot P \cdot l^2}{216 \cdot E \cdot I_1}.$$

Защемленная по концам балка, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой



Цель: Нагружение защемленной по концам балки в одной плоскости без учета деформаций поперечного сдвига. Проверяются значения максимальных поперечного перемещения и изгибающих моментов.

Имя файла с исходными данными: **4.4.SPR**

Формулировка задачи: Защемленная по концам балка нагружается равномерно распределенной нагрузкой *q*. Определить максимальные поперечное перемещение *w* и изгибающие моменты *M*.

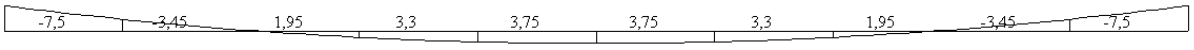
Ссылки: Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наук. думка, 1988.

Исходные данные:

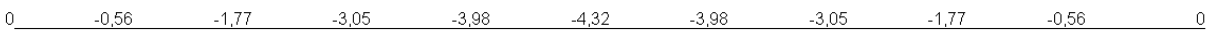
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$l = 3$ м	- длина балки;
$F = 14.2 \cdot 10^{-4}$ м^2	- площадь поперечного сечения;
$I = 2.44 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции;
q = 10 кН/м	- значение нагрузки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 10 стержневых элементов типа 2, 11 узлов.

Результаты решения в SCAD



*Эпюра изгибающего момента M (кН*м)*



Значение поперечных перемещений w (мм).

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Поперечное перемещение в середине пролета балки, мм	-4.32	-4.32	0.00
Изгибающий момент в середине пролета балки, кН·м	3.75	3.75	0.00
Изгибающий момент на опоре балки, кН·м	-7.5	-7.5	0.00

Замечания: При аналитическом решении прогиб в центре балки может быть вычислен по следующей формуле («Справочник по сопротивлению материалов» стр. 352):

$$w = -\frac{q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I};$$

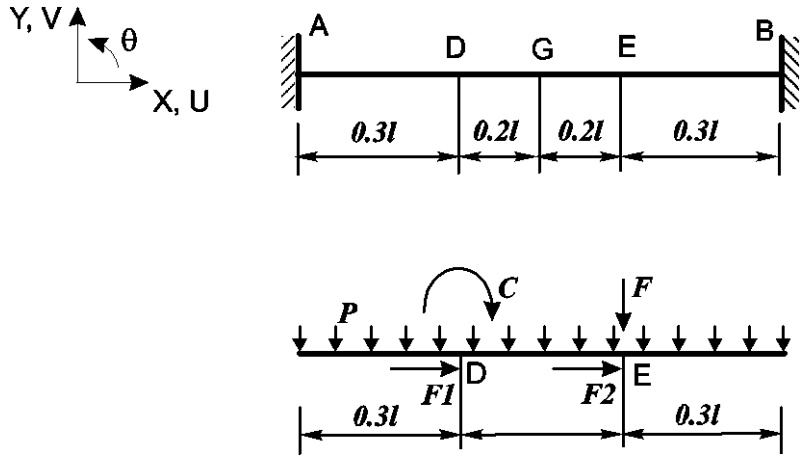
Изгибающие моменты в заделке вычисляются по следующей формуле:

$$M = -\frac{q \cdot l^2}{12};$$

Изгибающий момент в центре балки:

$$M = \frac{q \cdot l^2}{24}.$$

Балка, защемленная с двух концов, под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных продольных и поперечных сил и изгибающего момента



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния балки, защемленной с двух концов, от воздействия равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных продольных и поперечных сил и изгибающего момента.

Имя файла с исходными данными: **SSLL01_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Балка, защемленная с двух концов, нагружается равномерно распределенной нагрузкой *P* на всей длине пролета *l*, однонаправленными сосредоточенными продольными силами *F1* и *F2*, расположенными на расстоянии 0.3*l* от левого и правого конца соответственно, сосредоточенной поперечной силой F, расположенной на расстоянии 0.3*l* от правого конца и сосредоточенным изгибающим моментом C, расположенным на расстоянии 0.3*l* от левого конца. Определить вертикальное перемещение Z, продольную силу *N* и изгибающий момент *M* в середине пролета балки (точка G), а также горизонтальную реакцию на левом конце балки *H* (точка A).

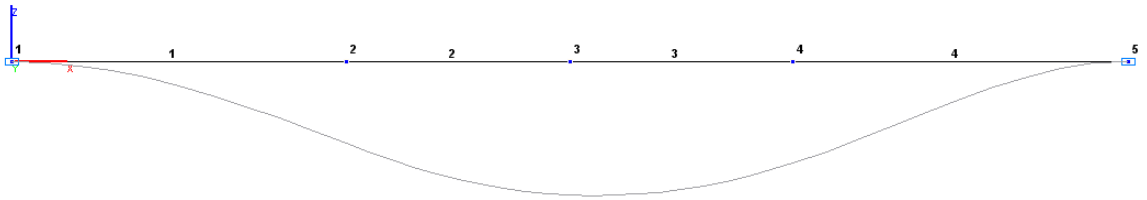
Ссылки: S. Timoshenko, Resistance des materiaux, t.1, Paris, Eyrolles, 1976, p. 26. M. Courtand et P. Lebelle, Formulaire du beton arme, t.2, Paris, Eyrolles, 1976, p. 219.

Исходные данные:

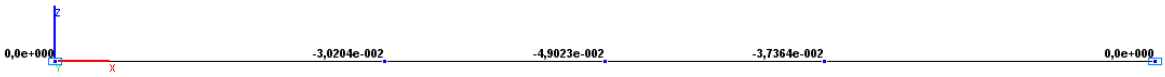
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$l = 1.0$ м	- длина балки;
$J = 1.7 \cdot 10^{-8}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения;
$P = 24000$ Н/м	- значение равномерно распределенной нагрузки;
$F1 = 30000$ Н	- значение сосредоточенной продольной силы;
$F2 = 10000$ Н	- значение сосредоточенной продольной силы;
$F = 20000$ Н	- значение сосредоточенной поперечной силы;
$C = 24000$ Н·м	- значение сосредоточенного изгибающего момента.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 4 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий на защемленных концах достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Y, Z, UX, UY, UZ. Количество узлов в расчетной схеме – 5.

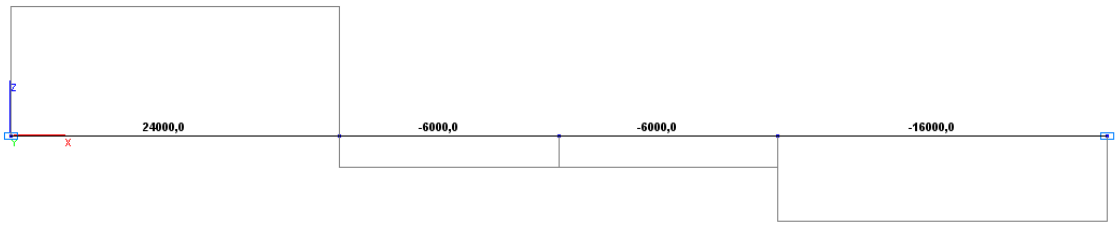
Результаты решения в SCAD



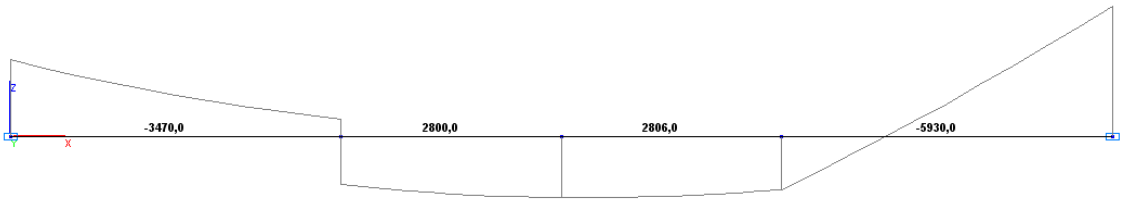
Расчетная и деформированная схемы



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Эпюра продольных сил N (Н)

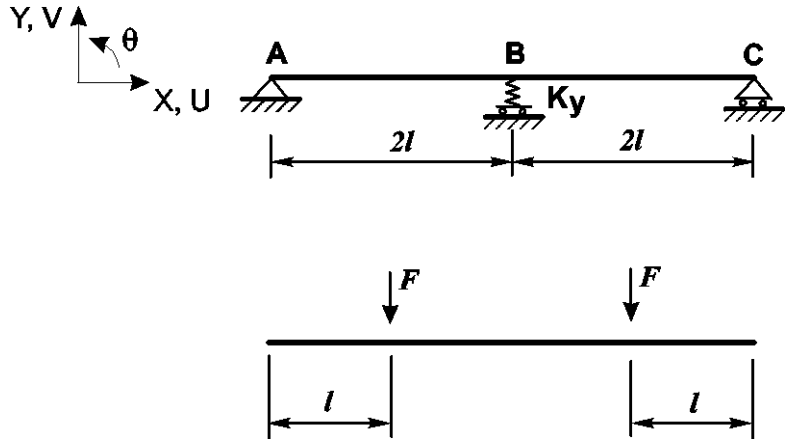


*Эпюра изгибающих моментов М (кН*м)*

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Вертикальное перемещение Z (точка G), м	$-4.9023\cdot10^{-2}$	$-4.9000\cdot10^{-2}$	0.05
Продольная сила *N* (точка G), Н	-6000.0	-6000.0	0.00
Изгибающий момент *M* (точка G), Н·м	2800.0	2800.0	0.00
Горизонтальная реакция *H* (точка A), Н	24000.0	24000.0	0.00

Двухпролетная свободно опертая балка с промежуточной податливой опорой под действием сосредоточенных поперечных сил, расположенных в середине пролетов



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния двухпролетной свободно опертой балки с промежуточной податливой опорой под действием сосредоточенных поперечных сил, расположенных в середине пролетов.

Имя файла с исходными данными: **SSLL03_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Двухпролетная свободно опертая балка с промежуточной податливой опорой нагружается сосредоточенными поперечными силами *F*, расположенными в середине пролетов (на расстоянии *l* от крайних опор). Определить вертикальное перемещение Z и вертикальную реакцию *N* промежуточной податливой опоры, а также изгибающий момент *M* в балке над промежуточной податливой опорой (точка B).

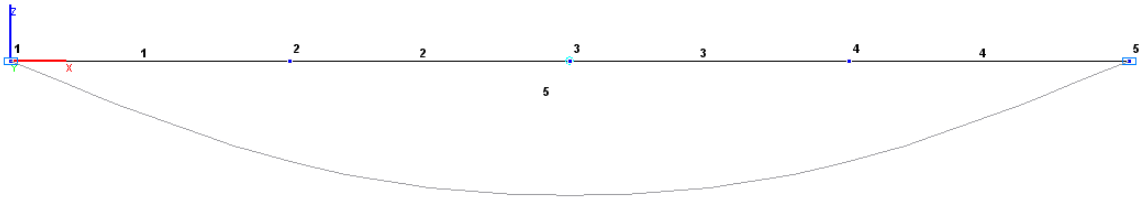
Ссылки: C. Massonnet, Application des ordinateurs au calcul des structures, Paris, Eyrolles, 1968, p. 233.

Исходные данные:

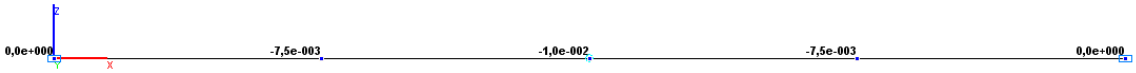
$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$2 \cdot l = 6.0$ м	- длина пролета балки;
$A = 0.4762 \cdot 10^{-3}$ м^2	- площадь поперечного сечения;
$I = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения;
$k = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м	- жесткость промежуточной податливой опоры
$F = 4.2 \cdot 10^{4}$ Н	- значение сосредоточенных поперечных сил.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 4 стержневых элемента типа 2. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Z – для левой опоры; Z – для правой опоры и введением связи конечной жесткости по направлению степени свободы Z – для промежуточной опоры (тип элемента 51). Количество узлов в расчетной схеме – 5.

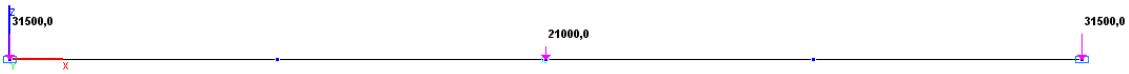
Результаты решения в SCAD



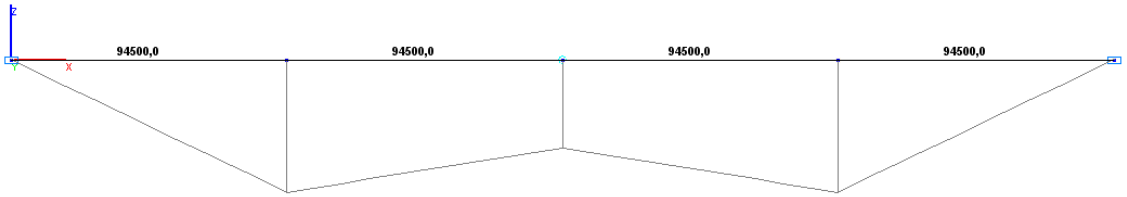
Расчетная и деформированная схемы



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Значения вертикальных опорных реакций N (Н)



*Эпюра изгибающих моментов М (кН*м)*

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Вертикальное перемещение Z (точка В), м	$-1.0000 \cdot 10^{-2}$	$-1.0000 \cdot 10^{-2}$	0.00
Вертикальная реакция *Н* (точка В), Н	21000.0	21000.0	0.00
Изгибающий момент *М* (точка В), Н·м	63000.0	63000.0	0.00

Балка на упругом горизонтальном основании под действием сосредоточенных вертикальных сил

Цель: Определение напряженно-деформированного состояния балки на упругом горизонтальном основании от воздействия сосредоточенных вертикальных сил.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
SSLL15_var_1_v11.3.SPR	Расчетная схема – стержневые элементы на упругом основании
SSLL15_var_2_v11.3.SPR	Расчетная схема – стержневые элементы на упругих опорах в виде элементов связей конечной жесткости типа 51

Формулировка задачи: Балка, расположенная на упругом горизонтальном основании постоянной по длине жесткости k, находится под воздействием трех сосредоточенных вертикальных сил одинаковой величины F, приложенных по краям (точки A и B) и в середине пролета (точка C). Определить вертикальные перемещения Z в середине пролета балки (точка C) и по ее краям (точки A и B), углы поворота UY краев балки, а также изгибающий момент *M* в середине пролета балки.

Ссылки: M. Courtand et P. Lebelle, Formulaire du beton arme, t.2, Paris, Eyrolles,1976, p. 382.

Исходные данные:

$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости;
$l = 0.5 \cdot \pi \cdot (10.0)^{0.5} = 4.967294133$ м - длина балки;
$b = 1.0$ м - ширина основания балки;
$I_y = 1.0 \cdot 10^{-4}$ м^4 - момент инерции поперечного сечения балки;
$k_z = 8.4 \cdot 10^5$ Н/м^3 - коэффициент упругого основания балки;
$F = 1.0 \cdot 10^4$ Н - значение сосредоточенной вертикальной силы.

Конечно-элементная модель: Рассматривается два варианта расчетной схемы.

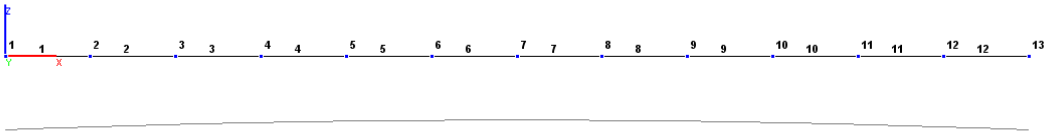
Вариант 1:

Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 12 стержневых элементов типа 3 на упругом основании с направлением по оси Z1 местной системы координат. Количество узлов в расчетной схеме – 13.

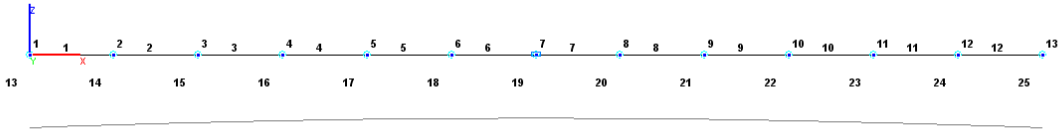
Вариант 2:

Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 12 стержневых элементов типа 3 на упругих опорах в виде 13 элементов связей конечной жесткости типа 51 с направлением по оси Z общей системы координат. Жесткость промежуточных упругих опор составляет: $k_z \cdot b \cdot l/12 = 347711$ Н/м, жесткость крайних упругих опор составляет: $0.5 \cdot k_z \cdot b \cdot l/12 = 173855$ Н/м. С целью предотвращения геометрической изменяемости системы по оси симметрии балки устанавливается связь по направлению степени свободы UX и вводится минимальная жесткость балки на кручение $GI_x = 1.0$ Н·м^2. Количество узлов в расчетной схеме – 13;

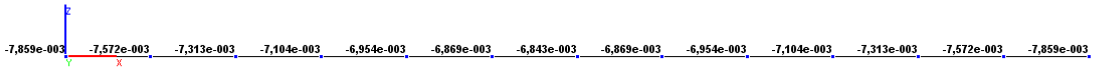
Результаты решения в SCAD



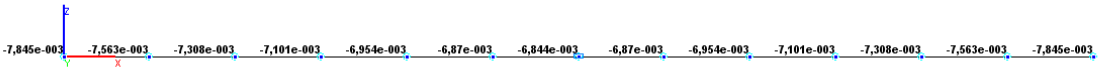
Расчетная и деформированная схемы. Вариант 1



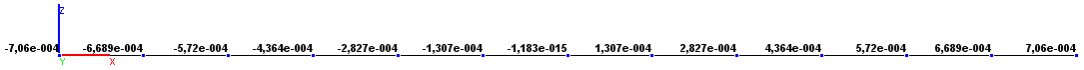
Расчетная и деформированная схемы. Вариант 2



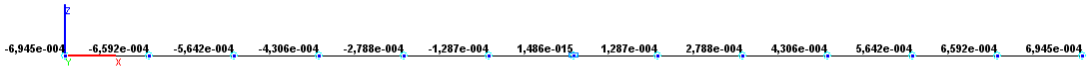
Значения вертикальных перемещений Z (м) для расчетной схемы по варианту 1



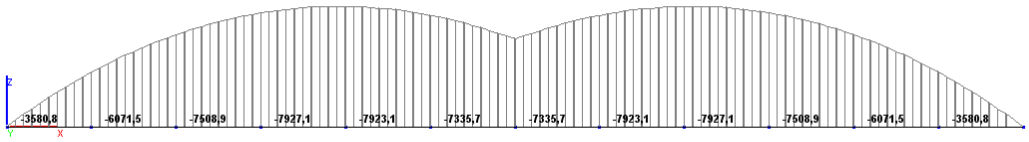
Значения вертикальных перемещений Z (м) для расчетной схемы по варианту 2



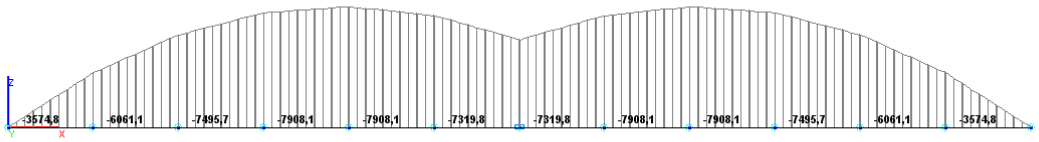
Значения углов поворота UY (рад) для расчетной схемы по варианту 1



Значения углов поворота UY (рад) для расчетной схемы по варианту 2



Значения изгибающих моментов M (Н·м) для расчетной схемы по варианту 1

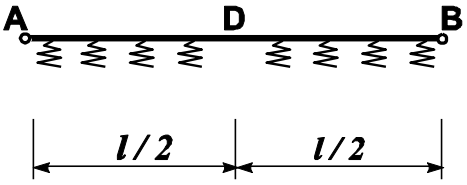


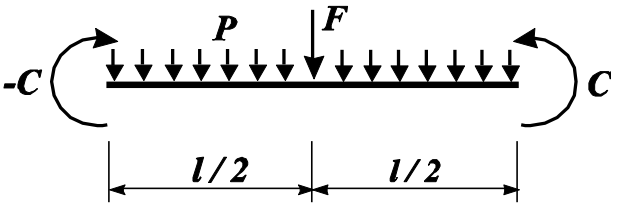
Значения изгибающих моментов M (Н·м) для расчетной схемы по варианту 2

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD PC по варианту 1**	**Отклонения, %**	**SCAD PC по варианту 2**	**Отклонения, %**
Вертикальное перемещение Z_C, м	$-6.844\cdot10^{-3}$	$-6.843\cdot10^{-3}$	0.01	$-6.844\cdot10^{-3}$	0.00
Вертикальное перемещение Z_A, м	$-7.854\cdot10^{-3}$	$-7.859\cdot10^{-3}$	0.06	$-7.845\cdot10^{-3}$	0.11
Угол поворота UY_A, рад	$-7.060\cdot10^{-4}$	$-7.060\cdot10^{-4}$	0.00	$-6.945\cdot10^{-4}$	1.63
Изгибающий момент M_C, Н·м	-5759.0	-5758.8	0.00	-5742.6	0.28

Балка, лежащая на упругом горизонтальном основании свободно опертая по краям под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальной силы и изгибающего момента





Цель: Определение напряженно-деформированного состояния балки, лежащей на упругом горизонтальном основании свободно опертой по краям от воздействия вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальной силы и изгибающего момента.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
SSLL16_var_1_v11.3.SPR	Расчетная схема – стержневые элементы на упругом основании
SSLL16_var_2_v11.3.SPR	Расчетная схема – стержневые элементы на упругих опорах в виде элементов связей конечной жесткости типа 51

Формулировка задачи: Балка, расположенная на упругом горизонтальном основании постоянной по длине жесткости k и свободно опертая по краям, находится под воздействием вертикальной равномерно распределенной нагрузки P, сосредоточенной вертикальной силы F, приложенной в середине пролета (точка D) и сосредоточенных изгибающих моментов –C и C, приложенных по краям (точки A и B). Определить вертикальное перемещение Z в середине пролета балки (точка D), углы поворота UY краев балки (точки A и B), а также изгибающий момент *M* в середине пролета балки и поперечную силу *Q* на краю балки.

Ссылки: M. Courtand et P. Lebelle, Formulaire du beton arme, t.2, Paris, Eyrolles,1976, p. 385.

Исходные данные:

$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости;
$l = 0.5 \cdot \pi \cdot (10.0)^{0.5} = 4.967294133$ м	- длина балки;
b = 1.0 м	- ширина основания балки;
$I_y = 1.0 \cdot 10^{-4}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения балки;
$k_z = 8.4 \cdot 10^5$ Н/м^3	- коэффициент упругого основания балки;
$P = 5.0 \cdot 10^3$ Н/м	- значение вертикальной равномерно распределенной нагрузки;
$F = 1.0 \cdot 10^4$ Н	- значение сосредоточенной вертикальной силы;
$C = 1.5 \cdot 10^4$ Н·м	- значение сосредоточенного изгибающего момента.

Конечно-элементная модель: Рассматривается два варианта расчетной схемы.

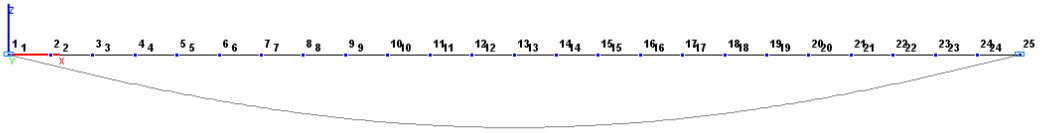
Вариант 1:

Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 24 стержневых элемента типа 3 на упругом основании с направлением по оси Z1 местной системы координат. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z для шарнирно-подвижных опорных узлов. Количество узлов в расчетной схеме – 25.

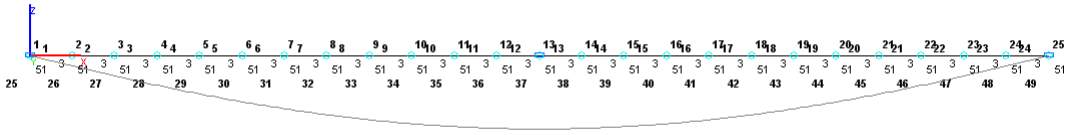
Вариант 2:

Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 24 стержневых элемента типа 3 на упругих опорах в виде 25 элементов связей конечной жесткости типа 51 с направлением по оси Z общей системы координат. Жесткость промежуточных упругих опор составляет: $k_{in} = k_z \cdot b \cdot l/24 = 173855$ Н/м, жесткость крайних упругих опор составляет: $k_{in} = 0.5 \cdot k_z \cdot b \cdot l/12 = 86928$ Н/м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z для шарнирно-подвижных опорных узлов. С целью предотвращения геометрической изменяемости системы по оси симметрии балки устанавливается связь по направлению степени свободы UX и вводится минимальная жесткость балки на кручение $GI_x = 1.0$ Н·м^2. Количество узлов в расчетной схеме – 25;

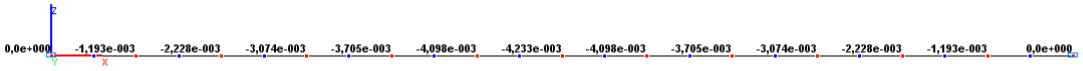
Результаты решения в SCAD



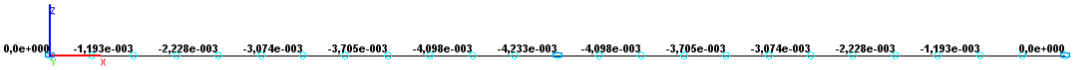
Расчетная и деформированная схемы. Вариант 1



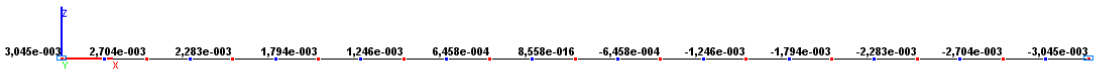
Значения Расчетная и деформированная схемы. Вариант 2



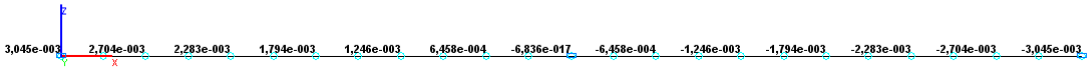
Значения вертикальных перемещений Z (м) для расчетной схемы по варианту 1



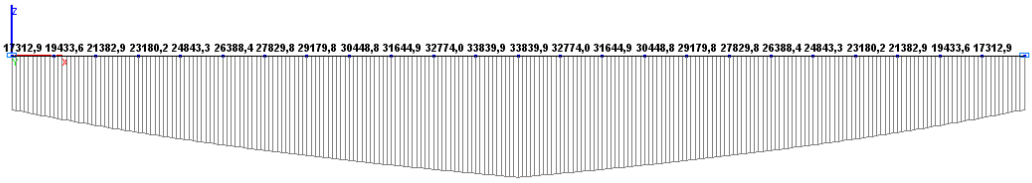
Значения вертикальных перемещений Z (м) для расчетной схемы по варианту 2



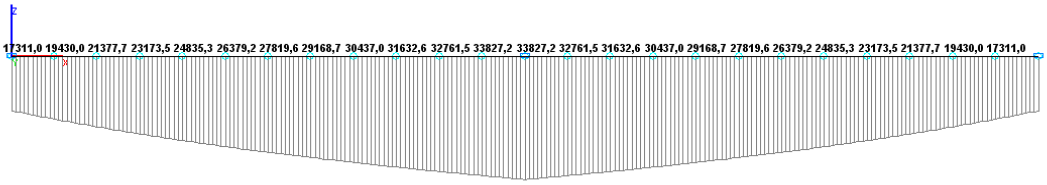
Значения углов поворота UY (рад) для расчетной схемы по варианту 1



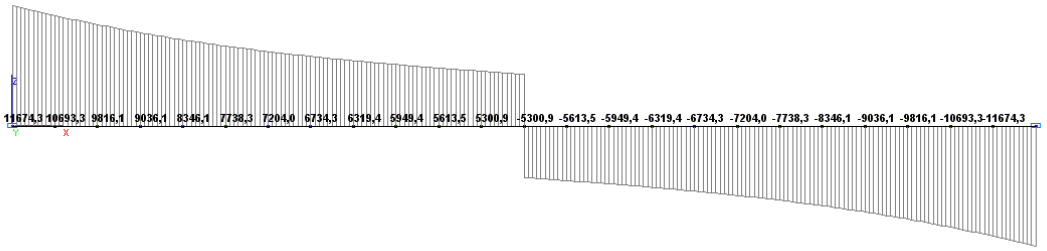
Значения углов поворота UY (рад) для расчетной схемы по варианту 2



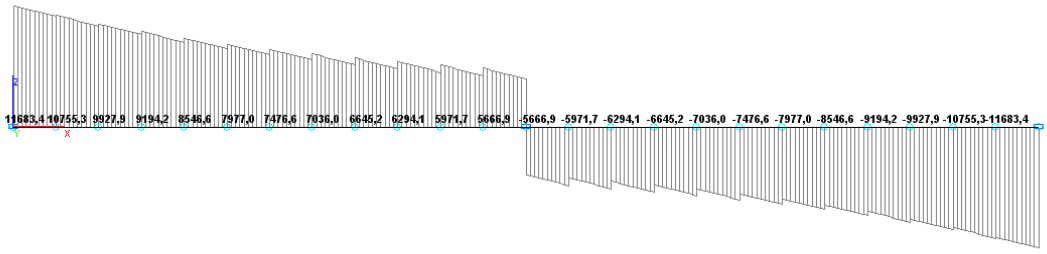
Значения изгибающих моментов M (Н·м) для расчетной схемы по варианту 1



Значения изгибающих моментов M (Н·м) для расчетной схемы по варианту 2



Значения поперечных сил Q (Н) для расчетной схемы по варианту 1

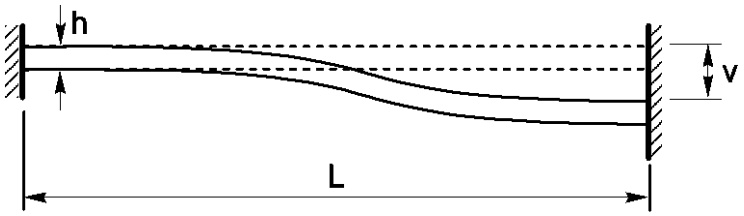


Значения поперечных сил Q (Н) для расчетной схемы по варианту 2

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD PC по варианту 1**	**Отклонения, %**	**SCAD PC по варианту 2**	**Отклонения, %**
Вертикальное перемещение Z_D, м	$-4.233\cdot10^{-3}$	$-4.233\cdot10^{-3}$	0.00	$-4.233\cdot10^{-3}$	0.00
Угол поворота UY_A, рад	$3.045\cdot10^{-3}$	$3.045\cdot10^{-3}$	0.00	$3.045\cdot10^{-3}$	0.00
Изгибающий момент M_D, Н·м	33840.0	33839.9	0.00	33827.2	0.04
Поперечная сила Q_A, Н	11674.0	11674.3	0.00	11683.4	0.08

Балка, защемленная по двум торцам, под действием поперечного смещения одного из них



Цель: Определение напряженного состояния балки, защемленной по двум торцам, от воздействия поперечного смещения одного из них.

Имя файла с исходными данными: **CS09_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Балка прямоугольного поперечного сечения, защемленная по двум торцам, подвергается поперечному смещению v одного из них. Определить поперечную силу *Q* и изгибающий момент *M* по смещенному торцу.

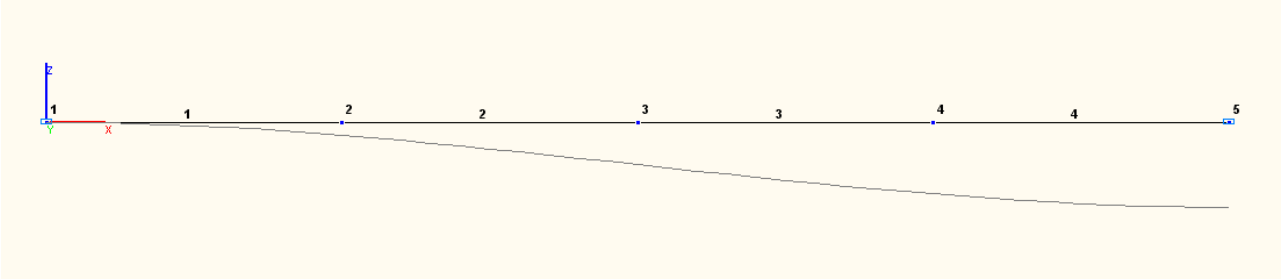
Ссылки: J. M. Gere and W. Weaver, Jr., Analysis of Framed Structures, New York, D. Van Nostrand Co., 1965.

Исходные данные:

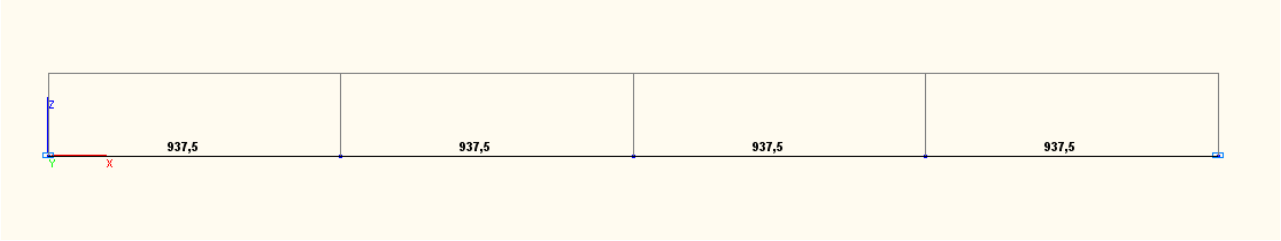
$E = 3.0 \cdot 10^7$ Па	- модуль упругости,
L = 80.0 м	- длина балки;
b = 2.0 м	- ширина поперечного сечения балки;
h = 2.0 м	- высота поперечного сечения балки;
v = 1.0 м	- значение поперечного смещения.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 4 элемента типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси (вдоль оси X общей системы координат) с шагом 20.0 м. Обеспечение граничных условий на защемленных торцах достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Z, UY. Воздействие заданного поперечного смещения задается смещением по оси Z общей системы координат соответствующей связи. Количество узлов в расчетной схеме – 5.

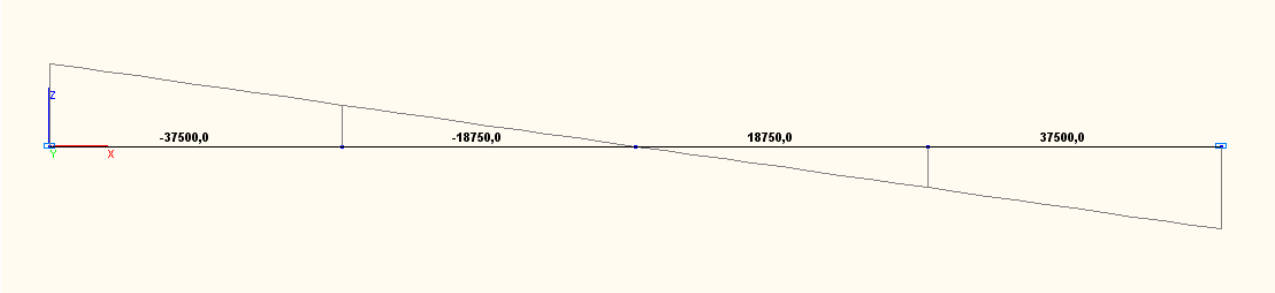
Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Эпюра поперечных сил Q (H)



Эпюра изгибающих моментов M (Н·м)

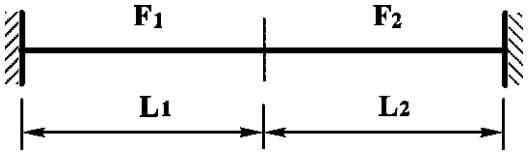
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Поперечная сила *Q* по смещенному торцу, Н	937.5	937.5	0.00
Изгибающий момент *M* по смещенному торцу, Н·м	37500.0	37500.0	0.00

Замечания: При аналитическом решении поперечная сила *Q* и изгибающий момент *M* по смещенному торцу определяются по следующим формулам:

$$Q = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3};\qquad M = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2},\ \text{где:}\qquad I = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Плоская система из двух соосных стержней под действием изменения температуры



Цель: Определение напряженного состояния плоской системы из двух соосных стержней от воздействия изменения температуры.

***Имя файла с исходными данными*: B1_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Система состоит из двух соосных горизонтальных стержней квадратного поперечного сечения, жестко соединенных в общем узле и жестко защемленных по противоположным узлам. Система подвергается воздействию от изменения температуры Δt относительно температуры сборки. Определить нормальные напряжения σ в поперечных сечениях стержней системы.

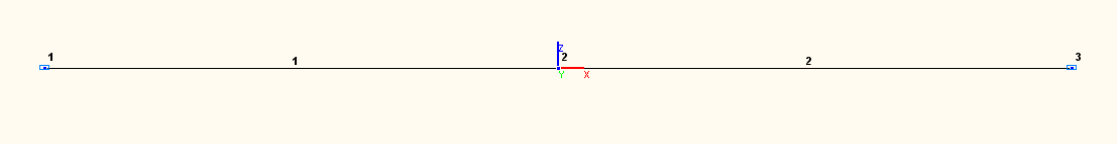
Ссылки: С.П. Тимошенко, Сопротивление материалов, том первый: Элементарная теория и задачи, Москва, Наука, 1965, стр.35.

Исходные данные:

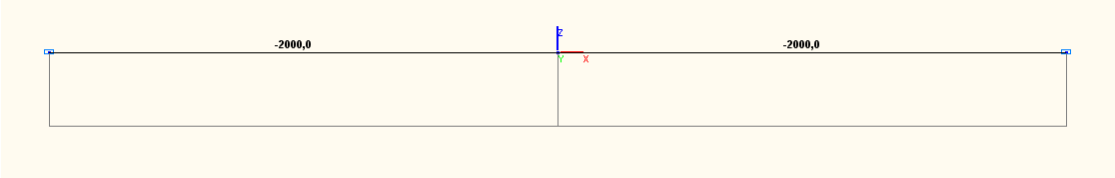
$E_s = 2.0 \cdot 10^6$ кгс/см^2 - модуль упругости стали;
$\alpha_s = 1.25 \cdot 10^{-5}$ 1/ ºC - коэффициент линейного температурного расширения стали;
$L_1 = 100.0$ см - длина левого стержня;
$F_1 = 1.0 \cdot 1.0$ см^2 - площадь поперечного сечения левого стержня;
$L_2 = 100.0$ см - длина правого стержня;
$F_2 = 1.0 \cdot 2.0$ см^2 - площадь поперечного сечения правого стержня;
$\Delta t = 60$ ºC - изменение температуры системы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 2 элемента типа 2. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей в крайних узлах системы по направлениям степеней свободы X, Z, UY. Воздействие от изменения температуры системы Δt относительно температуры сборки задается равномерным вдоль продольных осей всех стержневых элементов. Количество узлов в расчетной схеме – 3.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Эпюра продольных сил N (кгс)

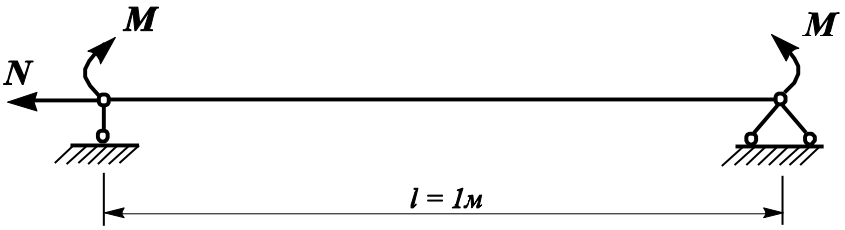
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Норм. напряжения σ (левый стержень), кгс/см^2	-2000.000	-2000.0 / (1.0 * 1.0) = = -2000.000	0.00
Норм. напряжения σ (правый стержень), кгс/см^2	-1000.000	-2000.0 / (1.0 * 2.0) = = -1000.000	0.00

Замечания: При аналитическом решении нормальные напряжения σ в поперечных сечениях стержней системы определяются по следующим формулам:

$$\sigma_l = \frac{\Delta t \cdot \alpha_s \cdot E_s \cdot (L_1 + L_2) \cdot F_2}{L_1 \cdot F_2 + L_2 \cdot F_1}; \qquad \sigma_r = \frac{\Delta t \cdot \alpha_s \cdot E_s \cdot (L_1 + L_2) \cdot F_1}{L_1 \cdot F_2 + L_2 \cdot F_1}.$$

Напряженно-деформированное состояние шарнирно опертой балки при продольно-поперечном изгибе



Цель: Продольно-поперечный изгиб в одной плоскости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
4.8_s_c.SPR	Продольно-поперечный изгиб при сжимающей продольной силе
4.8_s_t.SPR	Продольно-поперечный изгиб при растягивающей продольной силе

Формулировка задачи: Двухопорная балка, находящаяся в условиях чистого изгиба, дополнительно нагружается продольной силой. Определить максимальные поперечные перемещения $w(x)$ и изгибающие моменты $M(x)$ при сжимающей и растягивающей продольной силе.

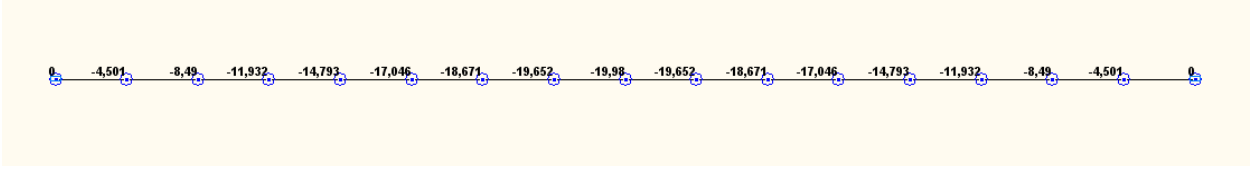
Ссылки: Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 1. М.: Машгиз, 1956.

Исходные данные:

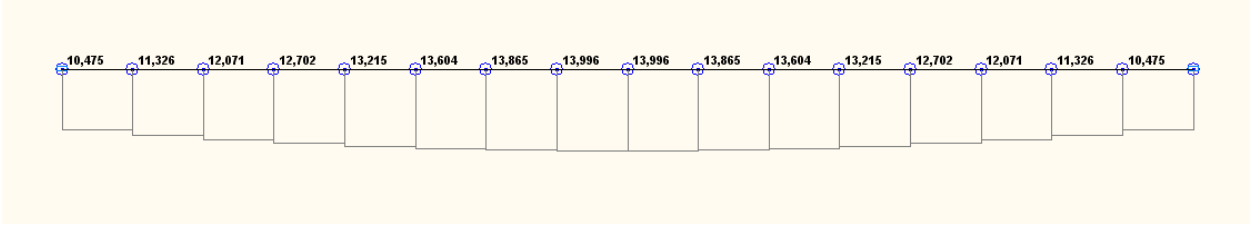
$E = 1.0 \cdot 10^{10}$ Па - модуль упругости;
$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
$F = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2 - площадь поперечного сечения;
$I = 8.333 \cdot 10^{-6}$ м^4 - момент инерции поперечного сечения;
$M = 10$ кН·м - значение изгибающего момента;
$N = \pm 200$ кН - значение сосредоточенной силы;
$l = 1.0$ м - длина балки.

Конечно-элементная модель: Расчет производится в геометрически линейной постановке для энергетически эквивалентной модели в виде стержня на упругом основании, сопротивляющемся поворотам его сечений с погонным коэффициентом жесткости $k_\varphi = N$. Расчетная схема – плоская рама, 16 стержневых элементов типа 2, 17 элементов сосредоточенных поворотных (часовых) пружин жесткостью C_{UY} = -12.5 кН·м/рад (-6.25 кН·м/рад) для сжато-изогнутого стержня и C_{UY} = 12.5 кН м/рад (6.25 кН·м/рад) для растянуто-изогнутого стержня типа 51, 17 узлов.

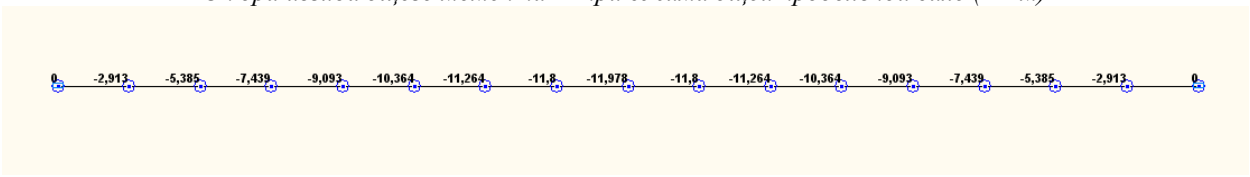
Результаты решения в SCAD



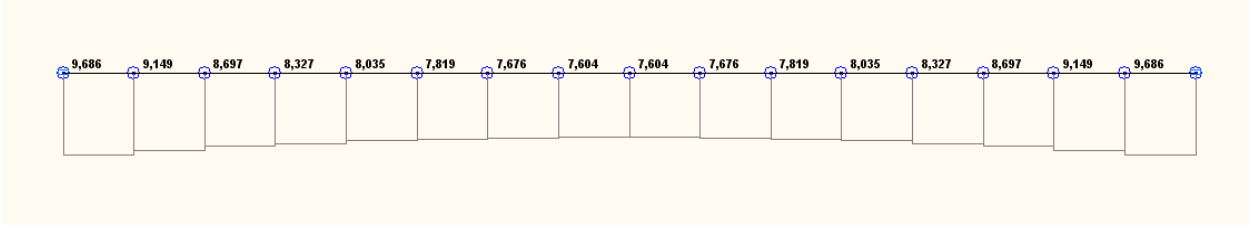
Значения поперечных перемещений w при сжимающей продольной силе (мм)



Эпюра изгибающего момента M при сжимающей продольной силе (кН·м)



Значения поперечных перемещений w при растягивающей продольной силе (мм)



Эпюра изгибающего момента M при растягивающей продольной силе (кН·м)

Сравнение решений:

Параметр	**Сжимающая продольная сила**			**Растягивающая продольная сила**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
Поперечные перемещения $w(0.5\cdot l)$, мм	-19.959	-19.980	0.11	-11.986	-11.978	0.07
Изгибающий момент $M(0.5\cdot l)$, кН·м	13.992	13.996	0.03	7.603	7.604	0.01

Замечания: При аналитическом решении уравнение упругой линии $w(x)$ и уравнение изгибающего момента $M(x)$ при сжимающей продольной силе определяются по формулам:

$$w(x)=\frac{M}{N}\cdot\left[\frac{cos(k\cdot l)-1}{sin(k\cdot l)}\cdot sin(k\cdot x)-cos(k\cdot x)+1\right];$$

$$M(x)=M\cdot\left[\frac{1-cos(k\cdot l)}{sin(k\cdot l)}\cdot sin(k\cdot x)+cos(k\cdot x)\right],$$

где:

$$k=\sqrt{\frac{N}{E\cdot I}}.$$

При аналитическом решении уравнение упругой линии $w(x)$ и уравнение изгибающего момента $M(x)$ при растягивающей продольной силе определяются по формулам:

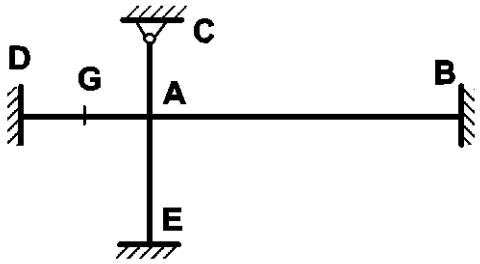
$$w(x)=\frac{M}{N}\cdot\left[\frac{1-ch(k\cdot l)}{sh(k\cdot l)}\cdot sh(k\cdot x)+ch(k\cdot x)-1\right];$$

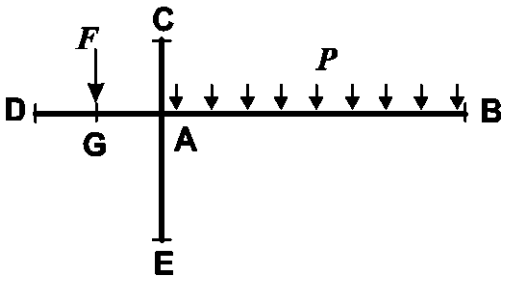
$$M(x)=M\cdot\left[\frac{ch(k\cdot l)-1}{sh(k\cdot l)}\cdot sh(k\cdot x)+ch(k\cdot x)\right],$$

где:

$$k=\sqrt{\frac{N}{E\cdot I}}.$$

Система перекрестных стержней под действием распределенной нагрузки и сосредоточенной силы в их плоскости





Цель: Определение напряженно-деформированного состояния системы перекрестных стержней от воздействия распределенной нагрузки и сосредоточенной силы в их плоскости.

***Имя файла с исходными данными*: SSLL10_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Система состоит из двух перекрестных стержней квадратного поперечного сечения, горизонтального (BD) и вертикального (CE), жестко соединенных в общем узле (точка A). Горизонтальный стержень жестко защемлен в левом и правом узлах (точки D и B). Вертикальный стержень жестко защемлен в нижнем узле (точка E) и шарнирно оперт в верхнем узле (точка C). В середине левого пролета горизонтального стержня (точка G) приложена вертикальная сосредоточенная сила *F*, на правом пролете горизонтального стержня (AB) расположена вертикальная равномерно распределенная нагрузка *p*. Определить в общем узле перекрестных стержней (точка A) угол поворота UY и изгибающие моменты *M* в стержнях с обеих сторон от узла.

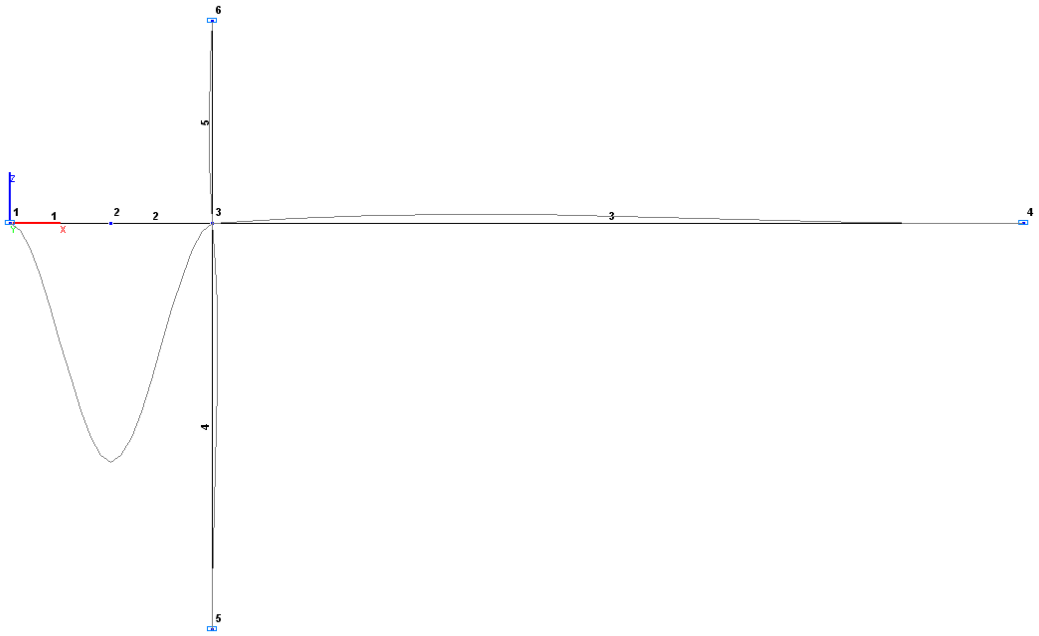
Ссылки: S. Timoshenko et D.H. Young, Theorie des constructions, Paris, Librairie Polytechnique Beranger, 1949, p. 412-416.

Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости стержней системы;
$L_{AD} = 1.0$ м	- длина левого пролета горизонтального стержня;
$b_{AD} = 1.0$ м	- сторона поперечного сечения левого пролета горизонтального стержня;
$L_{AB} = 4.0$ м	- длина правого пролета горизонтального стержня;
$b_{AB} = 4.0$ м	- сторона поперечного сечения правого пролета горизонтального стержня;
$L_{AC} = 1.0$ м	- длина верхнего участка вертикального стержня;
$b_{AC} = 1.0$ м	- сторона поперечного сечения верхнего участка вертикального стержня;
$L_{AE} = 2.0$ м	- длина нижнего участка вертикального стержня;
$b_{AE} = 2.0$ м	- сторона поперечного сечения нижнего участка вертикального стержня;
$F = 1.0 \cdot 10^5$ Н	- значение вертикальной сосредоточенной силы;
$p = 1.0 \cdot 10^3$ Н/м	- значение вертикальной равномерно распределенной нагрузки.

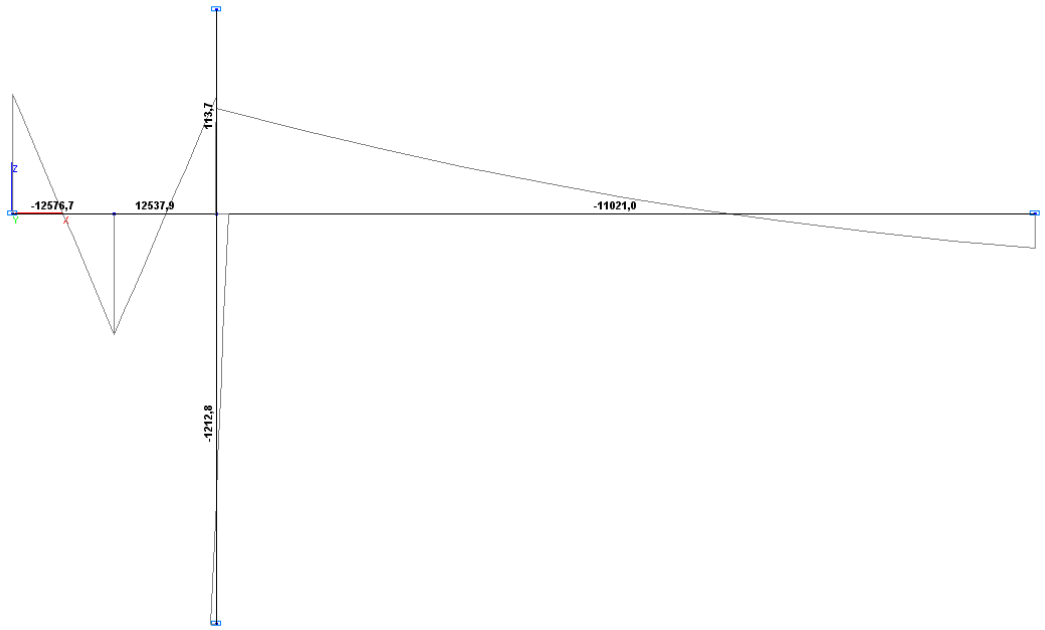
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 5 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей: по направлениям степеней свободы X, Z для шарнирно опертого узла (точка C) и по направлениям степеней свободы X, Z, UY для жестко защемленных узлов (точки E, D, B). Количество узлов в расчетной схеме – 6.

Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы

Значения углов поворота UY (рад)

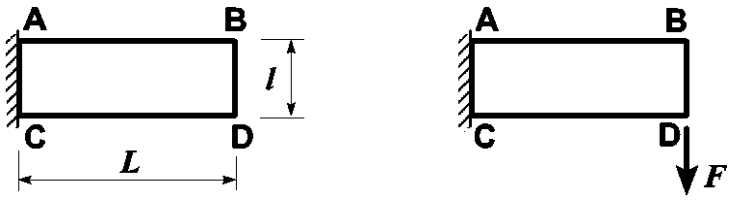


Значения изгибающих моментов M (Н·м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Угол поворота UY (точка A), рад	$-2.2712\cdot10^{-1}$	$-2.2740\cdot10^{-1}$	0.12
Изгибающий момент *M* (стержень AD), Н·м	-12348.6	-12347.5	0.01
Изгибающий момент *M* (стержень AB), Н·м	-11023.7	-11021.0	0.02
Изгибающий момент *M* (стержень AC), Н·м	113.6	113.7	0.09
Изгибающий момент *M* (стержень AE), Н·м	-1211.3	-1212.8	0.12

Консольная рама под действием сосредоточенной силы



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния консольной рамы от действия сосредоточенной силы.

Имя файла с исходными данными: **SSLL05_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Консольная рама состоит из двух горизонтальных стержней одинаковой длины L, защемленных по одним концам (точки A, C) и объединенных вертикальным стержнем длиной l по другим концам (точки B, D). Горизонтальные стержни обладают значительной жесткостью на растяжение-сжатие, вертикальный стержень обладает значительной жесткостью как на растяжение-сжатие, так и на изгиб. В узле сопряжения нижнего горизонтального стержня с вертикальным стержнем приложена вертикальная сосредоточенная сила F (точка D). Определить вертикальные перемещения Z в узлах сопряжения горизонтальных стержней с вертикальным стержнем (точки B, D), а также изгибающие моменты M_y, поперечные силы Q_z и продольные силы N_x в защемленных узлах горизонтальных стержней (точки A, C).

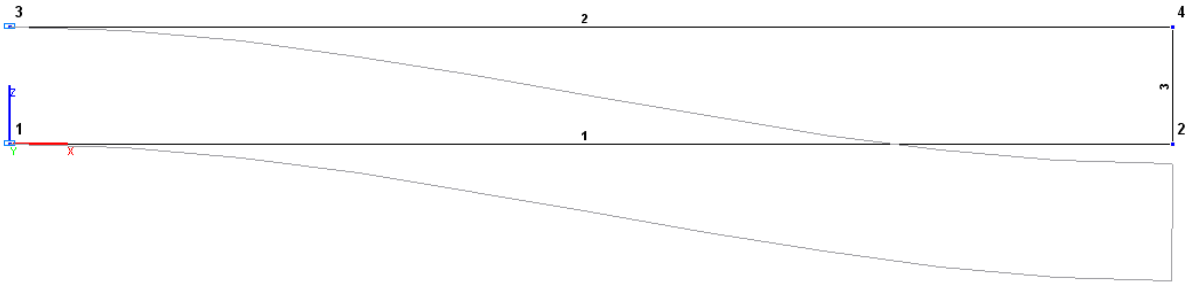
Ссылки: A. Campa, R. Chappert et R. Picand, La mecanique par les problemes, fasc. 4: Resistance des materiaux, Paris, Foucher, 1987.

Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости горизонтальных стержней;
L = 2.0 м	- длина горизонтальных стержней;
l = 0.2 м	- длина вертикального стержня;
$I_z = 4/3 \cdot 10^{-8}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения горизонтальных стержней;
$F = 1.0 \cdot 10^3$ Н	- значение вертикальной сосредоточенной силы.

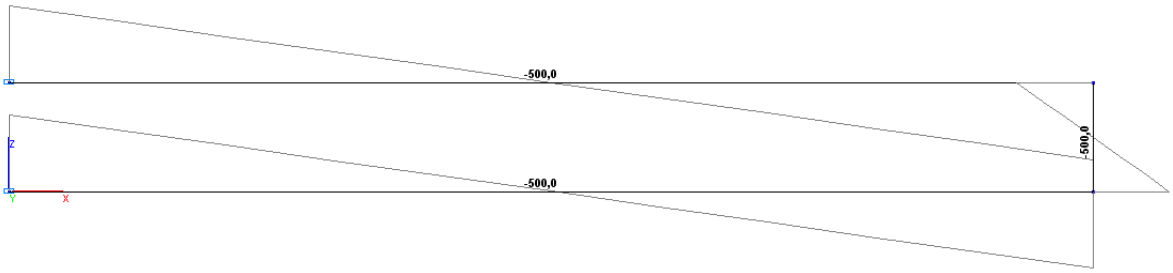
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 3 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается: за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z, UY (точки A, C). Жесткость горизонтальных и вертикального стержней на растяжение-сжатие (E·A) принята со значениями $1.0 \cdot 10^{12}$ Н, жесткость вертикального стержня на изгиб (E·I) принята со значением $1.0 \cdot 10^{12}$ Н·м^2. Количество узлов в расчетной схеме – 4.

Результаты решения в SCAD

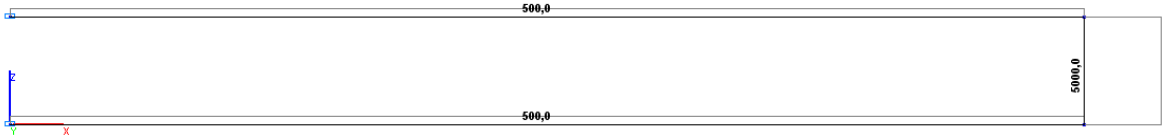


Расчетная и деформированная схемы

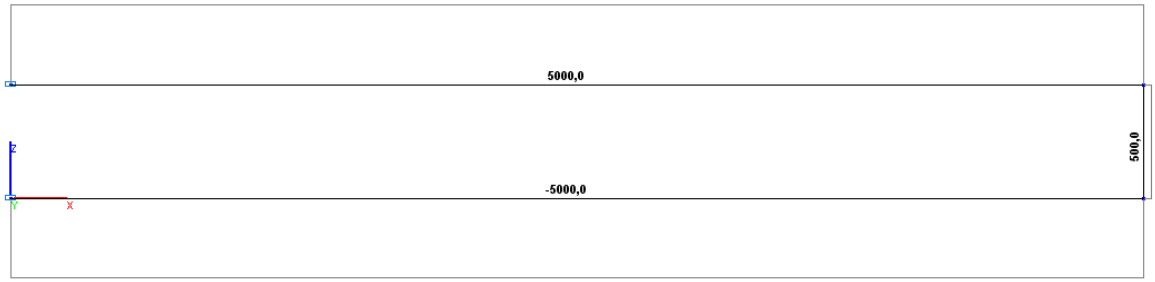
Значения вертикальных перемещений Z (м)



Эпюра изгибающих моментов M_y (кН·м)



Эпюра поперечных сил Q_z (кН)

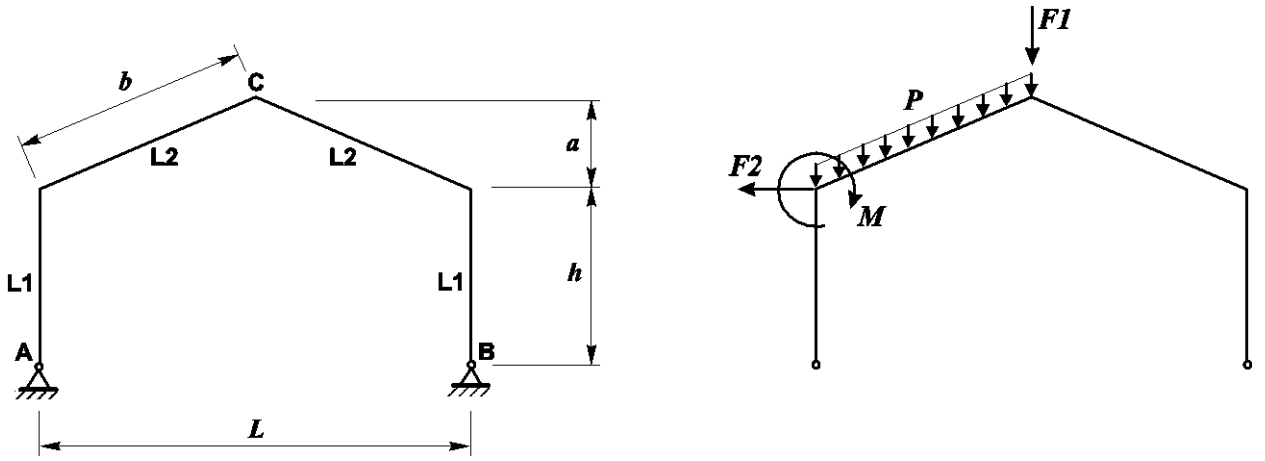


Эпюра продольных сил N_x (кН)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Вертикальное перемещение Z (точка B), м	$-1.2500\cdot10^{-1}$	$-1.2498\cdot10^{-1}$	0.02
Вертикальное перемещение Z (точка D), м	$-1.2500\cdot10^{-1}$	$-1.2498\cdot10^{-1}$	0.02
Изгибающий момент M_y (точка A), Н·м	-500.0	-500.0	0.00
Изгибающий момент M_y (точка C), Н·м	-500.0	-500.0	0.00
Поперечная сила Q_z (точка A), Н	500.0	500.0	0.00
Поперечная сила Q_z (точка C), Н	500.0	500.0	0.00
Поперечная сила N_x (точка A), Н	5000.0	5000.0	0.00
Поперечная сила N_x (точка C), Н	-5000.0	-5000.0	0.00

Однопролетная шарнирно опертая плоская рама с двухскатным ригелем под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальных и горизонтальных сил и изгибающего момента



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния однопролетной шарнирно опертой плоской рамы с двухскатным ригелем от воздействия вертикальной равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных вертикальных и горизонтальных сил и изгибающего момента.

Имя файла с исходными данными: **SSLL14_v11.3.spr**

Формулировка задачи: Однопролетная шарнирно опертая рама с жестким креплением двухскатного ригеля к стойкам находится под воздействием вертикальной равномерно распределенной нагрузки P_{zx} на длине левого полупролета ригеля 0.5·L, сосредоточенной вертикальной силы F1 в коньковом узле ригеля (точка C), сосредоточенными горизонтальной силы F2 и изгибающего момента M в узле крепления ригеля к левой стойке. Определить вертикальное перемещение Z в коньковом узле ригеля (точка C), продольную N и поперечную Q силу в опорном узле левой стойки (точка A).

Ссылки: J.C. Bianchi, Rapport de la SOCOTEC, Paris, non publie, 1964.

Исходные данные:

Материал:

$E = 2.1\cdot10^{11}$ Па — модуль упругости;

Стойки L1:

$h = 8.0$ м — высота;

$EA_1 = 1.0\cdot10^{10}$ Н — продольная жесткость;

$EI_1 = 2.1\cdot10^{11}\cdot 5.0\cdot10^{-4} = 10.5\cdot10^{7}$ Н·м^2 — изгибная жесткость;

Ригель L2:

$L = 20.0$ м — длина пролета;

$a = 4.0$ м — высота подъема;

$b = ((0.5\cdot20.0)^2 + 4.0^2)^{0.5}$ — длина ската;

$EA_2 = 1.0\cdot10^{10}$ Н — продольная жесткость;

$EI_2 = 2.1\cdot10^{11}\cdot2.5\cdot10^{-4} = 5.25\cdot10^{7}$ Н·м^2 — изгибная жесткость;

Нагрузки и воздействия:

$P_{zx} = 3.0\cdot10^{3}$ Н/м — вертикальная равномерно-распределенная нагрузка на длине левого полупролета ригеля 0.5·L;

$P_z = 3.0\cdot10^{3}\cdot0.5\cdot20.0/((0.5\cdot20.0)^2 + 4.0^2)^{0.5} = 2.78543\cdot10^{3}$ Н/м — та же нагрузка на длине левого ската ригеля b;

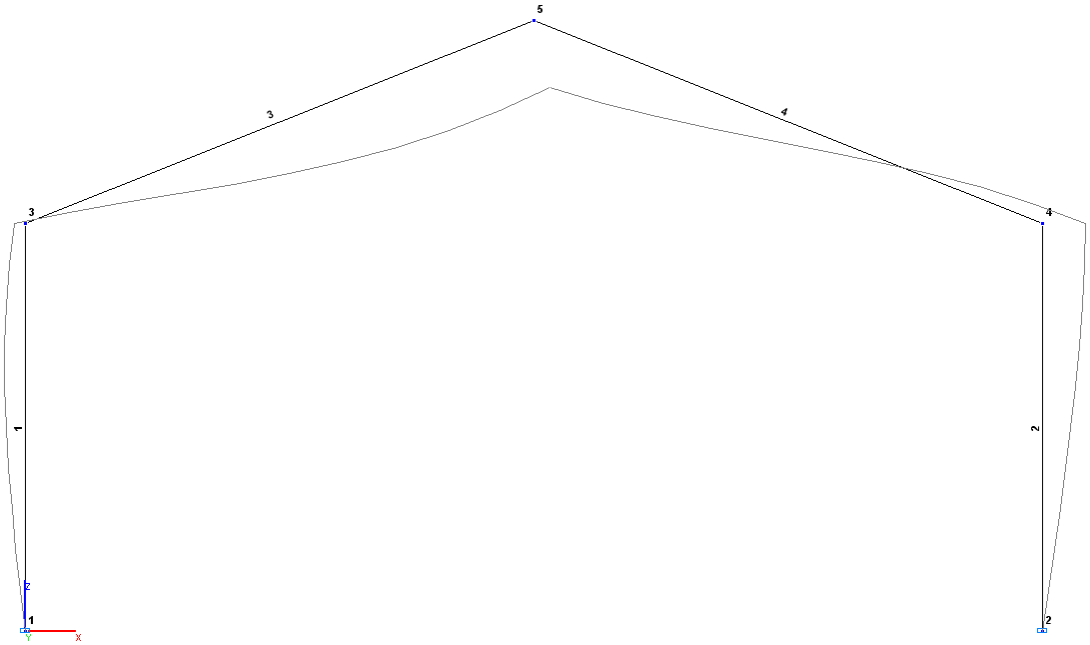
$F1 = 2.0\cdot10^{4}$ Н — сосредоточенная вертикальная сила в коньковом узле ригеля;

$F2 = 1.0\cdot10^{4}$ Н — сосредоточенная горизонтальная сила в узле крепления ригеля к левой стойке;

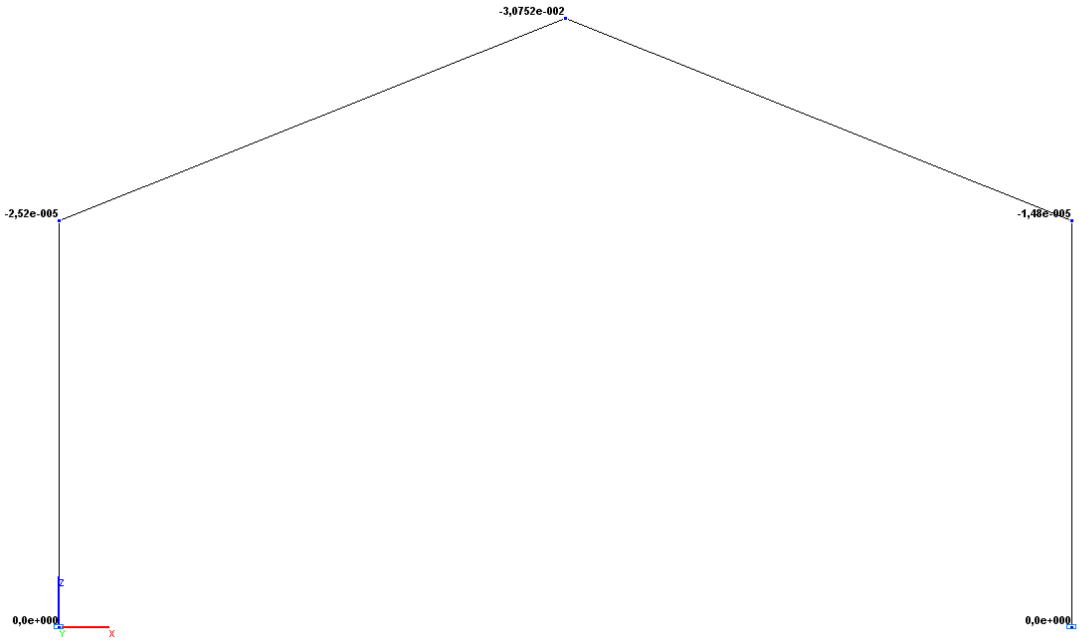
$M = 1.0 \cdot 10^5$ Н·м - сосредоточенный изгибающий момент в узле крепления ригеля к левой стойке.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, ригель – 2 элемента типа 2, стойки – 2 элемента типа 2. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z для шарнирных опорных узлов. Количество узлов в расчетной схеме – 5.

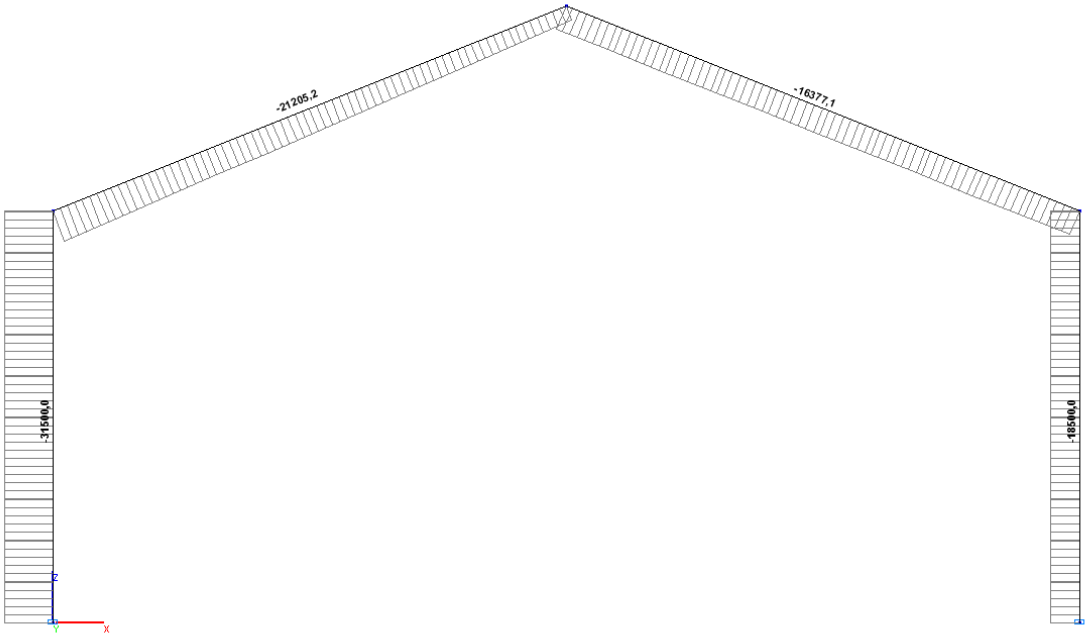
Результаты решения в SCAD



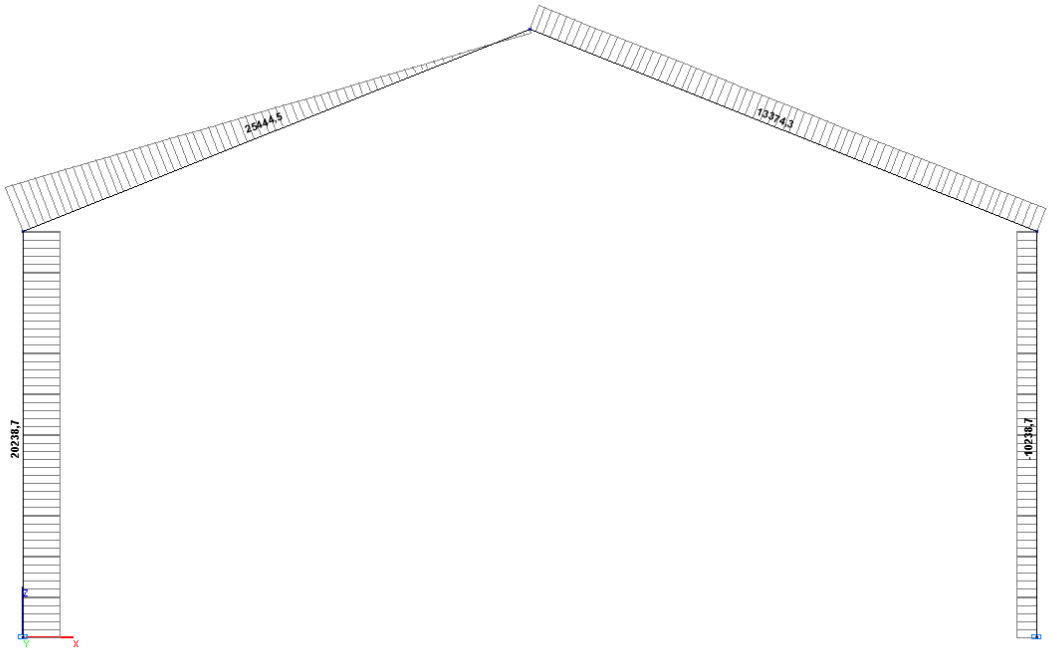
Расчетная и деформированная схемы



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Значения продольных сил N (Н)

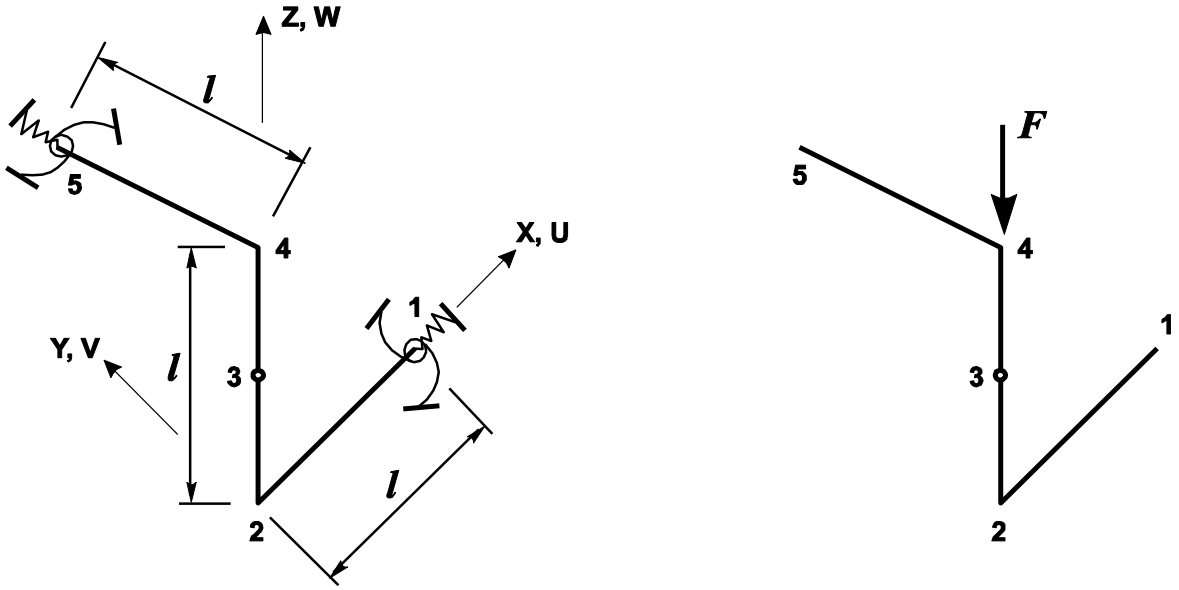


Значения поперечных сил Q (Н)

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
Вертикальное перемещение Z_C, м	$-3.0720\cdot10^{-2}$	$-3.0752\cdot10^{-2}$	0.10
Продольное усилие N_A, Н	-31.500	-31.500	0.00
Поперечное усилие N_A, Н	20239.4	20238.7	0.00

Пространственная стержневая система с упругими связями под действием сосредоточенной силы



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния пространственной стержневой системы с упругими связями под действием сосредоточенной силы.

Имя файла с исходными данными: **SSLL04_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Пространственная система состоит из четырех последовательно соединенных стержней. Крайние стержни ортогонально лежат в параллельных горизонтальных плоскостях, промежуточные стержни являются вертикальными и шарнирно сопрягаются между собой по угловым степеням свободы (точка 3). По обоим концам пространственной системы (точки 1, 5) установлены жесткие связи по линейным и угловой степеням свободы в плоскости поперечного сечения соответствующего крайнего стержня и упругие связи по линейному и угловым степеням свободы из плоскости поперечного сечения соответствующего крайнего стержня. В узле сопряжения верхнего горизонтального и вертикального стержней (точка 4) приложена вертикальная сосредоточенная сила *F*. Определить вертикальное перемещение Z для узла сопряжения вертикальных стержней (точка 3), горизонтальное перемещение Y вдоль верхнего крайнего стержня и угол поворота UX в вертикальной плоскости, содержащей этот стержень, для верхнего узла закрепления пространственной системы (точка 5), а также крутящий и изгибающие моменты M_x, M_y, M_z для верхнего и нижнего узлов закрепления пространственной системы (точки 1, 5).

Ссылки: M. Laredo, Resistance des materiaux, Paris, Dunod, 1970, p. 165.

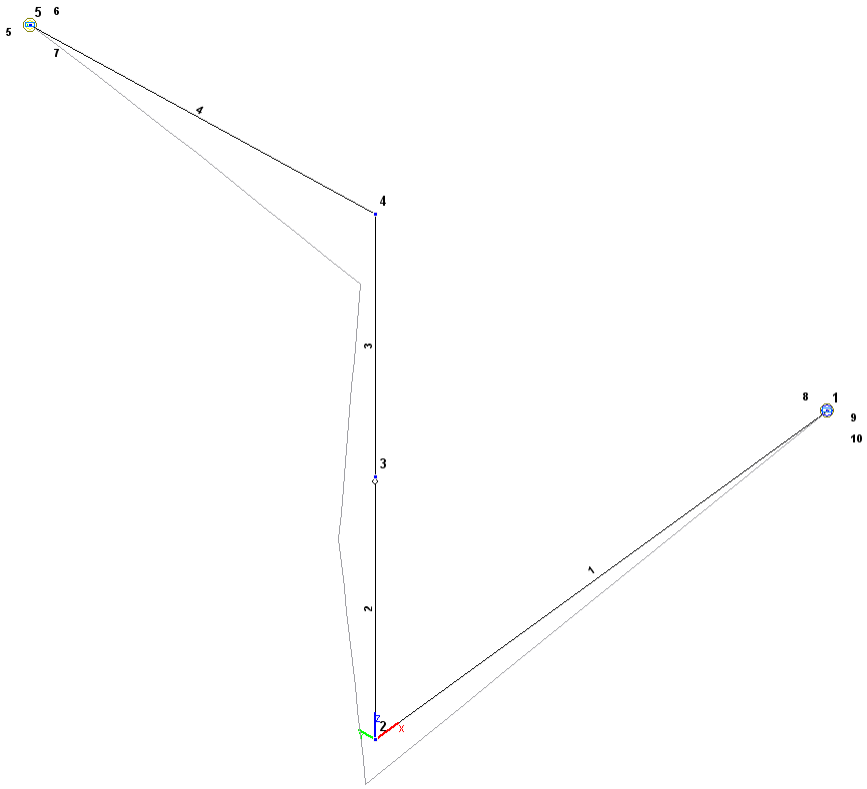
Исходные данные:

$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$G = 0.7875 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль сдвига,
$l = 2.0$ м	- длина горизонтальных стержней;
$0.5\,l = 1.0$ м	- длина вертикальных стержней;
$A = 1.0 \cdot 10^{-3}$ м^2	- площадь поперечного сечения стержней;
$I_x = 2 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции в плоскости поперечного сечения стержней (кручения);
$I_y = I_z = 2 \cdot 10^{-6}$ м^4	- моменты инерции из плоскости поперечного сечения стержней (изгиба);
$k = 5.25 \cdot 10^4$ Н/м	- жесткость связей по линейной степени свободы;
$k_u = 5.25 \cdot 10^4$ Н·м/рад	- жесткость связей по угловым степеням свободы;
$F = 1.0 \cdot 10^4$ Н	- значение вертикальной сосредоточенной силы.

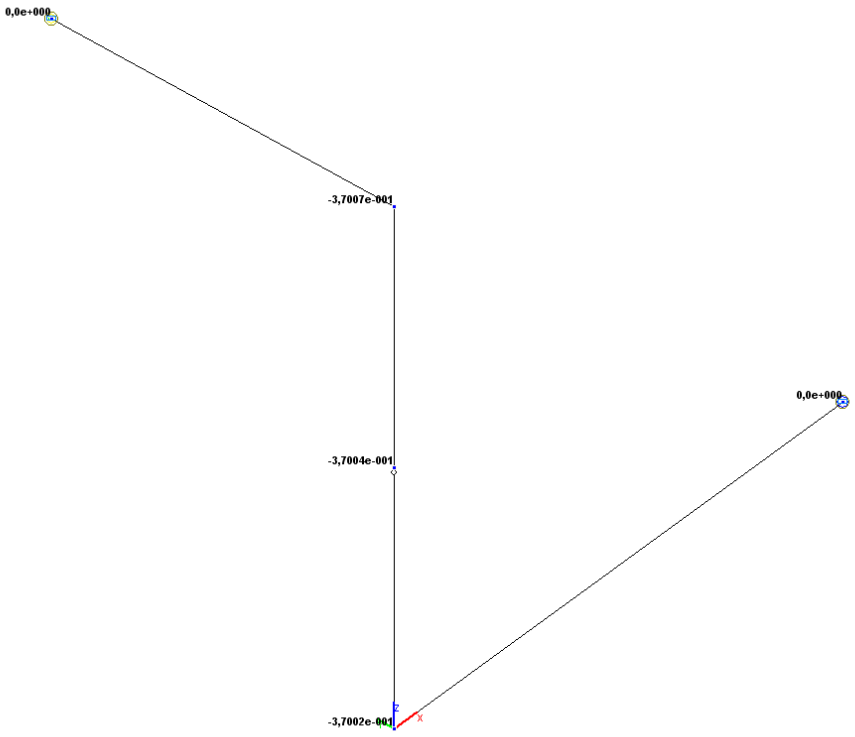
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 4 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается: за счет наложения жестких связей по направлениям степеней свободы X, Z, UY и введением связей конечной жесткости по направлениям степеней свободы Y, UX, UZ (тип элемента 51) – для конца верхнего стержня пространственной

системы (точка 5); за счет наложения жестких связей по направлениям степеней свободы Y, Z, UX и введением связей конечной жесткости по направлениям степеней свободы X, UY, UZ (тип элемента 51) – для конца нижнего стержня пространственной системы (точка 1). Количество узлов в расчетной схеме – 5.

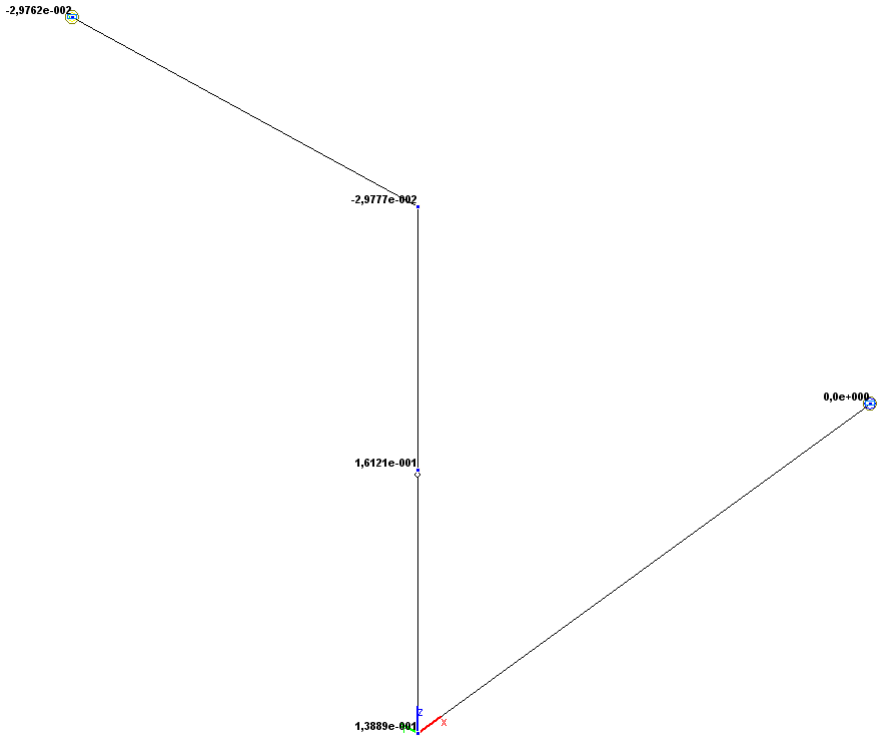
Результаты решения в SCAD



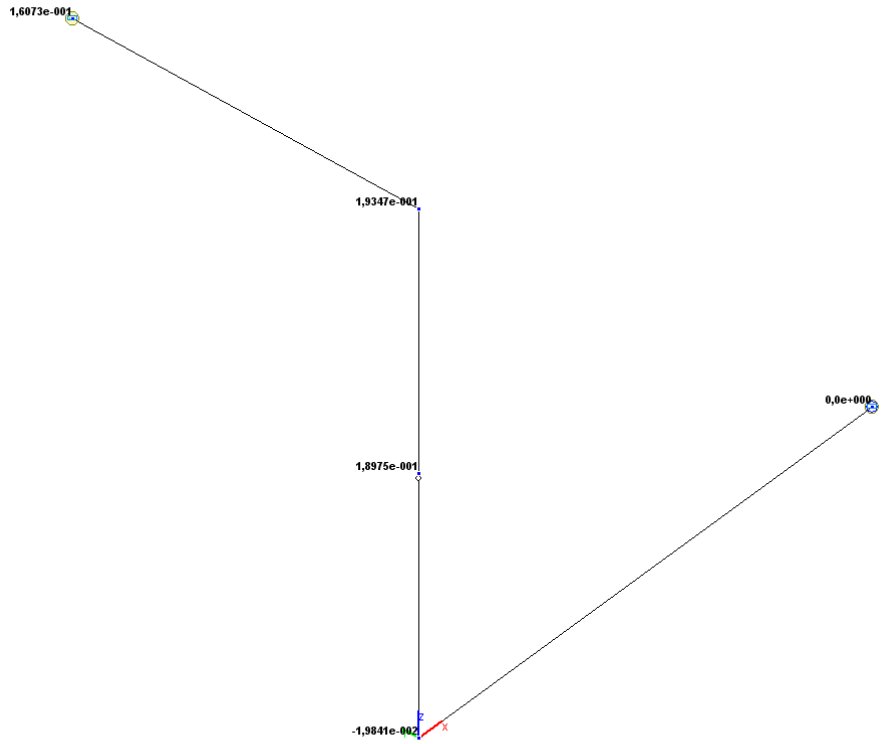
Расчетная и деформированная схемы



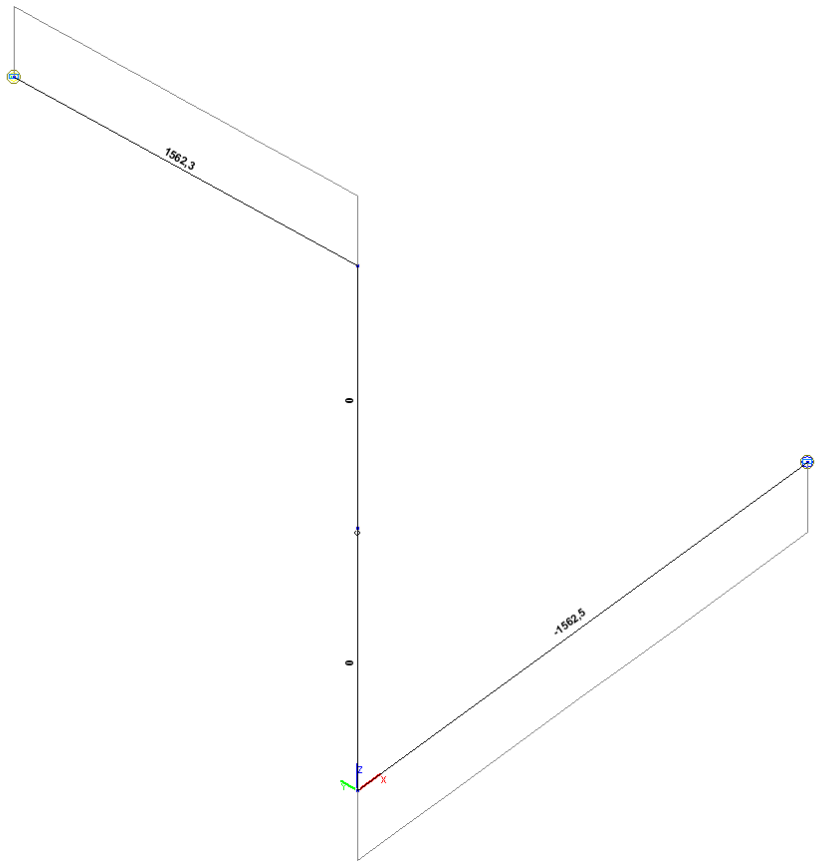
Значения вертикальных перемещений Z (м)



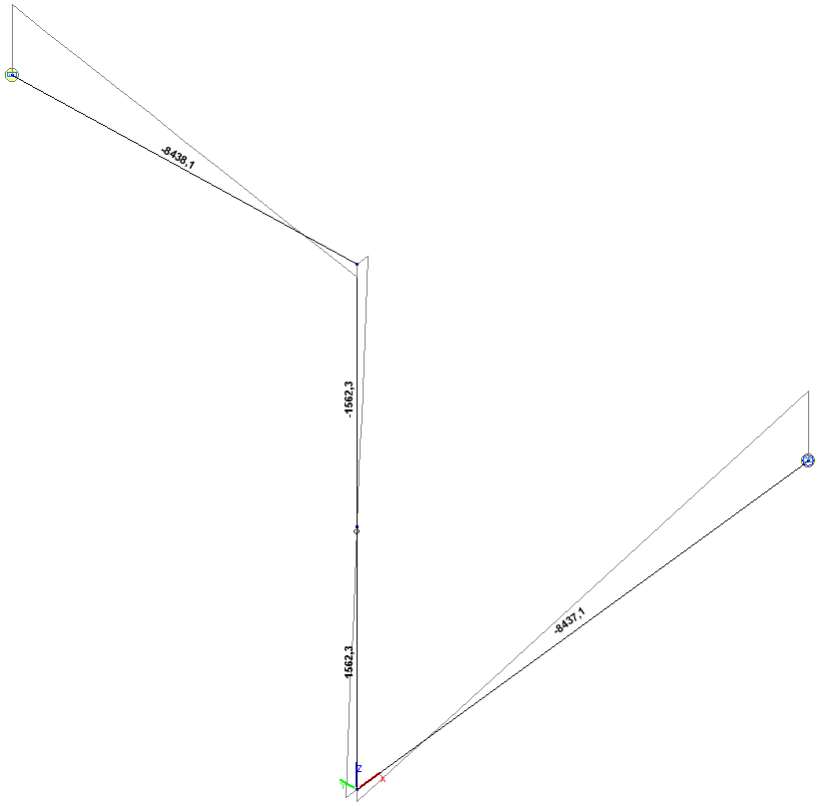
Значения горизонтальных перемещений Y (м)



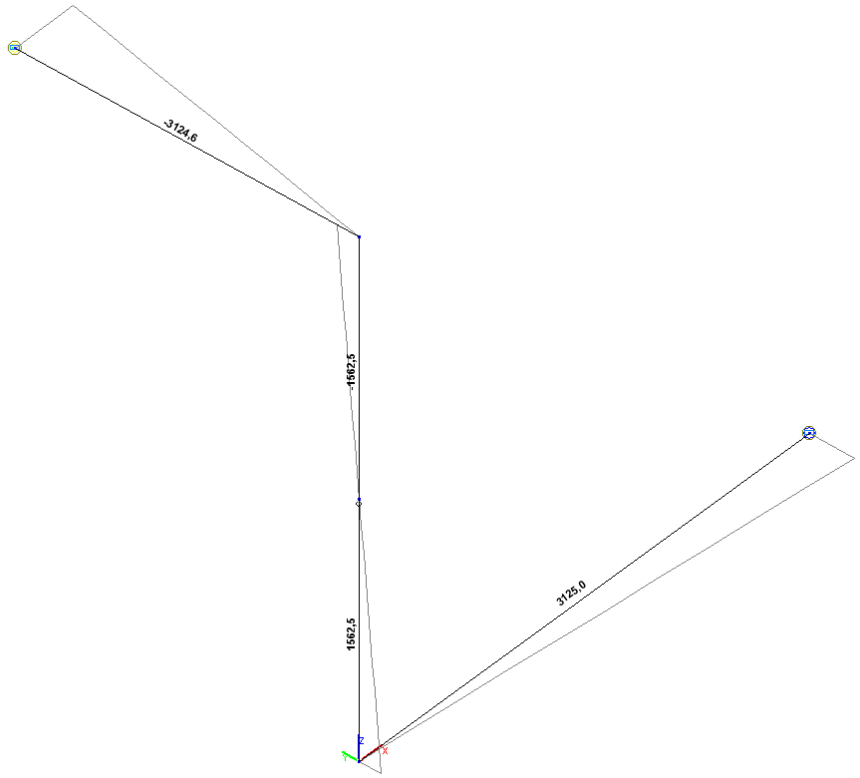
Значения углов поворота UX (рад)



*Эпюра крутящих моментов M_x (кН*м)*



*Эпюра изгибающих моментов M_y (кН*м)*

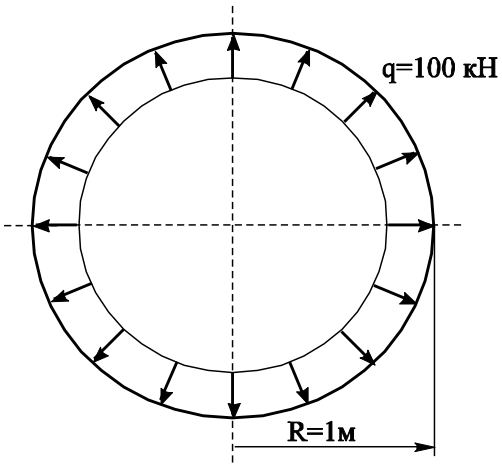


*Эпюра изгибающих моментов M_z (кН*м)*

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Вертикальное перемещение Z (точка 3), м	$-3.7004\cdot10^{-1}$	$-3.7004\cdot10^{-1}$	0.00
Горизонтальное перемещение Y (точка 5), м	$-2.9762\cdot10^{-2}$	$-2.9762\cdot10^{-2}$	0.00
Угол поворота UX (точка 5), рад	$1.6071\cdot10^{-1}$	$1.6073\cdot10^{-1}$	0.01
Крутящий момент M_x (точка 5), Н·м	1562.5	1562.3	0.01
Изгибающий момент M_y (точка 5), Н·м	-8437.5	-8438.1	0.01
Изгибающий момент M_z (точка 5), Н·м	-3125.0	3124.6	0.01
Крутящий момент M_x (точка 1), Н·м	-1562.5	-1562.5	0.00
Изгибающий момент M_y (точка 1), Н·м	-8437.5	-8437.1	0.00
Изгибающий момент M_z (точка 1), Н·м	3125.0	3125.0	0.00

Кольцо, нагруженное в его плоскости распределенной нагрузкой



Цель: Расчет изгиба в плоскости кольца под распределенной силой, без учета деформаций поперечного сдвига.

Имя файла с исходными данными: **4.7.SPR**

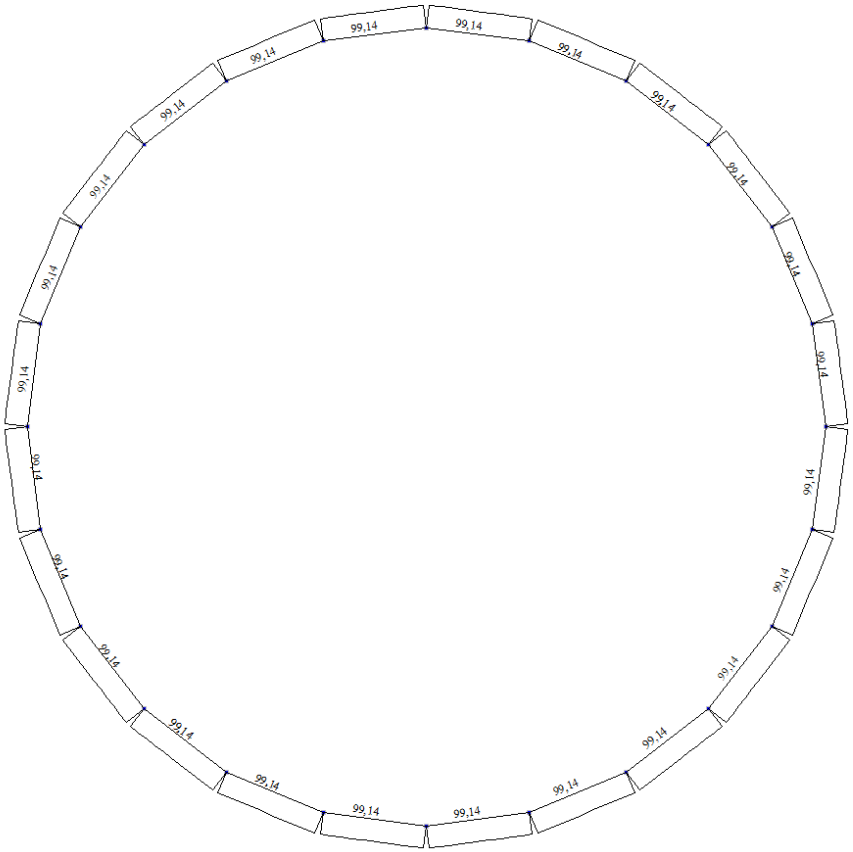
Формулировка задачи: Кольцо нагружается в его плоскости распределенной нагрузкой q. Определить: нормальную силу в сечении кольца N и изменение диаметра кольца δ.

Ссылки: Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наук. думка, 1988.

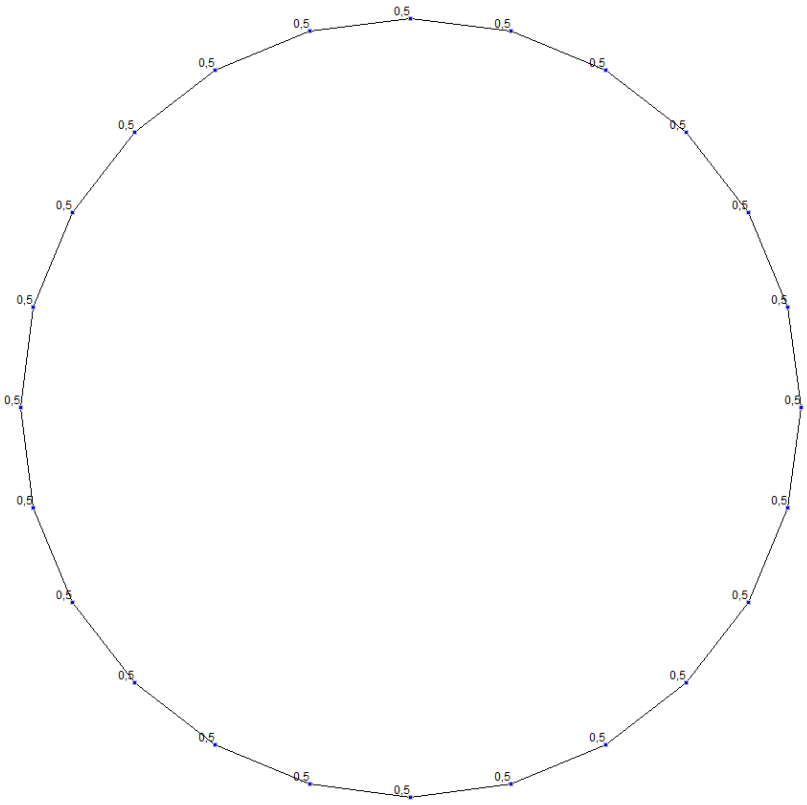
Исходные данные:
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,
$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
R= 1 м - радиус кольца;
$F = 0{,}001$ м^2 - площадь поперечного сечения;
q = 100 кН/м - значение распределенной нагрузки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 72 стержневых элемента типа 10, 72 узла.

Результаты решения в SCAD



Эпюра нормальной силы N (кН)



Значения перемещений δ (мм)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Изменение диаметра кольца δ, мм	0.50	0.50	0.00
Нормальная сила в сечении кольца N, кН	100.00	99.14	0.86

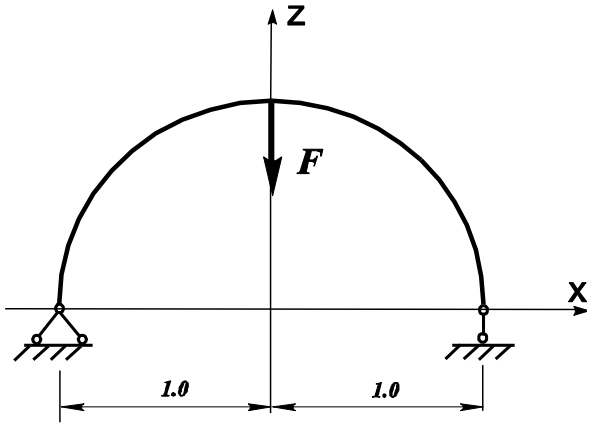
Замечания: При аналитическом решении изменение диаметра кольца определяется по формулам («Справочник по сопротивлению материалов» стр. 384) :

$$\delta = \frac{q \cdot R^2}{E \cdot F}.$$

Нормальная сила в сечении кольца:

$$N = q \cdot R.$$

Полуциркульная арка постоянного поперечного сечения с шарнирным опиранием под действием сосредоточенной силы в ее плоскости



***Цель*:** Определение деформированного состояния полуциркульной арки постоянного поперечного сечения с шарнирным опиранием от воздействия сосредоточенной силы в ее плоскости.

Имя файла с исходными данными: **SSLL08_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Полуциркульная арка постоянного поперечного сечения, имеющая в уровне пят шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную опоры, нагружена в своей плоскости в уровне замка сосредоточенной силой *F*, направленной по нормали к продольной оси в сторону пят. Определить прогиб продольной оси арки Z, смещение шарнирно-подвижной опоры X и углы поворота опорных шарниров UY.

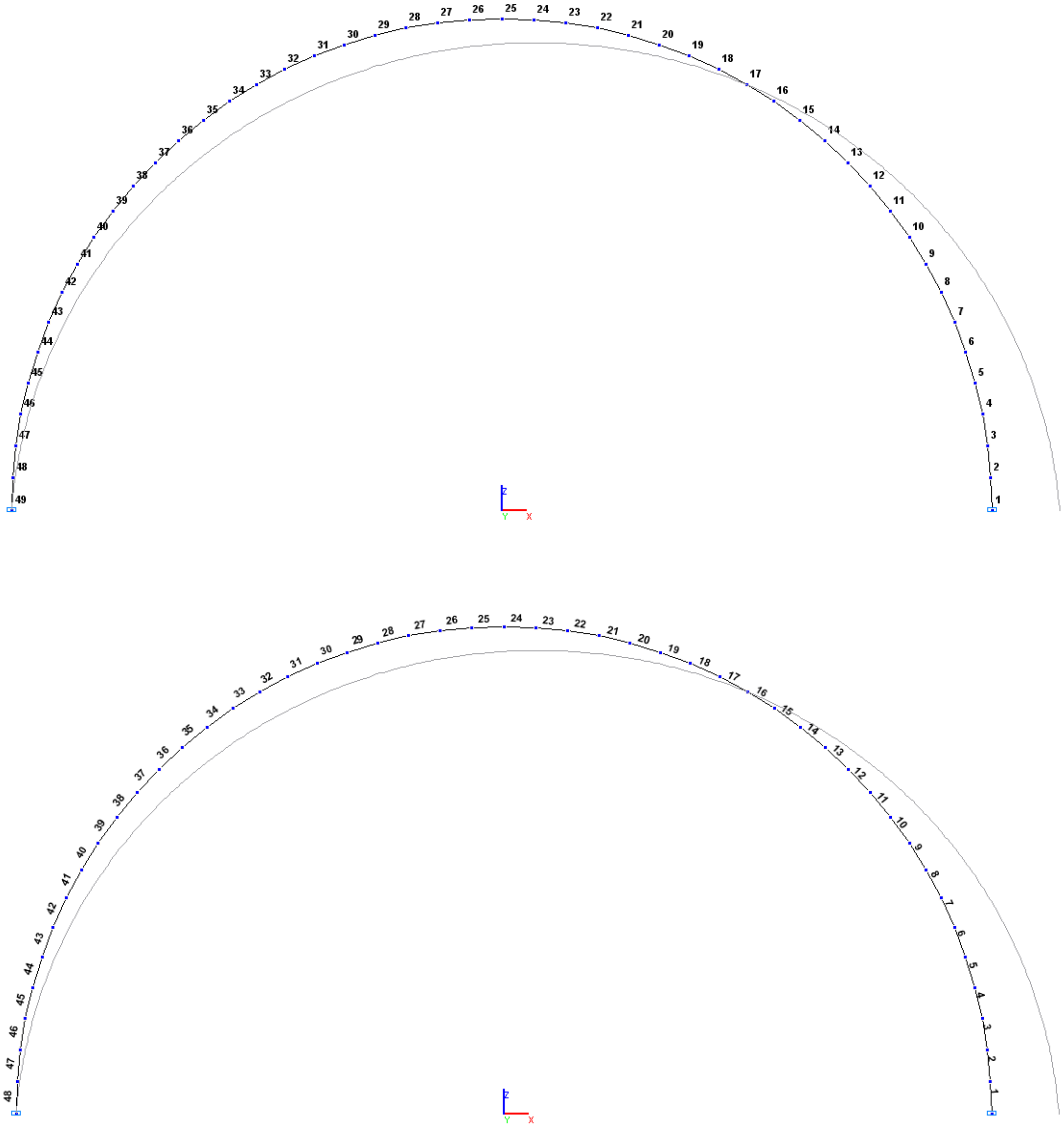
Ссылки: P. Dellus, Resistance de materiaux, Paris, Technique et Vulgarisation, 1958.

Исходные данные:

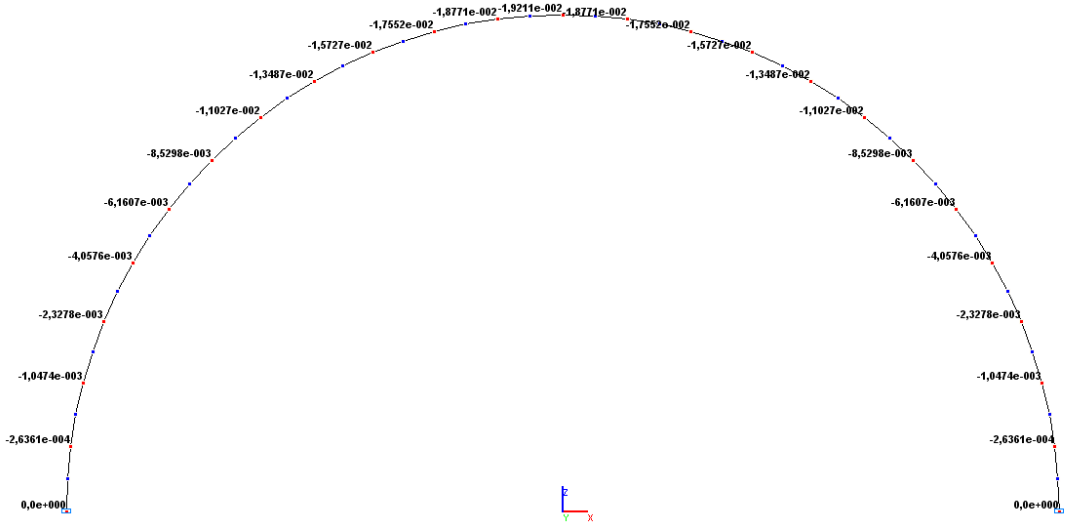
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости полуциркульной арки;
r = 1.0 м	- радиус дуги продольной оси полуциркульной арки;
d_e = 0.020 м	- наружный диаметр кольцевого поперечного сечения арки;
d_i = 0.016 м	- внутренний диаметр кольцевого поперечного сечения арки;
F = 100 Н	- значение сосредоточенной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 48 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается: за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z – для шарнирно-неподвижной опоры и Z – для шарнирно-подвижной опоры. Количество узлов в расчетной схеме – 49.

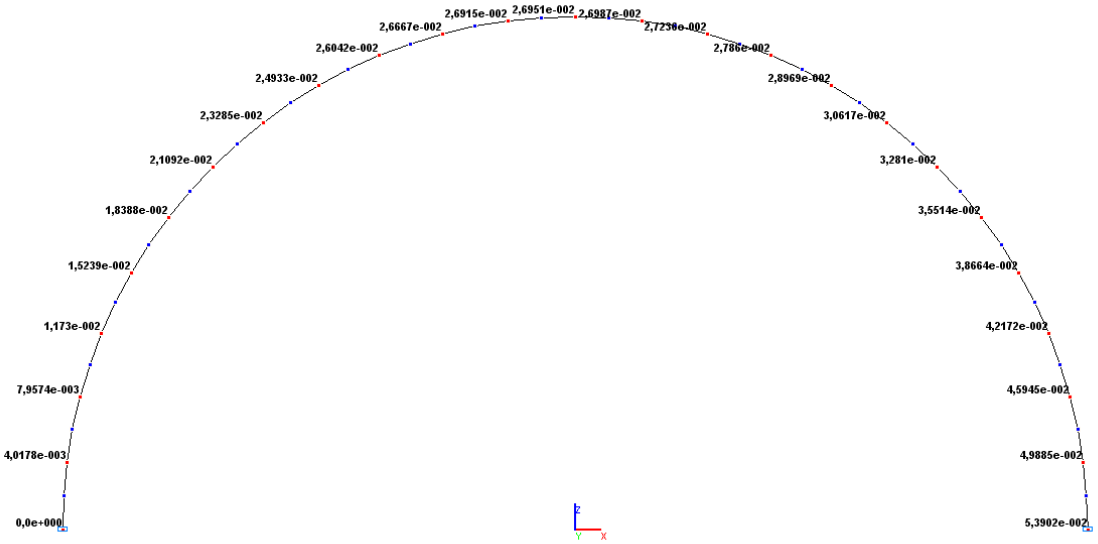
Результаты решения в SCAD



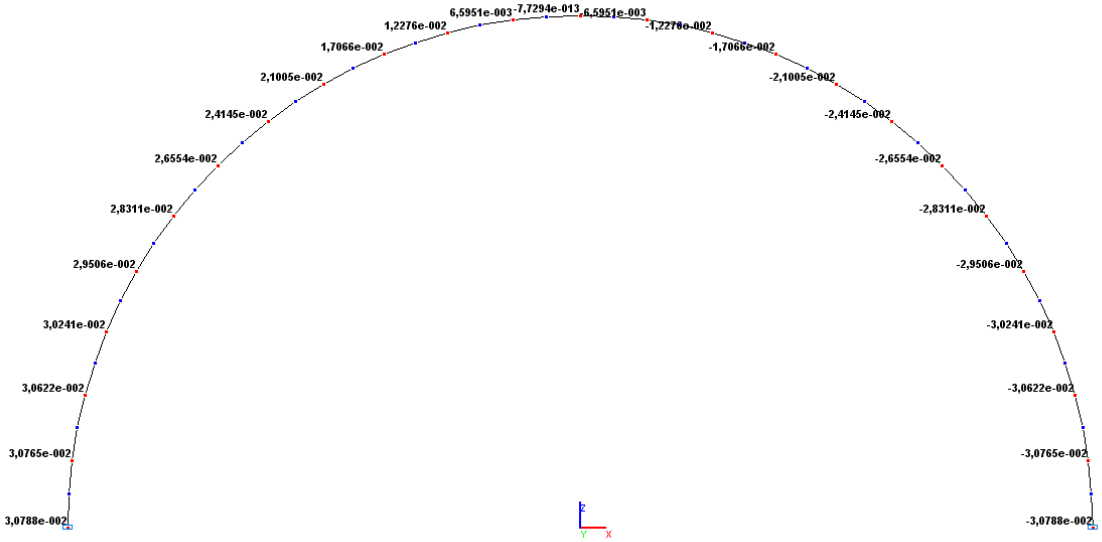
Расчетная и деформированная схемы



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Значения горизонтальных перемещений X (м)



Значения углов поворота UY (рад)

Сравнение решений:

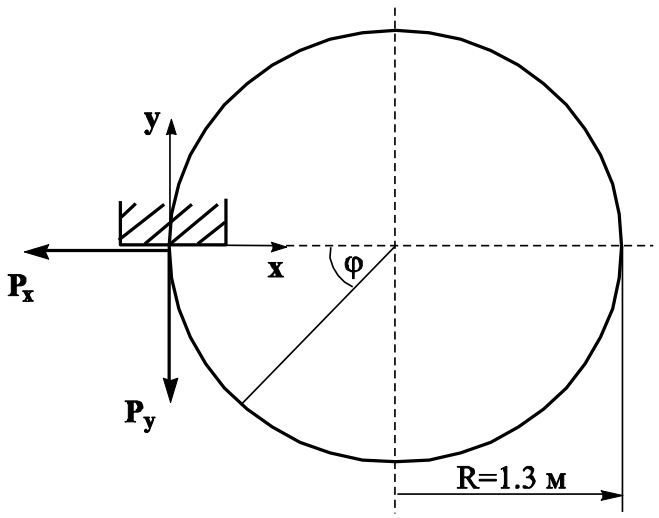
Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Прогиб продольной оси арки Z, м	$-1.9206\cdot10^{-2}$	$-1.9211\cdot10^{-2}$	0.03
Смещение шарнирно-подвижной опоры X, м	$5.3912\cdot10^{-2}$	$5.3902\cdot10^{-2}$	0.02
Угол поворота шарнирно-подвижной опоры UY, рад	$-3.0774\cdot10^{-2}$	$-3.0788\cdot10^{-2}$	0.05
Угол поворота шарнирно-неподвижной опоры UY, рад	$3.0774\cdot10^{-2}$	$3.0788\cdot10^{-2}$	0.05

Замечания: При аналитическом решении прогиб продольной оси арки *Z*, смещение шарнирно-подвижной опоры *X* и углы поворота опорных шарниров *UY* определяются по следующим формулам:

$$Z=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{F\cdot r}{E\cdot A}+\left(\frac{3\cdot\pi}{8}-1\right)\cdot\frac{F\cdot r^3}{E\cdot I};\qquad X=\frac{1}{2}\cdot\frac{F\cdot r}{E\cdot A}-\frac{1}{2}\cdot\frac{F\cdot r^3}{E\cdot I};\qquad UY=\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{F\cdot r^2}{E\cdot I},$$ где:

$$I=\frac{\pi\cdot {d_e}^2}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{d_i}{d_e}\right)^2\right);\qquad I=\frac{\pi\cdot {d_e}^4}{64}\cdot\left(1-\left(\frac{d_i}{d_e}\right)^4\right).$$

Деформированное состояние разрезного кругового кольца, нагруженного двумя взаимно перпендикулярными силами P_x и P_y, лежащими в плоскости кольца



Цель: Деформированное состояние разрезного кругового кольца при изгибе в плоскости без учета деформаций поперечного сдвига.

Имя файла с исходными данными: **4.6.SPR**

Формулировка задачи: Разрезное круговое кольцо нагружается двумя взаимно перпендикулярными силами P_x и P_y, лежащими в плоскости оси кольца. Определить деформированное состояние кольца.

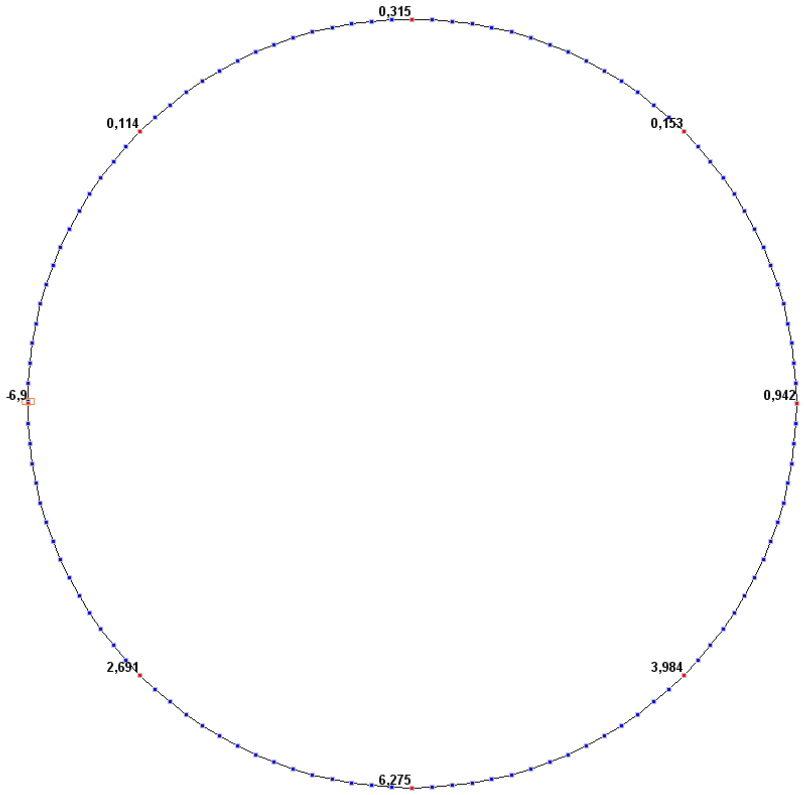
Ссылки: Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 1. М.: Машгиз, 1956.

Исходные данные:

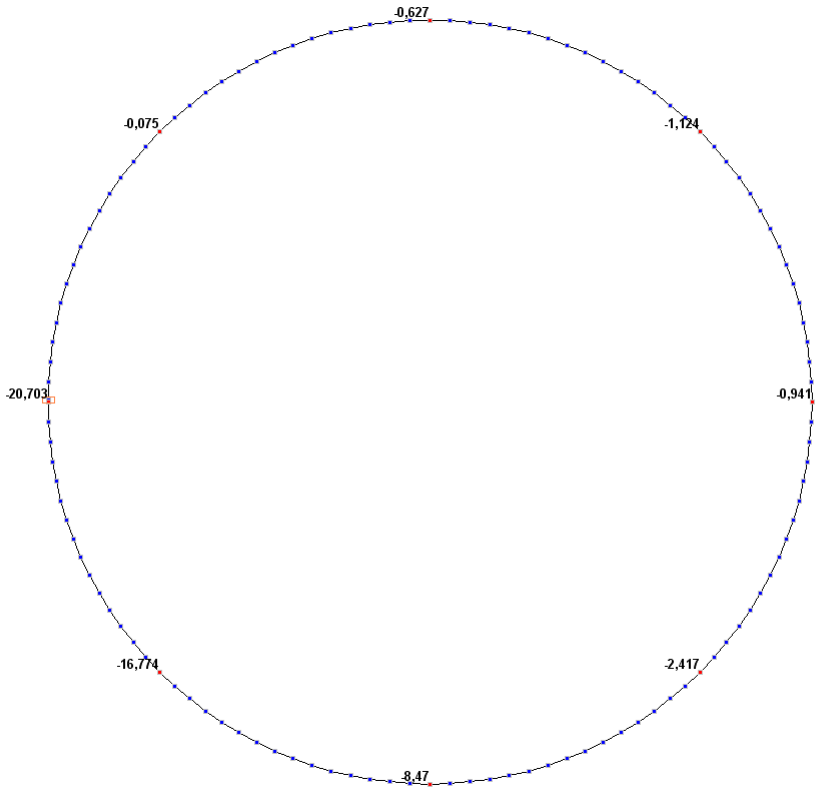
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости;
R = 1.3 м	- радиус оси кольца;
$F = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2	- площадь поперечного сечения;
$I = 5 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения;
$P_x = P_y = 1$ кН	- значение сосредоточенной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская схема, 120 стержневых элементов типа 2, 121 узел.

Результаты решения в SCAD



Значения перемещений u (мм)



Значения перемещений v (мм)

Сравнение решений:

Угол φ, град	Перемещения вдоль оси x			Перемещения вдоль оси y		
	Теория	SCAD	Отклонения, %	Теория	SCAD	Отклонения, %
0	-6.902	-6.900	0.03	-20.706	-20.703	0.01
45	2.690	2.691	0.04	-16.777	-16.774	0.02
90	6.275	6.275	0.00	-8.472	-8.470	0.02
135	3.984	3.984	0.00	-2.419	-2.417	0.08
180	0.943	0.942	0.11	-0.943	-0.941	0.21
225	0.154	0.153	0.65	-1.125	-1.124	0.09
270	0.316	0.315	0.32	-0.627	-0.627	0.00
315	0.114	0.114	0.00	-0.074	-0.075	1.35
360	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000	0.00

Замечания: При аналитическом решении перемещения точек кольца в направлениях x и y определяются по формулам:

$$u(\varphi)=\frac{P_x\cdot R^3}{E\cdot I}\cdot\beta_1(\varphi)+\frac{P_y\cdot R^3}{E\cdot I}\cdot\beta_2(\varphi),$$

где:

$$\beta_1(\varphi)=-0.5\cdot(2\cdot\pi-\varphi)-\sin(\varphi)+0.5\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi);$$

$$\beta_2(\varphi)=1+(2\cdot\pi-\varphi)\cdot\sin(\varphi)-\cos(\varphi)+0.5\cdot\sin^2(\varphi);$$

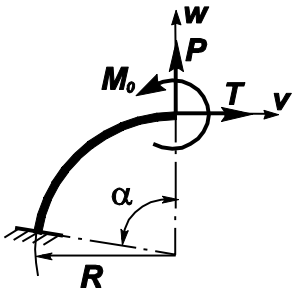
$$v(\varphi)=\frac{P_x\cdot R^3}{E\cdot I}\cdot\gamma_1(\varphi)+\frac{P_y\cdot R^3}{E\cdot I}\cdot\gamma_2(\varphi),$$

где:

$$\gamma_1(\varphi)=-1+\cos(\varphi)+0.5\cdot\sin^2(\varphi),$$

$$\gamma_2(\varphi)=-0.5\cdot(2\cdot\pi-\varphi)-(2\cdot\pi-\varphi)\cdot\cos(\varphi)-\sin(\varphi)-0.5\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi).$$

Консольный кривой брус, нагруженный поперечной сосредоточенной силой на свободном конце



Цель: Проверка точности определения величины перемещения для свободного конца бруса по направлению действия сосредоточенной силы для моделей различных размерностей.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
4.38_c.SPR	Стержневая расчетная модель
4.38_п.SPR	Оболочечная расчетная модель
4.38_o.SPR	Объемная расчетная модель

Формулировка задачи: Консольный кривой брус с продольной осью кругового очертания, имеющей длину разрезного кольца, и с постоянным вдоль оси прямоугольным поперечным сечением нагружается на свободном конце поперечной сосредоточенной силой *P*. Определить перемещение свободного конца бруса *w* по направлению действия сосредоточенной силы.

Ссылки: А.С. Сахаров, И. Альтенбах. Метод конечных элементов в механике твердых тел. -Киев: Вища школа. 1982, Лейпциг: ФЕБ Фахбухферлаг. 1982;
Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наукова думка, 1975.

Исходные данные:

$E = 100.0$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.0$	- коэффициент Пуассона;
$R = 0.20$ м	- радиус дуги продольной оси консольного кривого бруса;
$\alpha = 360^o$	- центральный угол длины дуги продольной оси консольного кривого бруса;
$b = h = 0.01$ м	- размеры поперечного сечения консольного кривого бруса;
$P = 10^{-8}$ кН	- значение поперечной сосредоточенной силы на свободном конце бруса.

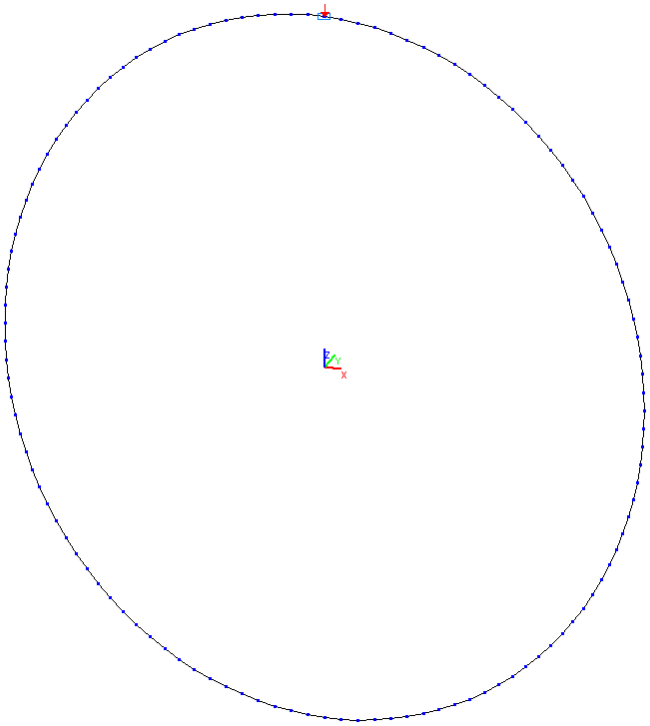
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:

Стержневая модель (С), 120 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 3.0^o, 121 узел;

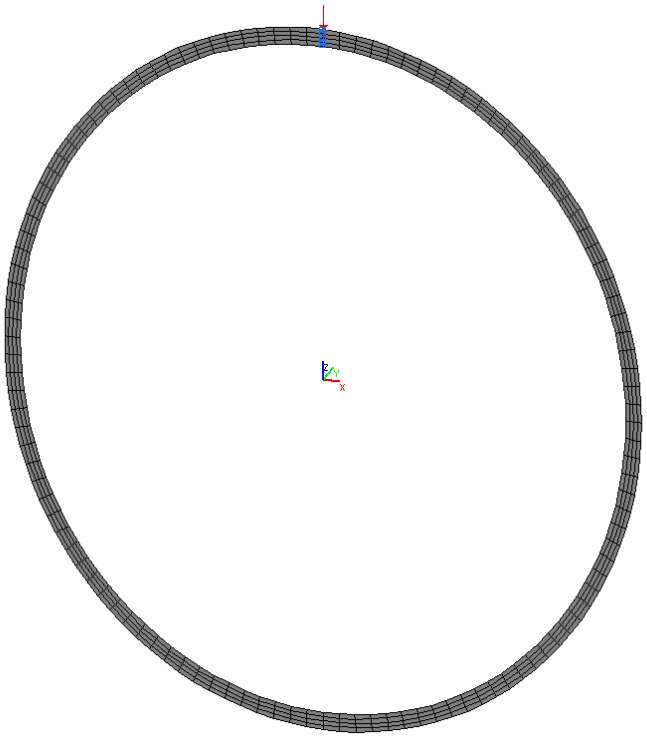
Оболочечная модель (П), 480 восьмиузловых элементов типа 50, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 3.0^o, по высоте бруса с шагом 0.0025 м, 1689 узлов;

Объемная модель (О), 1920 двадцатиузловых элементов типа 37, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 3.0^o, по высоте и ширине бруса с шагом 0.0025 м, 10865 узлов.

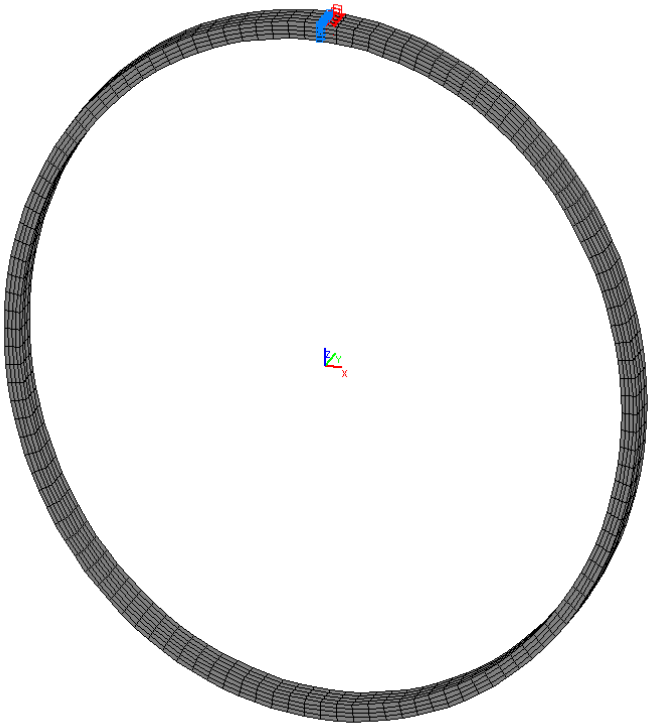
Результаты решения в SCAD



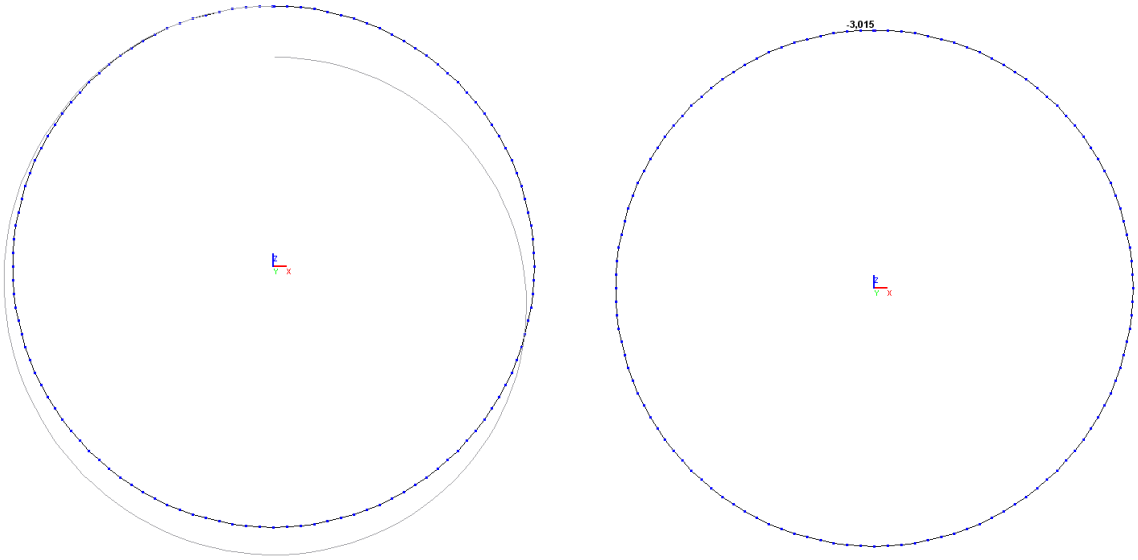
Расчетная схема. Стержневая модель



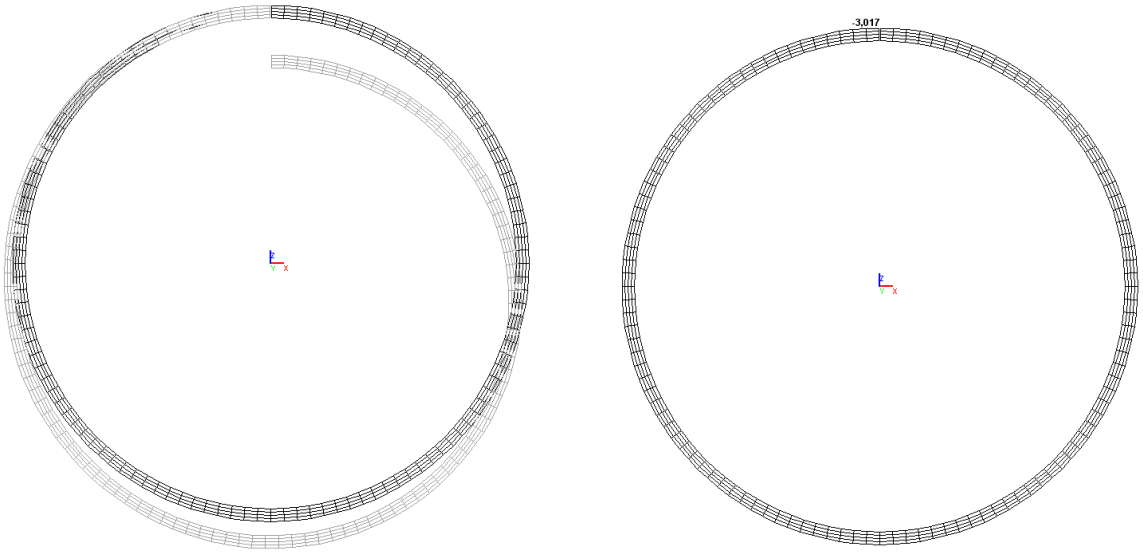
Расчетная схема. Оболочечная модель



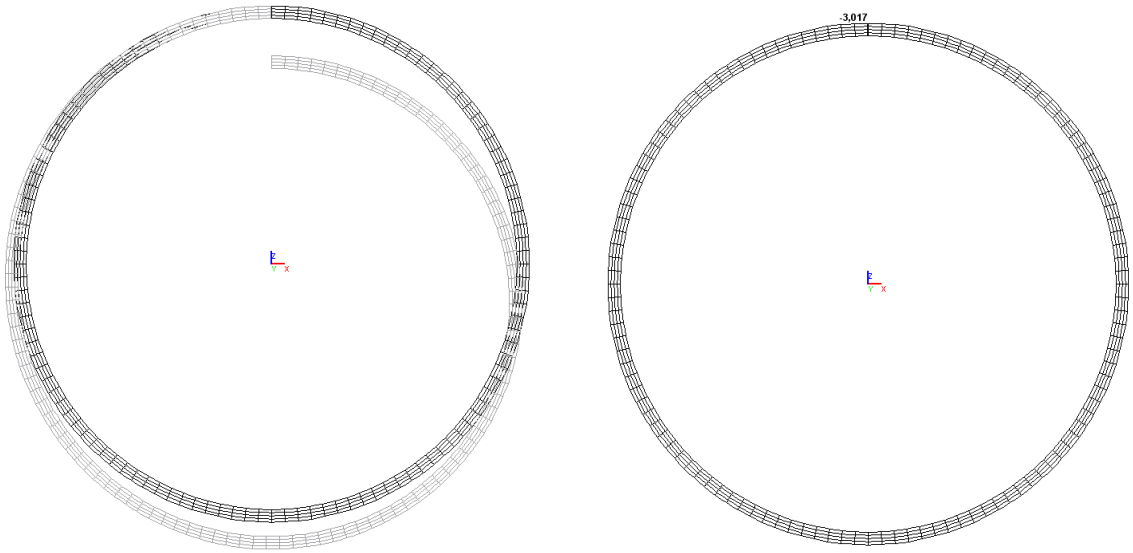
Расчетная схема. Объемная модель



Деформированная схема и значения перемещения свободного конца бруса w в стержневой модели (мм)



Деформированная схема и значения перемещения свободного конца бруса w в оболочечной модели (мм)



Деформированная схема и значения перемещения свободного конца бруса w в объемной модели (мм)

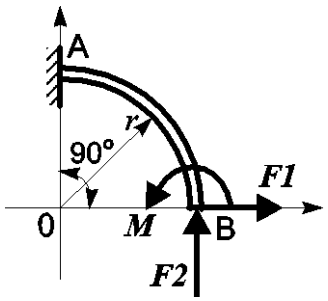
Сравнение решений:

Модель	**Перемещения w, мм**	**Отклонения, %**
Стержневая (С)	3.015	0.03
Оболочечная (П)	3.017	0.03
Объемная (О)	3.017	0.03
Теория	3.016	–

Замечания: При аналитическом решении перемещение свободного конца бруса *w* по направлению действия поперечной сосредоточенной силы определяется по формуле (Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наукова думка, 1975, стр. 392):

$$w = \frac{12 \cdot P \cdot R^3}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{sin(2 \cdot \alpha)}{4} \right).$$

Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения под действием в его плоскости сосредоточенных сил и момента на свободном конце



Цель: Определение деформированного состояния консольного кругового стержня постоянного поперечного сечения от действия в его плоскости сосредоточенных сил и момента на свободном конце.

Файл с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
SSLL06_вариант_1_v11.3.SPR	Расчетная схема – плоская рама. Консольный круговой стержень расположен в плоскости XOZ общей системы координат

Формулировка задачи: Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения нагружается на свободном конце сосредоточенными горизонтальной (нормальной) F1 и вертикальной (тангенциальной) F2 силами и моментом *M*, действующими в его плоскости. Определить горизонтальное X и вертикальное Z перемещения, а также угол поворота UY свободного конца стержня (точка B).

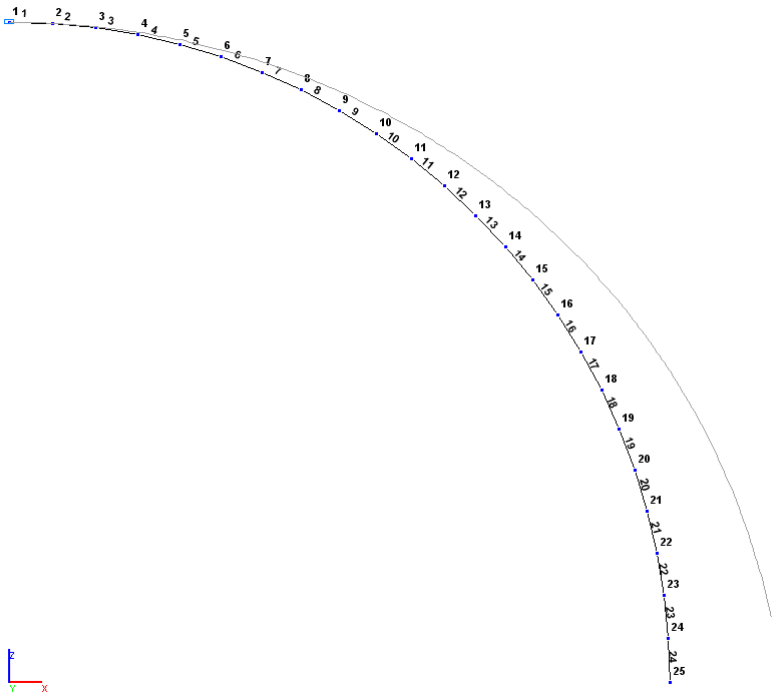
Ссылки: J.S. Przemieniecki, Theory of matrix structural analysis, New York, McGraw-Hill, 1968.

Исходные данные:

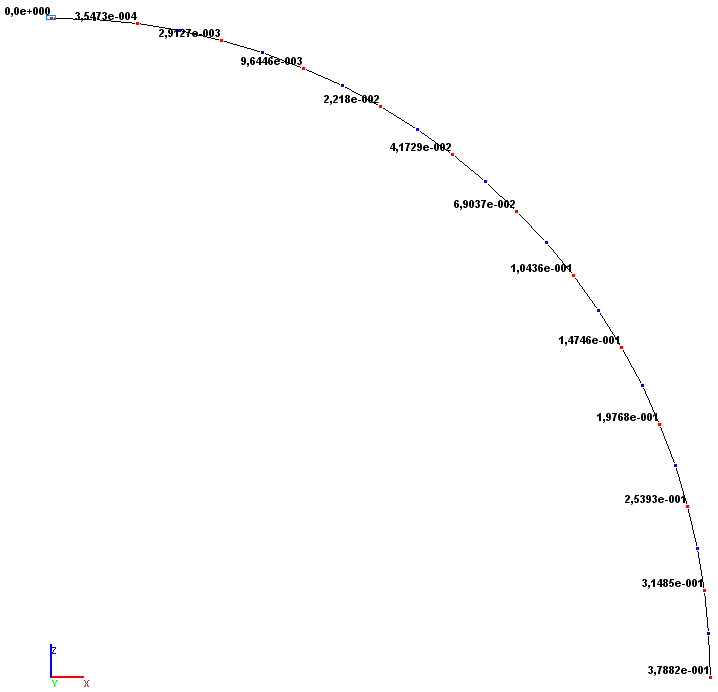
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости консольного кругового стержня;
r = 3.0 м - радиус дуги продольной оси консольного кругового стержня;
$\alpha = 90^{o}$ - центральный угол длины дуги продольной оси консольного кругового стержня;
$d_e = 0.020$ м - наружный диаметр кольцевого поперечного сечения стержня;
$d_i = 0.016$ м - внутренний диаметр кольцевого поперечного сечения стержня;
F1 = 10 Н - значение горизонтальной сосредоточенной силы;
F2 = 5 Н - значение вертикальной сосредоточенной силы;
M = 8 Н·м - значение сосредоточенного момента.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 24 стержневых элемента типа 10. Обеспечение граничных условий достигается: за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z, UY (точка A). Количество узлов в расчетной схеме – 25.

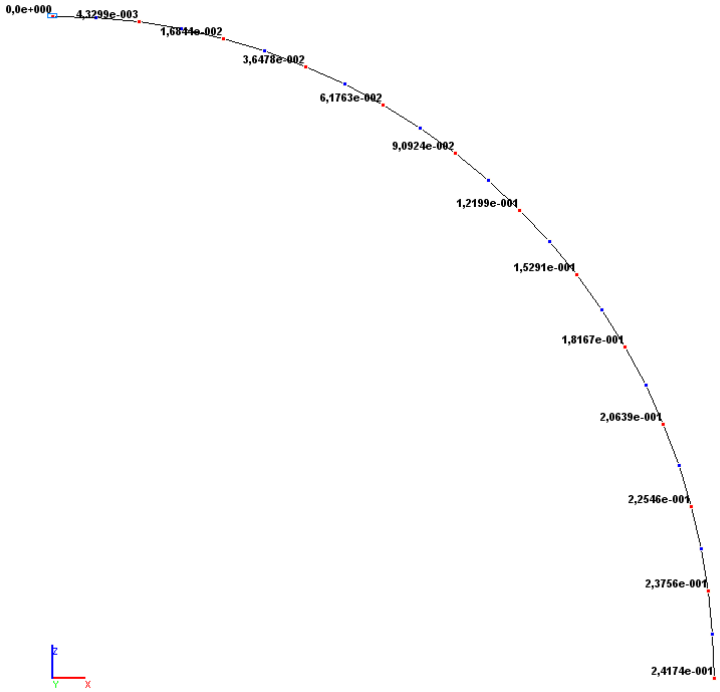
Результаты решения в SCAD



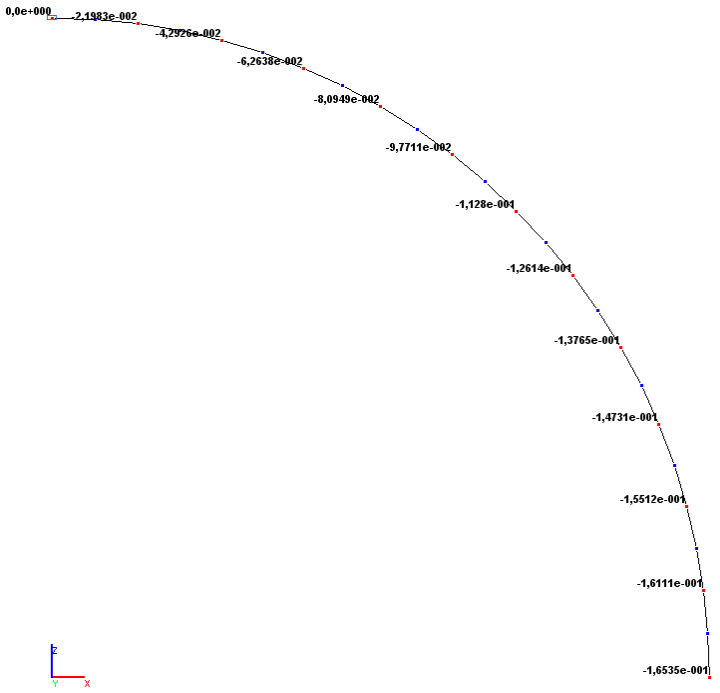
Расчетная и деформированная схемы



Значения горизонтальных перемещений X (м)



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Значения углов поворота UY (рад)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Горизонтальное перемещение X (точка B), м	$3.7908 \cdot 10^{-1}$	$3.7882 \cdot 10^{-1}$	0.07
Вертикальное перемещение Z (точка B), м	$2.4173 \cdot 10^{-1}$	$2.4174 \cdot 10^{-1}$	0.01
Угол поворота UY (точка B), рад	$-1.6539 \cdot 10^{-1}$	$-1.6535 \cdot 10^{-1}$	0.02

Замечания: При аналитическом решении горизонтальное X и вертикальное Z перемещения, а также угол поворота UY свободного конца стержня определяются по следующим формулам:

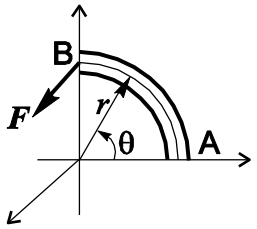
$$X = \frac{r^2}{E \cdot I} \cdot \left(M + F1 \cdot r \cdot \frac{\pi}{4} + F2 \cdot r \cdot \frac{1}{2} \right);$$

$$Z = \frac{r^2}{E \cdot I} \cdot \left(M \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + F1 \cdot r \cdot \frac{1}{2} + F2 \cdot r \cdot \left(\frac{3 \cdot \pi}{4} - 2 \right) \right);$$

$$UY = -\frac{r}{E \cdot I} \cdot \left(M \cdot \frac{\pi}{2} + F1 \cdot r + F2 \cdot r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right), \text{ где:}$$

$$I = \frac{\pi \cdot d_e{}^4}{64} \cdot \left(1 - \left(\frac{d_i}{d_e} \right)^4 \right).$$

Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения под действием из его плоскости сосредоточенной силы на свободном конце



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния консольного кругового стержня постоянного поперечного сечения от действия из его плоскости сосредоточенной силы на свободном конце.

Файл с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
SSLL07_вариант_1_v11.3.SPR	Расчетная схема – система общего вида. Консольный круговой стержень расположен в плоскости XOZ общей системы координат

Формулировка задачи: Консольный круговой стержень постоянного поперечного сечения нагружается на свободном конце сосредоточенной силой F, действующей из его плоскости. Определить перемещение Y свободного конца стержня из его плоскости (точка B), а также крутящий M_x и изгибающий из плоскости M_z моменты для поперечного сечения, соответствующего центральному углу θ от защемленного конца.

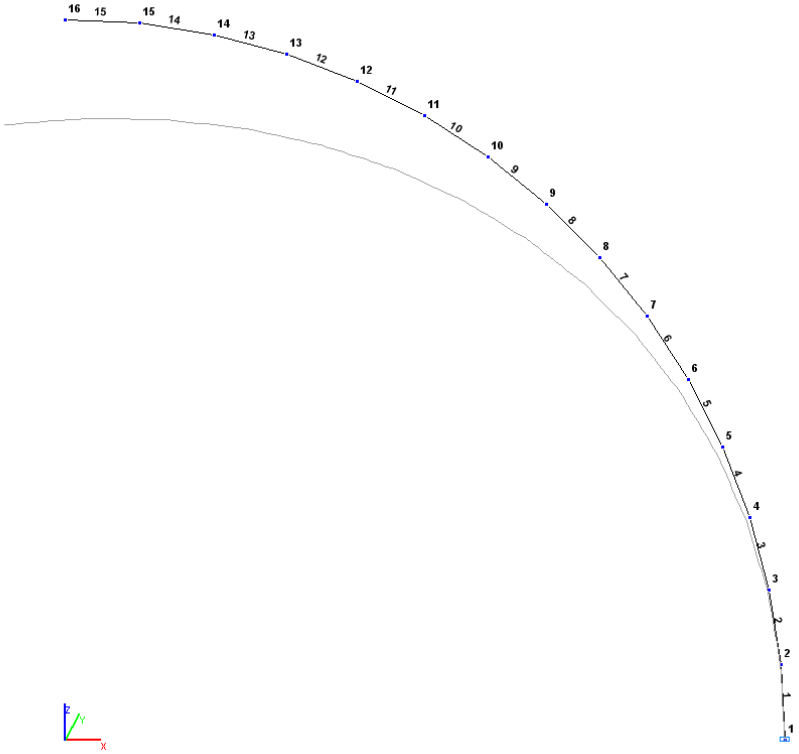
Ссылки: S. Timoshenko, Strength of materials, Part 1: Elementary theory and problem, 3ed, 1955; R.J. Roark, Formulas for stress and strain, 4ed, New York, McGraw-Hill, 1965.

Исходные данные:

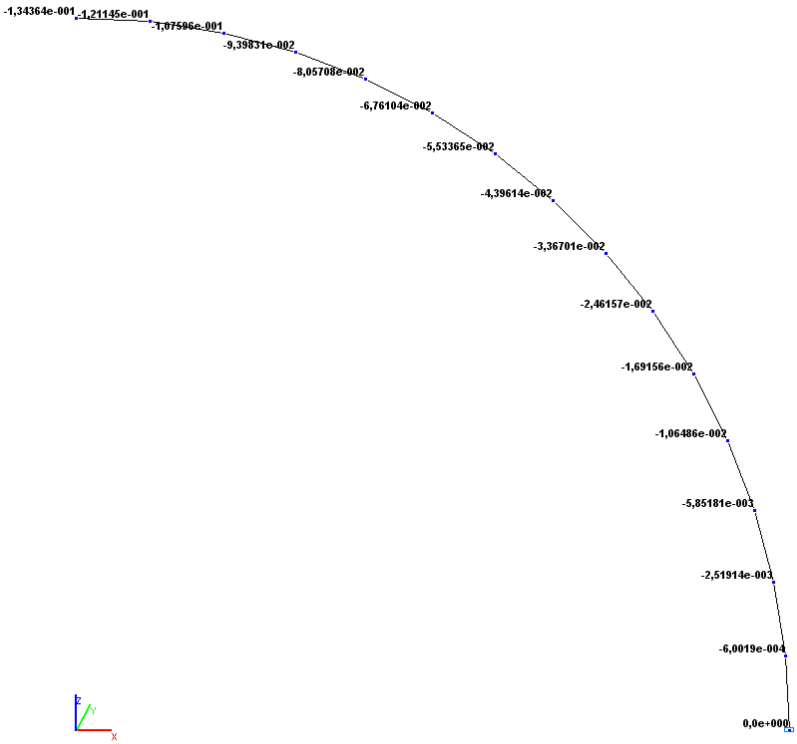
$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости консольного кругового стержня;
$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
$r = 1.0$ м - радиус дуги продольной оси консольного кругового стержня;
$\theta = 90^{o}$ - центральный угол длины дуги продольной оси консольного кругового стержня;
$d_e = 0.020$ м - наружный диаметр кольцевого поперечного сечения стержня;
$d_i = 0.016$ м - внутренний диаметр кольцевого поперечного сечения стержня;
$F = 100$ Н - значение сосредоточенной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 15 стержневых элементов типа 10. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ (точка A). Количество узлов в расчетной схеме – 16.

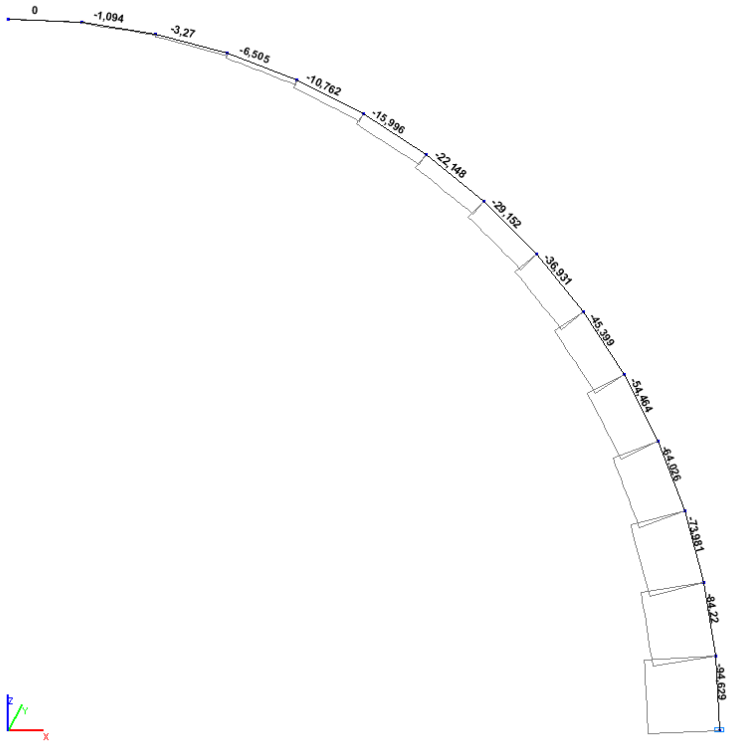
Результаты решения в SCAD



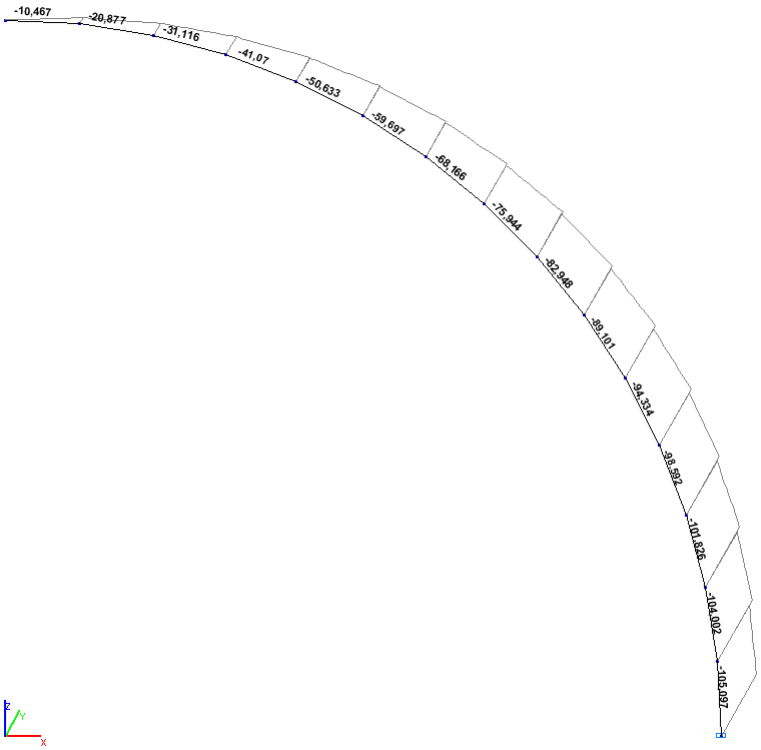
Расчетная и деформированная схемы



Значения перемещений из плоскости стержня Y (м)



Эпюра крутящих моментов M_x (кН·м)



Эпюра изгибающих моментов из плоскости стержня M_z (кН·м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Перемещение из плоскости стержня Y (точка B), м	$-1.34462\cdot10^{-1}$	$-1.34364\cdot10^{-1}$	0.07
Крутящий момент M_x (θ = 15º), Н·м	-74.118	-73.981	0.18
Изгибающий момент из плоскости стержня M_z (θ = 15º), Н·м	-96.593	-96.593	0.00

***Замечания*:** При аналитическом решении перемещение Y свободного конца стержня из его плоскости (точка B), а также крутящий M_x и изгибающий из плоскости M_z моменты для поперечного сечения, соответствующего центральному углу θ от защемленного конца, определяются по следующим формулам:

$$Y = \frac{F\cdot r^3}{E\cdot I}\cdot\left(\frac{1+3\cdot\lambda}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\lambda\right),\ \text{где:}$$

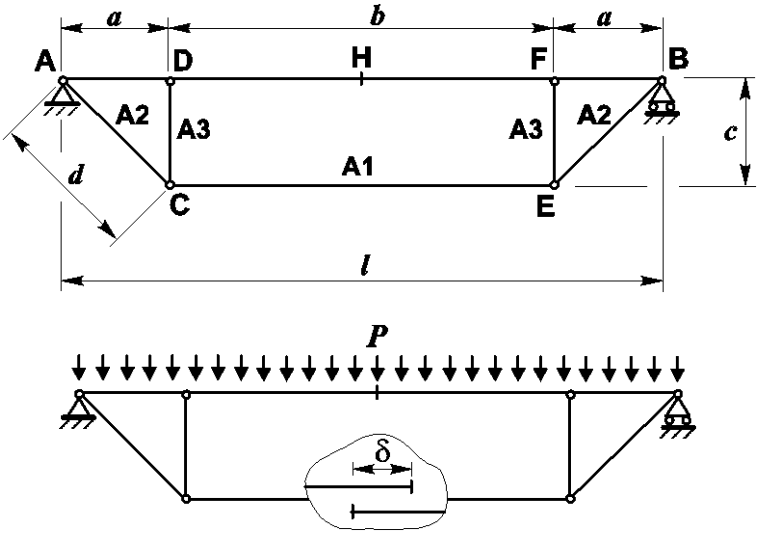
$$I_z = \frac{\pi\cdot d_e^{\,4}}{64}\cdot\left(1-\left(\frac{d_i}{d_e}\right)^4\right), \qquad \lambda = \frac{E\cdot I_z}{G\cdot I_x} = 1+\nu$$

(для кольцевого поперечного сечения);

$$M_x = F\cdot r\cdot cos(\theta);$$

$$M_z = F\cdot r\cdot(1-sin(\theta)).$$

Однопролетная балка с предварительно напряженной затяжкой, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния балки с затяжкой с учетом деформаций поперечного сдвига в балке.

Имя файла с исходными данными: **SSLL13_v11.3.spr**

Формулировка задачи: Однопролетная балка с затяжкой, стянутой на величину смещения δ через шпренгельную систему, находится под равномерно-распределенной нагрузкой *q*. Определить продольное усилие *N* в затяжке CE, изгибающий момент *M* в сечении балки жесткости H в середине ее пролета, вертикальное перемещение z в точке D крепления распорки к балке жесткости.

Ссылки: M. Laredo, Resistence des materiaux, Paris, Dunod, 1970, p. 77.

Исходные данные:

Затяжка A1:

$EF = 9.450 \cdot 10^8$ Н - продольная жесткость;

Распорка A2:

$EF = 7.308 \cdot 10^8$ Н - продольная жесткость;

Балка жесткости AB:

$EF = 3.1836 \cdot 10^9$ Н - продольная жесткость;

$EIy = 4.5654 \cdot 10^7$ Н/м^2 - изгибная жесткость;

$GFy = 5.09376 \cdot 10^8$ Н - сдвиговая жесткость;

Нагрузки и воздействия:

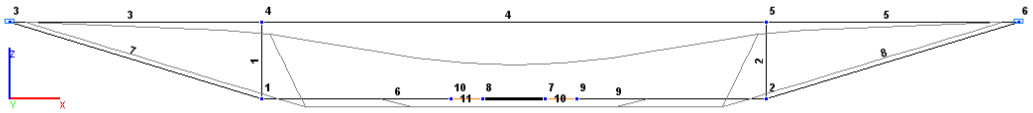
$\delta = 6.52 \cdot 10^{-3}$ м - смещение в затяжке;

$P = 5.0 \cdot 10^4$ Н/м - поперечная равномерно-распределенная нагрузка на балку жесткости.

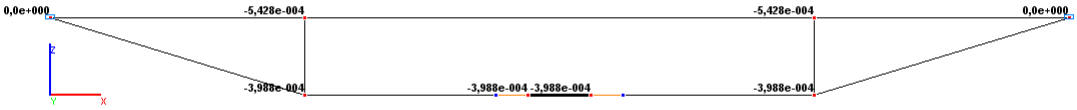
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, затяжка A1 – 4 элемента типа 1, распорки A2 – 2 элемента типа 1, балка жесткости AB – 3 элемента типа 2 с учетом сдвига, элементы, моделирующие предварительное напряжение затяжки на участке CE – 2 элемента типа 154 с продольной жесткостью $EF = 1.0 \cdot 10^{18}$ Н. Затяжка на участке CE представлена двумя элементами равной длины, увеличенной относительно длины половины участка за счет введения жестких вставок в продольном направлении. Увеличение длины элементов производится с целью разъединения их узлов у оси симметрии конструкции на стадии предварительного напряжения. К каждому из этих узлов присоединяется по одному нуль-элементу, с помощью которых осуществляется их смещение в продольном направлении. С целью предотвращения геометрической изменяемости системы на участке затяжки CE объединяются поэлементно перемещения узлов в поперечном направлении по степени свободы Z. Обеспечение граничных условий по направлению

степени свободы Z в опорных узлах A и B достигается за счет наложения соответствующей жесткой связи. Количество узлов в расчетной схеме – 10.

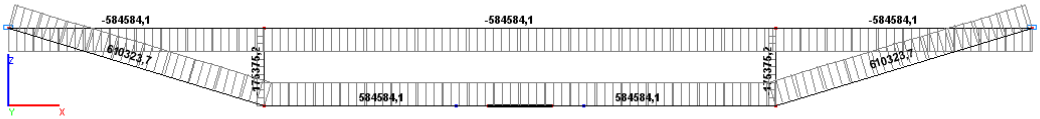
Результаты решения в SCAD



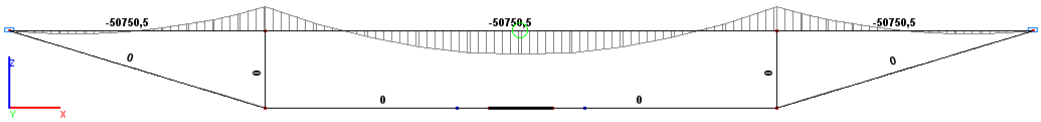
Расчетная и деформированная схемы

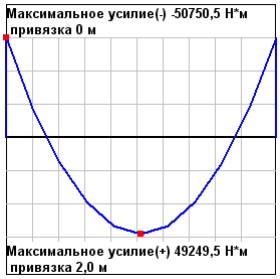


Значения вертикальных перемещений Z (м)



Значения продольных сил N (Н)



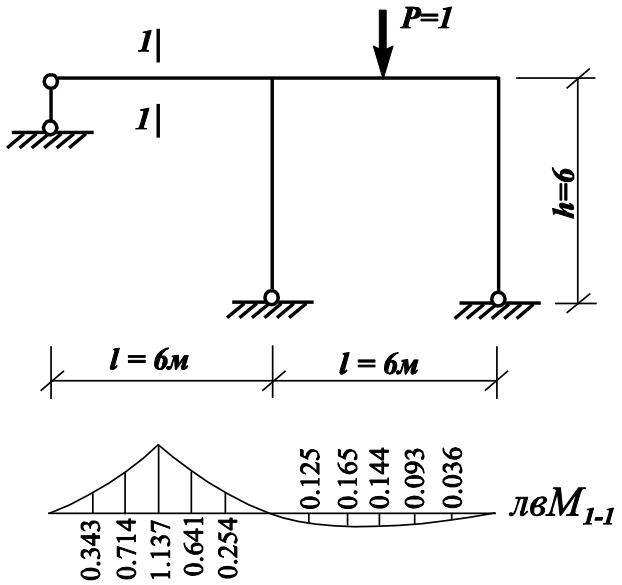


Значения изгибающих моментов M (Н·м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Изгибающий момент M_H, Н·м	49249.5	49249.5	0.00
Продольное усилие N_{CE}, Н	584584.0	584584.1	0.00
Вертикальное перемещение Z_D, м	$-5.428 \cdot 10^{-4}$	$-5.428 \cdot 10^{-4}$	0.00

Двухпролетная одноэтажная рама под действием постоянной поперечной единичной силы, перемещающейся вдоль пролетов ригеля с малой скоростью. Построение линий влияния внутренних усилий в сечениях рамы



Цель: Определение значений изгибающего момента в сечении середины левого пролета ригеля двухпролетной одноэтажной рамы в зависимости от положения постоянной поперечной единичной силы, перемещающейся вдоль пролетов ригеля с малой скоростью.

Имя файла с исходными данными: **Influence_Line.SPR**

Формулировка задачи: Вдоль ригеля двухпролетной одноэтажной рамы перемещается с малой скоростью постоянная поперечная единичная сила P. Ригель жестко сопряжен со средней и крайней правой стойками, которые имеют шарнирное опирание, и свободно оперт краем левого пролета. Определить значения изгибающего момента в сечении середины левого пролета ригеля рамы $M_{1\text{-}1}$ в зависимости от положения поперечной силы и построить линию влияния.

Ссылки: А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников, Строительная механика. Стержневые системы, Москва, Стройиздат, 1981, стр. 352-356.

Исходные данные:

l = 6.0 м	- длина ригелей рамы;
h = 6.0 м	- высота стоек рамы;
EA = $1.0 \cdot 10^6$ кН	- продольная жесткость конструктивных элементов рамы;
EI = 83.3333 кН·м^2	- изгибная жесткость конструктивных элементов рамы;
P = 1.0 кН	- значение поперечной единичной силы.

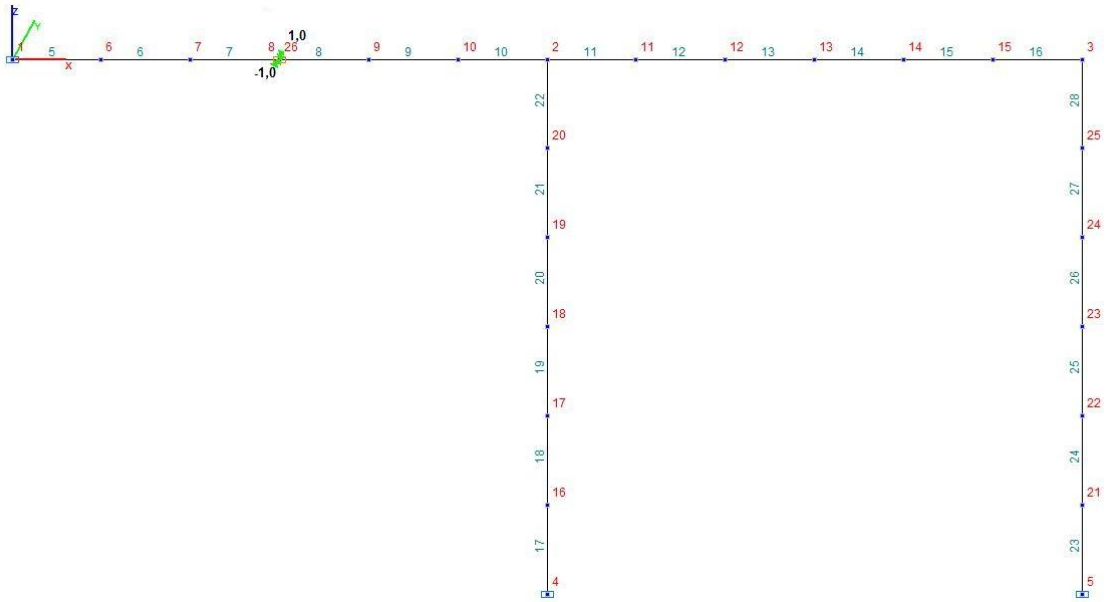
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 24 элемента типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей конструктивных элементов (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы стоек по направлениям степеней свободы X, Z и на опорный узел левого пролета ригеля по направлению степени свободы Z.

Задача решается кинематическим методом:

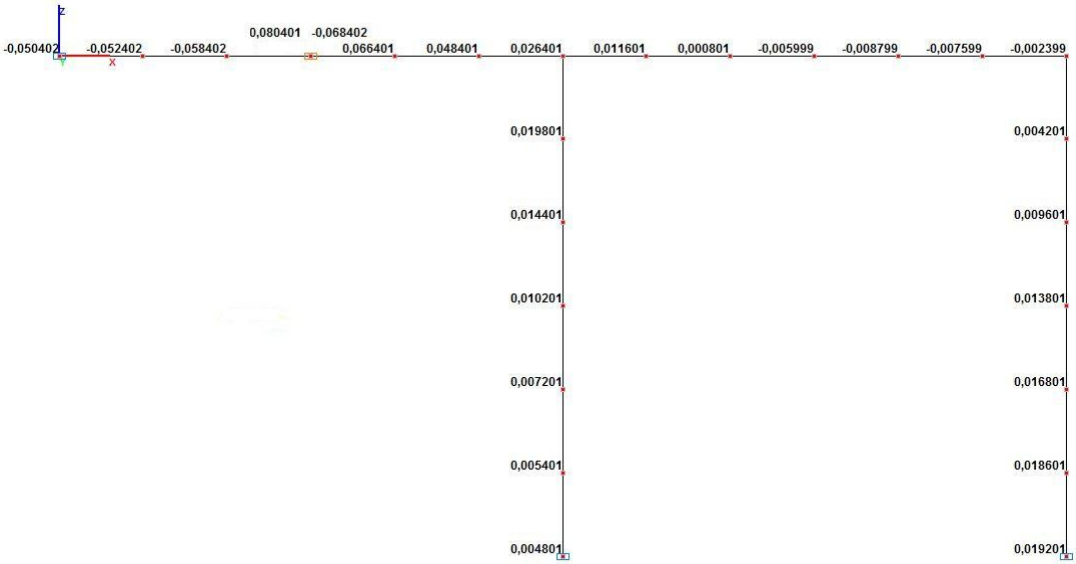
- производится разделение элементов середины левого пролета ригеля с образованием пары совпадающих узлов, каждый из которых принадлежит одному из этих смежных элементов;
- для пары совпадающих узлов объединяются перемещения по всем степеням свободы, кроме UY;
- к узлам пары прикладываются единичные сосредоточенные противоположные по знаку изгибающие моменты M_y = 1.0 кН·м.

Результат линии влияния изгибающего момента в сечении середины левого пролета рамы [узлы 26, 8] следует смотреть в виде деформаций по формуле: –Z/[UY26-UY8]/1000. Делить выражение на 1000 необходимо, если размерность Z задана в мм.
Количество узлов в расчетной схеме – 26.

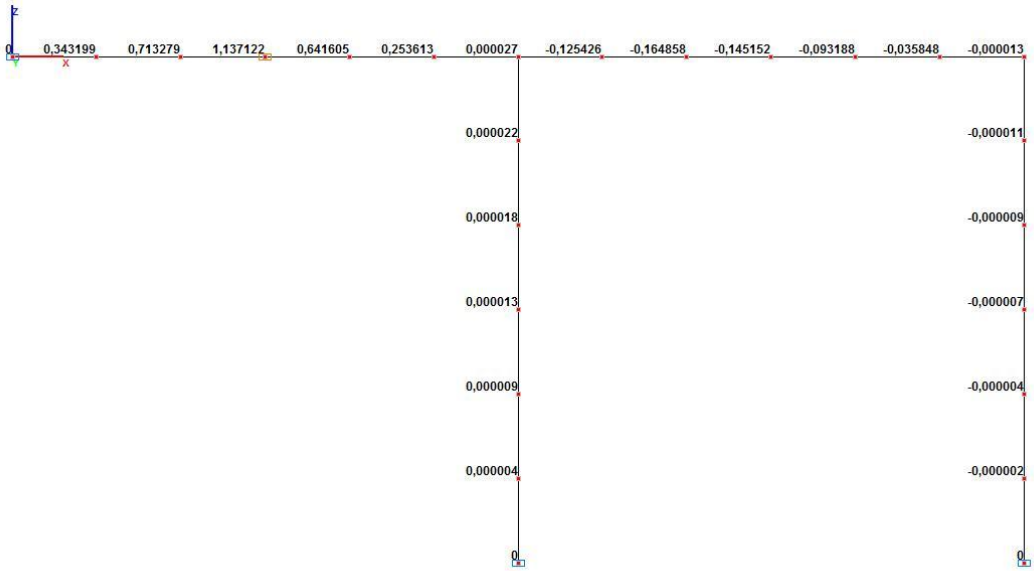
Результаты решения в SCAD



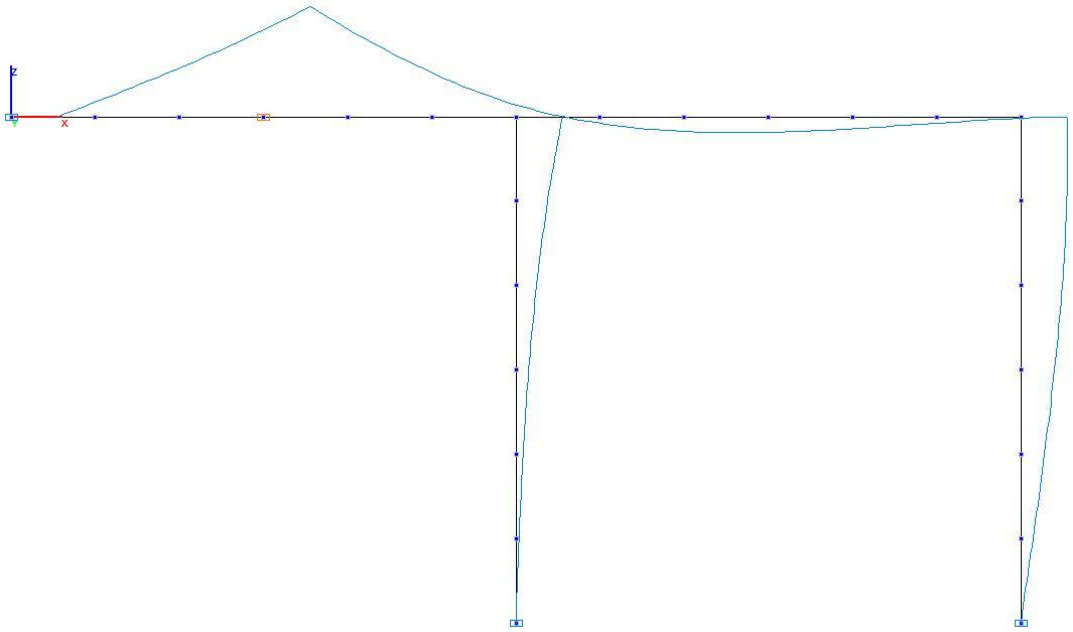
Расчетная схема



Значения углов поворота UY (рад)



Значения изгибающего момента в сечении середины левого пролета ригеля рамы M_{1-1} (кН·м) в зависимости от положения поперечной силы



Линия влияния изгибающего момента в сечении середины левого пролета ригеля рамы M_{1-1}

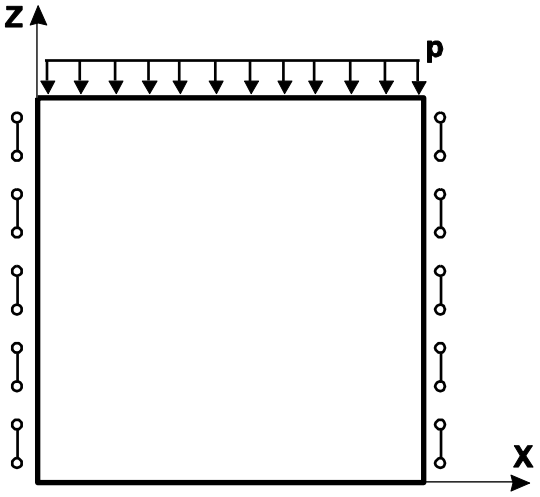
Сравнение решений:

Значения изгибающего момента в сечении середины левого пролета ригеля рамы M_{1-1} (кН·м) в зависимости от положения поперечной силы

Положение поперечной силы от края левого пролета, м	Теория	SCAD	Отклонение, %
0.00	0.000	0.000	0.00
1.00	0.343	0.343	0.00
2.00	0.714	0.713	0.14
3.00	1.137	1.137	0.00
4.00	0.641	0.642	0.16
5.00	0.254	0.254	0.00
6.00	0.000	0.000	0.00
7.00	-0.125	-0.125	0.00
8.00	-0.165	-0.165	0.00
9.00	-0.144	-0.145	0.69

Положение поперечной силы от края левого пролета, м	Теория	SCAD	Отклонение, %
10.00	-0.093	-0.093	0.00
11.00	-0.036	-0.036	0.00
12.00	0.000	0.000	0.00

Изгиб прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне



Цель: Определение деформированного состояния прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, от воздействия равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне.

Имя файла с исходными данными: **KSLS01_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: К верхней стороне прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, приложена равномерно распределенная нагрузка *p*, действующая в плоскости балки-стенки по оси y. Определить компоненты тензора перемещений в декартовых координатах $u(x,z)$ и $v(x,z)$ для срединной поверхности балки-стенки в ее плоскости.

Ссылки: А.С. Калманок, Расчет балок-стенок, Москва, Госстройиздат, 1956.

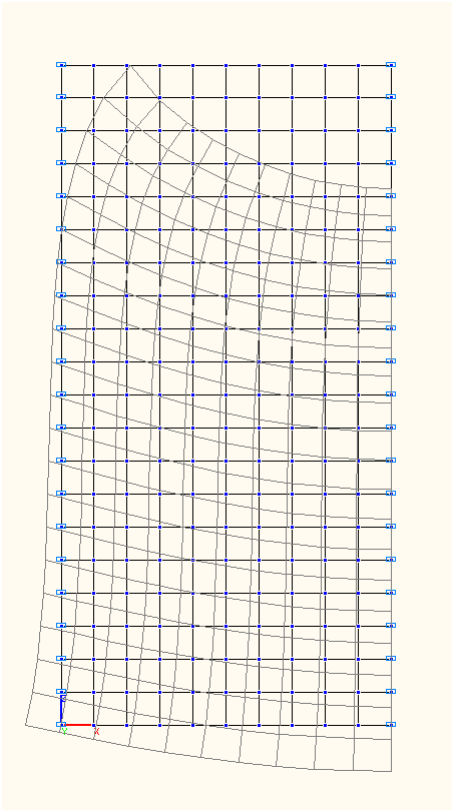
Исходные данные:

$E = 2.65 \cdot 10^6$ Па	- модуль упругости;
$\nu = 0.15$	- коэффициент Пуассона;
h = 0.1 м	- толщина балки-стенки;
a = 1.6 м	- длина пролета балки-стенки;
b = 1.6 м	- высота балки-стенки;
p = 500.0 Н/м	- равномерно распределенная нагрузка.

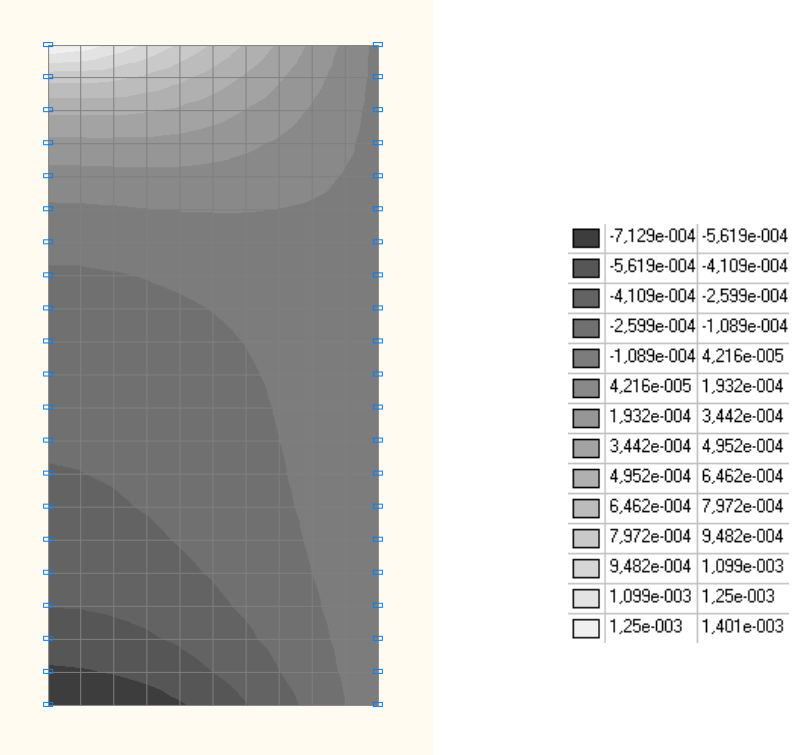
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система, 200 элементов балки-стенки типа 21. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.08 м в направлениях осей x и z общей системы координат. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z для боковой стороны и по направлению степени свободы X на оси симметрии. Количество узлов в расчетной схеме – 231.

Результаты решения в SCAD

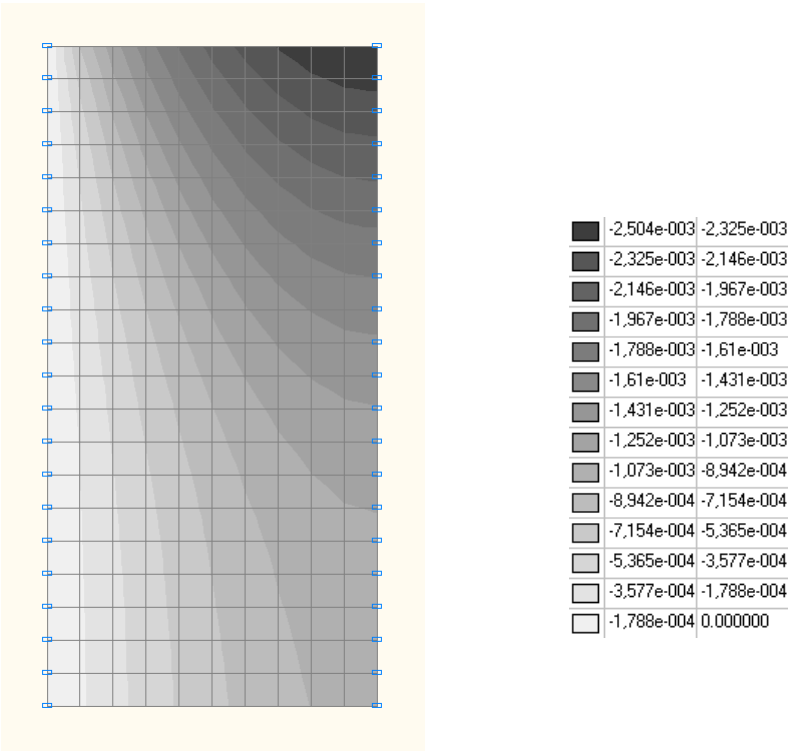
Расчетная схема



Деформированная схема



Значения перемещений вдоль пролета балки-стенки u (м)



Значения перемещений по высоте балки-стенки v (м)

Сравнение решений:

Координаты		**Перемещения *u*, м**			**Перемещения *v*, м**		
x	**z**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.0	0.0	$-0.719\cdot10^{-3}$	$-0.713\cdot10^{-3}$	0.83	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	—
0.0	0.8	$-0.220\cdot10^{-3}$	$-0.221\cdot10^{-3}$	0.45	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	—
0.0	1.6	$1.468\cdot10^{-3}$	$1.401\cdot10^{-3}$	4.56	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	—
0.4	0.0	$-0.508\cdot10^{-3}$	$-0.504\cdot10^{-3}$	0.79	$-0.672\cdot10^{-3}$	$-0.667\cdot10^{-3}$	0.74
0.4	0.8	$-0.148\cdot10^{-3}$	$-0.148\cdot10^{-3}$	0.00	$-0.950\cdot10^{-3}$	$-0.945\cdot10^{-3}$	0.53

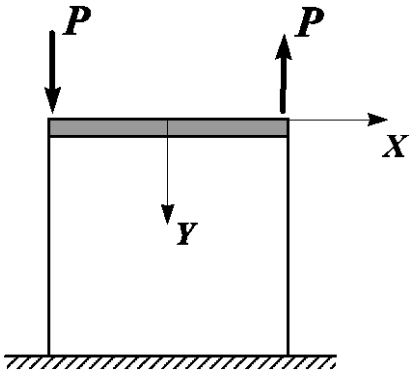
Координаты		Перемещения *u*, м			Перемещения *v*, м		
x	**z**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.4	1.6	$0.780\cdot10^{-3}$	$0.778\cdot10^{-3}$	0.26	$-2.032\cdot10^{-3}$	$-2.027\cdot10^{-3}$	0.25
0.8	0.0	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	–	$-0.950\cdot10^{-3}$	$-0.943\cdot10^{-3}$	0.74
0.8	0.8	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	–	$-1.326\cdot10^{-3}$	$-1.320\cdot10^{-3}$	0.45
0.8	1.6	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	–	$-2.510\cdot10^{-3}$	$-2.504\cdot10^{-3}$	0.24

***Замечания*:** При аналитическом решении компоненты тензора перемещений в декартовых координатах $u(x,y)$ и $v(x,z)$ для срединной поверхности балки-стенки в ее плоскости могут быть вычислены по следующим формулам:

$$u(x,z)=-\frac{p\cdot b}{E\cdot h}\cdot\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{a}{m\cdot\pi\cdot b}\cdot\left\{\left[2\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right]\cdot\left[\left(-2+(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot cth\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right)\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b-z}{a}\right)-\right.\right.$$
$$-(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b-z}{a}\cdot ch\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b-z}{a}\right)\Big]-\left[sh^2\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)+\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]\cdot\left[\left(-2+(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot cth\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right)\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)\right.$$
$$-(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\cdot ch\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)\Big]-\left[sh^2\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)-\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]\cdot\left[\left(2\cdot\nu+(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot cth\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right)\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\cdot ch\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)\right]\right\}\cdot\frac{\left[1+(-1)^{m+1}\right]\cdot cos\left(m\cdot\pi\cdot\frac{x}{a}\right)}{m\cdot\pi\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\cdot\left[sh^2\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)-\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]}$$

$$v(x,z)=\frac{p\cdot b}{E\cdot h}\cdot\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{a}{m\cdot\pi\cdot b}\cdot\left\{\left[2\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\nu+(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot cth\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right)\cdot ch\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b-z}{a}\right)-\right.\right.$$
$$-(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b-z}{a}\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b-z}{a}\right)\Big]+\left[sh^2\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)+\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]\cdot\left[\left(1-\nu+(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot cth\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right)\cdot ch\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)-\right.$$
$$-(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)\Big]+\left[sh^2\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)-\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]\cdot\left[\left(3+\nu+(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot cth\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\right)\cdot ch\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-(1+\nu)\cdot m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{z}{a}\right)\right]\right\}\cdot\frac{\left[1+(-1)^{m+1}\right]\cdot sin\left(m\cdot\pi\cdot\frac{x}{a}\right)}{m\cdot\pi\cdot sh\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)\cdot\left[sh^2\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)-\left(m\cdot\pi\cdot\frac{b}{a}\right)^2\right]}$$

Чистый изгиб квадратной пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, защемленной по одной стороне и свободно опертой по центру противоположной стороны



Цель: Проверка равновесия сечений пластины, параллельных опорным сторонам, по касательным напряжениям.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
4.29_балка_КЭ_2.SPR	1 вариант расчетной схемы – опорный стержень из элементов конечной жесткости типа 2
4.29_балка_КЭ_100.SPR	2 вариант расчетной схемы – опорный стержень из элемента твердого тела типа 100

Формулировка задачи: Квадратная пластина, находящаяся в условиях плоского напряженного состояния, защемленная по одной стороне и свободно опертая через жесткий стержень по противоположной стороне, испытывает воздействие в виде пары сосредоточенных сил *P*, размещенных на противоположных концах стержня и направленных перпендикулярно его оси. Проверить равенство значений площадей эпюр касательных напряжений τ по сечениям пластины, параллельным опорным сторонам, значениям соответствующих опорных реакций *H*.

Ссылки: А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. — Москва: СКАД СОФТ, 2011.

Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^5$ кПа - модуль упругости;
$\nu = 0.25$ - коэффициент Пуассона;
$\delta = 1.0$ м - толщина балки-стенки;
$a = 16.0$ м - длина стороны пластины;
$P = 1000.0$ кН - сосредоточенная сила.

Конечно-элементная модель: Рассматривается два варианта расчетной схемы.

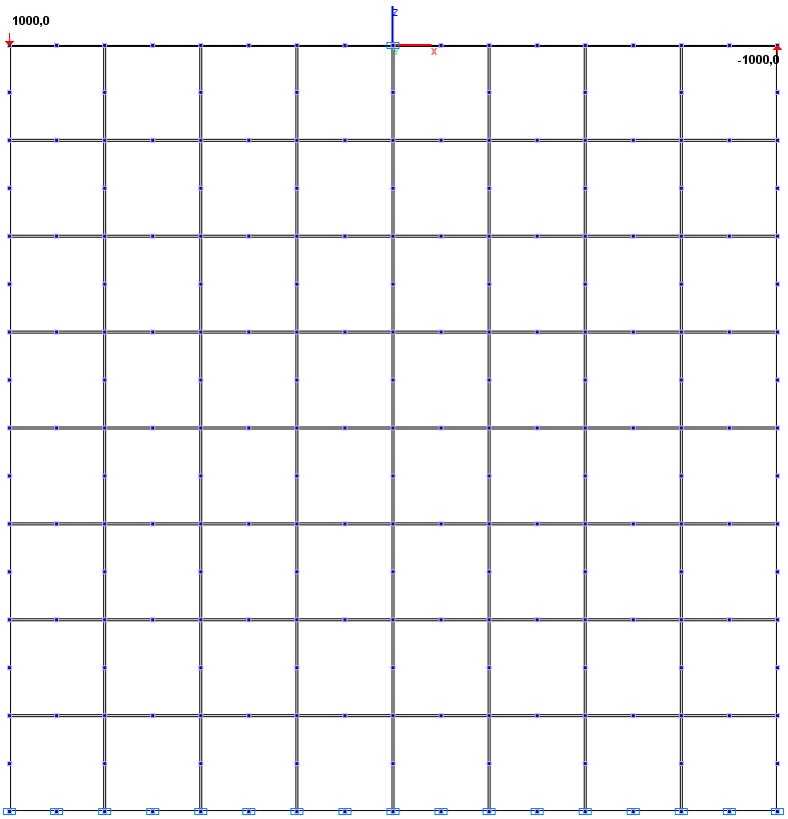
Вариант 1:

Расчетная схема – типа плоская рама, элементы пластины – 64 восьмиузловых элемента типа 30, элементы стержня – 16 элементов типа 2 ($EA = 3.0 \cdot 10^{15}$ кН, $EI = 3.0 \cdot 10^{12}$ кН·м^2). Сетка конечных элементов разбита с шагом 1.0 м в направлениях, параллельных опорным сторонам. Количество узлов в расчетной схеме – 225.

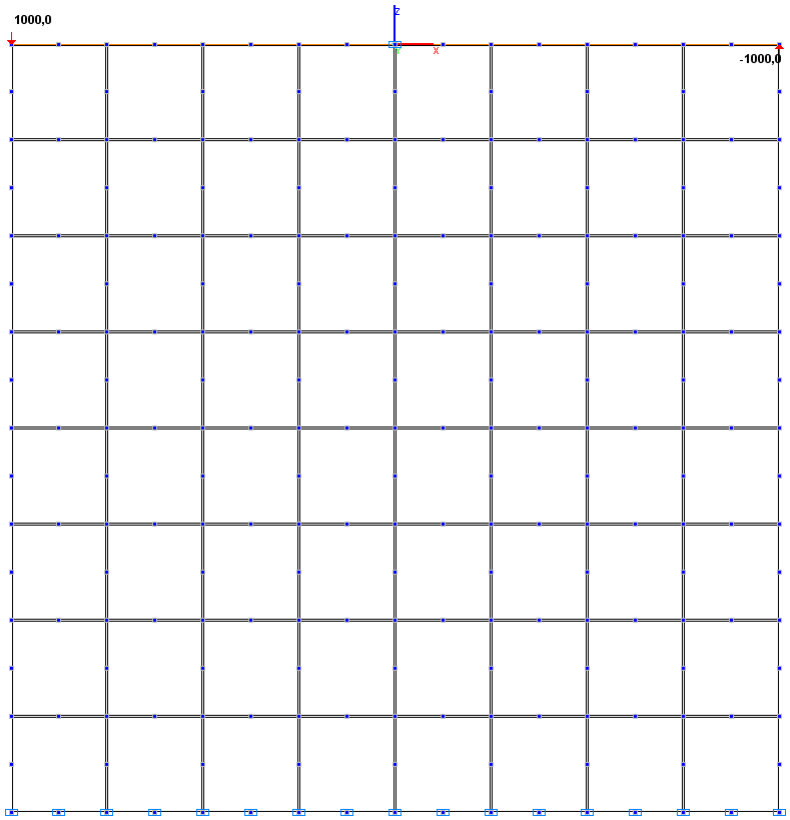
Вариант 2:

Расчетная схема – типа плоская рама, элементы пластины – 64 восьмиузловых элемента типа 30, элементы стержня – 1 элемент типа 100 (твердое тело с ведущим узлом по центру свободно опертой стороны пластины). Сетка конечных элементов разбита с шагом 1.0 м в направлениях, параллельных опорным сторонам. Количество узлов в расчетной схеме – 225.

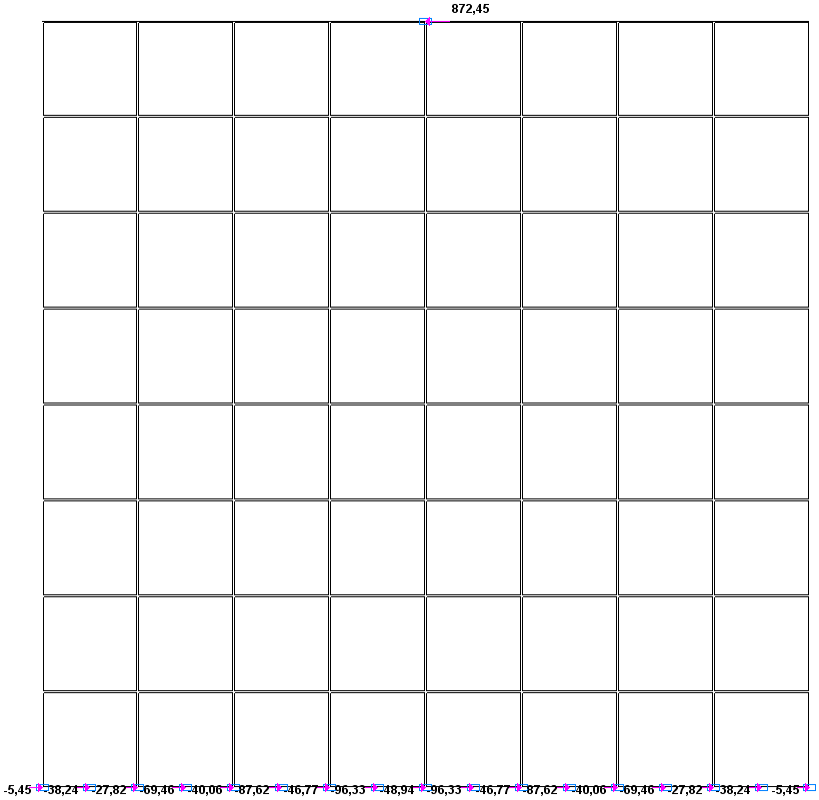
Результаты решения в SCAD



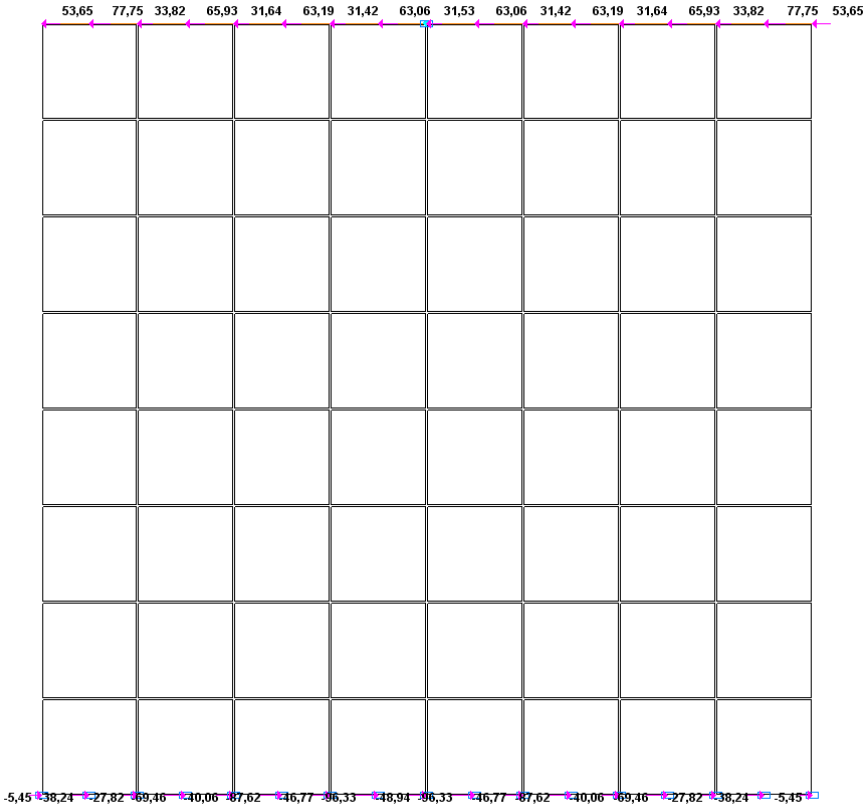
Расчетная схема. Вариант 1



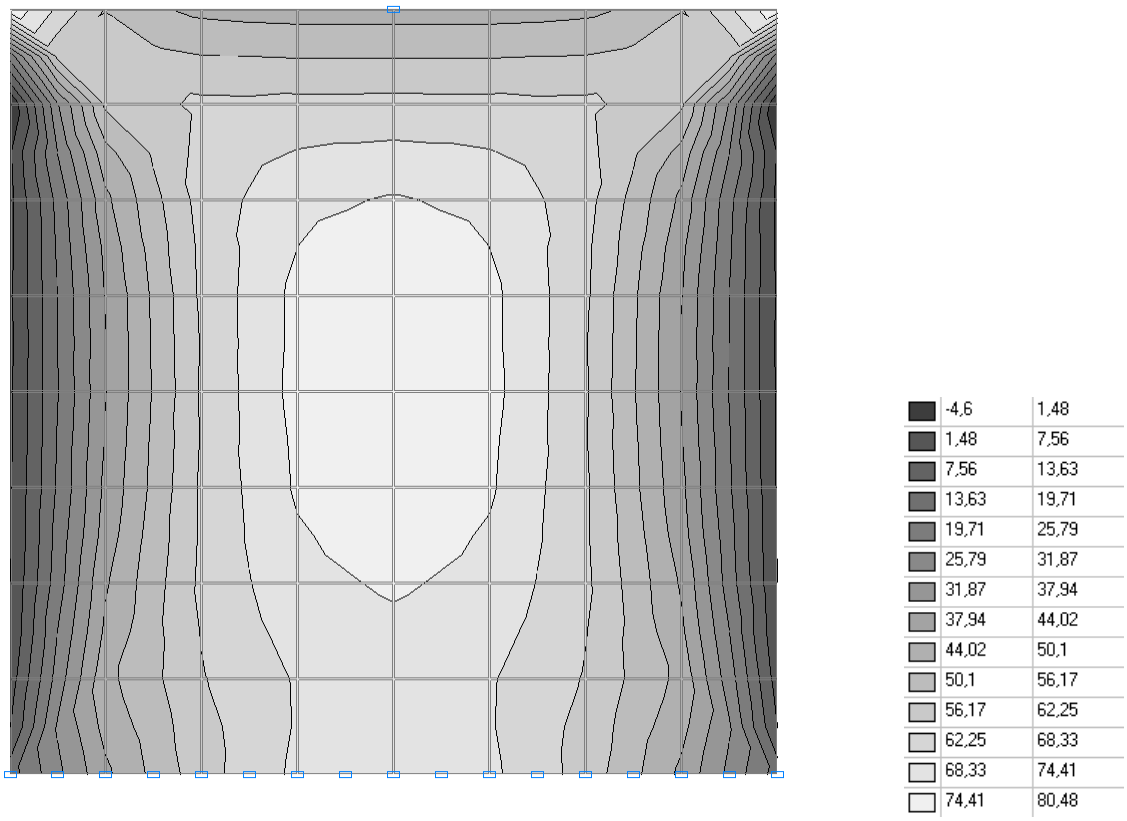
Расчетная схема. Вариант 2



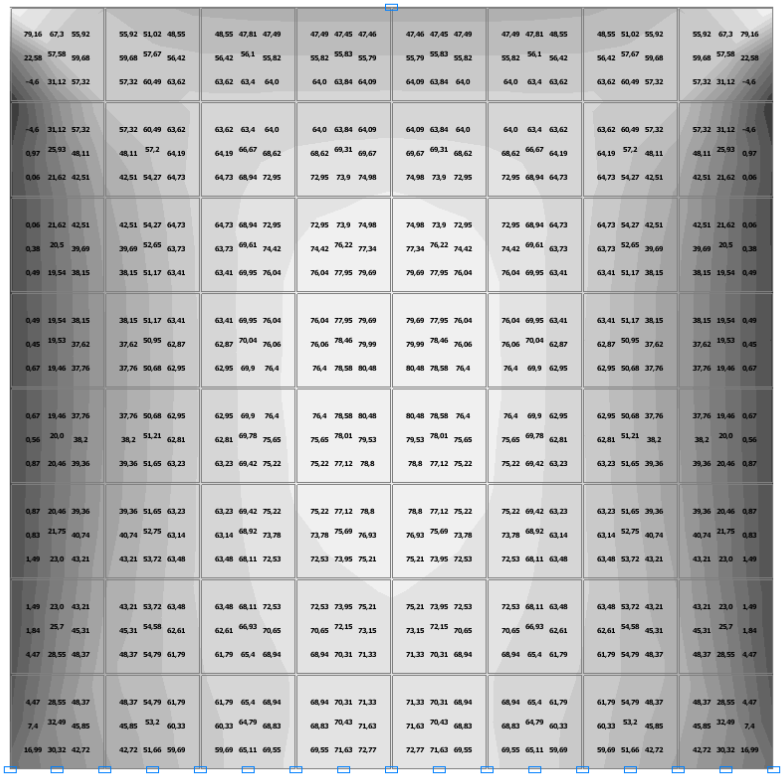
Значения опорных реакций H (кН) для расчетной схемы по варианту 1



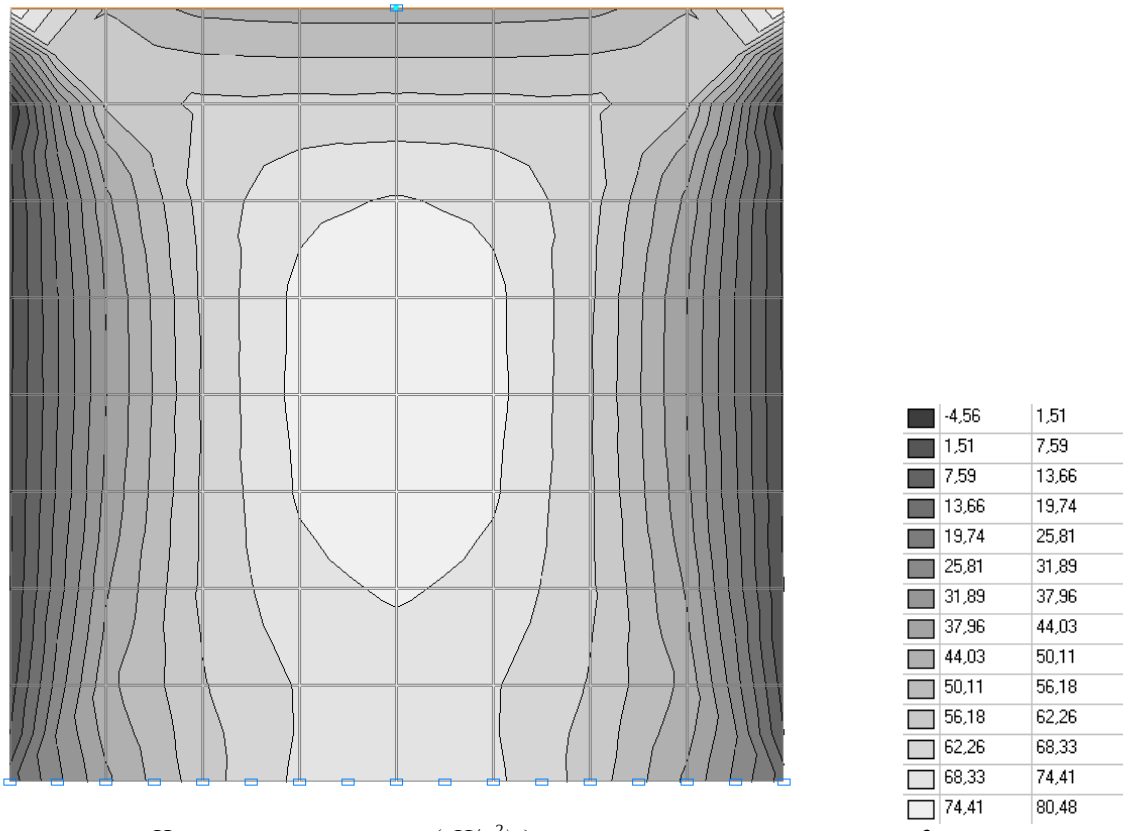
Значения опорных реакций H (кН) для расчетной схемы по варианту 2



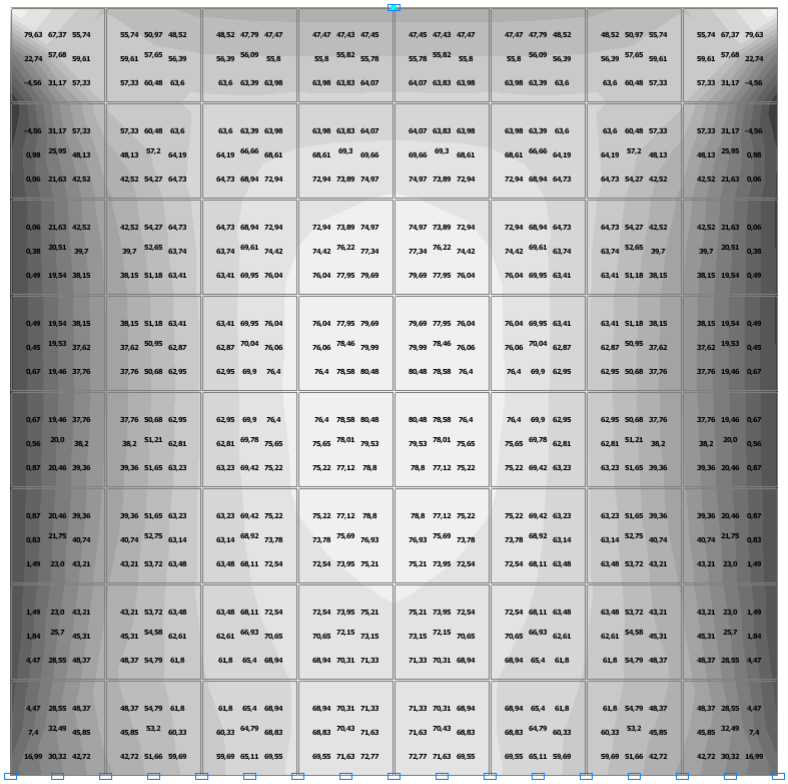
Изолинии напряжений τ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 1



Значения напряжений τ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 1



Изолинии напряжений τ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 2



Значения напряжений τ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 2

Сравнение решений:

Сравнение значений площадей эпюр касательных напряжений τ по сечениям пластины, параллельным опорным сторонам и расположенным на расстоянии y от свободно опертой стороны, со значением опорной реакции *H* по свободно опертой стороне.

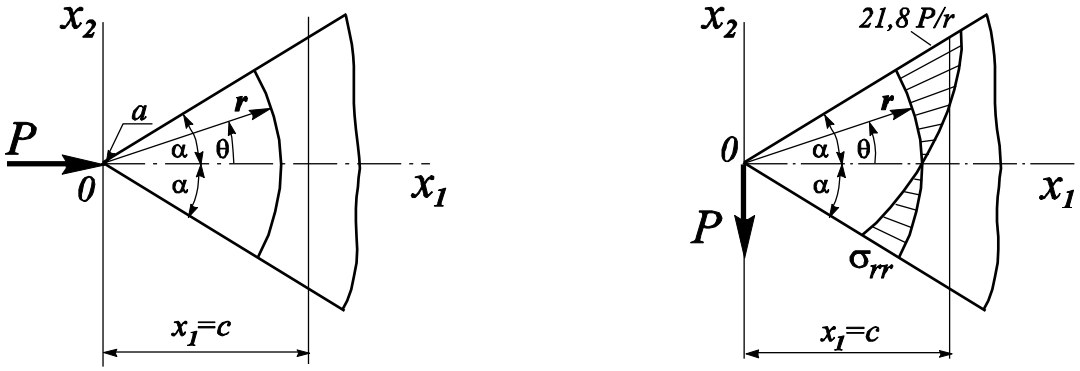
Расчетная схема по варианту 1
H = 872.45 кН

y, м	$Q = \delta \cdot \int_0^a \tau \cdot dx$ **, кН**	**Отклонения, %**
0.0	857.71	1.69
2.0	867.07	0.62
4.0	872.87	0.05
6.0	872.60	0.02
8.0	872.59	0.02
10.0	872.61	0.02
12.0	872.70	0.03
14.0	872.10	0.04
16.0	871.11	0.15

Расчетная схема по варианту 2
H = 872.45 кН

y, м	$Q = \delta \cdot \int_0^a \tau \cdot dx$ **, кН**	**Отклонения, %**
0.0	857.67	1.69
2.0	867.06	0.62
4.0	872.88	0.05
6.0	872.61	0.02
8.0	872.59	0.02
10.0	872.62	0.02
12.0	872.71	0.03
14.0	872.11	0.04
16.0	871.12	0.15

Сжатие и изгиб симметричного клина сосредоточенными силами, приложенными к его вершине (задача Мичелла)



***Цель*:** Определение напряженного состояния симметричного клина единичной толщины в полярных координатах при сжатии и изгибе сосредоточенными силами, приложенными к его вершине.

Имя файла с исходными данными: **4.22.SPR**

Формулировка задачи: К вершине клина, толщина которого равна единице, приложены сжимающая сила P_{x1}, действующая по оси симметрии клина OX1, и изгибающая сила P_{x2}, представляющая собой кососимметричную нагрузку относительно оси симметрии клина OX1. Определить компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина.

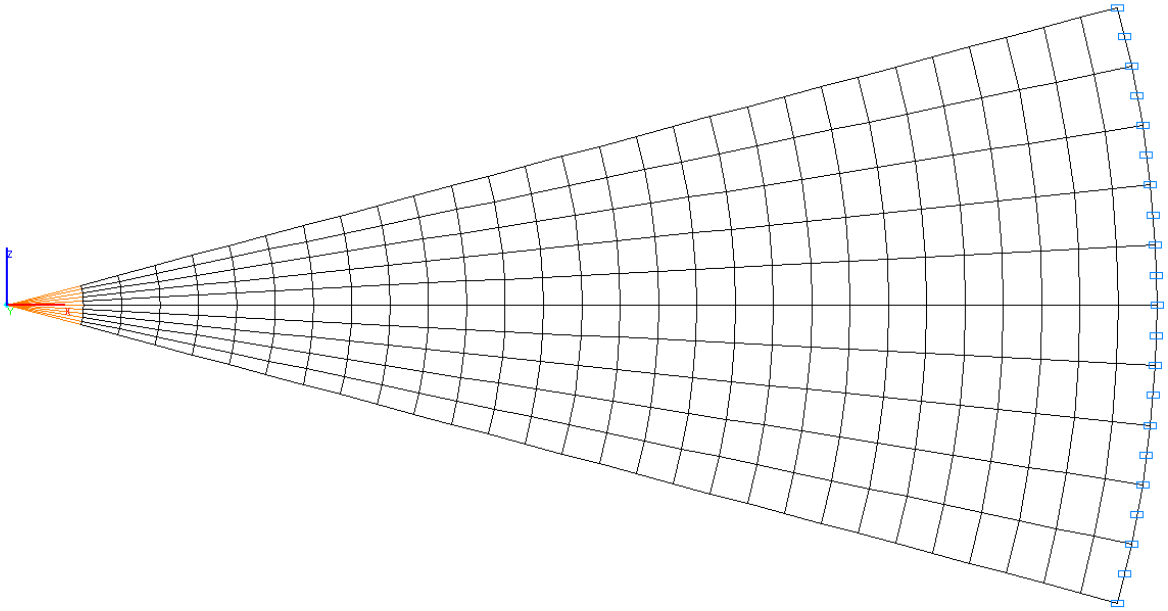
Ссылки: С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979.

Исходные данные:

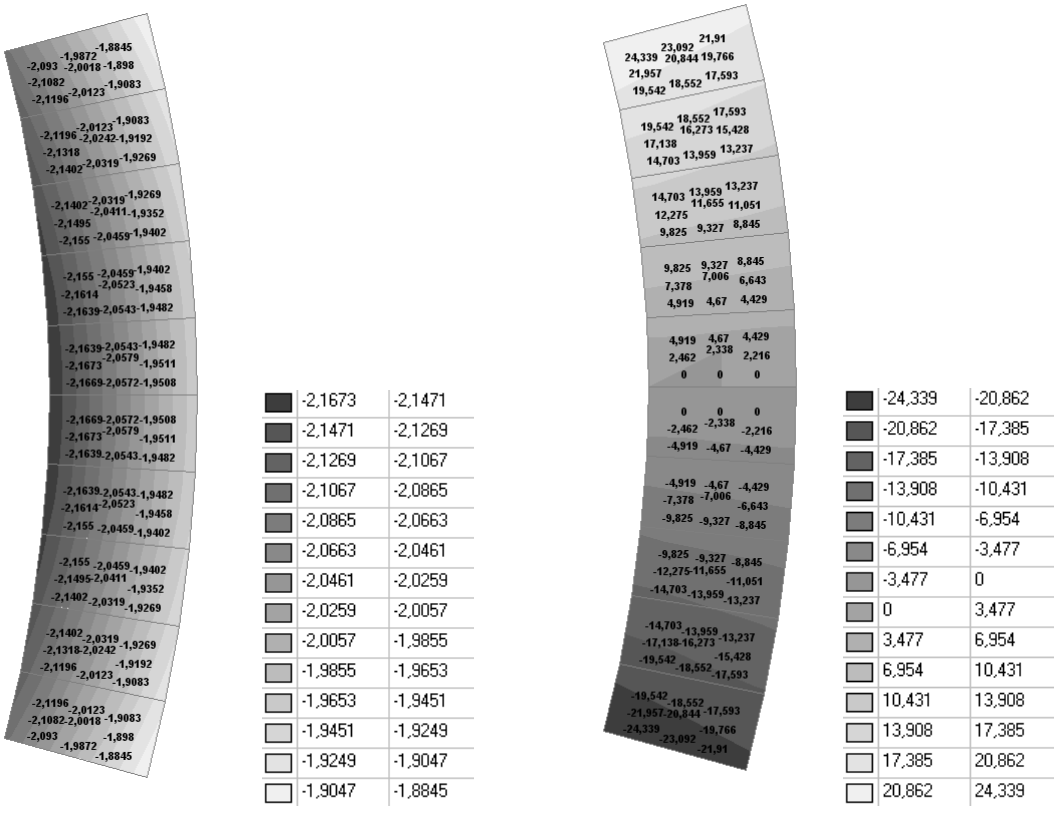
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м	- толщина клина;
$2 \cdot \alpha = 30^o$	- угол при вершине клина;
R = 15.0 м	- радиус закрепленного конца клина;
P_{x1} = -5.0 кН	- сосредоточенная сила, сжимающая клин (горизонтальная);
P_{x2} = 5.0 кН	- сосредоточенная сила, изгибающая клин (вертикальная).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы клина – 280 восьмиузловых элементов типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.5 м в радиальном направлении и с шагом 3º в тангенциальном направлении. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Ввиду того, что на цилиндрической поверхности малого радиуса *a* у вершины клина сила P_{x1} не может быть представлена как равнодействующая напряжений, распределенных по закону аналитического решения, приведенного ниже, острие клина моделируется твердым телом с ведущим узлом при вершине клина и ведомыми узлами на радиальном расстоянии a = 1.0 м от вершины клина (тип элемента – 100). Так как на закрепленном конце клин не испытывает усилий, распределенных по закону аналитического решения, для получения точного решения на радиальном расстоянии r = 5.0 м от воздействия силы P_{x2} радиальное расстояние до закрепленного конца принято равным R = 15.0 м. Количество узлов в расчетной схеме – 918.

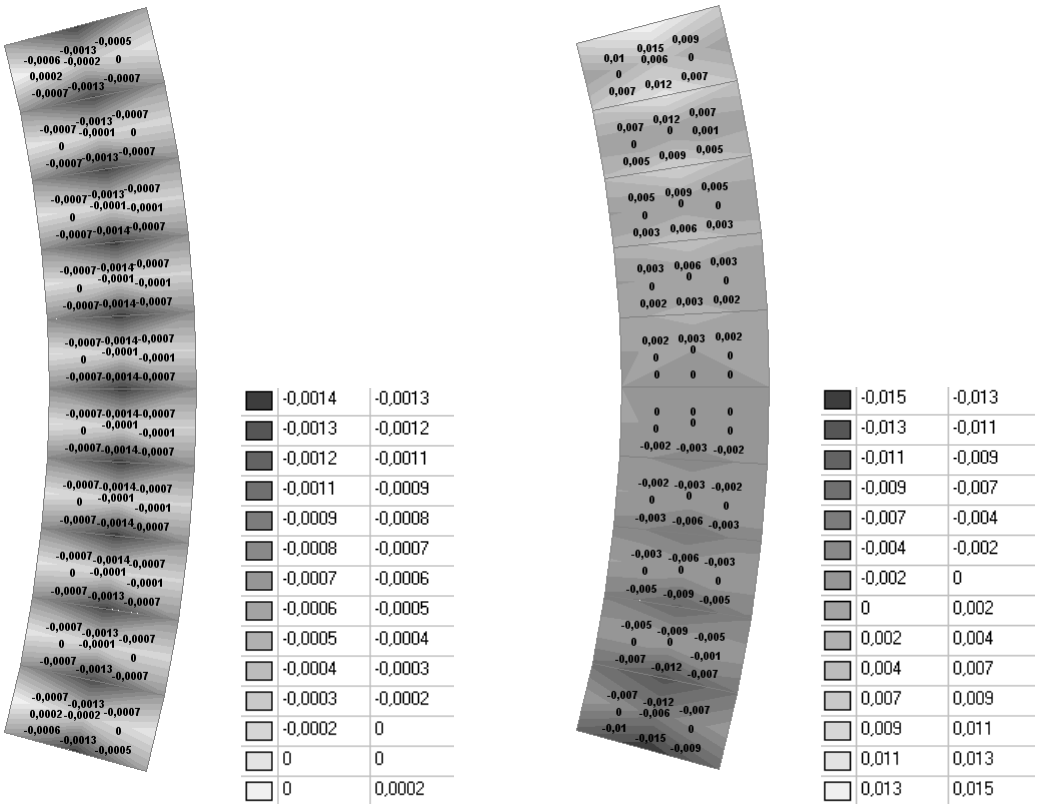
Результаты решения в SCAD



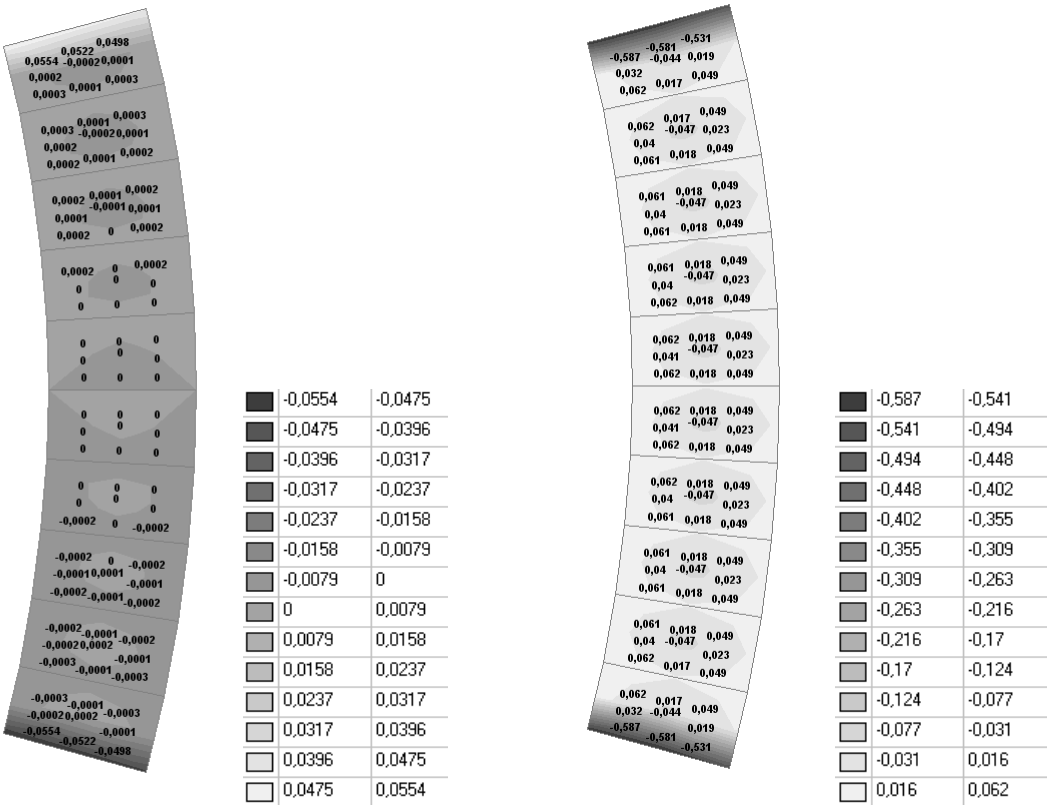
Расчетная схема



Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при воздействии сжимающей силы P_{x1} и изгибающей силы P_{x2}



Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сжимающей силы P_{x1} и изгибающей силы P_{x2}



Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сжимающей силы P_{x1} и изгибающей силы P_{x2}

Сравнение решений:

Компоненты тензора напряжений на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина при воздействии сжимающей силы P_{x1}

Угол θ	**Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	-1.8873	-1.8845	0.15
0º	-1.9539	-1.9508	0.16
+15º	-1.8873	-1.8845	0.15

Угол θ	**Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	0.0000	-0.0005	—
0º	0.0000	-0.0007	—
+15º	0.0000	-0.0005	—

Угол θ	**Напряжения $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	0.0000	-0.0498	—
0º	0.0000	0.0000	—
+15º	0.0000	0.0498	—

Компоненты тензора напряжений на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина при воздействии изгибающей силы P_{x2}

Угол θ	**Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	-21.9350	-21.9098	0.11
0º	0.0000	0.0000	—
+15º	21.9350	21.9098	0.11

Угол θ	**Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	0.0000	-0.0086	—
0º	0.0000	0.0000	—
+15º	0.0000	0.0086	—

Угол θ	**Напряжения $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	0.0000	0.5314	—
0º	0.0000	0.0494	—
+15º	0.0000	-05314	—

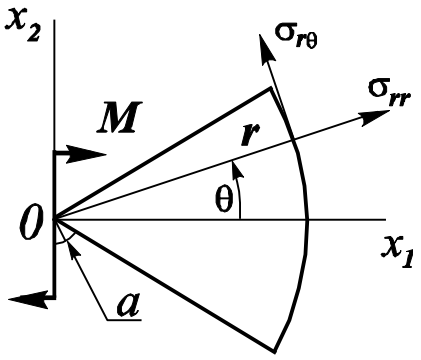
Замечания: При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в теле клина при воздействии сжимающей силы P_{x1} определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 273):

$$\sigma_{rr} = \frac{2 \cdot P \cdot \cos\theta}{r \cdot (2 \cdot \alpha + \sin(2 \cdot \alpha))}; \qquad \sigma_{\theta\theta} = 0; \qquad \sigma_{r\theta} = 0.$$

При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в теле клина при воздействии изгибающей силы P_{x2} определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 275):

$$\sigma_{rr} = \frac{2 \cdot P \cdot \sin\theta}{r \cdot (2 \cdot \alpha - \sin(2 \cdot \alpha))}; \qquad \sigma_{\theta\theta} = 0; \qquad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Изгиб симметричного клина сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине (задача Инглиса)



Цель: Определение напряженного состояния симметричного клина единичной толщины в полярных координатах при изгибе сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине.

Имя файла с исходными данными: **4.23.SPR**

Формулировка задачи: К вершине клина, толщина которого равна единице, приложен момент *M*, действующий в плоскости клина X_1OX_2. Определить компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина.

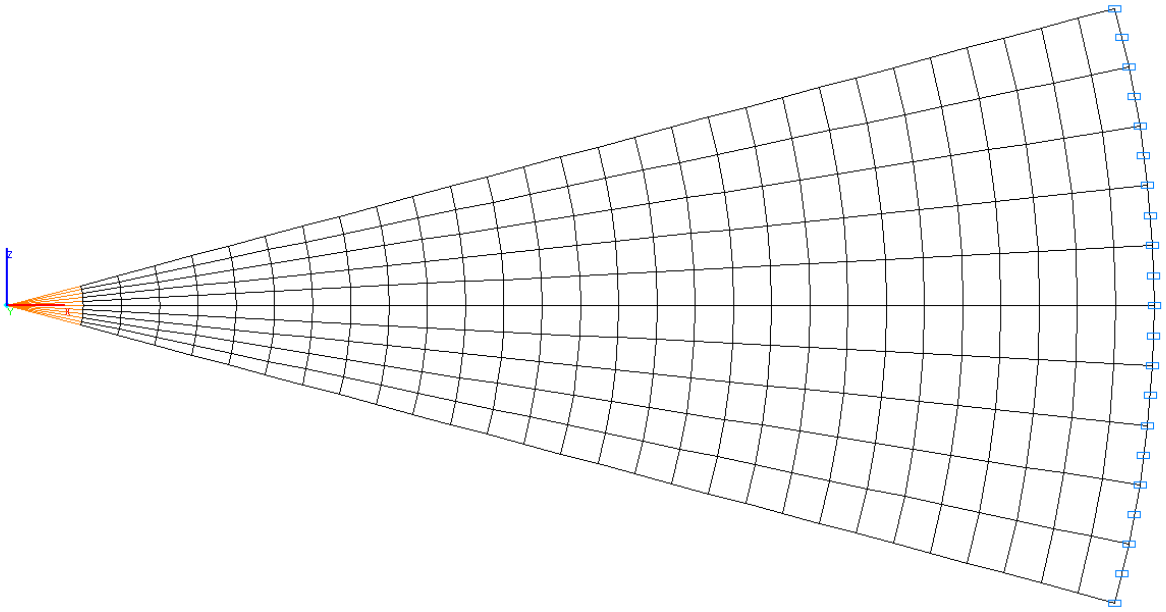
Ссылки: С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979.

Исходные данные:

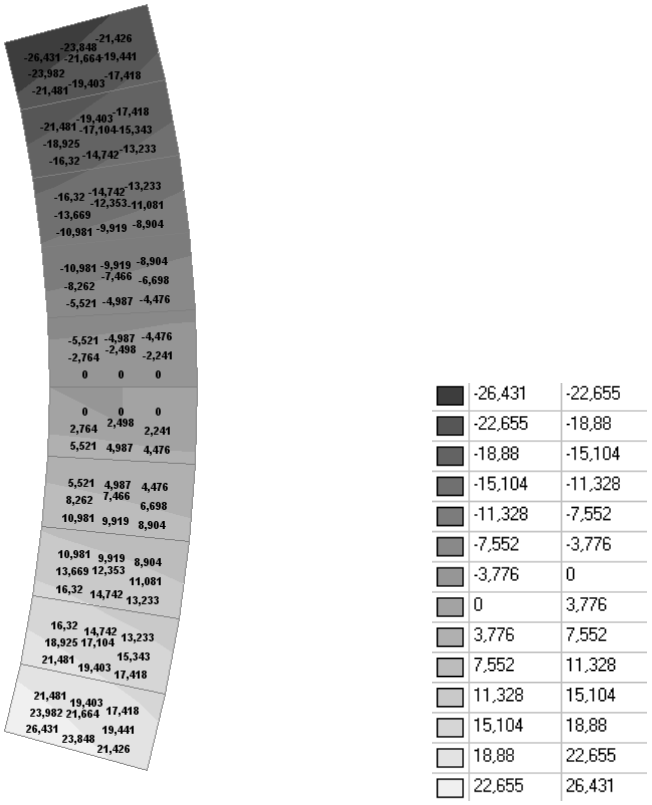
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м	- толщина клина;
$2 \cdot \alpha = 30^o$	- угол при вершине клина;
R = 15.0 м	- радиус закрепленного конца клина;
M = -25.0 кН	- сосредоточенный момент, изгибающий клин.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы клина – 280 восьмиузловых элементов типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.5 м в радиальном направлении и с шагом 3º в тангенциальном направлении. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Ввиду того, что на цилиндрической поверхности малого радиуса *a* у вершины клина момент *M* не может быть представлен как равнодействующая напряжений, распределенных по закону аналитического решения, приведенного ниже, острие клина моделируется твердым телом с ведущим узлом при вершине клина и ведомыми узлами на радиальном расстоянии *a* = 1.0 м от вершины клина (тип элемента – 100). Так как на закрепленном конце клин не испытывает усилий, распределенных по закону аналитического решения, для получения точного решения на радиальном расстоянии r = 5.0 м от воздействия момента *M* радиальное расстояние до закрепленного конца принято равным R = 15.0 м. Количество узлов в расчетной схеме – 918.

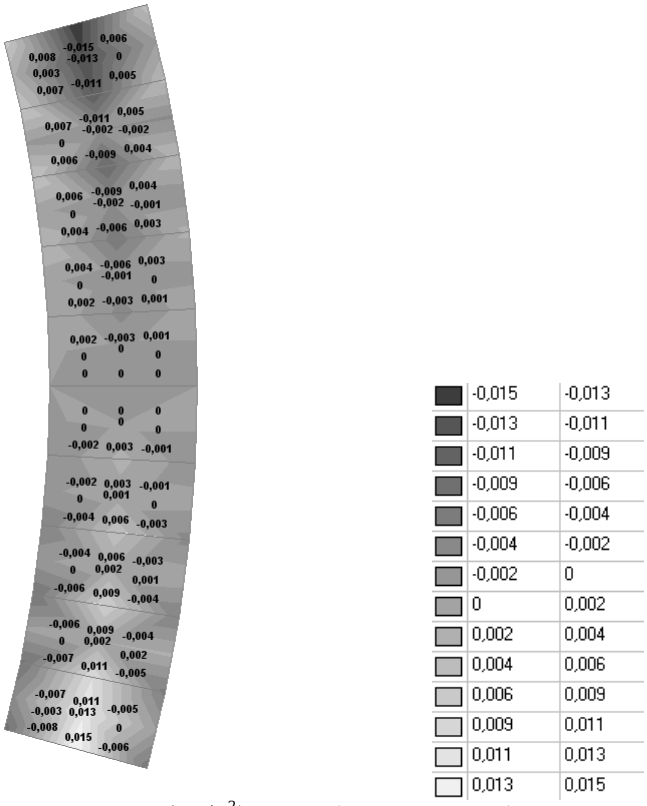
Результаты решения в SCAD



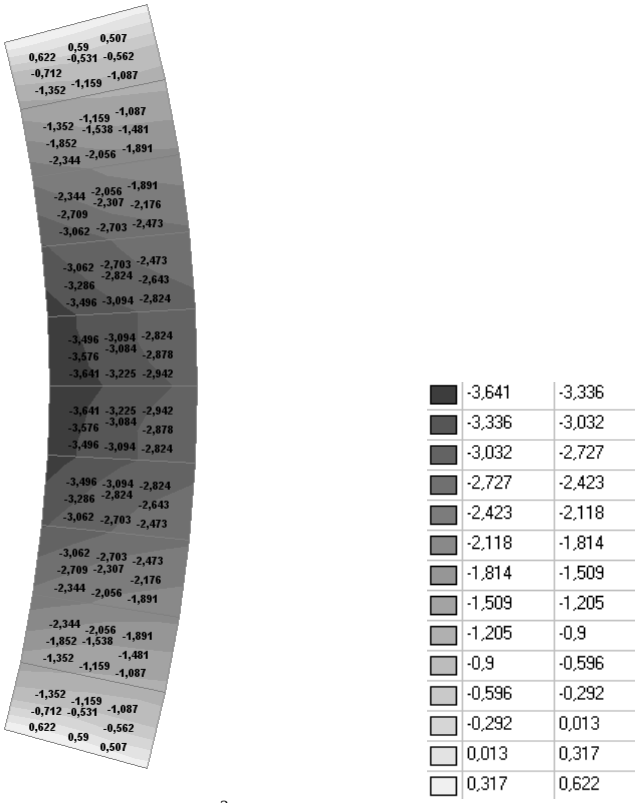
Расчетная схема



Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при воздействии изгибающего момента M



Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при воздействии изгибающего момента M



Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии изгибающего момента M

Сравнение решений:

Компоненты тензора напряжений на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина при воздействии изгибающего момента *M*.

Угол θ	**Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	21.4822	21.4264	0.26
0º	0.0000	0.0000	–
+15º	-21.4822	-21.4264	0.26

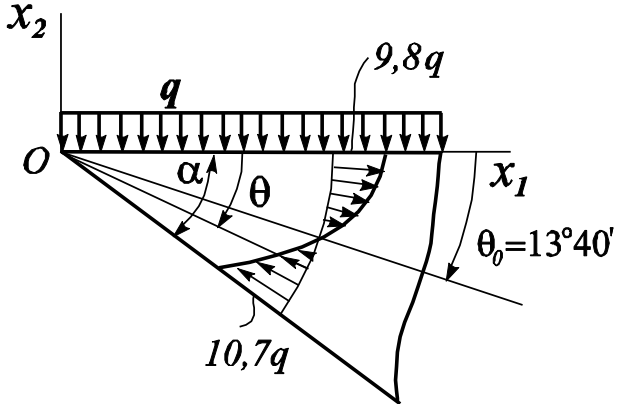
Угол θ	**Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	0.0000	-0.0059	–
0º	0.0000	0.0000	–
+15º	0.0000	0.0059	–

Угол θ	**Напряжения $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
-15º	0.0000	0.5071	–
0º	-2.8781	-2.9418	2.21
+15º	0.0000	0.5071	–

Замечания: При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в теле клина при воздействии изгибающего момента *M* определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 276):

$$\sigma_{rr} = -\frac{2 \cdot M \cdot sin(2 \cdot \theta)}{r^2 \cdot (2 \cdot \alpha - tg(2 \cdot \alpha)) \cdot cos(2 \cdot \alpha)}; \qquad \sigma_{\theta\theta} = 0; \qquad \sigma_{r\theta} = \frac{M \cdot (cos(2 \cdot \alpha) - cos(2 \cdot \theta))}{r^2 \cdot (2 \cdot \alpha - tg(2 \cdot \alpha)) \cdot cos(2 \cdot \alpha)}.$$

Изгиб симметричного клина равномерно распределенной нагрузкой, расположенной на поверхности одной из граней клина (задача Леви)



***Цель*:** Определение напряженного состояния симметричного клина единичной толщины в полярных координатах при изгибе равномерно распределенной нагрузкой, расположенной на поверхности одной из граней клина.

Имя файла с исходными данными: **4.24.SPR**

Формулировка задачи: К поверхности одной из граней клина, толщина которого равна единице, приложена равномерно распределенная нагрузка q, действующая в плоскости клина по оси Ox_2. Определить компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина.

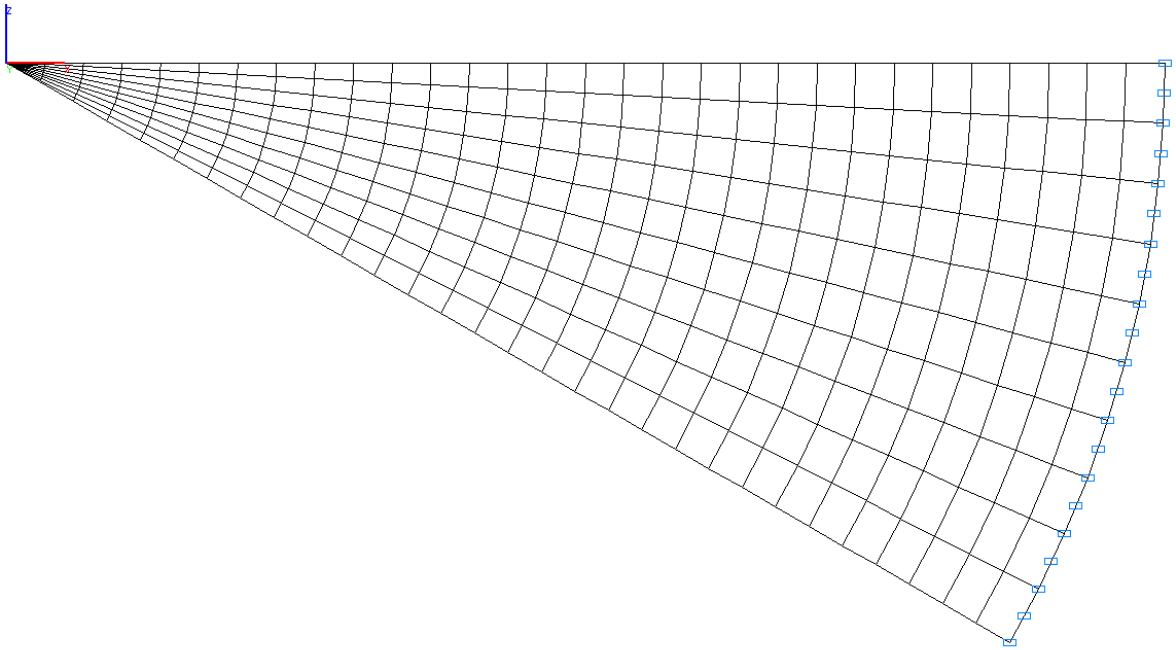
Ссылки: С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979.

Исходные данные:

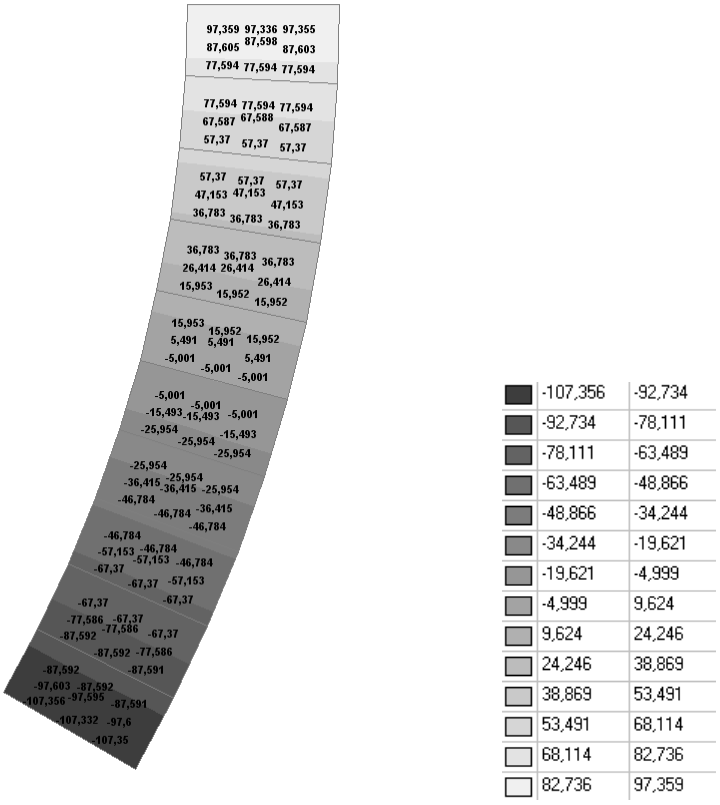
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м	- толщина клина;
$\alpha = 30^o$	- угол при вершине клина;
R = 15.0 м	- радиус закрепленного конца клина;
q = 10.0 кН/м	- равномерно распределенная нагрузка, изгибающая клин.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы клина – 290 восьмиузловых элементов типа 50 и 10 шестиузловых элементов типа 45. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.5 м в радиальном направлении и с шагом 3º в тангенциальном направлении. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Так как на закрепленном конце клин не испытывает усилий, распределенных по закону аналитического решения, для получения точного решения на радиальном расстоянии r = 5.0 м от воздействия равномерно распределенной нагрузки q радиальное расстояние до закрепленного конца принято равным R = 15.0 м. Количество узлов в расчетной схеме – 961.

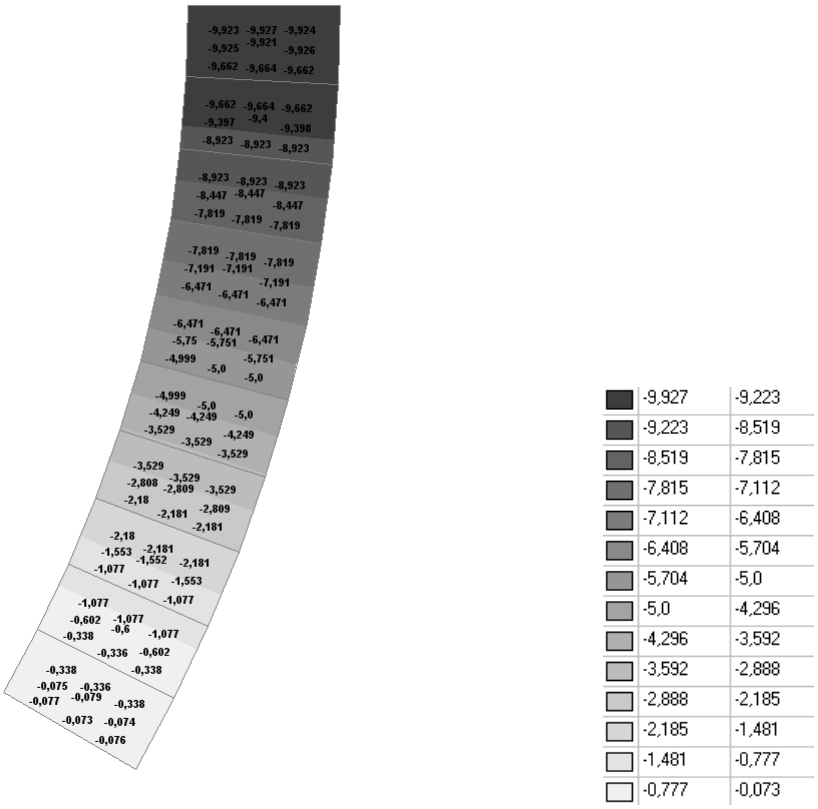
Результаты решения в SCAD



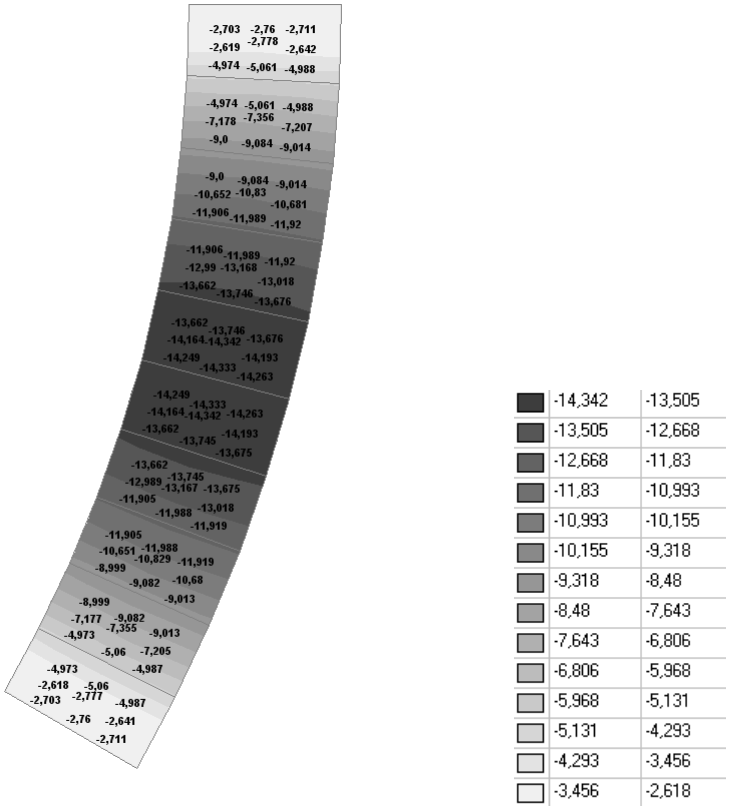
Расчетная схема



Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при воздействии равномерно распределенной нагрузки q



Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при воздействии равномерно распределенной нагрузки q



Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии равномерно распределенной нагрузки q

Сравнение решений:

Компоненты тензора напряжений на радиальном расстоянии r = 5.0 м от вершины клина при воздействии равномерно распределенной нагрузки *q*.

Угол θ	**Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)**		**Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)**		**Напряжения $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)**	
	Теория	**SCAD**	**Теория**	**SCAD**	**Теория**	**SCAD**
0º	97.4110	97.3548	-10.0000	-9.9243	0.0000	-2.7111
15º	-5.0000	-5.0011	-5.0000	-5.0000	-14.3903	-14.2629
30º	-107.4110	-107.3501	0.0000	-0.0757	0.0000	-2.7108

Замечания: При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в теле клина при воздействии равномерно распределенной нагрузки *q* определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 276):

$$\sigma_{rr} = \frac{q}{2 \cdot K} \cdot \left[2 \cdot \alpha - 2 \cdot \theta - \left(1 - \cos\left(2 \cdot \theta\right)\right) \cdot tg\alpha - \sin\left(2 \cdot \theta\right)\right];$$

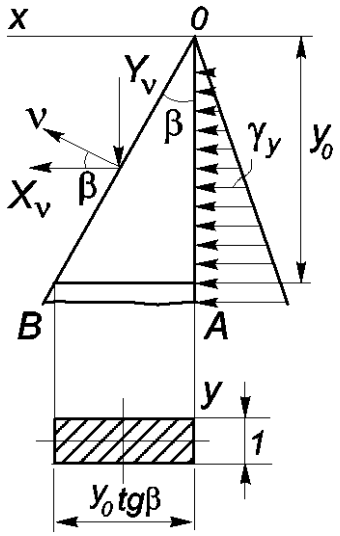
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q}{2 \cdot K} \cdot \left[2 \cdot \alpha - 2 \cdot \theta - \left(1 + \cos\left(2 \cdot \theta\right)\right) \cdot tg\alpha + \sin\left(2 \cdot \theta\right)\right];$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{q}{2 \cdot K} \cdot \left[1 - tg\alpha \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\right) - \cos\left(2 \cdot \theta\right)\right],$$

где:

$$K = tg\alpha - \alpha .$$

Плотина треугольной формы, воспринимающая воздействия собственного веса и гидростатического давления



Цель: Определение напряженного состояния плотины треугольной формы единичной толщины в декартовых координатах от воздействия собственного веса и гидростатического давления.

Имя файла с исходными данными: **4.25.SPR**

Формулировка задачи: К поверхности вертикальной грани плотины треугольной формы, толщина которой равна единице, приложена горизонтальная нагрузка, распределенная по линейному закону с весом единицы объема γ, действующая в плоскости плотин. Плотина также находится под действием собственного веса γ_1. Определить компоненты тензора напряжений в декартовых координатах σ_x, σ_y, τ_{xy} в горизонтальном сечении плотины, расположенном на глубине $y_0 = 5.0$ м от вершины плотины.

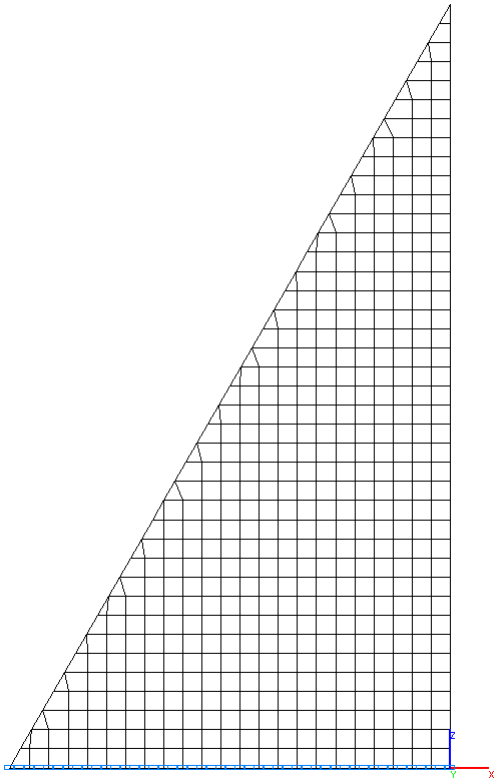
Ссылки: В.И. Самуль, Основы теории упругости и пластичности. — Москва: Высшая школа, 1982.

Исходные данные:

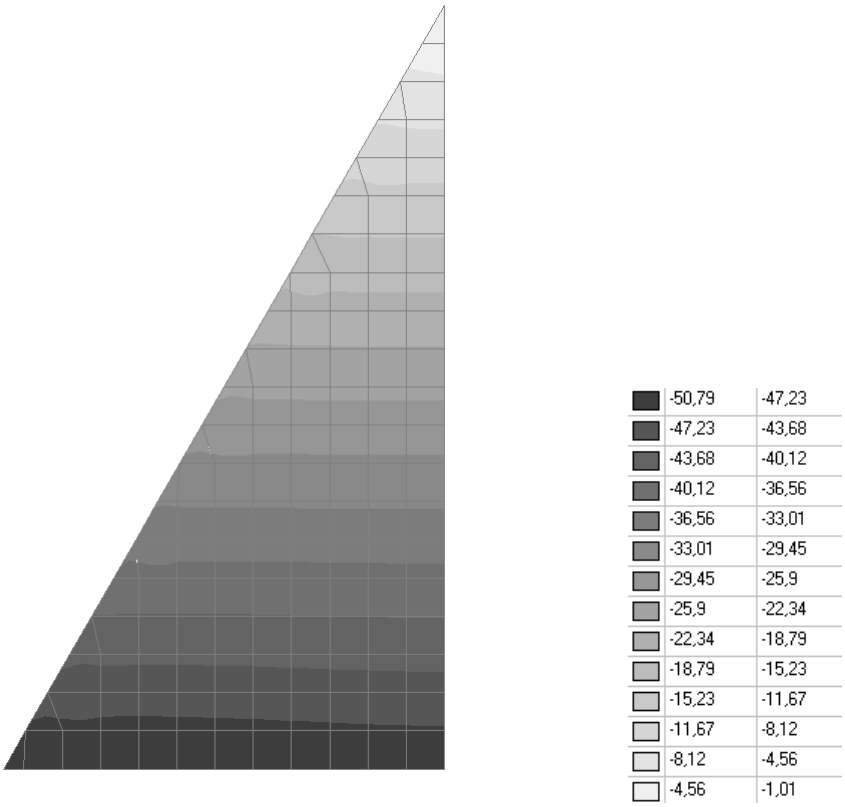
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости материала плотины;
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона материала плотины;
$h = 1.0$ м	- толщина плотины;
$\beta = 30^o$	- угол при вершине плотины;
$H = 15.0$ м	- высота плотины;
$\gamma = 10.0$ кН/м^3	- удельный вес жидкости;
$\gamma_1 = 20.0$ кН/м^3	- удельный вес материала плотины.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – типа плоская рама, элементы пластины – 452 восьмиузловых элемента типа 30 и 23 шестиузловых элемента типа 25. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.25 м в горизонтальном OX и вертикальном OY направлениях. Направление выдачи внутренних усилий – вдоль осей OX и OY глобальной системы координат. Так как на закрепленном конце плотина не испытывает усилий, распределенных по закону аналитического решения, для получения точного решения на глубине $y_0 = 5.0$ м от вершины плотины при воздействии собственного веса и гидростатического давления высота плотины до закрепленного конца принята равной $H = 15.0$ м. Количество узлов в расчетной схеме – 1506.

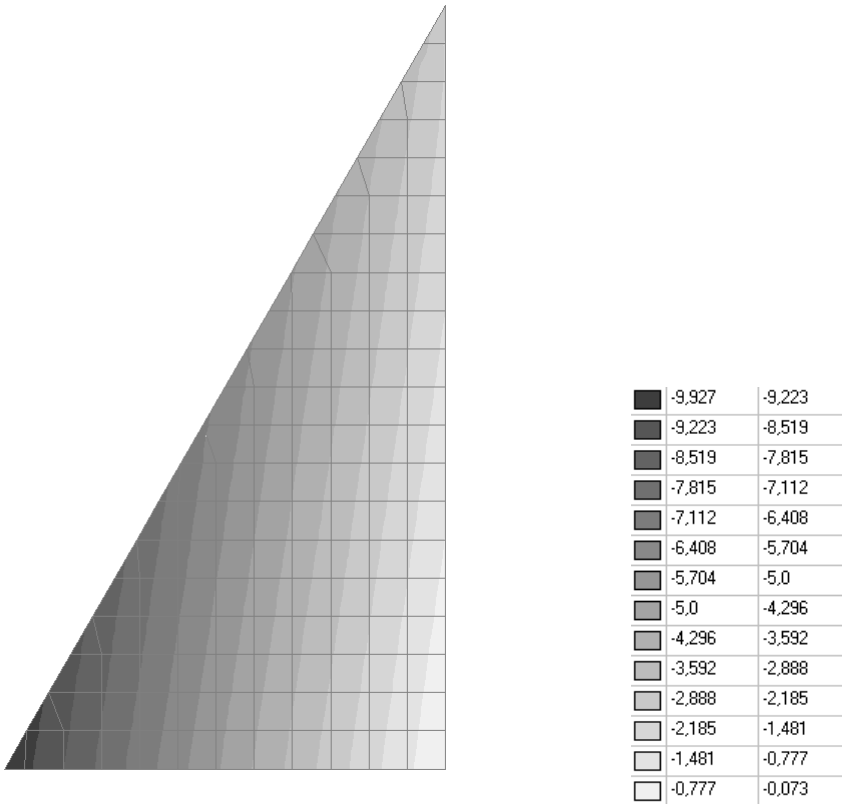
Результаты решения в SCAD



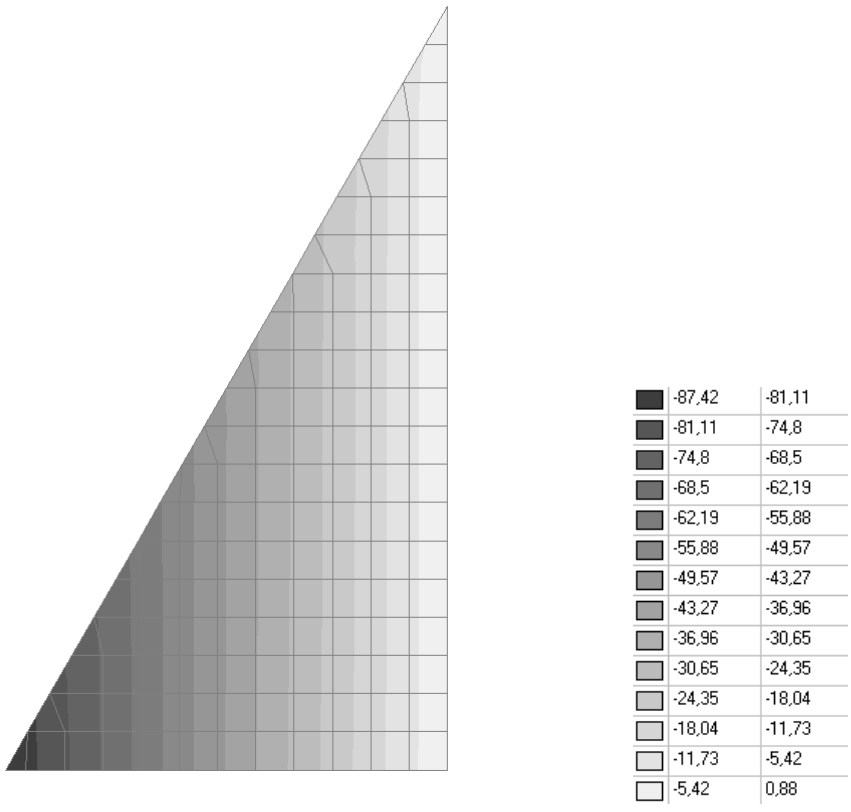
Расчетная схема



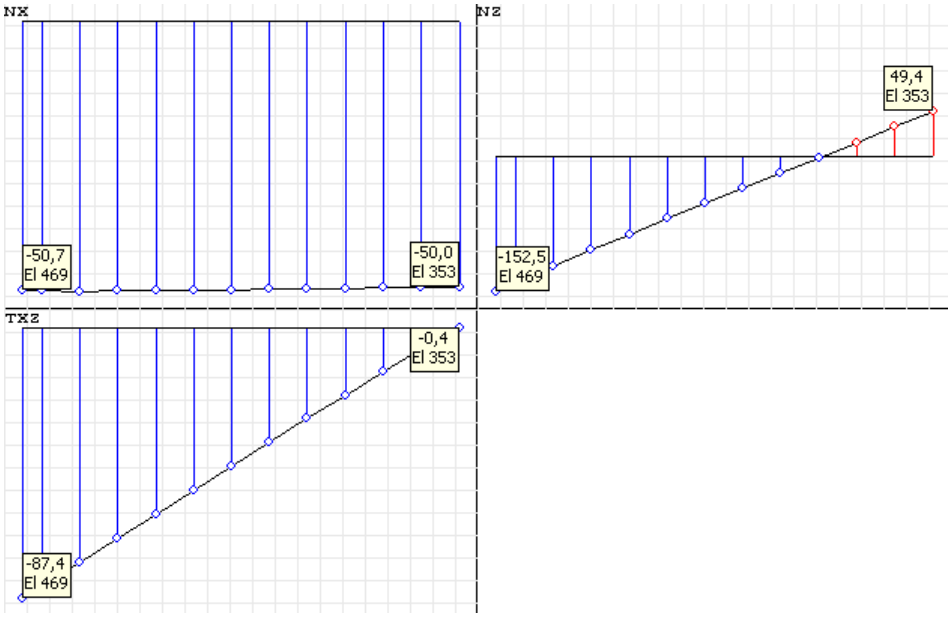
Значения напряжений σ_x (кН/м^2)



Значения напряжений σ_y (кН/м^2)



Значения напряжений τ_{xy} (кН/м^2)



Значения напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} (кН/м^2) в горизонтальном сечении плотины, расположенном на глубине y_0 = 5.0 м от вершины плотины

Сравнение решений:

Компоненты тензора напряжений в декартовых координатах σ_x, σ_y, τ_{xy} в горизонтальном сечении плотины, расположенном на глубине y_0 = 5.0 м от вершины плотины.

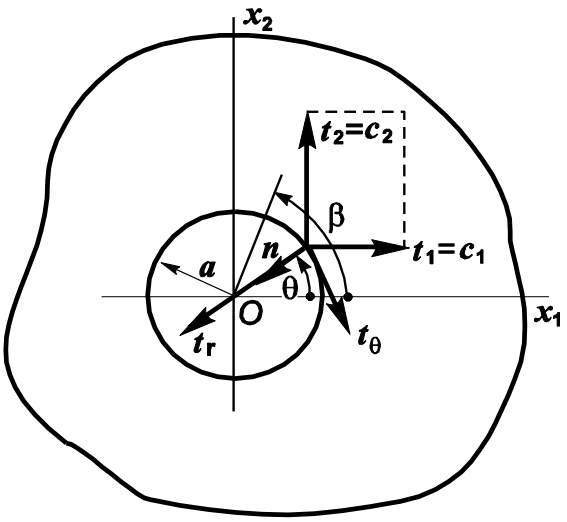
Параметр	**На наклонной грани плотины ($x = y_0 \cdot tg\beta$ = 2.8868 м)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
σ_x (кН/м^2)	-50.00	-50.69	1.38
σ_y (кН/м^2)	-150.00	-152.55	1.70
τ_{xy} (кН/м^2)	-86.60	-87.42	0.95

Параметр	**На вертикальной грани плотины (x = 0.0000 м)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
σ_x (кН/м^2)	-50.00	-50.00	0.00
σ_y (кН/м^2)	50.00	49.43	1.14
τ_{xy} (кН/м^2)	0.00	-0.43	—

Замечания: При аналитическом решении напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} в теле плотины от воздействия собственного веса и гидростатического давления определяются по следующим формулам (В.И. Самуль, Основы теории упругости и пластичности. — Москва: Высшая школа, 1982, стр. 77):

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y\,; \qquad \sigma_y = \left(\frac{\gamma_1}{tg\beta} - \frac{2\cdot\gamma}{tg^3\beta}\right)\cdot x + \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - \gamma_1\right)\cdot y\,; \qquad \tau_{xy} = -\frac{\gamma\cdot x}{tg^2\beta}\,.$$

Действие на плоскость сосредоточенного момента и сосредоточенной силы



Цель: Определение напряженного состояния плоскости единичной толщины в полярных координатах от воздействия сосредоточенного момента и сосредоточенной силы.

Имя файла с исходными данными: **4.26.SPR**

Формулировка задачи: В точке начала координат плоскости, толщина которой равна единице, приложены сосредоточенный момент M и сосредоточенная сила P_1, действующая по оси Ox_1. Определить компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ на различных радиальных расстояниях r от точки начала координат плоскости при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 0^o$.

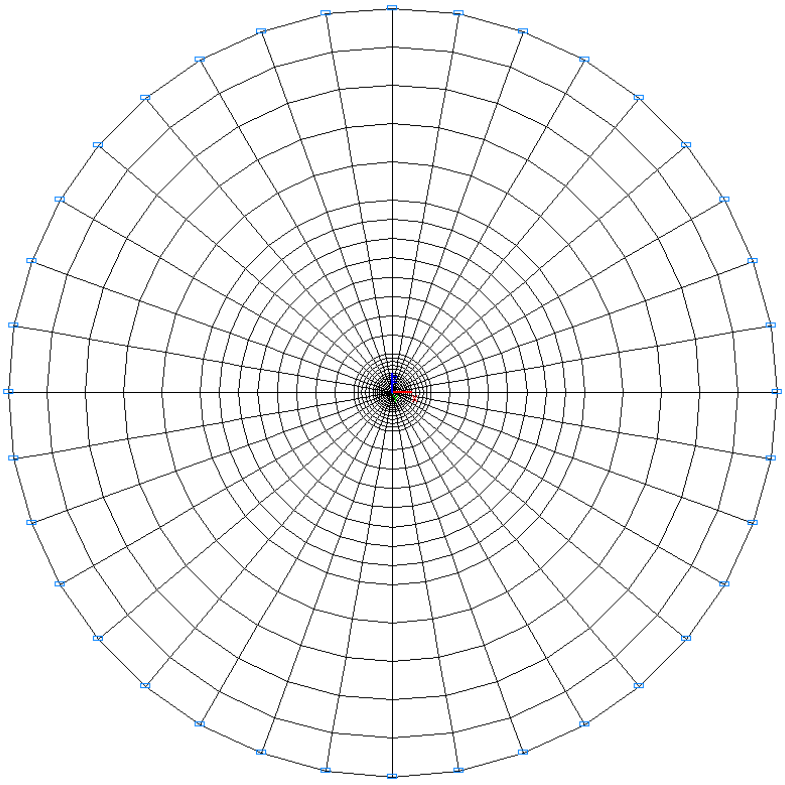
Ссылки: С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979.

Исходные данные:

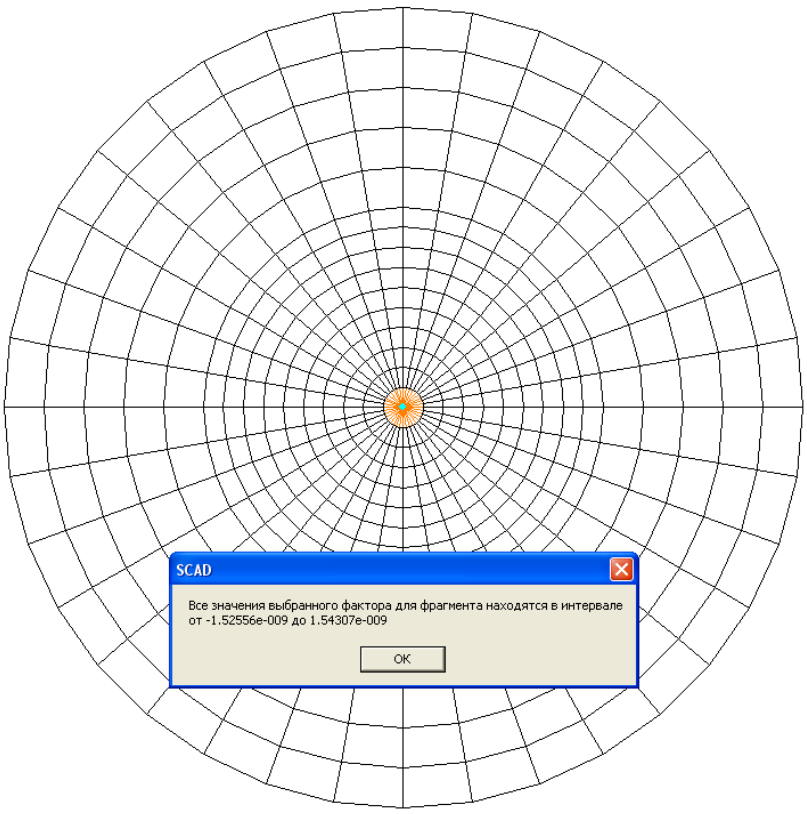
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м	- толщина плоскости;
R = 10.0 м	- радиус, ограничивающий область плоскости по закрепленной кромке;
M = 100.0 кН·м	- сосредоточенный момент, действующий в плоскости;
P_1 = 100.0 кН	- сосредоточенная сила, действующая в плоскости по оси OX1.
P_2 = 0.0 кН	- сосредоточенная сила, действующая в плоскости по оси OX2.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – типа плоская рама, элементы пластины – 972 восьмиузловых элемента типа 30. Сетка конечных элементов разбита в радиальном направлении от r = 0.00 м до r = 0.50 м с шагом 0.05 м, от r = 0.50 м до r = 1.00 м с шагом 0.10 м, от r = 1.00 м до r = 5.00 м с шагом 0.50 м, от r = 5.00 м до r = 10.00 м с шагом 1.00 м и в тангенциальном направлении с шагом 10º. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. На цилиндрической поверхности малого радиуса a в окрестности точки приложения сосредоточенного момента M и сосредоточенной силы P_1 эти усилия не могут быть представлены как равнодействующие напряжений, распределенных по законам аналитического решения, приведенного ниже. Ввиду этого, область плоскости, ограниченная этой цилиндрической поверхностью, моделируется твердым телом с ведущим узлом в точке приложения сосредоточенных усилий и ведомыми узлами на радиальном расстоянии a = 0.05 м от нее (тип элемента – 100). Для исключения влияния граничных условий на точность решения радиальное расстояние до закрепленной кромки плоскости принято равным R = 10.0 м. Количество узлов в расчетной схеме – 2989.

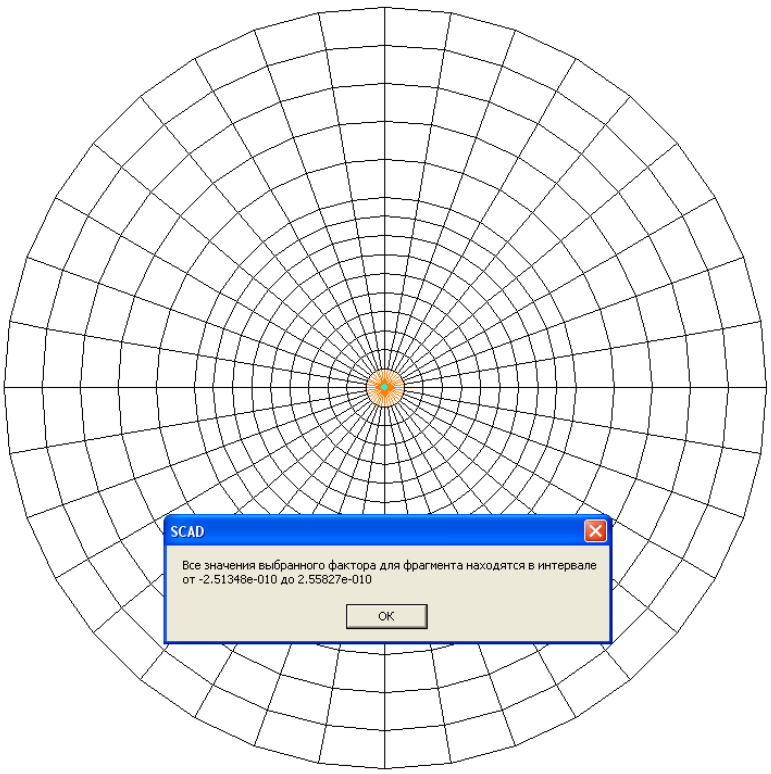
Результаты решения в SCAD



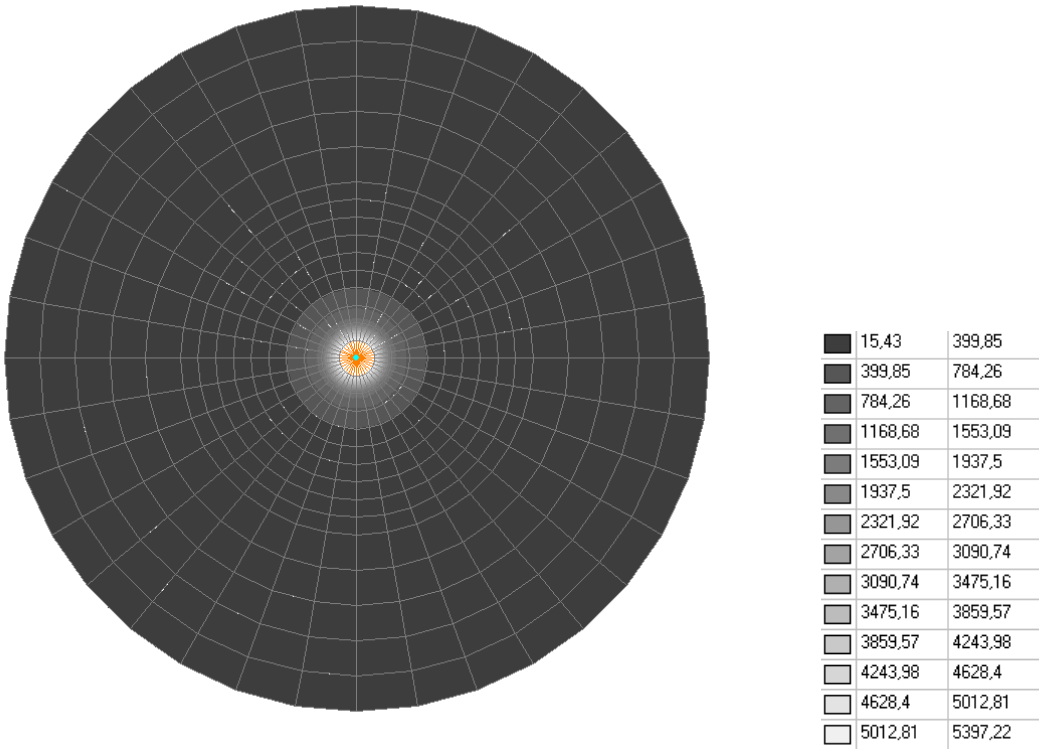
Расчетная схема



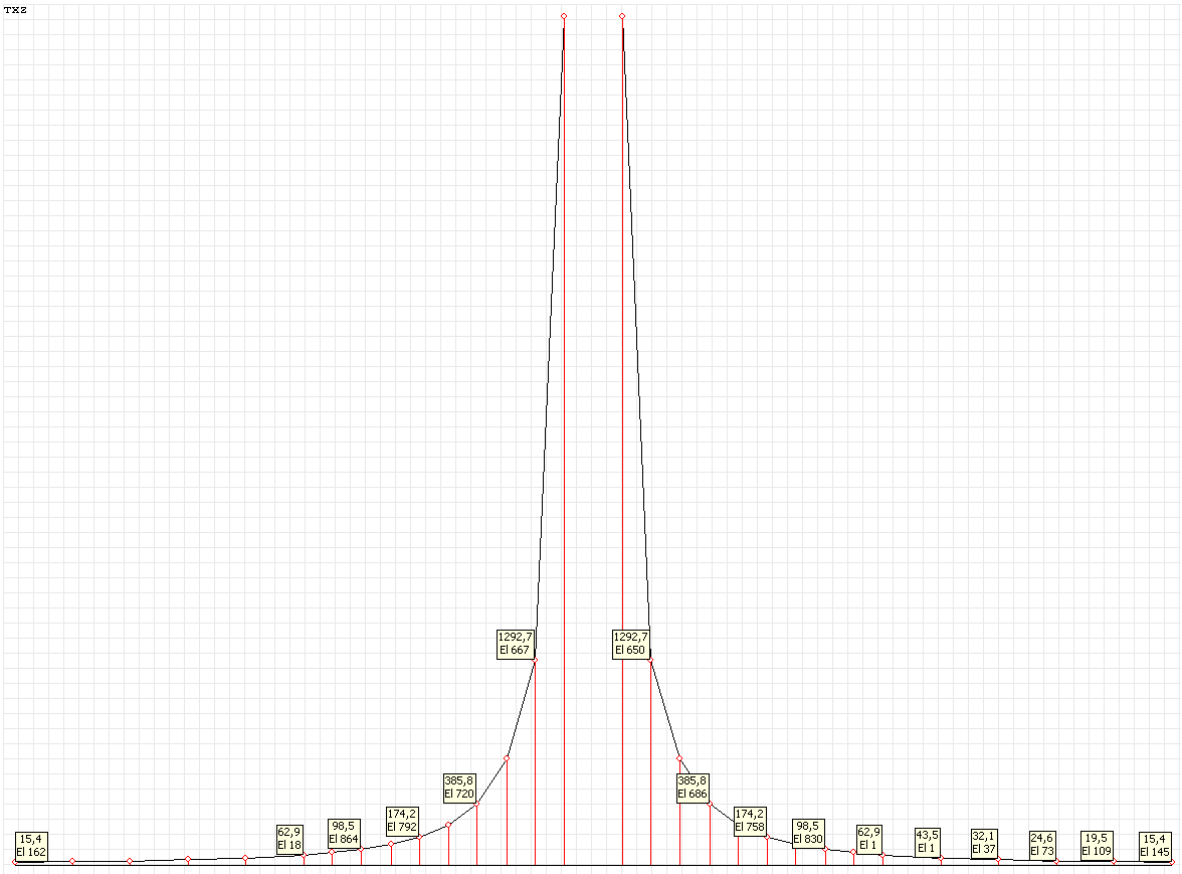
Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при воздействии сосредоточенного момента М



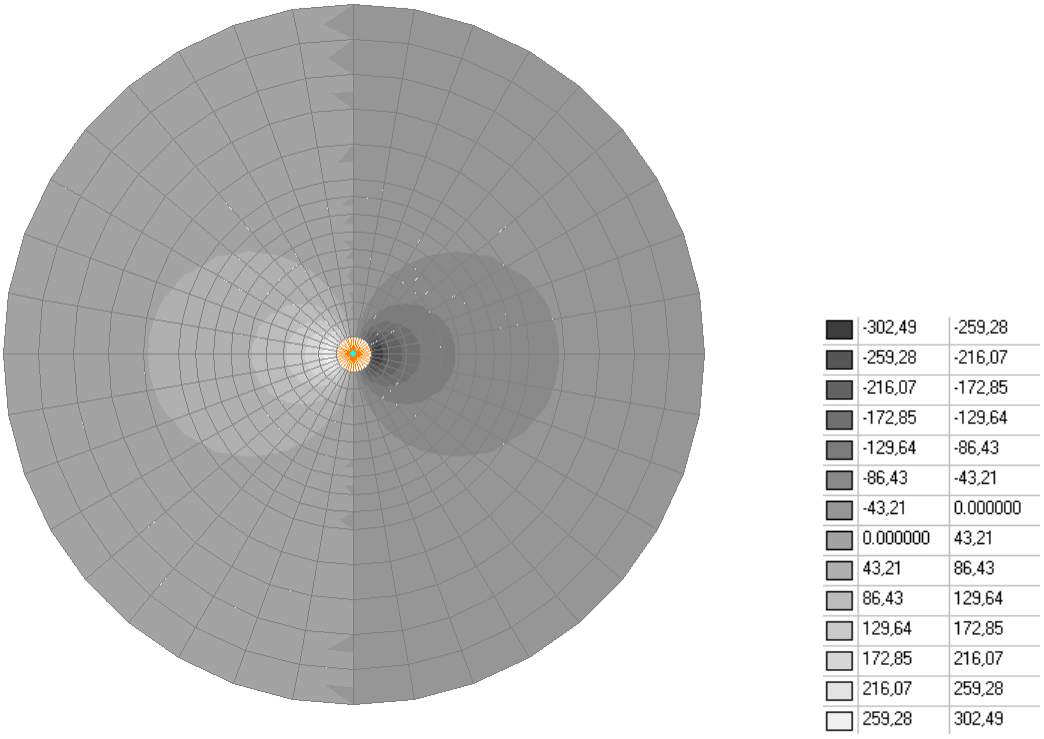
Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенного момента М



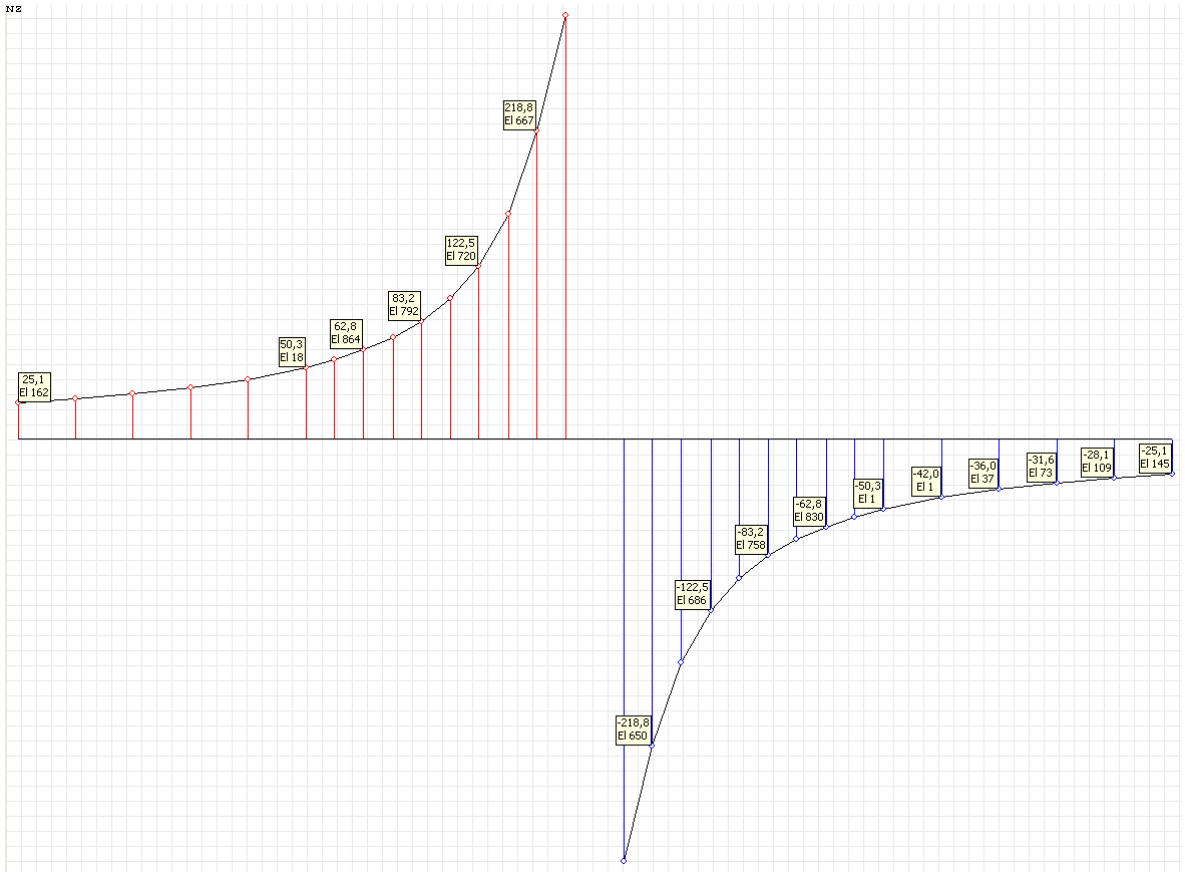
Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенного момента М



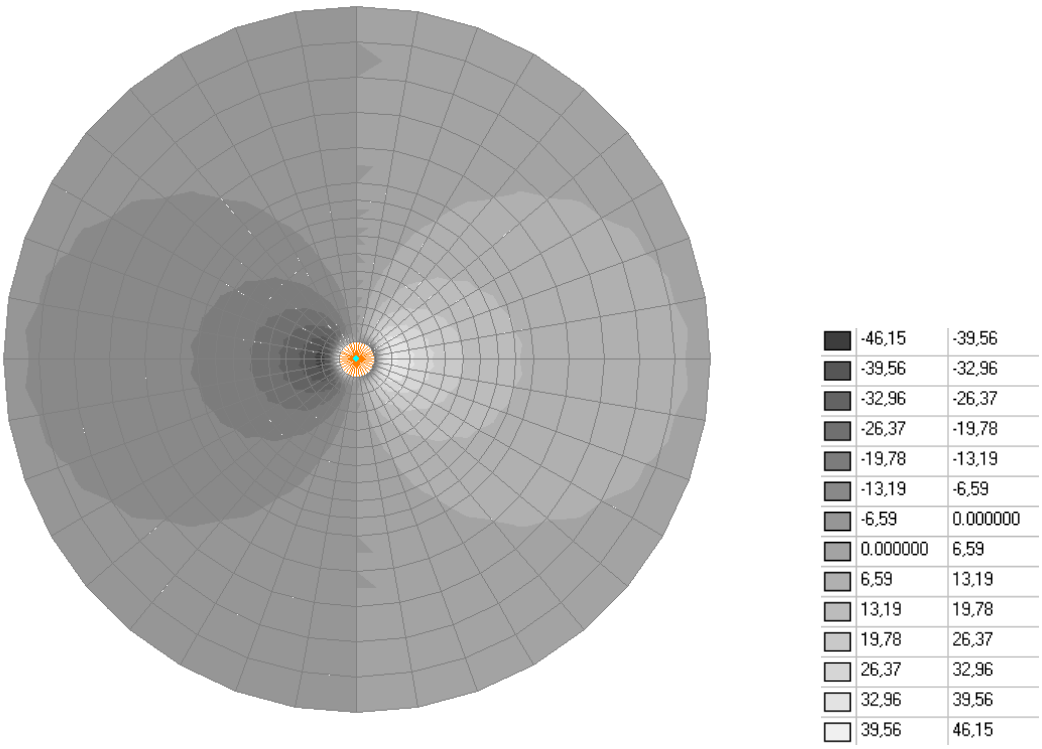
Эпюра напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенного момента M для угла наклона к оси OX1 θ = 0°



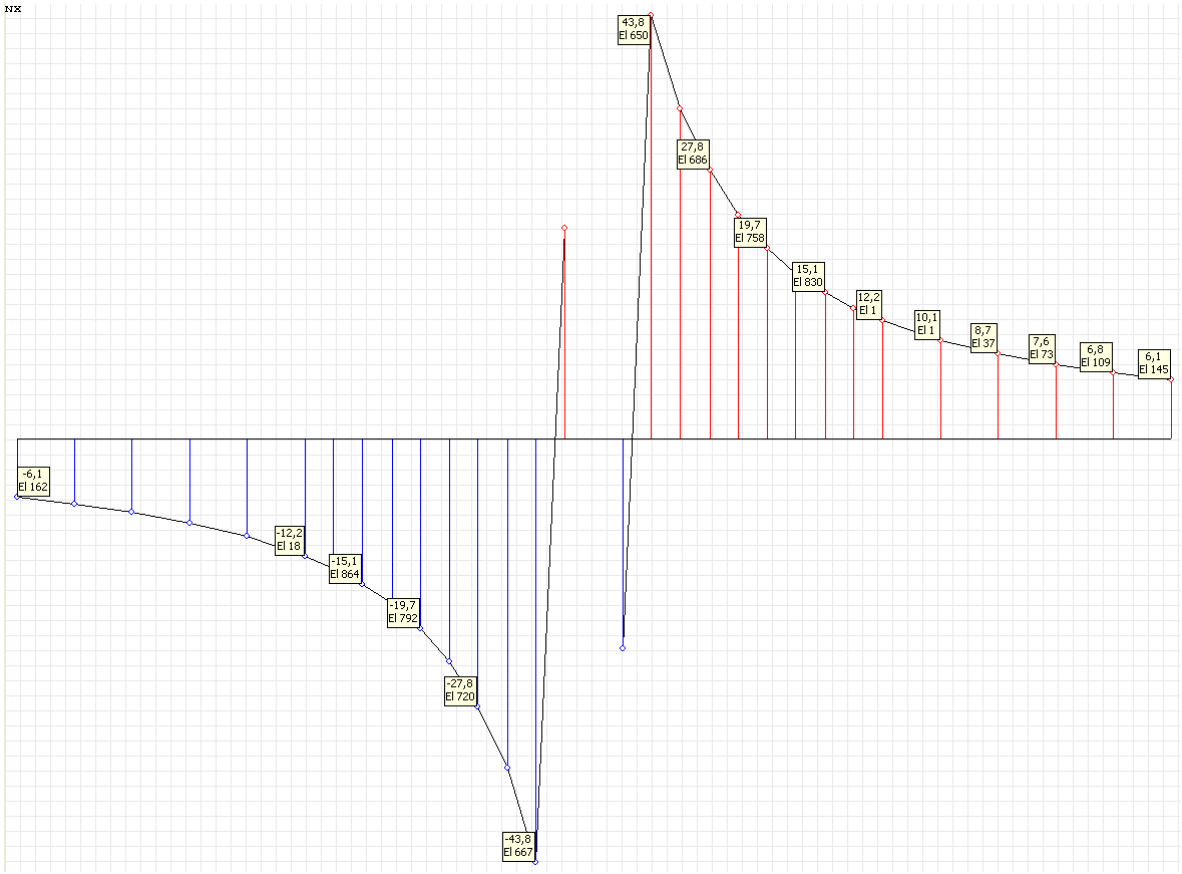
Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при воздействии сосредоточенной силы P_1



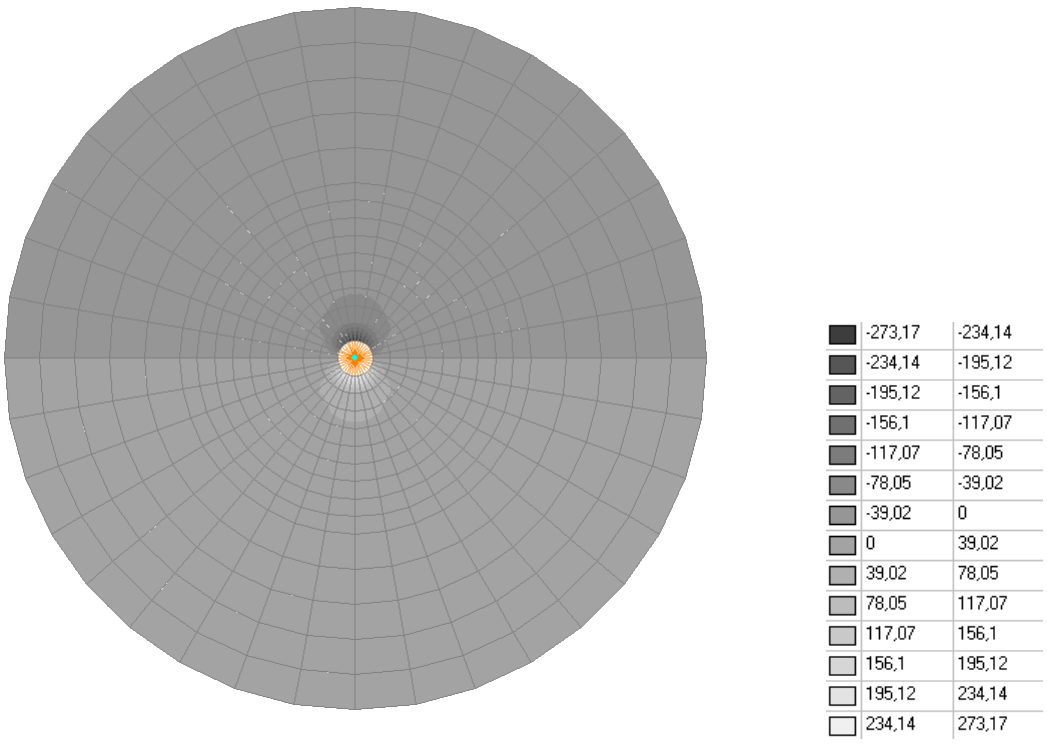
Эпюра напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при воздействии сосредоточенной силы P_1 для угла наклона к оси Ox_1 $\theta = 0°$



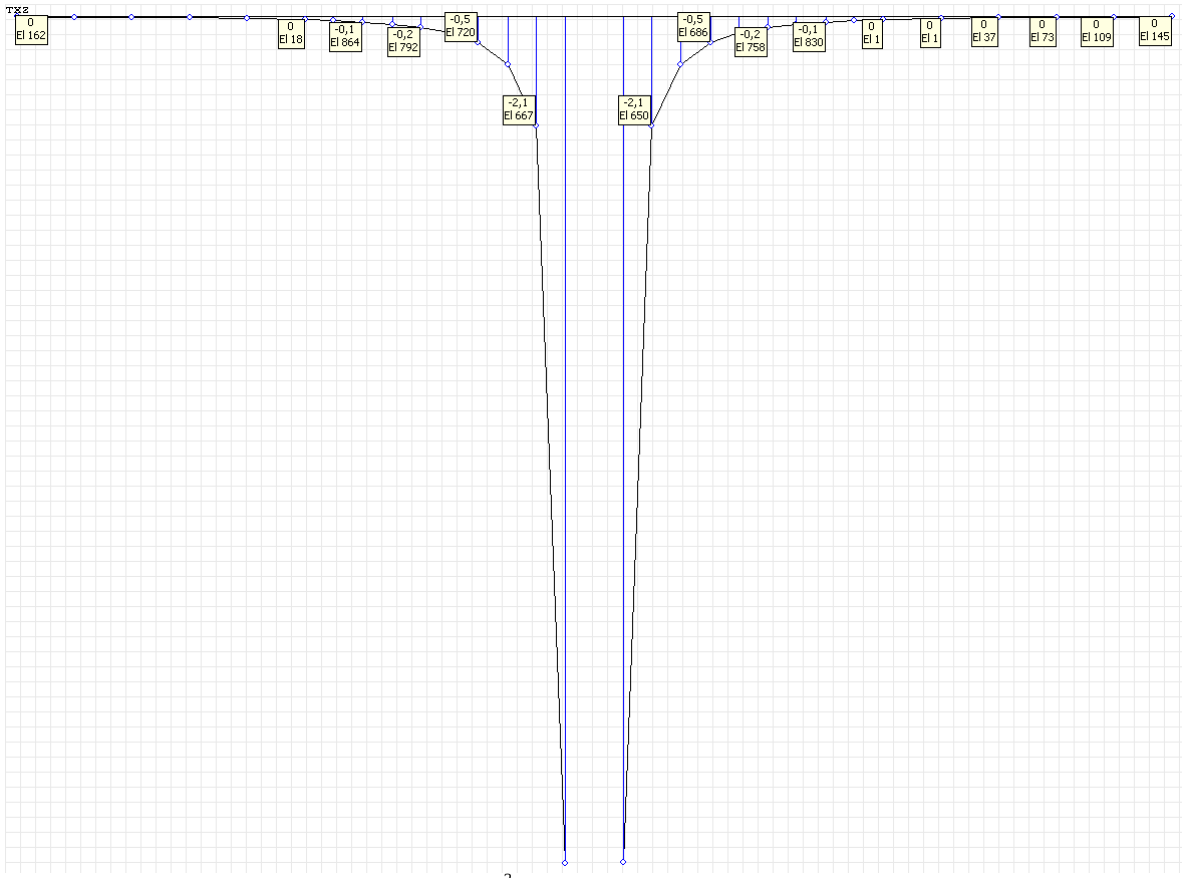
Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенной силы P_1



Эпюра напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенной силы P_1 для угла наклона к оси Ox_1 $\theta = 0^o$



Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенной силы P_1



Эпюра напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при воздействии сосредоточенной силы P_1 для угла наклона к оси Ox_1 $\theta = 0^o$

Сравнение решений:

Компоненты тензора напряжений для угла наклона к оси Ox_1 $\theta = 0^o$ при воздействии сосредоточенного момента M

Радиус r (м)	**Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.2	0.00	0.00	–
0.3	0.00	0.00	–
0.4	0.00	0.00	–
0.5	0.00	0.00	–
1.0	0.00	0.00	–
1.5	0.00	0.00	–
2.0	0.00	0.00	–
2.5	0.00	0.00	–
3.0	0.00	0.00	–

Радиус r (м)	**Напряжения σ_{00} (кН/м^2)**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.2	0.00	0.00	–
0.3	0.00	0.00	–
0.4	0.00	0.00	–
0.5	0.00	0.00	–
1.0	0.00	0.00	–
1.5	0.00	0.00	–
2.0	0.00	0.00	–
2.5	0.00	0.00	–
3.0	0.00	0.00	–

Радиус r (м)	Напряжения $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.2	397.89	385.79	3.04
0.3	176.84	174.22	1.48
0.4	99.47	98.49	0.99
0.5	63.66	62.93	1.15
1.0	15.92	15.43	3.08
1.5	7.07	6.67	5.65
2.0	3.98	3.86	3.02
2.5	2.55	2.50	1.96
3.0	1.77	1.74	1.69

Компоненты тензора напряжений для угла наклона к оси Ox_1 $\theta = 0^o$ при воздействии сосредоточенной силы P_1.

Радиус r (м)	Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.2	-127.32	-122.67	3.65
0.3	-84.88	-83.26	1.91
0.4	-63.66	-62.84	1.29
0.5	-50.93	-50.36	1.12
1.0	-25.46	-25.08	1.49
1.5	-16.98	-16.65	1.94
2.0	-12.73	-12.61	0.94
2.5	-10.19	-10.15	0.39
3.0	-8.49	-8.50	0.12

Радиус r (м)	Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.2	31.83	27.80	12.66
0.3	21.22	19.69	7.21
0.4	15.92	15.08	5.28
0.5	12.73	12.16	4.48
1.0	6.37	6.09	4.40
1.5	4.24	3.96	6.60
2.0	3.18	2.92	8.18
2.5	2.55	2.27	10.98
3.0	2.12	1.82	14.15

Радиус r (м)	Напряжения $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.2	0.00	0.00	–
0.3	0.00	0.00	–
0.4	0.00	0.00	–
0.5	0.00	0.00	–
1.0	0.00	0.00	–
1.5	0.00	0.00	–
2.0	0.00	0.00	–
2.5	0.00	0.00	–
3.0	0.00	0.00	–

***Замечания*:**

1. При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в плоскости при воздействии сосредоточенного момента определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 299):

$$\sigma_{rr} = 0; \qquad \sigma_{\theta\theta} = 0; \qquad \sigma_{r\theta} = -\frac{M}{2 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в плоскости при воздействии сосредоточенной силы определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 300):

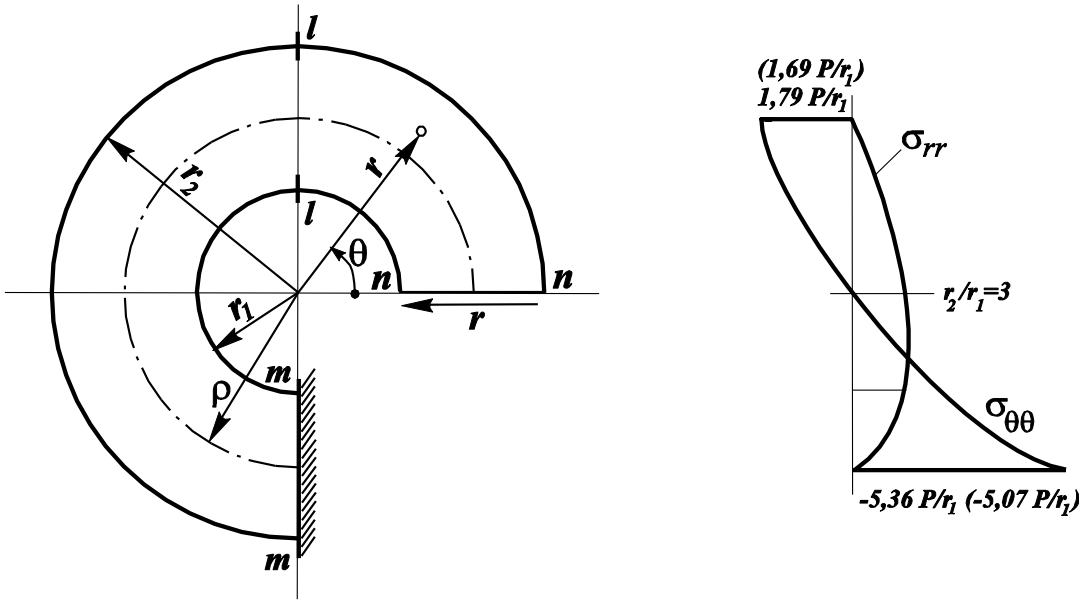
$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \left(P_1 \cdot \cos\theta + P_2 \cdot \sin\theta\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \left(P_1 \cdot \cos\theta + P_2 \cdot \sin\theta\right);$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1-\nu}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \left(P_1 \cdot \sin\theta - P_2 \cdot \cos\theta\right).$$

2. Средствами SCAD невозможно точное моделирование рассмотренной в источнике задачи, поскольку рассматривается *бесконечная* плоскость и, кроме того, решение имеет *сингулярность*. Поэтому в матрице верификации приведены отклонения от теоретического решения в точке, расположенной на расстоянии 1,5 м от начала координат.

Изгиб кривого бруса узкого прямоугольного сечения силой, приложенной к незакрепленному концу (задача Головина)



Цель: Определение напряженного состояния кривого бруса узкого прямоугольного сечения при изгибе сосредоточенной силой, приложенной к его незакрепленному концу.

Имя файла с исходными данными: **4.21.SPR**

Формулировка задачи: К свободному концу консольного кривого бруса, толщина которого равна единице, приложена сила P, действующая параллельно его торцу в плоскости круговой оси бруса. Определить компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ для поперечного сечения бруса, расположенного под углом $\theta = 90^o$ от торца свободного конца бруса (сечение n-n).

Ссылки: С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979.

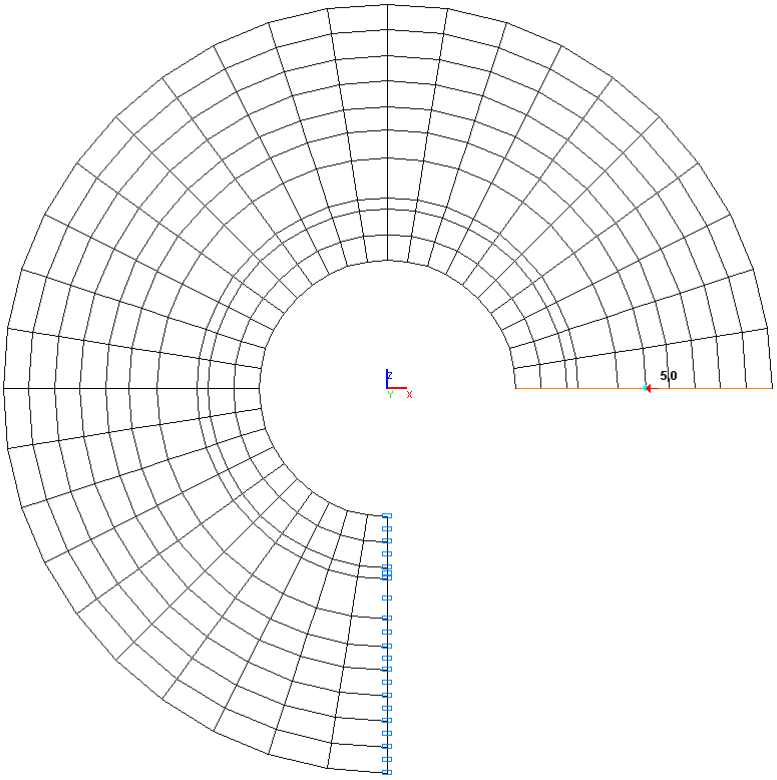
Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м	- толщина бруса;
$r_1 = 5$ м	- внутренний радиус бруса;
$r_2 = 15$ м	- внешний радиус бруса;
P = 5.0 кН	- сосредоточенная сила, изгибающая брус (горизонтальная).

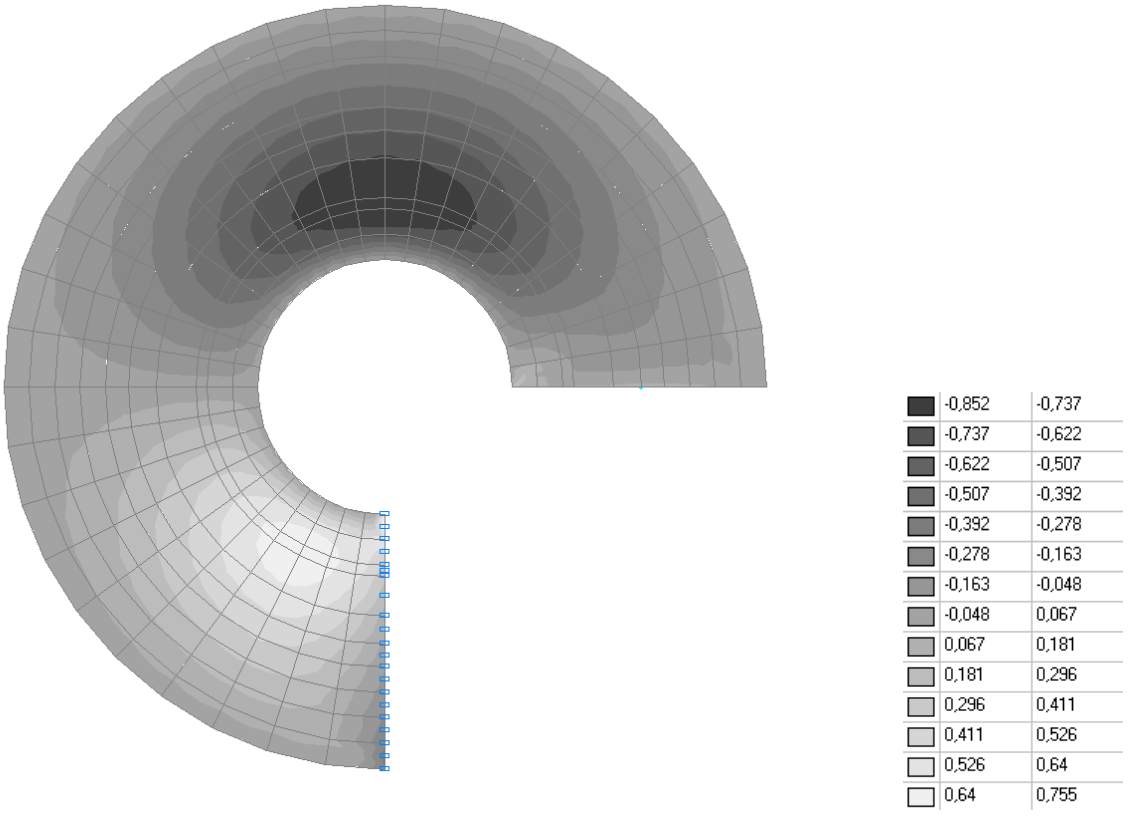
Связи: полное закрепление узлов защемленного торца бруса (сечение m-m)

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы бруса – 300 восьмиузловых элементов типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом 1.0 м в радиальном направлении и с шагом 9^o в тангенциальном направлении. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Ввиду того, что граничные условия на торцевой поверхности свободного конца кривого бруса ($\theta = 0^o$) в аналитическом решении заданы в интегральной форме, произведено их смягчение путем введения твердого тела (тип элемента – 100) , узлы которого расположены вдоль торцевой поверхности. Количество узлов в расчетной схеме – 981.

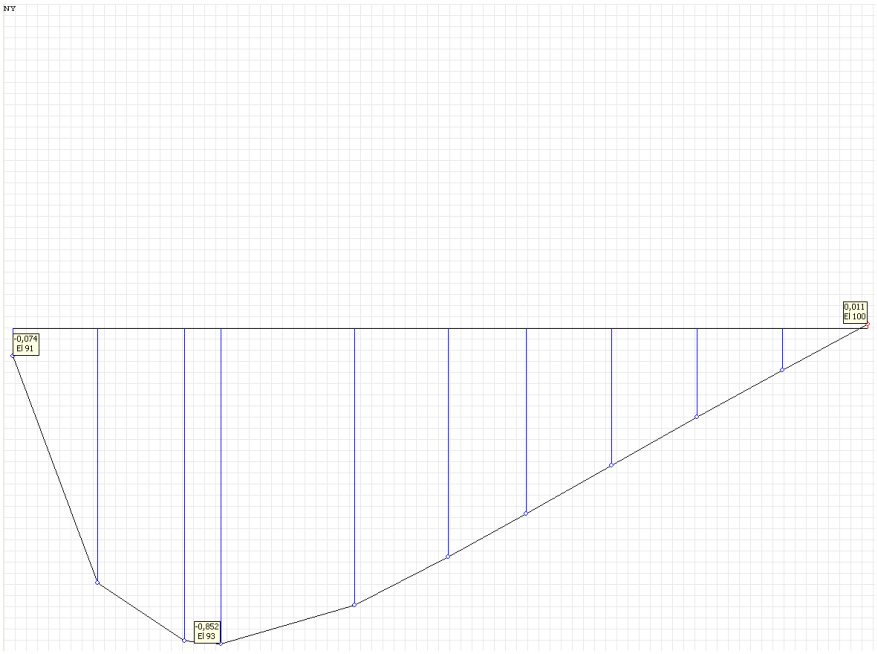
Результаты решения в SCAD



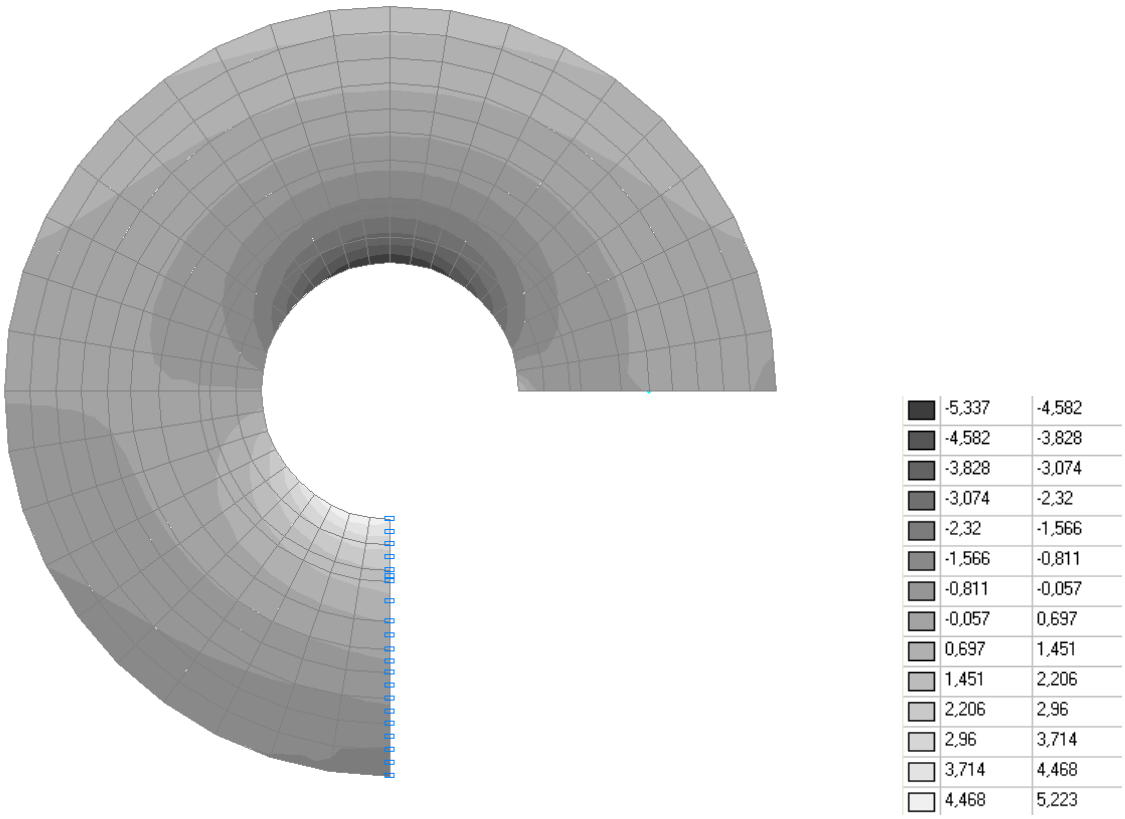
Расчетная схема



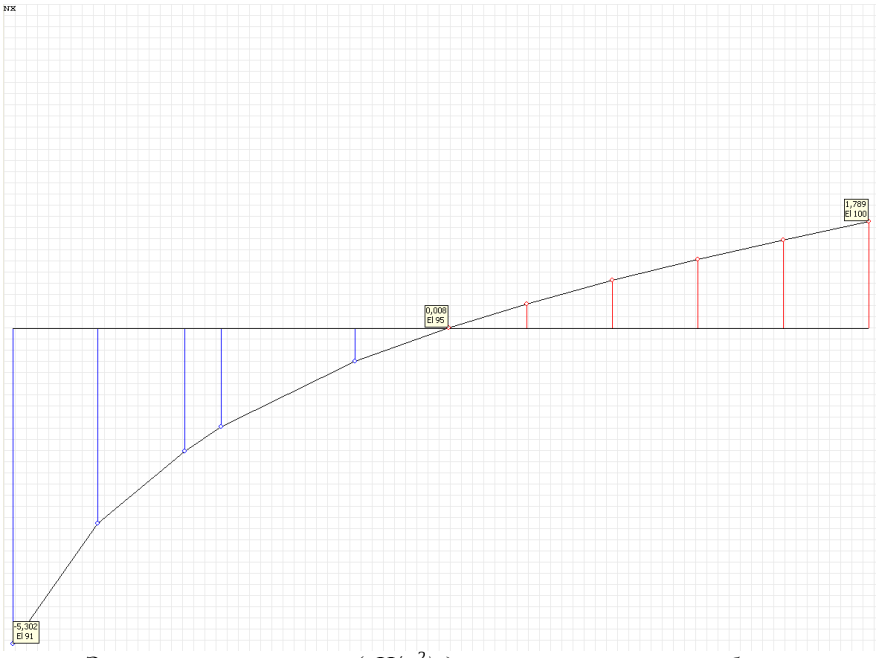
Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2)



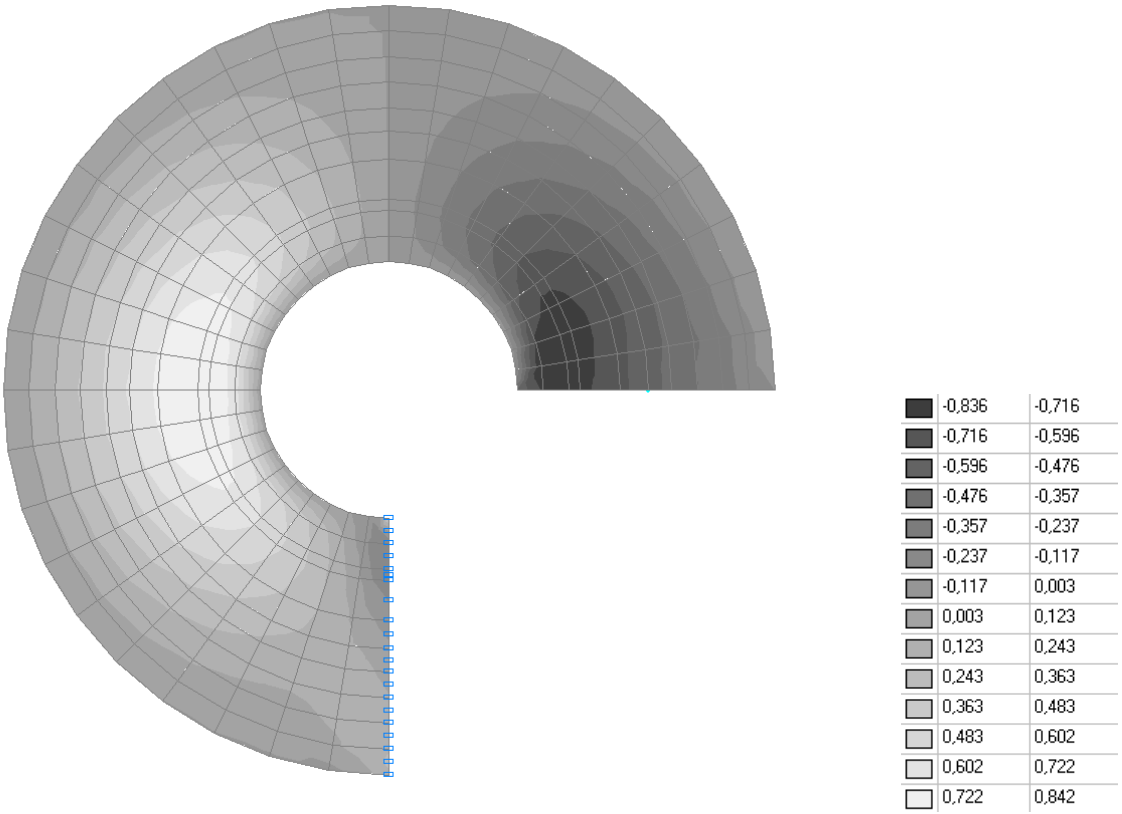
Эпюра напряжений σ_{rr} (кН/м^2) для поперечного сечения бруса, расположенного под углом $\theta = 90°$ от торца свободного конца бруса (сечение n-n)



Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)



Эпюра напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) для поперечного сечения бруса, расположенного под углом $\theta = 90°$ от торца свободного конца бруса (сечение n-n)



Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2)

Сравнение решений:

	Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)			**Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)**		
	r = 5.0000 м	**r = 7.4349 м**	**r = 15.0000 м**	**r = 5.0000 м**	**r = 10.0876 м**	**r = 15.0000 м**
Теория	0.0000	-0.8375	0.0000	-5.3581	0.0000	1.7860
SCAD	-0.0744	-0.8515	0.0109	-5.3022	0.0078	1.7893
Отклонения, %	–	1.67	–	1.04	–	0.18

Замечания: При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в теле консольного кривого бруса от воздействия силы *P* на его свободном конце, направленной параллельно его торцу, определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 271):

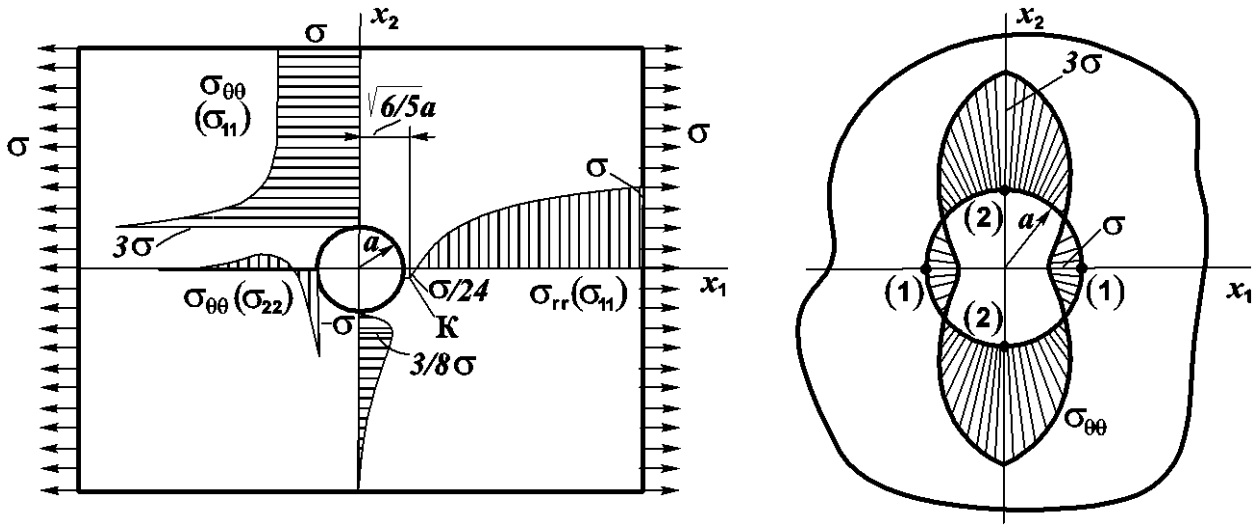
$$\sigma_{rr} = \frac{P}{K_0} \cdot \left(r - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r^3} \right) \cdot \sin\theta \, ;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{K_0} \cdot \left(3 \cdot r - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} - \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r^3} \right) \cdot \sin\theta \, ;$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{K_0} \cdot \left(r - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r^3} \right) \cdot \cos\theta \, ;$$

$$K_0 = r_1^2 - r_2^2 + \left(r_1^2 + r_2^2 \right) \cdot ln\left(r_2 / r_1 \right) .$$

Одностороннее растяжение пластины с малым круговым отверстием (задача Кирша)



Цель: Определение напряженного состояния пластины значительной ширины и единичной толщины с малым круговым отверстием в полярных координатах от воздействия одностороннего равномерного растяжения.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
4.27_b_20_9_grad.SPR	1 вариант расчетной схемы – крупная сетка КЭ
4.27_b_60_4.5_grad.SPR	2 вариант расчетной схемы – мелкая сетка КЭ

Формулировка задачи: Квадратная пластина значительной ширины и единичной толщины с малым круговым отверстием радиуса *a* в ее центре подвергается одностороннему равномерному растяжению напряжениями σ в направлении оси x_1. Определить компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ на различных радиальных расстояниях r от точки начала координат при углах наклона к оси x_1 θ = 0º и θ = 90º.

Ссылки: С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979.

Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
μ = 0.2 - коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м - толщина пластины;
a = 1.0 м - радиус отверстия;
2·b = 20.0 м (60.0 м) - ширина пластины;
σ = 100.0 кН/м - растягивающее напряжение в направлении оси x_1.

Конечно-элементная модель: Рассматривается два варианта расчетной схемы.

Вариант 1:

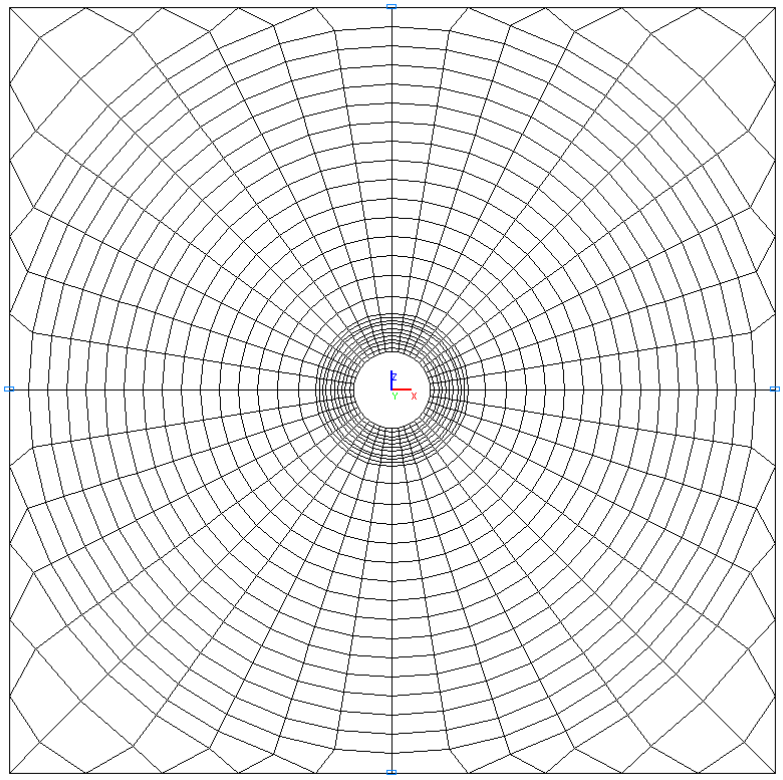
Расчетная схема – типа плоская рама, ширина пластины 2·b = 20.0 м, элементы пластины – 1088 восьмиузловых элементов типа 30 и 32 шестиузловых элемента типа 25. Сетка конечных элементов разбита в радиальном направлении от r = 1.00 м до r = 2.00 м с шагом 0.10 м, от r = 2.00 м до r = 10.00 м с шагом 0.50 м и в тангенциальном направлении с шагом 9º. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Количество узлов в расчетной схеме – 3409.

Вариант 2:

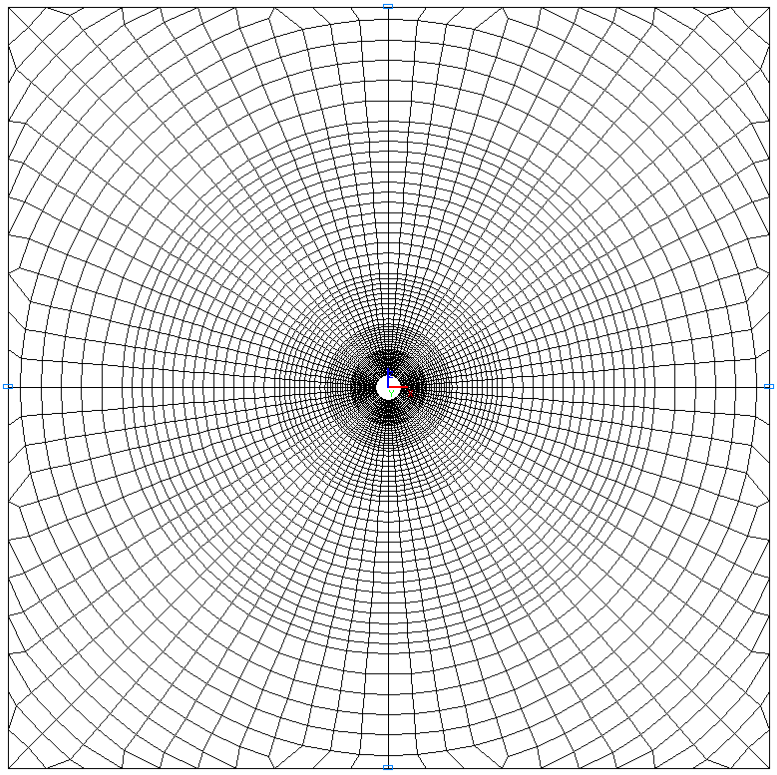
Расчетная схема – типа плоская рама, ширина пластины 2·b = 60.0 м, элементы пластины – 5024 восьмиузловых элементов типа 30 и 40 шестиузловых элементов типа 25. Сетка конечных элементов разбита в радиальном направлении от r = 1.00 м до r = 3.00 м с шагом 0.10 м, от r = 3.00 м до r = 5.00 м с шагом 0.20 м, от r = 5.00 м до r = 9.00 м с шагом 0.40 м, от r = 9.00 м до r = 21.00 м с шагом 0.80 м, от r = 21.00 м до r = 29.00 м с шагом 1.60 м и в тангенциальном направлении с шагом 4.5º.

Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Количество узлов в расчетной схеме – 15312.

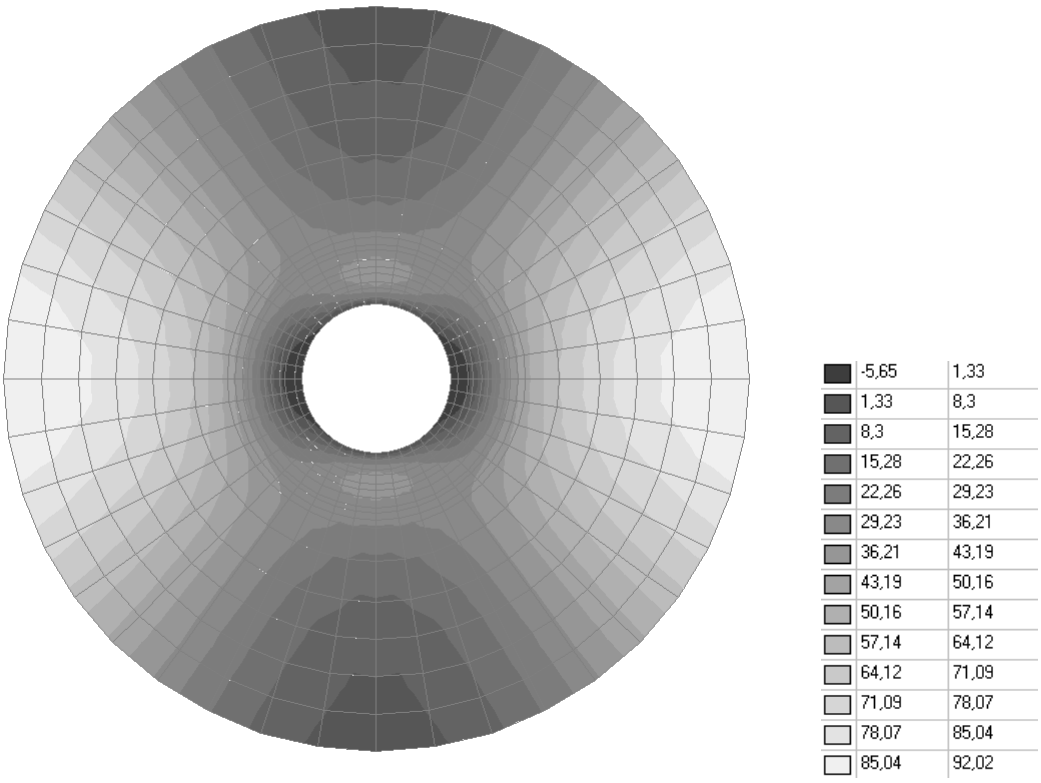
Результаты решения в SCAD



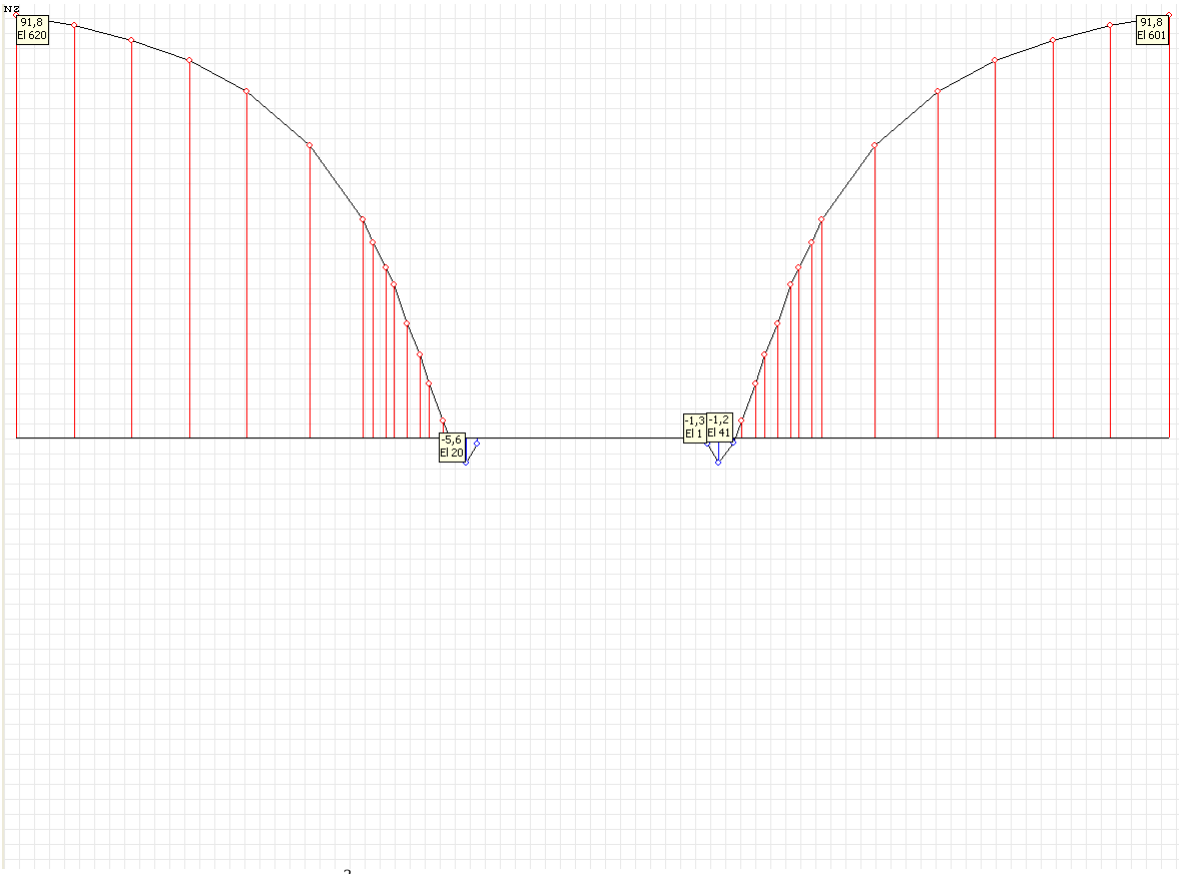
Расчетная схема. Вариант 1



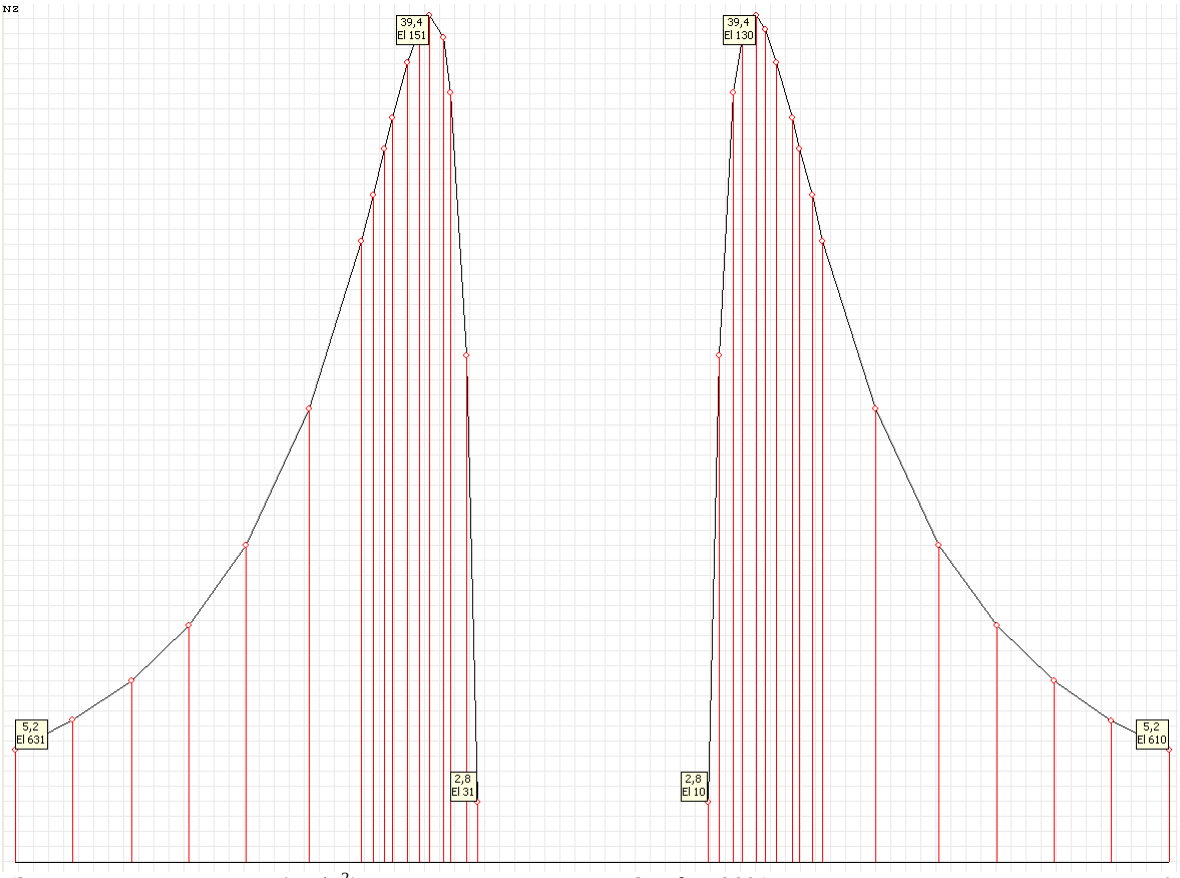
Расчетная схема. Вариант 2



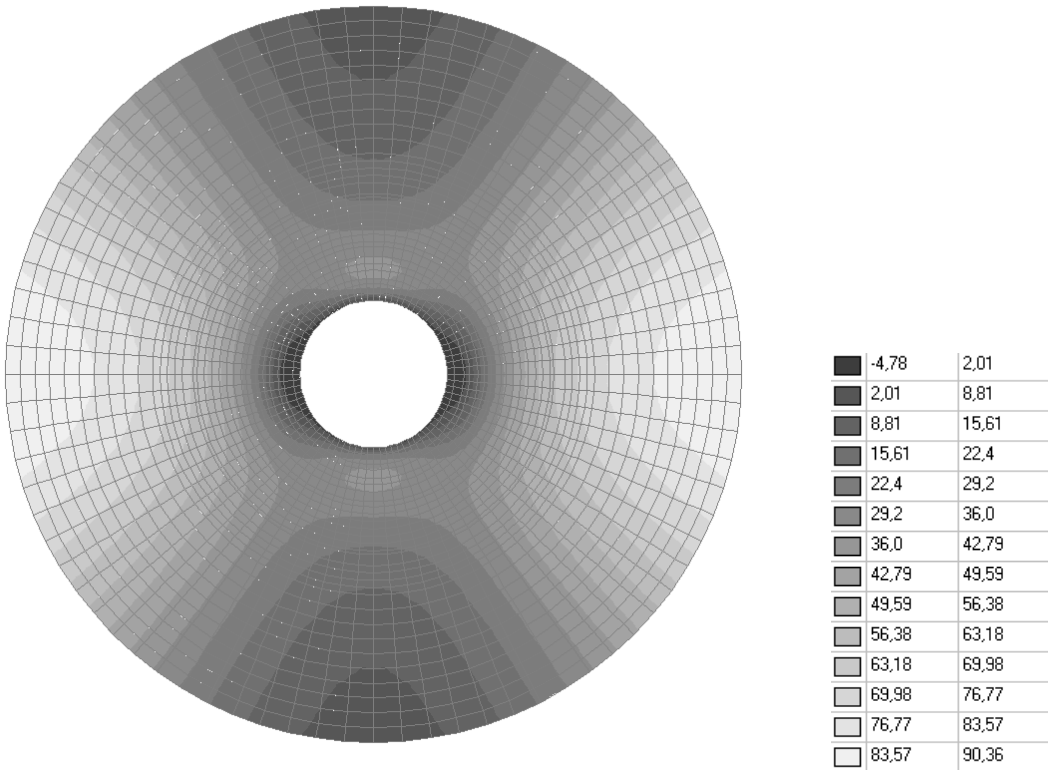
Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 1



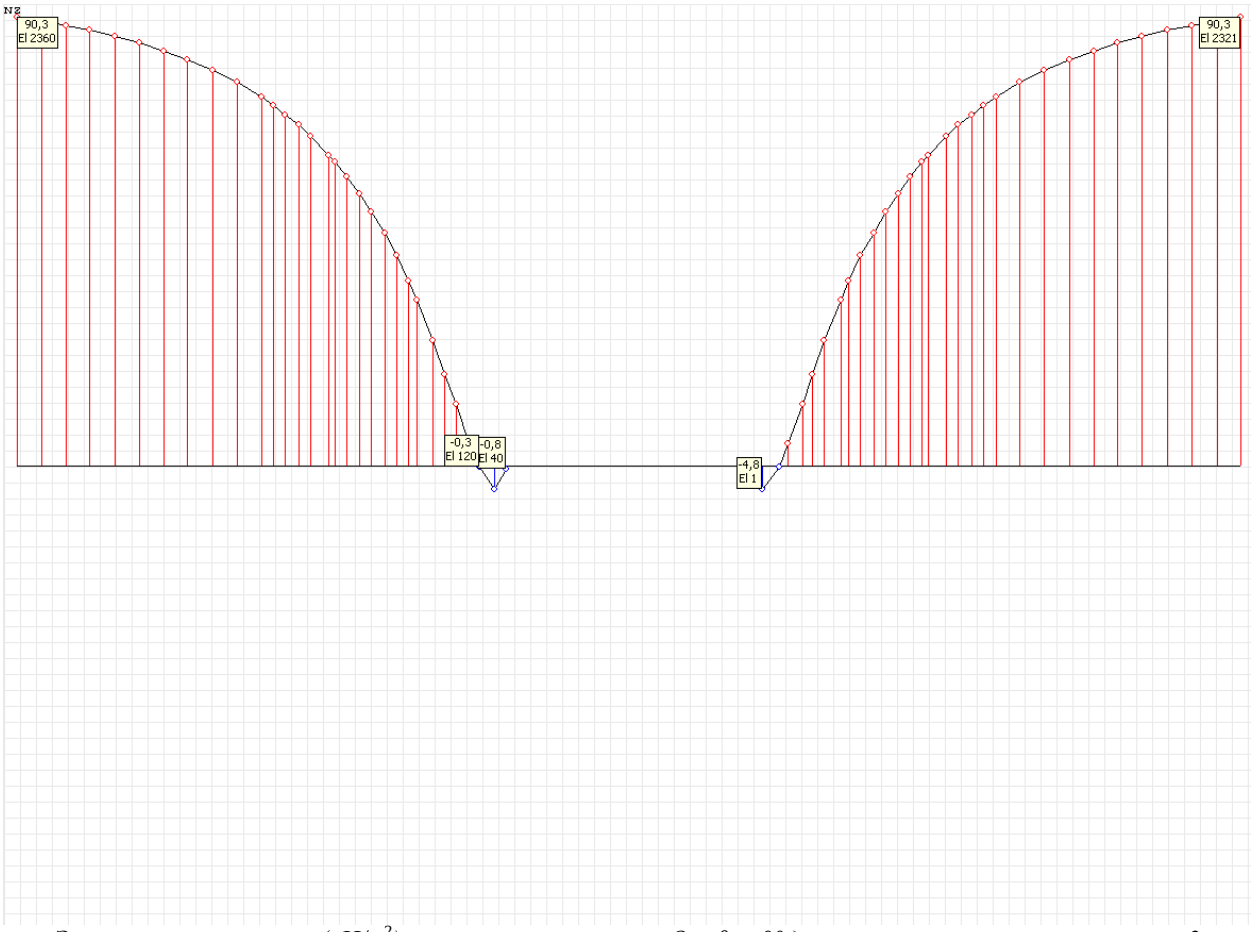
Эпюра напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при угле наклона к оси OX1 $\theta = 0°$ для расчетной схемы по варианту 1



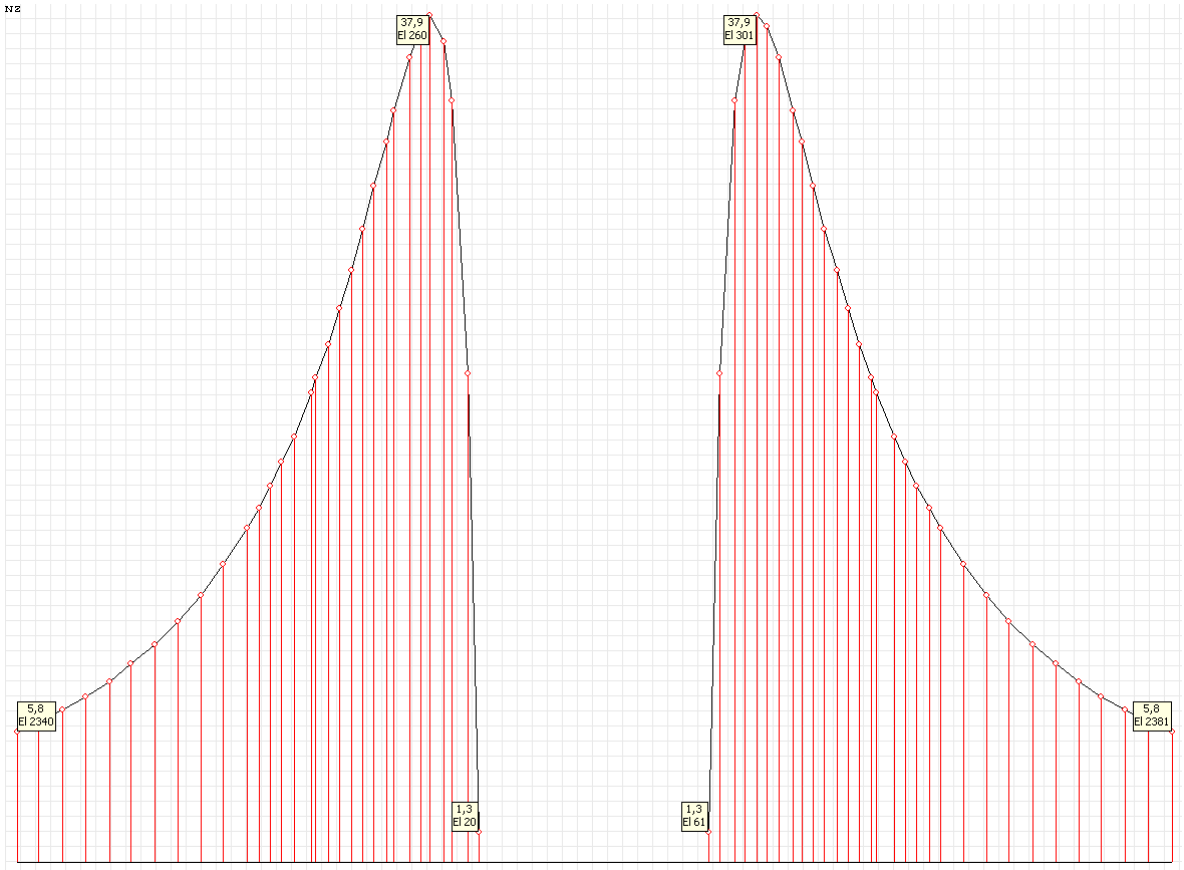
Эпюра напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 90^o$ для расчетной схемы по варианту 1



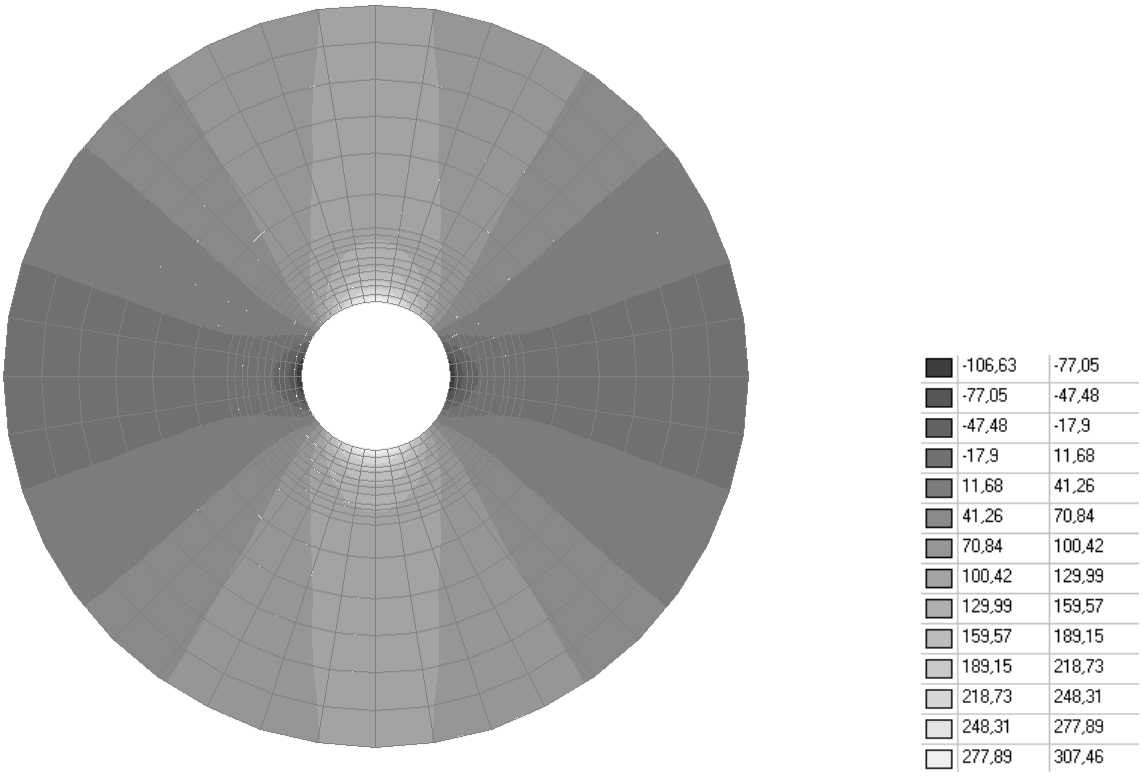
Значения напряжений σ_{rr} (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 2



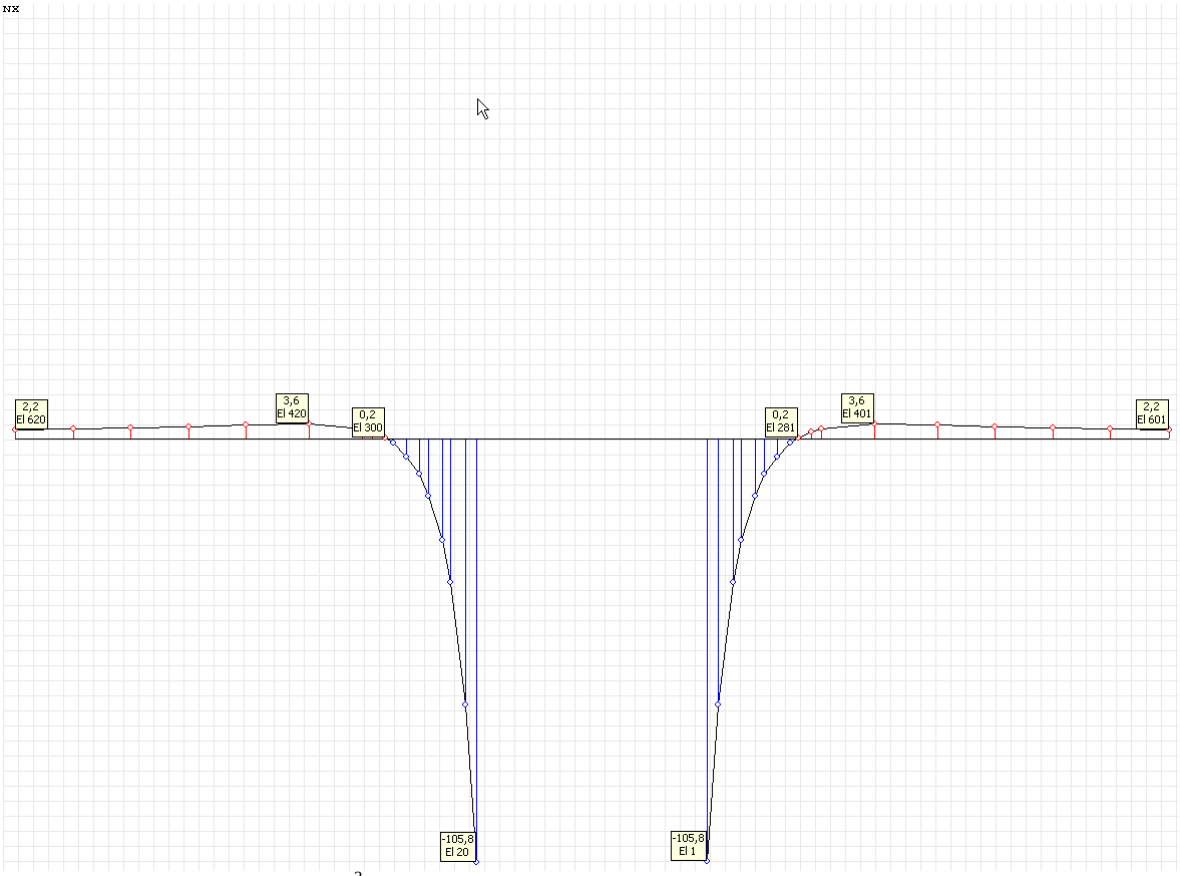
Эпюра напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 0°$ для расчетной схемы по варианту 2



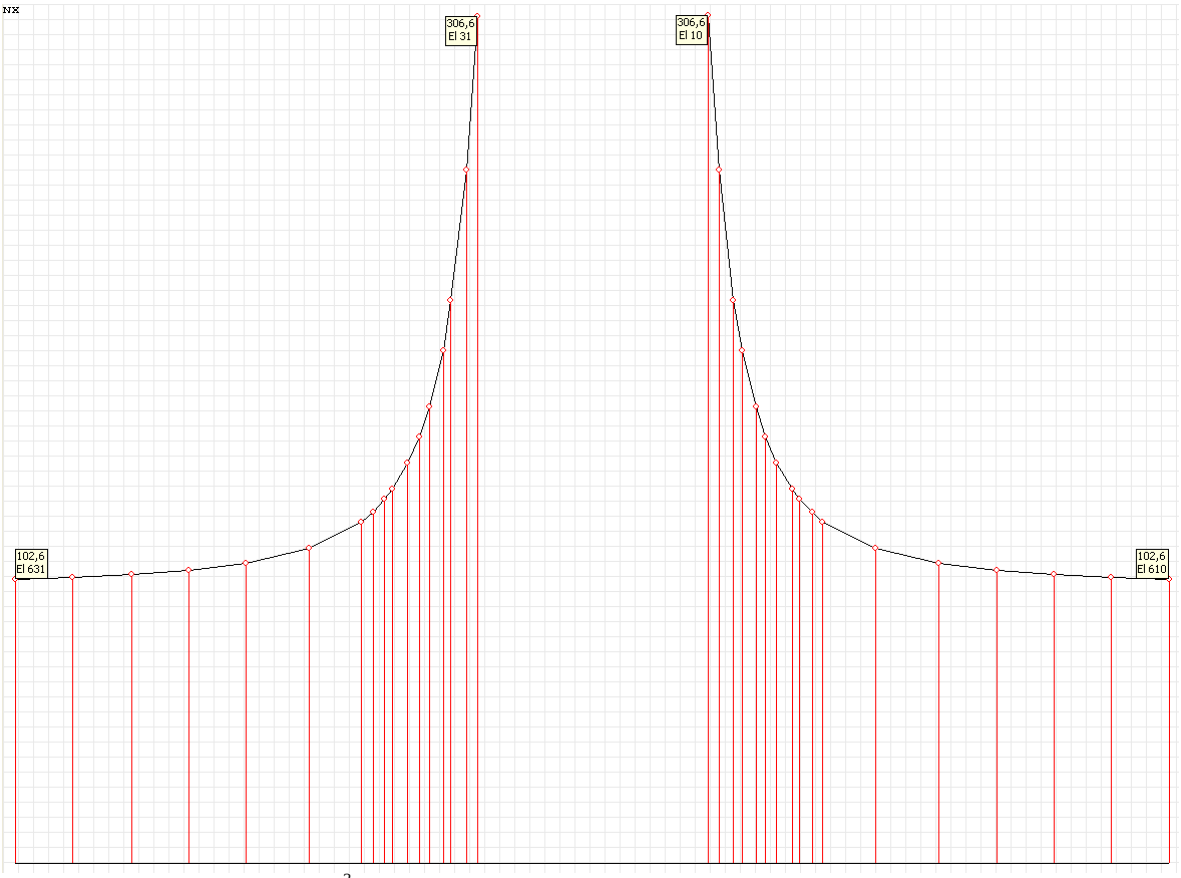
Эпюра напряжений σ_{rr} (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 90°$ для расчетной схемы по варианту 2



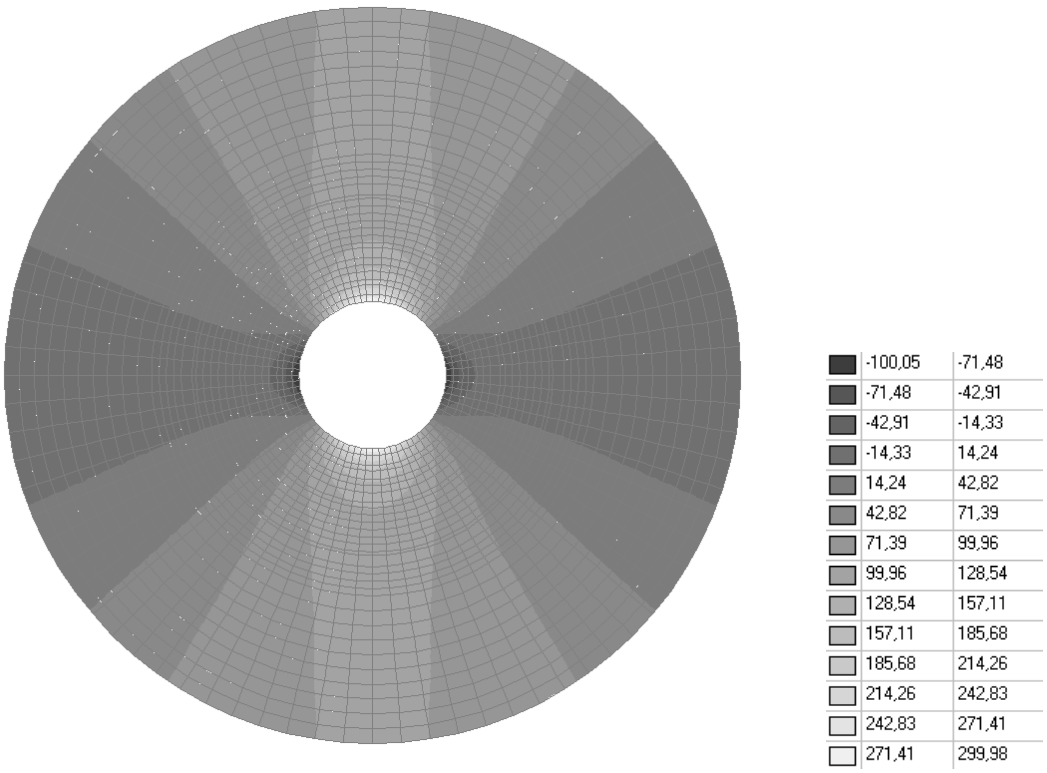
Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 1



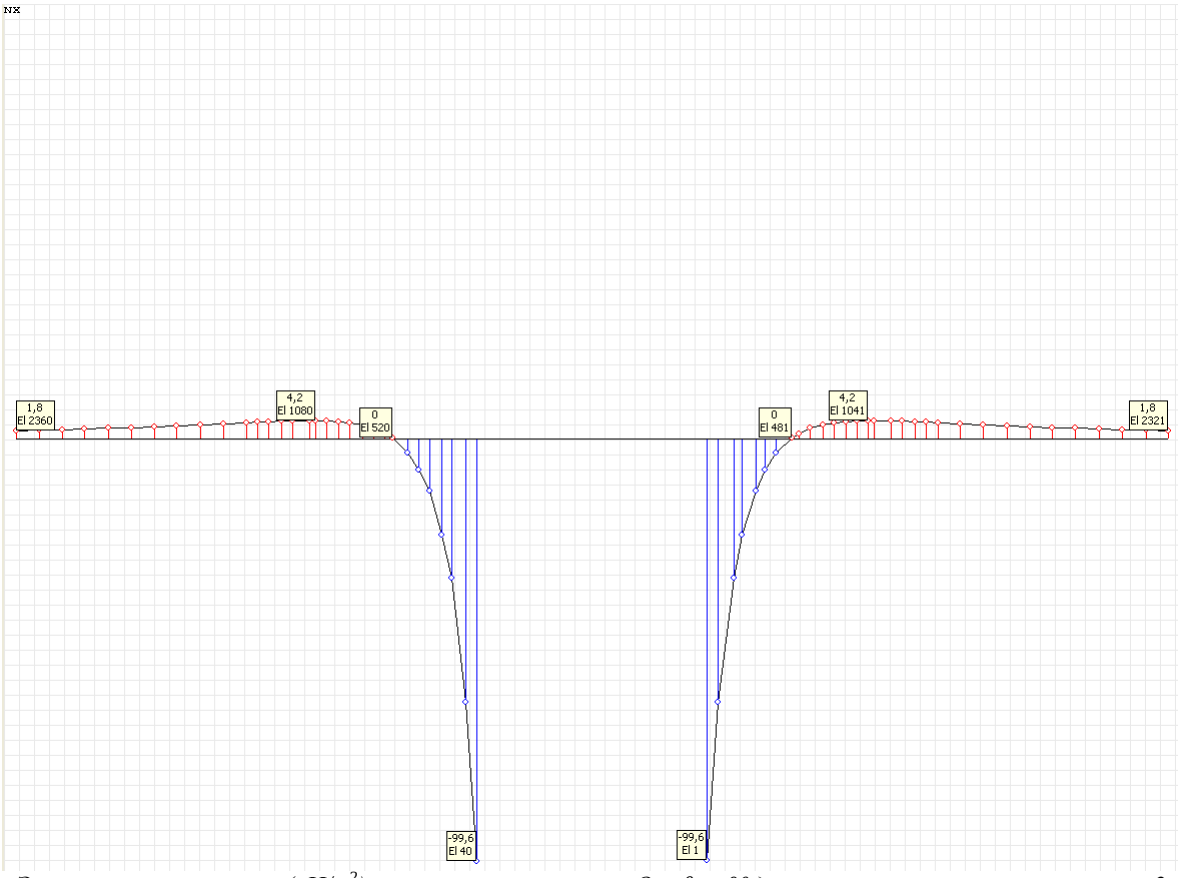
Эпюра напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 θ = 0°для расчетной схемы по варианту 1



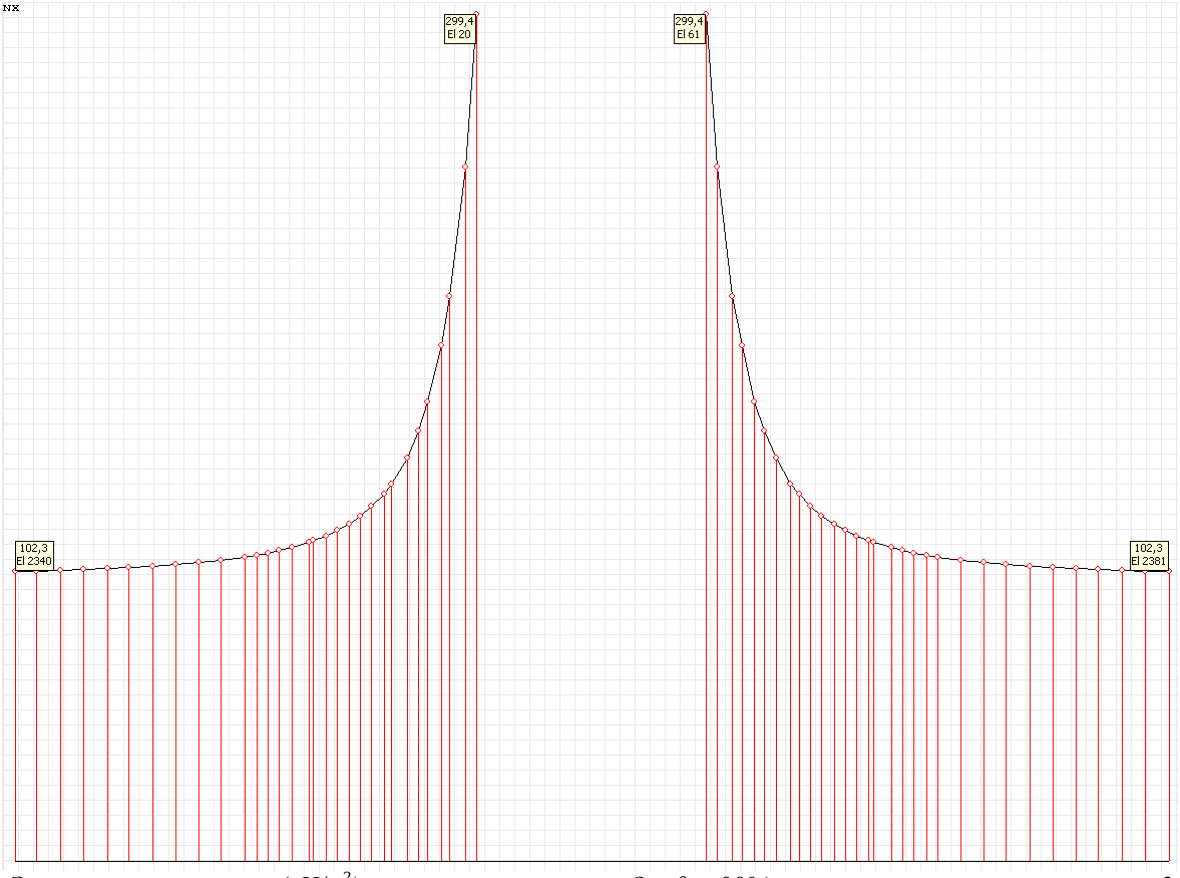
Эпюра напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 90^o$ для расчетной схемы по варианту 1



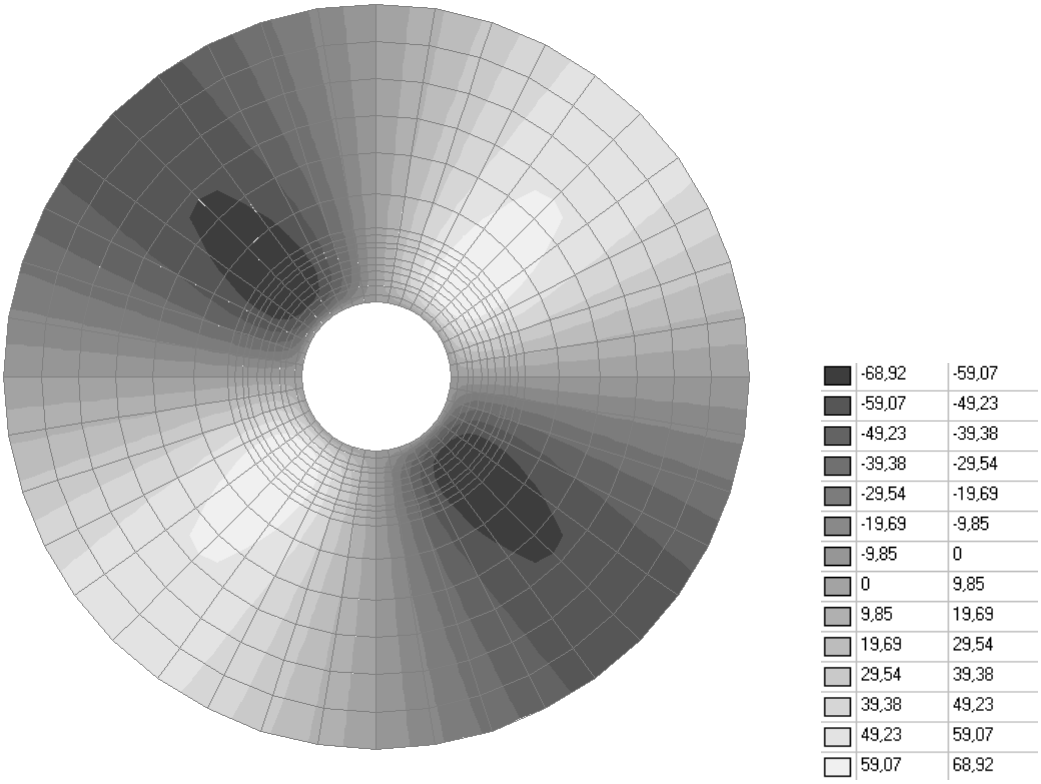
Значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 2



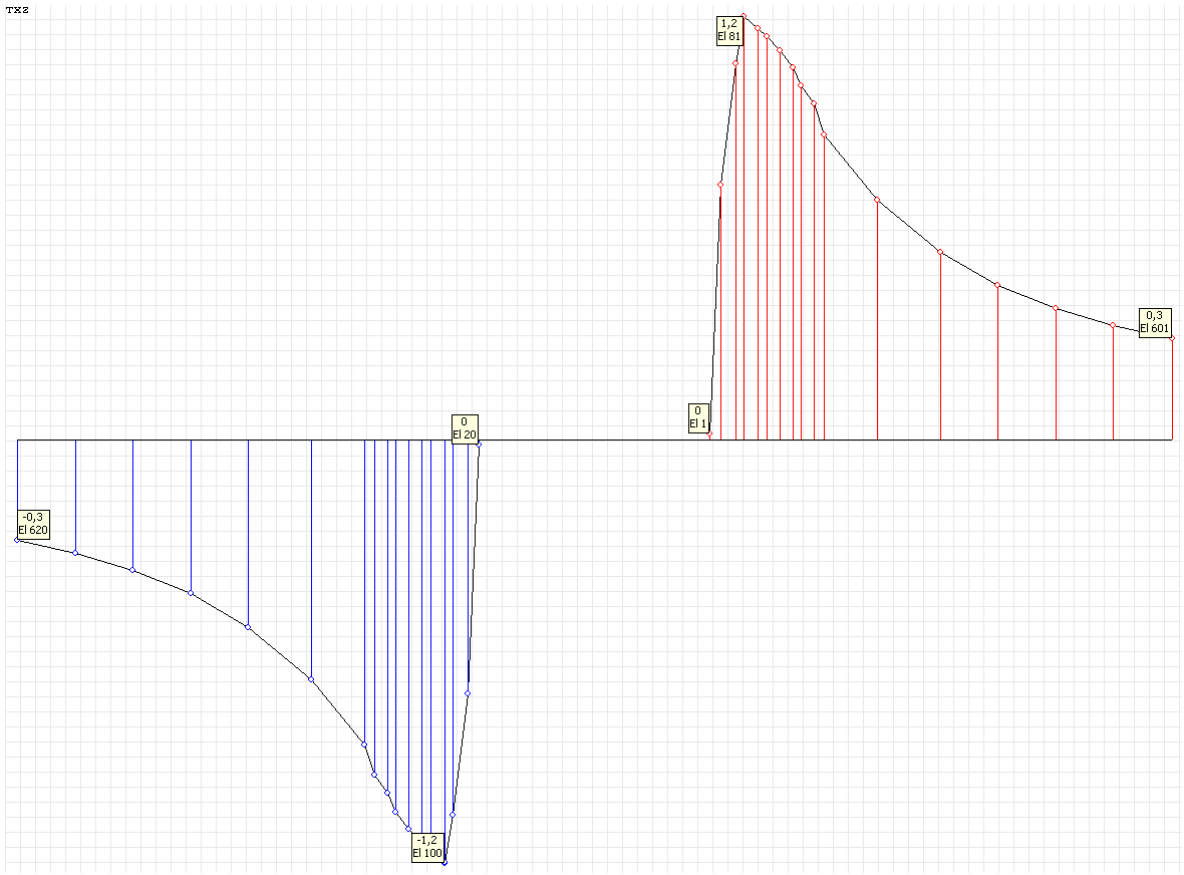
Эпюра напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 0°$ для расчетной схемы по варианту 2



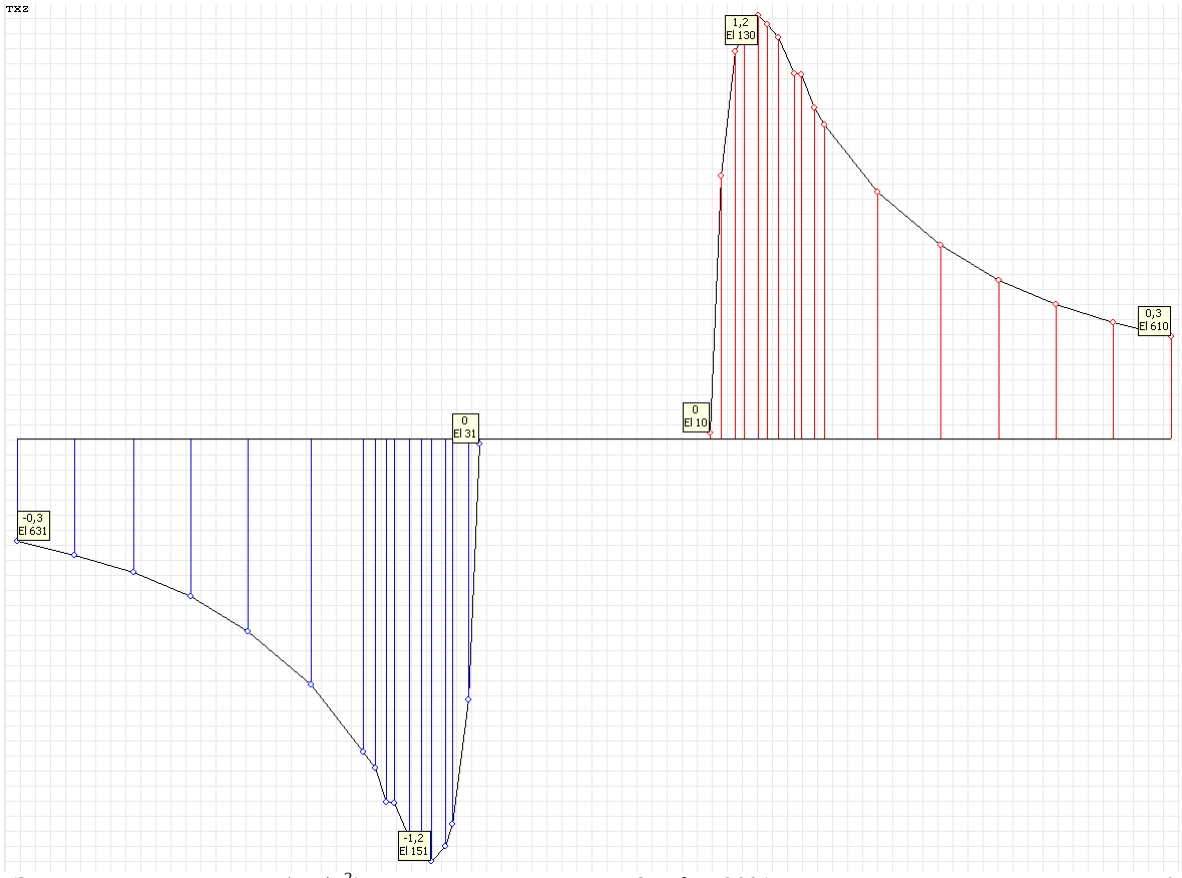
Эпюра напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 90°$ для расчетной схемы по варианту 2



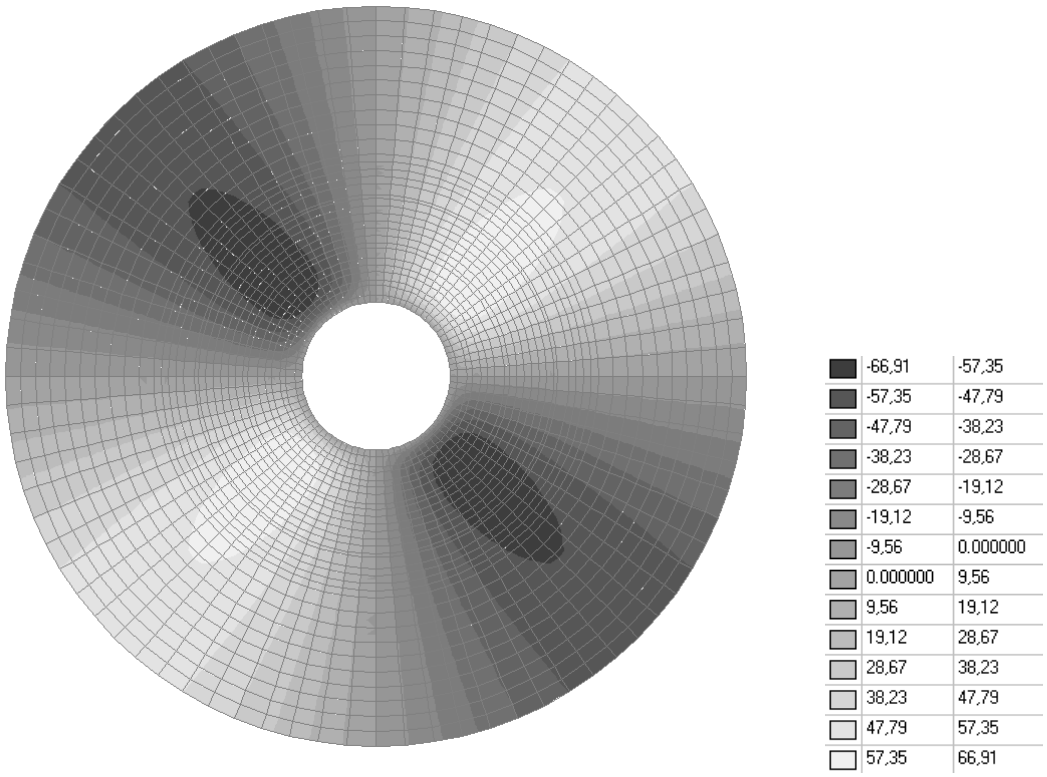
Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 1



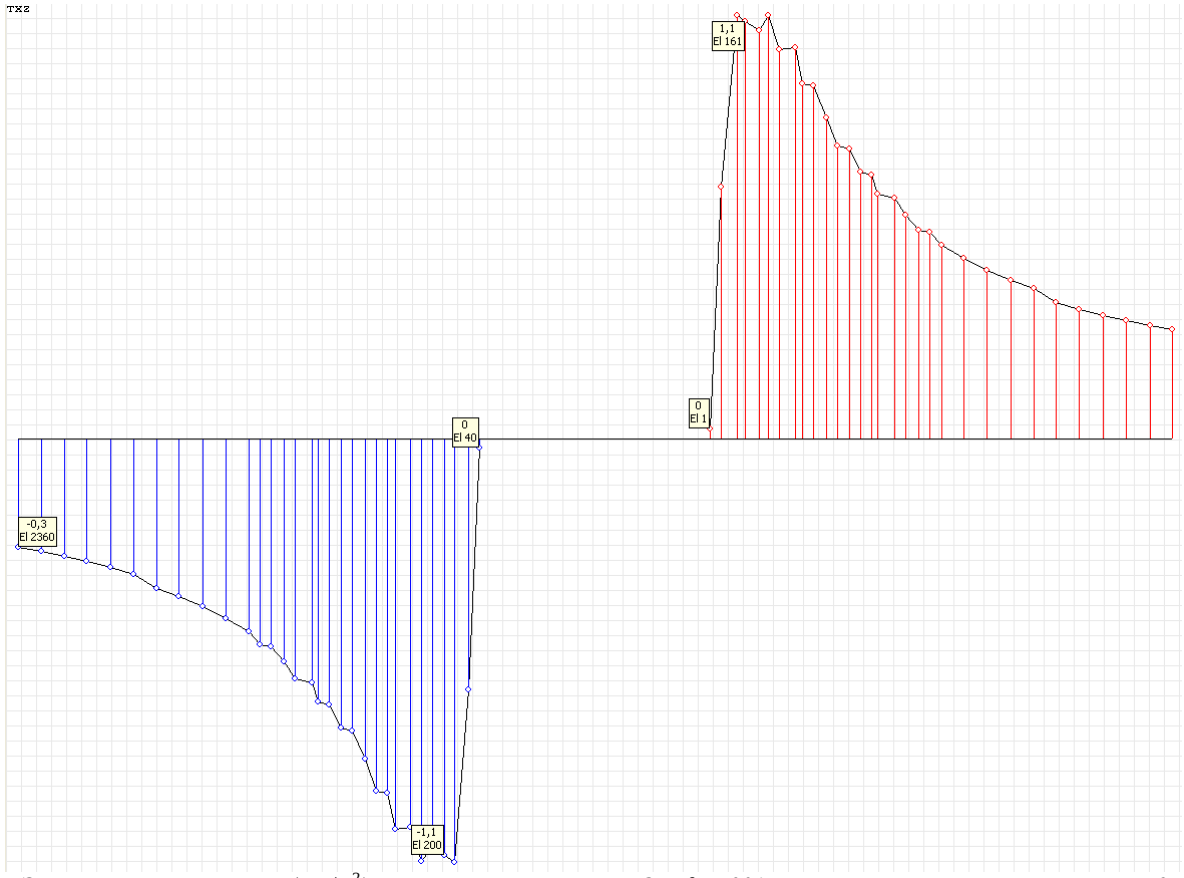
Эпюра напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 0°$ для расчетной схемы по варианту 1



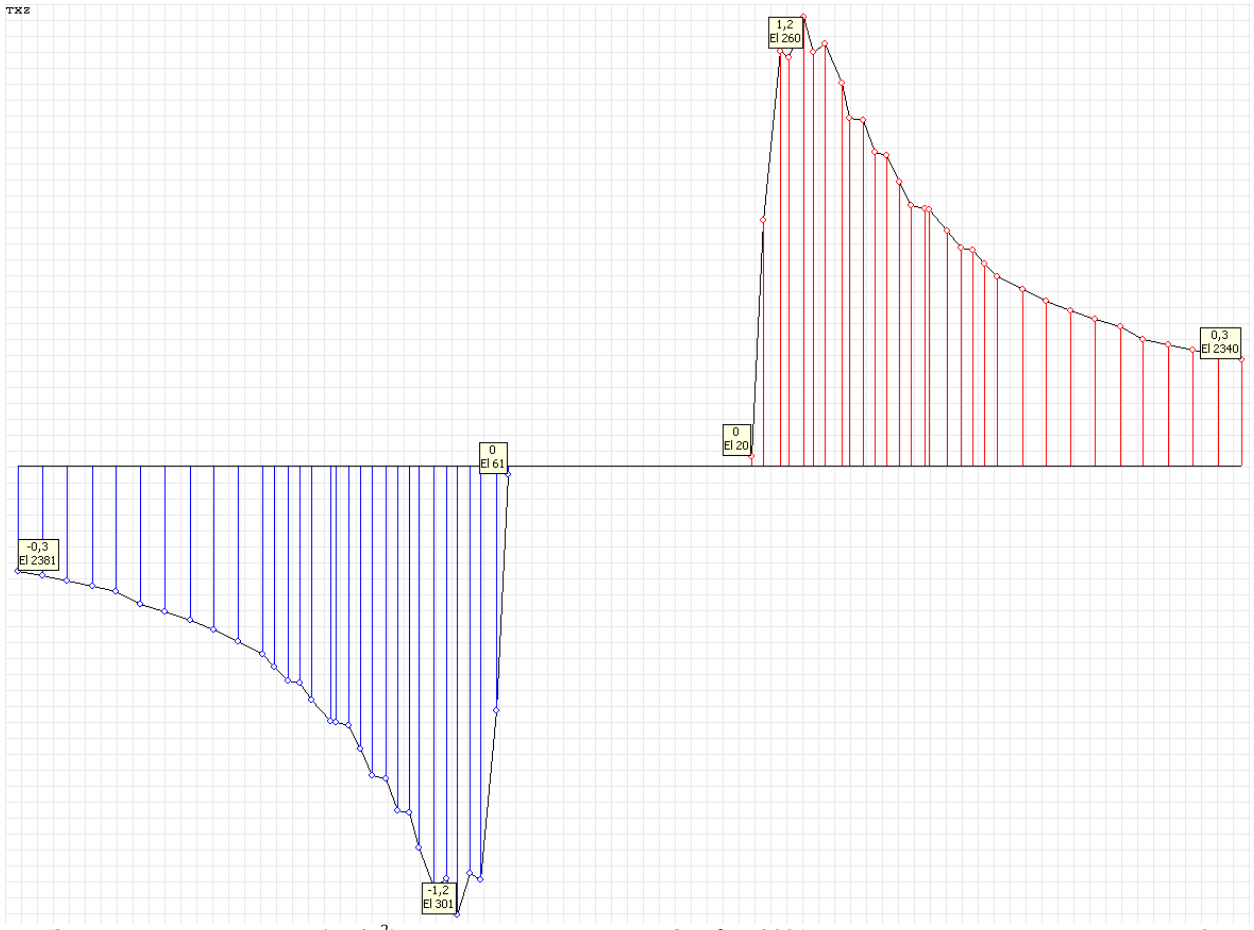
Эпюра напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 90^o$ для расчетной схемы по варианту 1



Значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) для расчетной схемы по варианту 2



Эпюра напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 0°$ для расчетной схемы по варианту 2



Эпюра напряжений $\sigma_{r\theta}$ (кН/м^2) при угле наклона к оси Ox_1 $\theta = 90°$ для расчетной схемы по варианту 2

Сравнение решений:

Компоненты тензора напряжений в полярных координатах σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$.

Решение	**Напряжения σ_{rr} (кН/м^2)**					**Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (кН/м^2)**			
	θ = 0°			**θ = 90°**		**θ = 0°**			**θ = 90°**
	r = 1.000 м	r = (√6/5)·a = 1.095 м	r = (√3/2)·a = 1.225 м	r = 1.000 м	r = (√2)·a = 1.414 м	r = 1.000 м	r = (√3)·a = 1.732 м	r = (√6)·a = 2.449 м	r = 1.000 м
Теория	0.00	-σ/24 = -4.17	0.00	0.00	3·σ/8 = 37.50	-σ = -100.00	0.00	σ/24 = 4.17	3·σ = 300.00
SCAD, PC вар.1	-1.32	-5.65	-1.26	2.77	39.43	-100.63	-1.18	3.56	307.46
Отклонения, %	–	–	–	–	5.15	0.63	–	–	2.49
SCAD, PC вар.2	-0.76	-4.78	-0.36	1.31	37.94	-100.05	-0.04	4.16	299.85
Отклонения, %	–	–	–	–	1.17	0.05	–	–	0.05

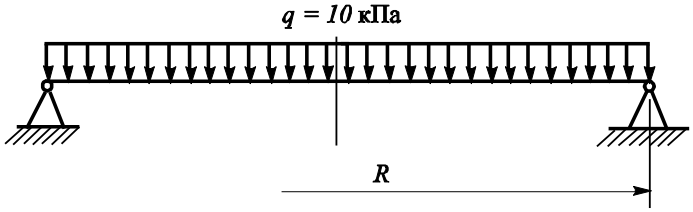
Замечания: При аналитическом решении напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ в пластине с малым круговым отверстием от воздействия одностороннего равномерного растяжения определяются по следующим формулам (С.П. Демидов, Теория упругости. — Москва: Высшая школа, 1979, стр. 302):

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2}\cdot\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma}{2}\cdot\left(1-4\cdot\frac{a^2}{r^2}+3\cdot\frac{a^4}{r^4}\right)\cdot cos(2\cdot\theta);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\cdot\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma}{2}\cdot\left(1+3\cdot\frac{a^4}{r^4}\right)\cdot cos(2\cdot\theta);$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\cdot\left(1+2\cdot\frac{a^2}{r^2}-3\cdot\frac{a^4}{r^4}\right)\cdot sin(2\cdot\theta).$$

Напряженно-деформированное состояние круговой шарнирно опертой пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния круговой шарнирно опертой пластины постоянной толщины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой.

Имя файла с исходными данными: **4.14.SPR**

Формулировка задачи: Круговая шарнирно опертая пластина постоянной толщины нагружается поперечной равномерно распределенной нагрузкой. Определить прогиб w, радиальный уклон θ, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по оси и по наружному контуру пластины.

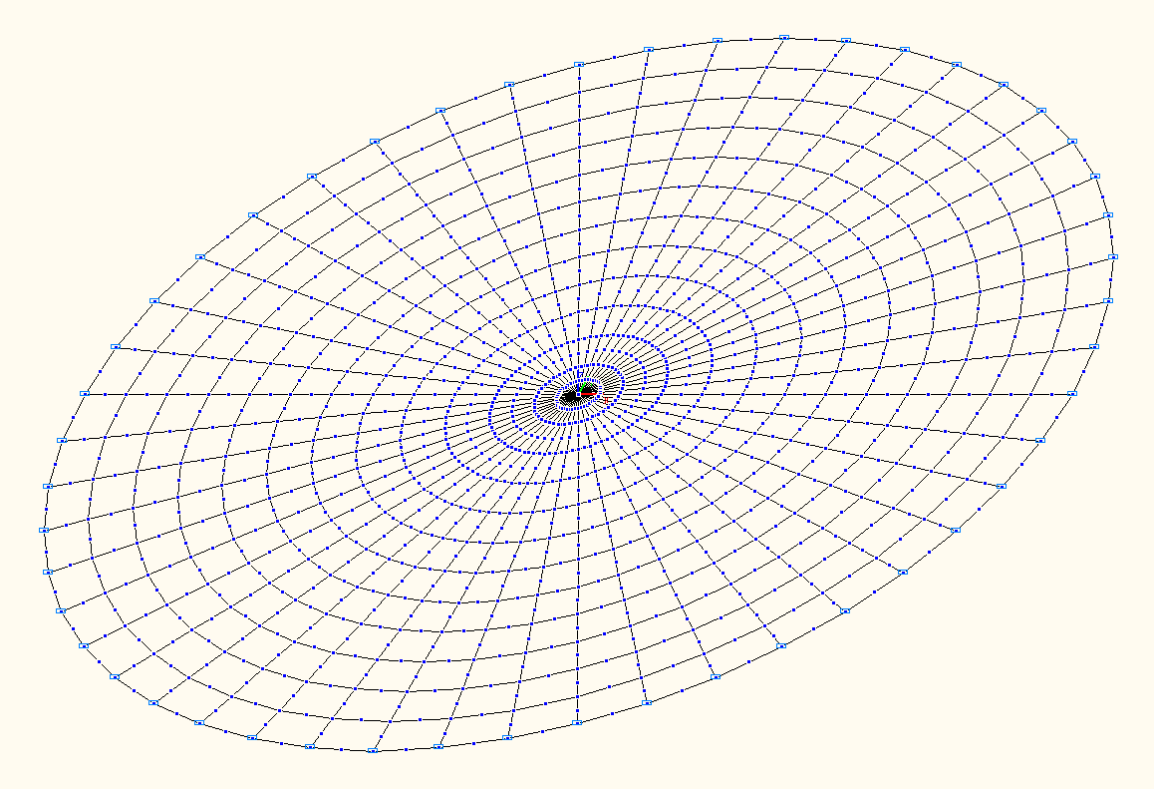
Ссылки: С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.

Исходные данные:

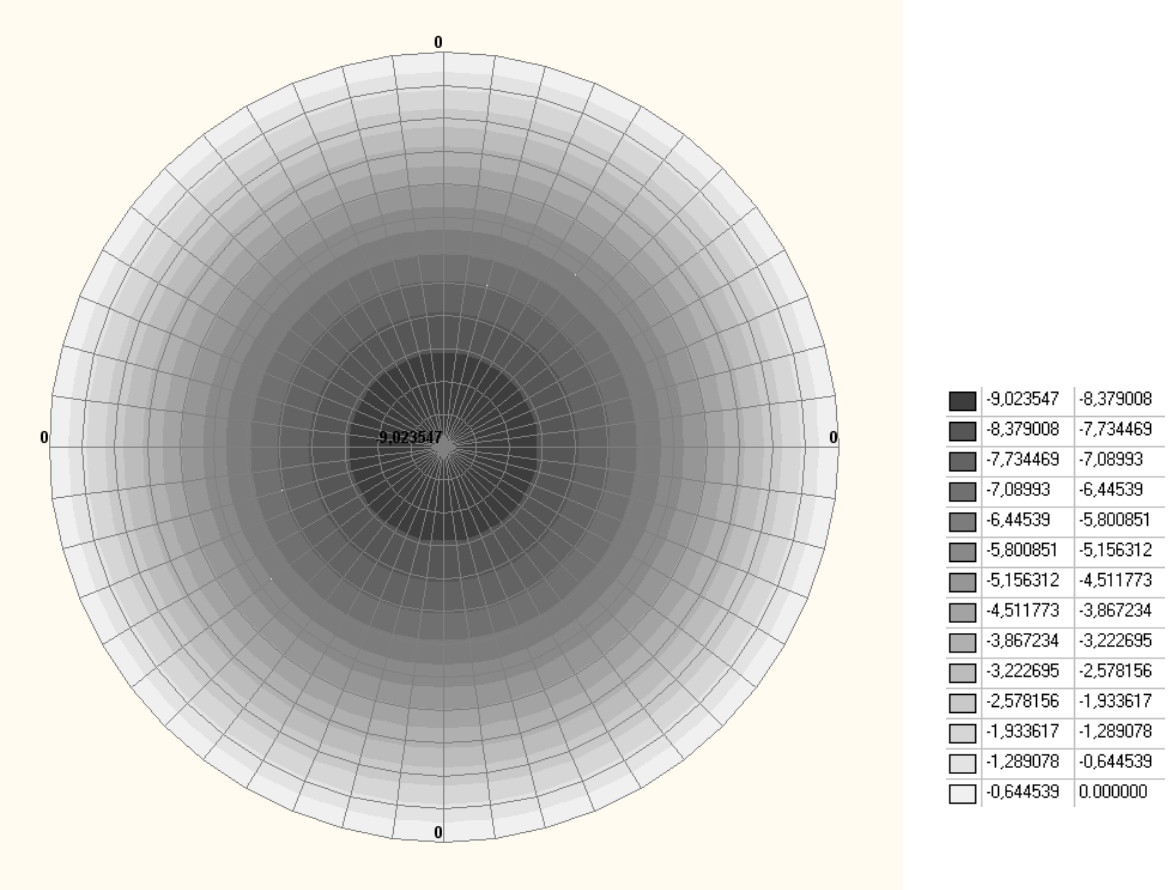
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$R = 1.2$ м	- наружный радиус пластины;
$h = 2.0 \cdot 10^{-2}$ м	- толщина пластины;
$q = 10$ кПа	- поперечная равномерно распределенная нагрузка.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы пластины – 528 восьмиузловых элементов типа 50 и 48 шестиузловых элементов типа 45. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z по наружному контуру пластины. Количество узлов в расчетной схеме – 1729.

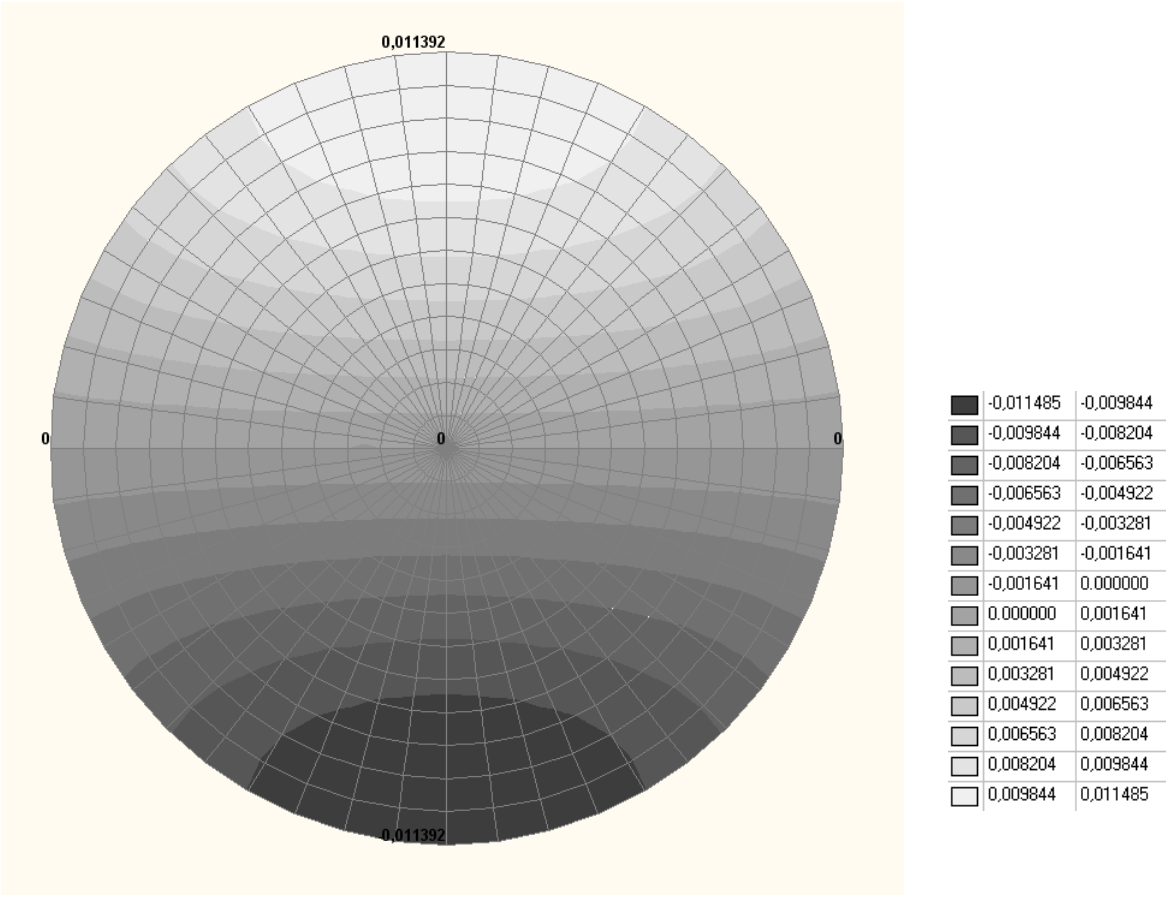
Результаты решения в SCAD



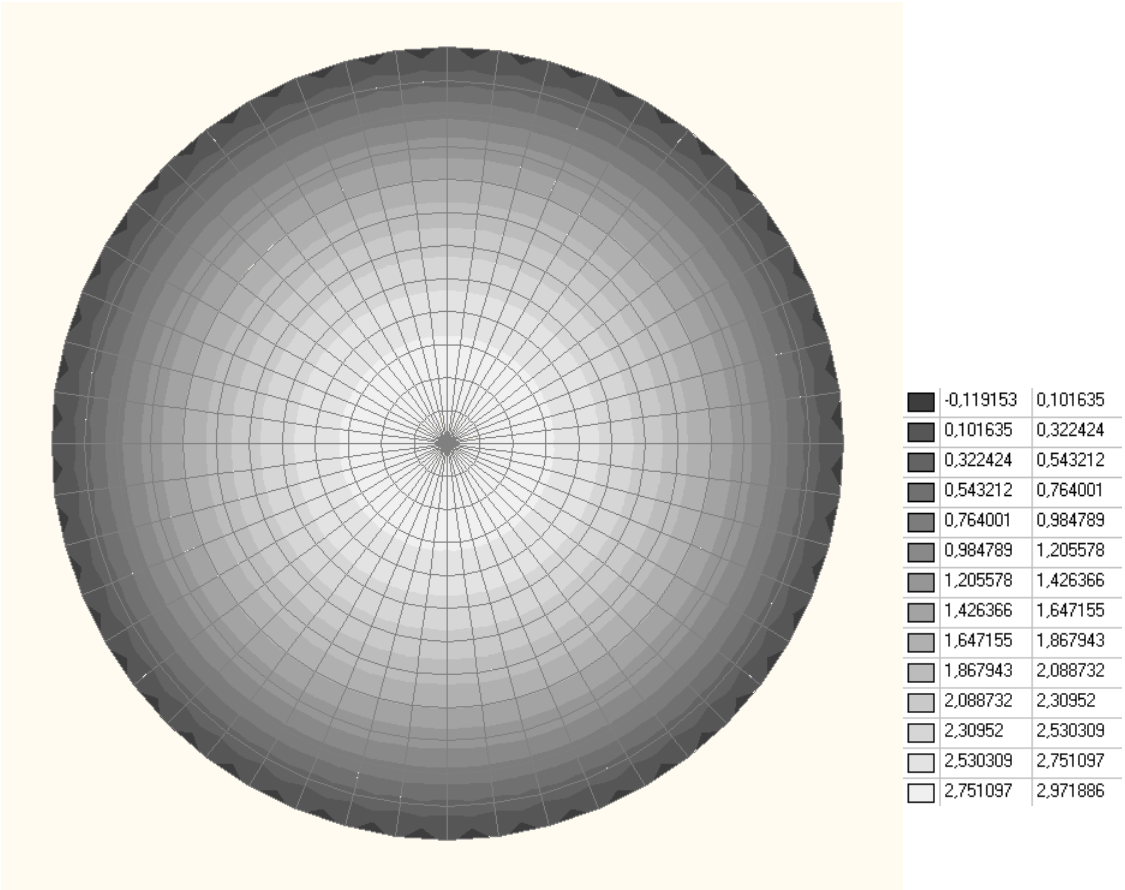
Расчетная схема



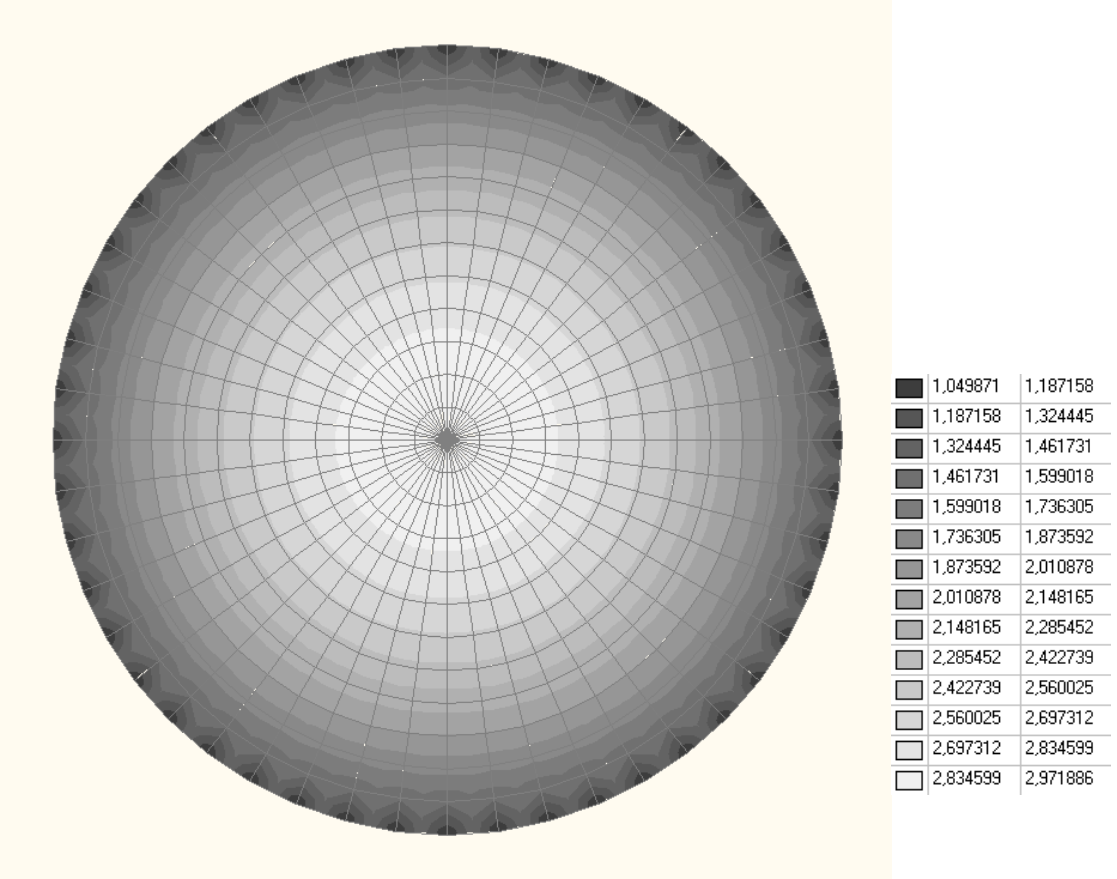
Значения прогибов w (мм)



Значения радиальных уклонов θ (рад)



Значения радиальных изгибающих моментов M_r (кН·м/м)



Значения тангенциальных изгибающих моментов M_θ (кН·м/м)

Сравнение решений:

Параметр	По оси пластины			По наружному контуру пластины		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
w, мм	-9.015	-9.024	0.10	0.000	0.000	–
θ, рад	0.000000	0.000000	–	0.011340	0.011392	0.46
M_r, кН·м/м	2.970	2.972	0.07	0.000	0.063	–
M_θ, кН·м/м	2.970	2.972	0.07	1.260	1.226	2.70

Замечания: При аналитическом решении прогиб w, радиальный уклон θ, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по оси пластины могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948, стр. 66):

$$w = -\frac{q \cdot R^4 \cdot (5+\mu)}{64 \cdot D \cdot (1+\mu)}, \text{ где:}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\mu^2)};$$

$$\theta = 0;$$

$$M_r = \frac{q \cdot R^2 \cdot (3+\mu)}{16};$$

$$M_\theta = \frac{q \cdot R^2 \cdot (3+\mu)}{16}.$$

При аналитическом решении прогиб *w*, радиальный уклон θ, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по наружному контуру пластины могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948, стр. 66):

$$w = 0;$$

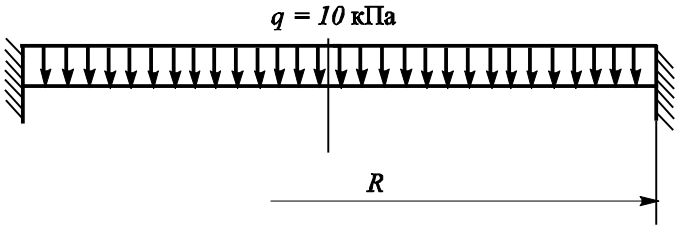
$$\theta = \frac{q \cdot R^3}{8 \cdot D \cdot (1+\mu)}, \text{ где:}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\mu^2)};$$

$$M_r = 0;$$

$$M_\theta = \frac{q \cdot R^2 \cdot (1-\mu)}{8}.$$

Напряженно-деформированное состояние круговой защемленной по краям пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния круговой защемленной пластины постоянной толщины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой.

Имя файла с исходными данными: **4.15.SPR**

Формулировка задачи: Круговая жестко защемленная пластина постоянной толщины нагружается поперечной равномерно распределенной нагрузкой. Определить прогиб w, радиальный уклон θ, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по оси и по наружному контуру пластины.

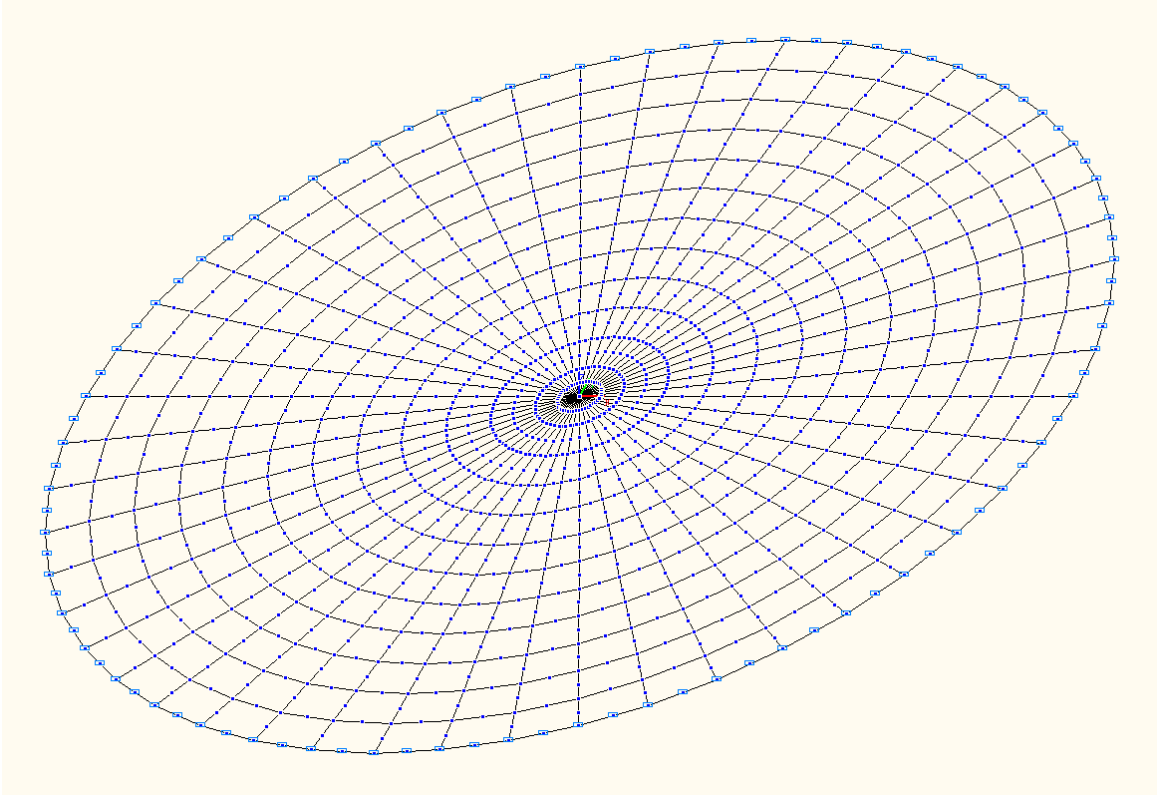
Ссылки: С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

Исходные данные:

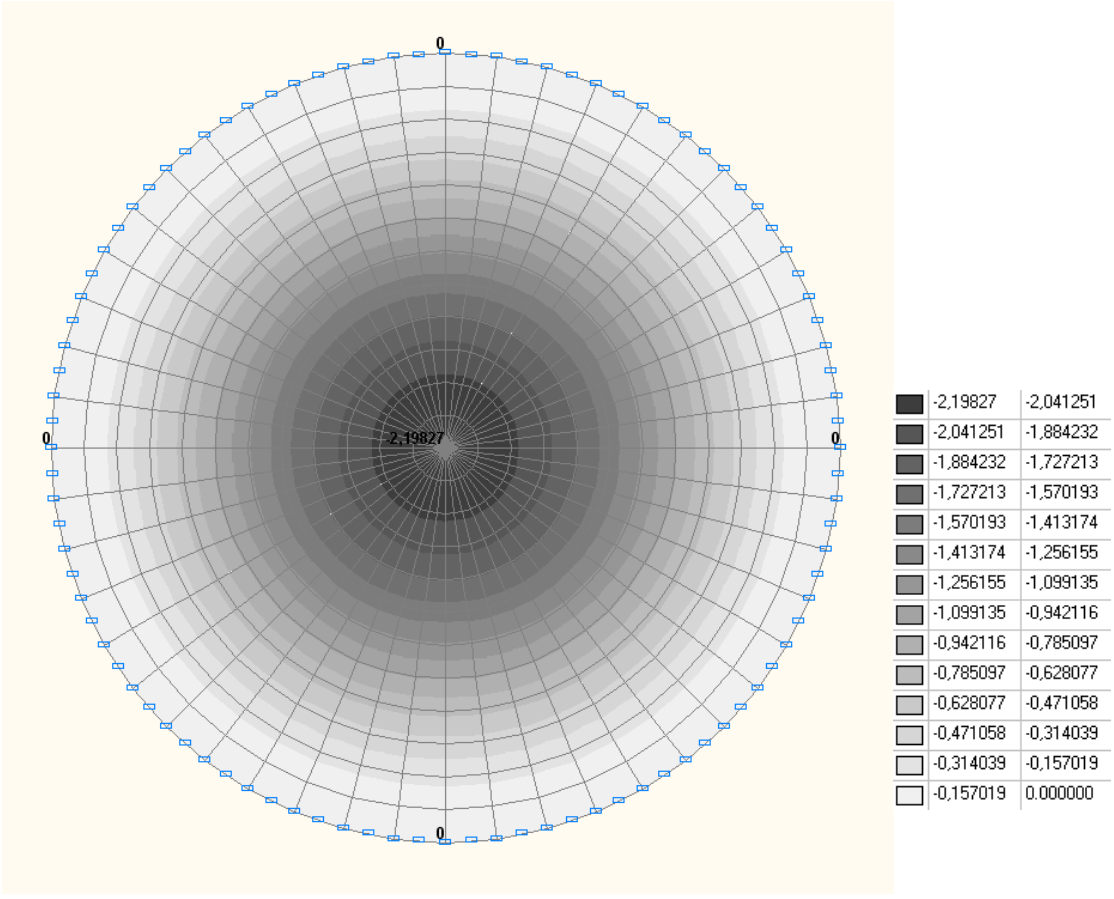
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$R = 1.2$ м	- наружный радиус пластины;
$h = 2.0 \cdot 10^{-2}$ м	- толщина пластины;
$q = 10$ кПа	- поперечная равномерно распределенная нагрузка.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы пластины – 528 восьмиузловых элементов типа 50 и 48 шестиузловых элементов типа 45. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UX, UY по наружному контуру пластины. Количество узлов в расчетной схеме – 1729.

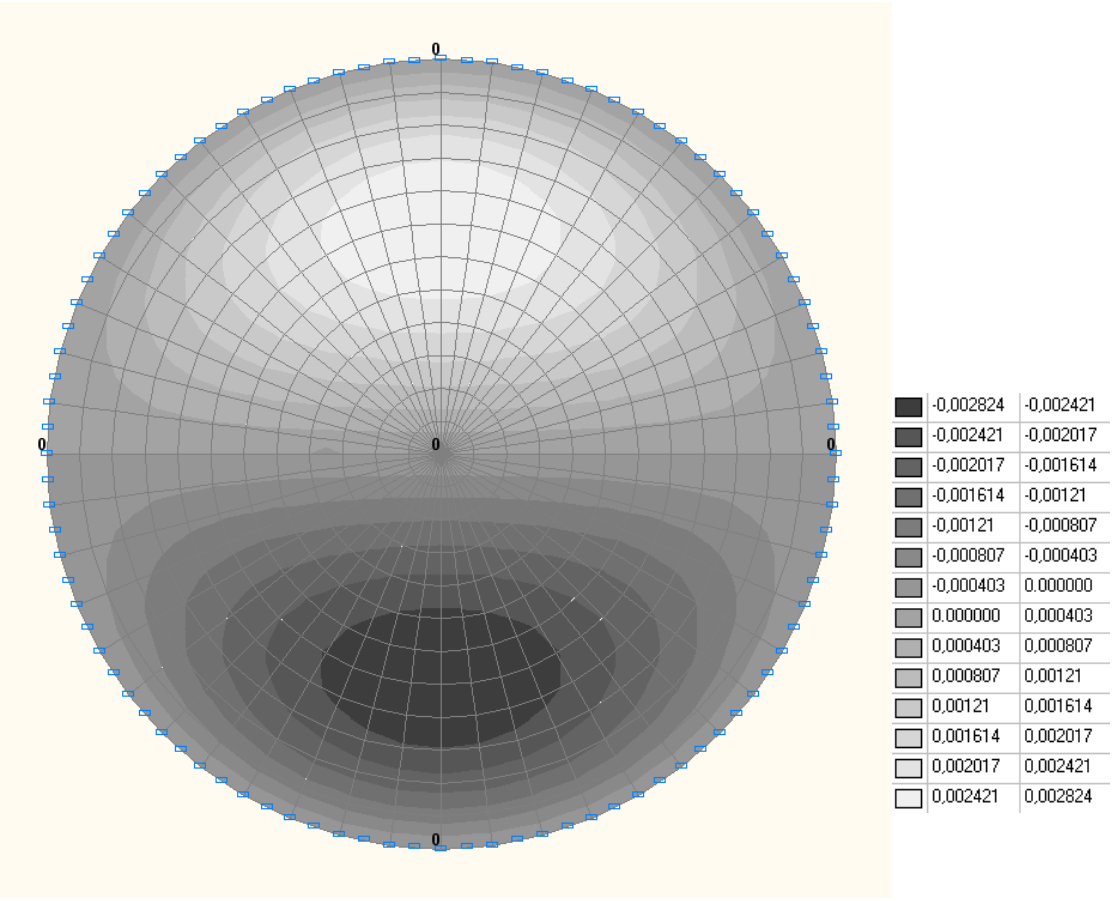
Результаты решения в SCAD



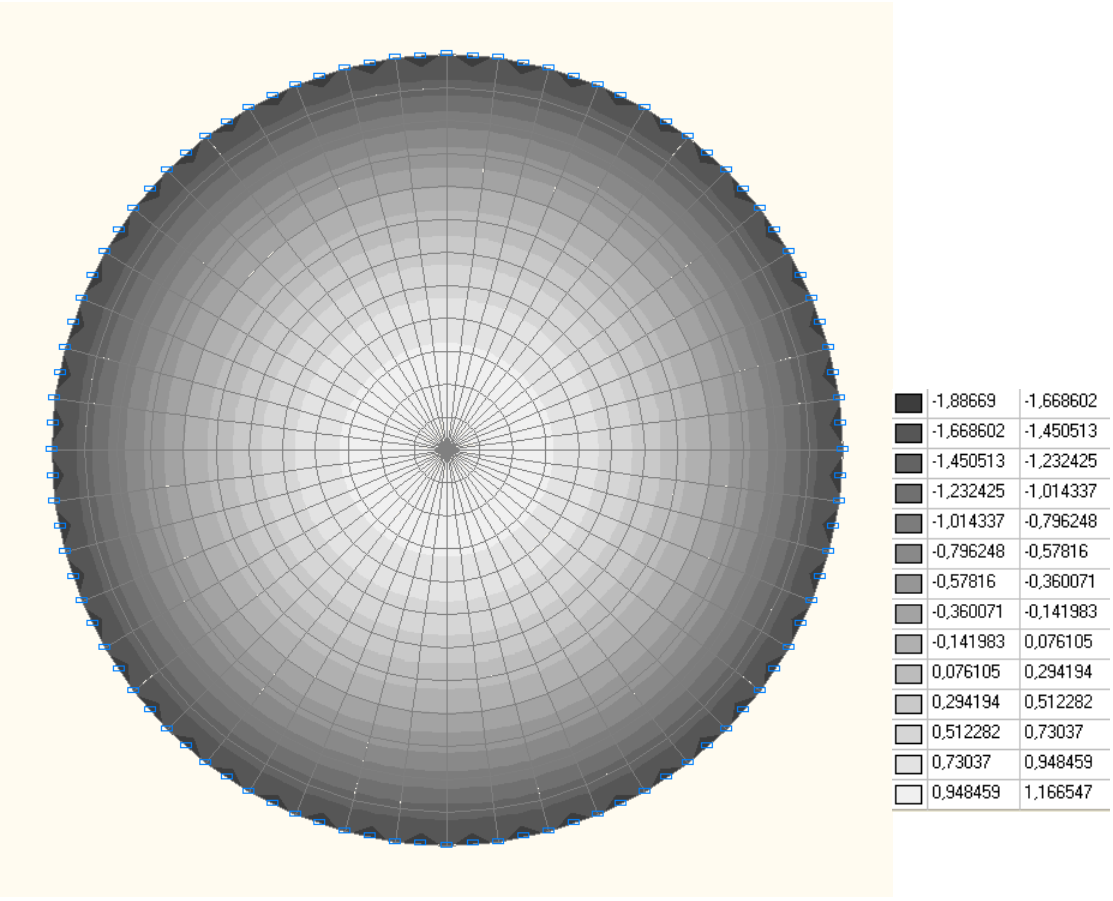
Расчетная схема



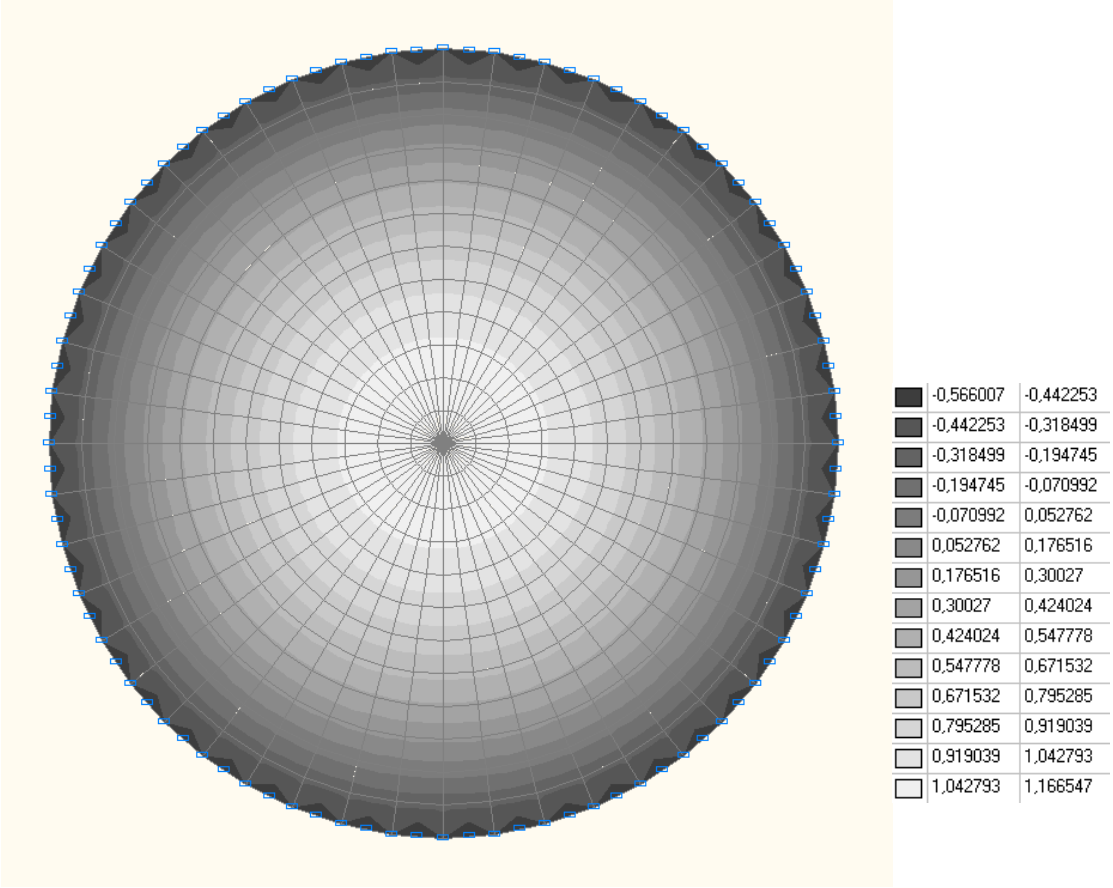
Значения прогибов w (мм)



Значения радиальных уклонов θ (рад)



Значения радиальных изгибающих моментов M_r (кН·м/м)



Значения тангенциальных изгибающих моментов M_θ (кН·м/м)

Сравнение решений:

Параметр	По оси пластины			По наружному контуру пластины		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
w, мм	-2.211	-2.198	0.59	0.000	0.000	—
θ, рад	0.000000	0.000000	—	0.000000	0.000000	—
M_r, кН·м/м	1.170	1.167	0.26	-1.800	-1.736	3.56
M_θ, кН·м/м	1.170	1.167	0.26	-0.540	-0.505	6.48

Замечания: При аналитическом решении прогиб w, радиальный уклон θ, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по оси пластины могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948, стр. 65):

$$w = -\frac{q \cdot R^4}{64 \cdot D}, \text{ где:}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)};$$

$$\theta = 0;$$

$$M_r = \frac{q \cdot R^2 \cdot \left(1 + \mu\right)}{16};$$

$$M_\theta = \frac{q \cdot R^2 \cdot (1+\mu)}{16}.$$

При аналитическом решении прогиб w, радиальный уклон θ, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по наружному контуру пластины могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948, стр. 66):

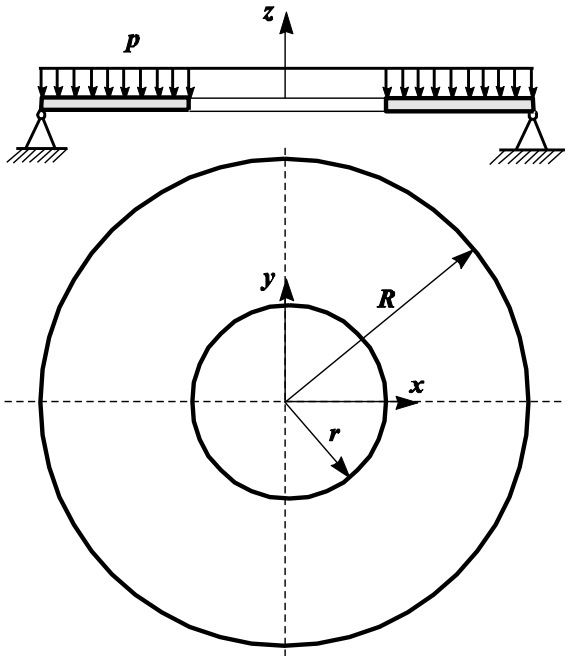
$$w = 0;$$

$$\theta = 0;$$

$$M_r = -\frac{q \cdot R^2}{8};$$

$$M_\theta = -\frac{q \cdot R^2 \cdot \mu}{8}.$$

Напряженно-деформированное состояние кольцевой шарнирно опертой пластины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния кольцевой шарнирно опертой пластины постоянной толщины, нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой.

***Имя файла с исходными данными*: 4.16.SPR**

Формулировка задачи: Кольцевая шарнирно опертая пластина постоянной толщины нагружается поперечной равномерно распределенной нагрузкой. Определить прогиб w, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по внутреннему и по наружному контуру пластины.

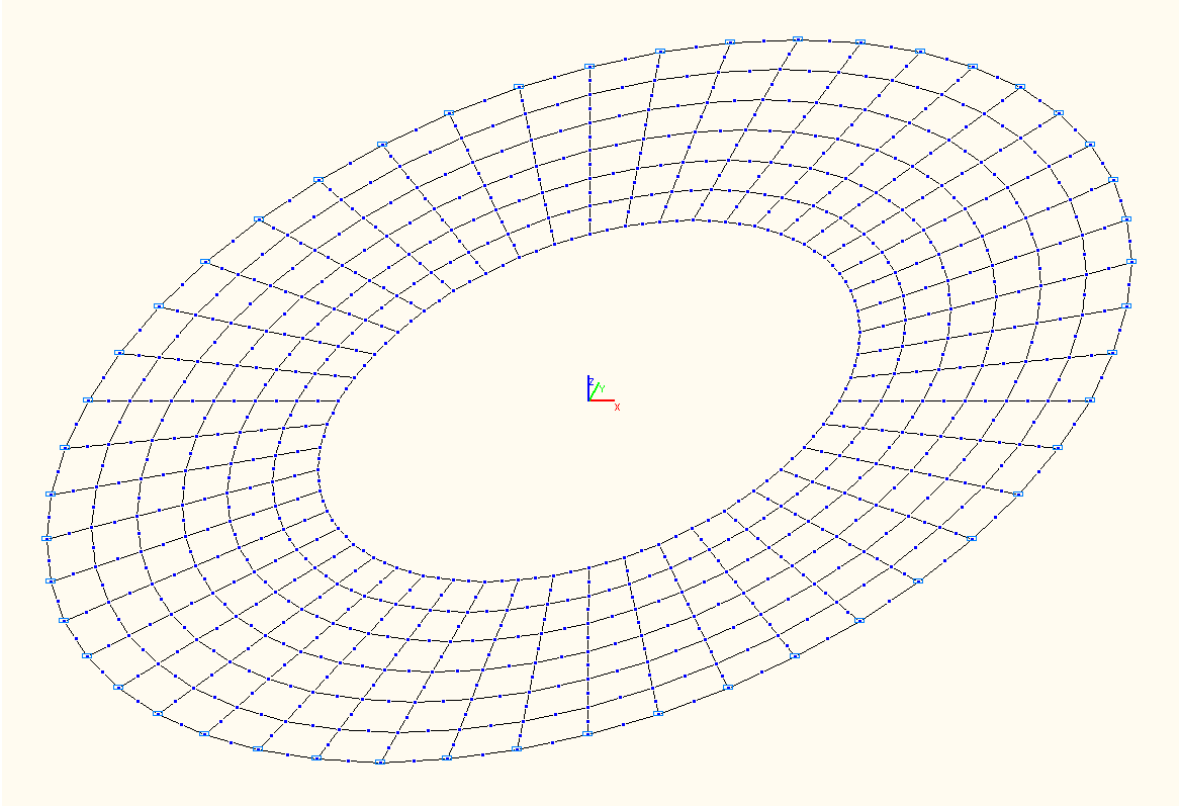
Ссылки: С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

Исходные данные:

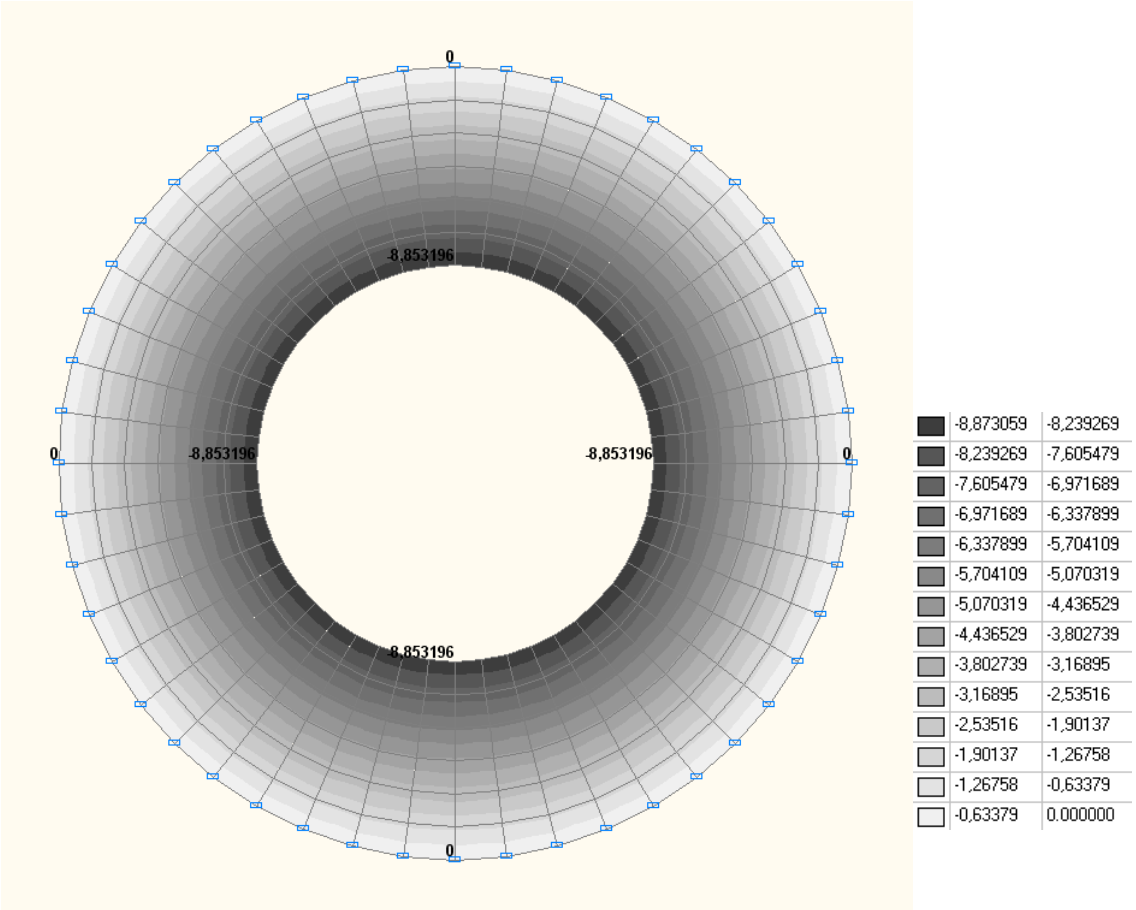
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
R = 1.2 м	- наружный радиус пластины;
r = 0.6 м	- внутренний радиус пластины;
$h = 2.0 \cdot 10^{-2}$ м	- толщина пластины;
p = 10 кПа	- поперечная равномерно распределенная нагрузка.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы пластины – 288 восьмиузловых элементов типа 50. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z по наружному контуру пластины. Количество узлов в расчетной схеме – 960.

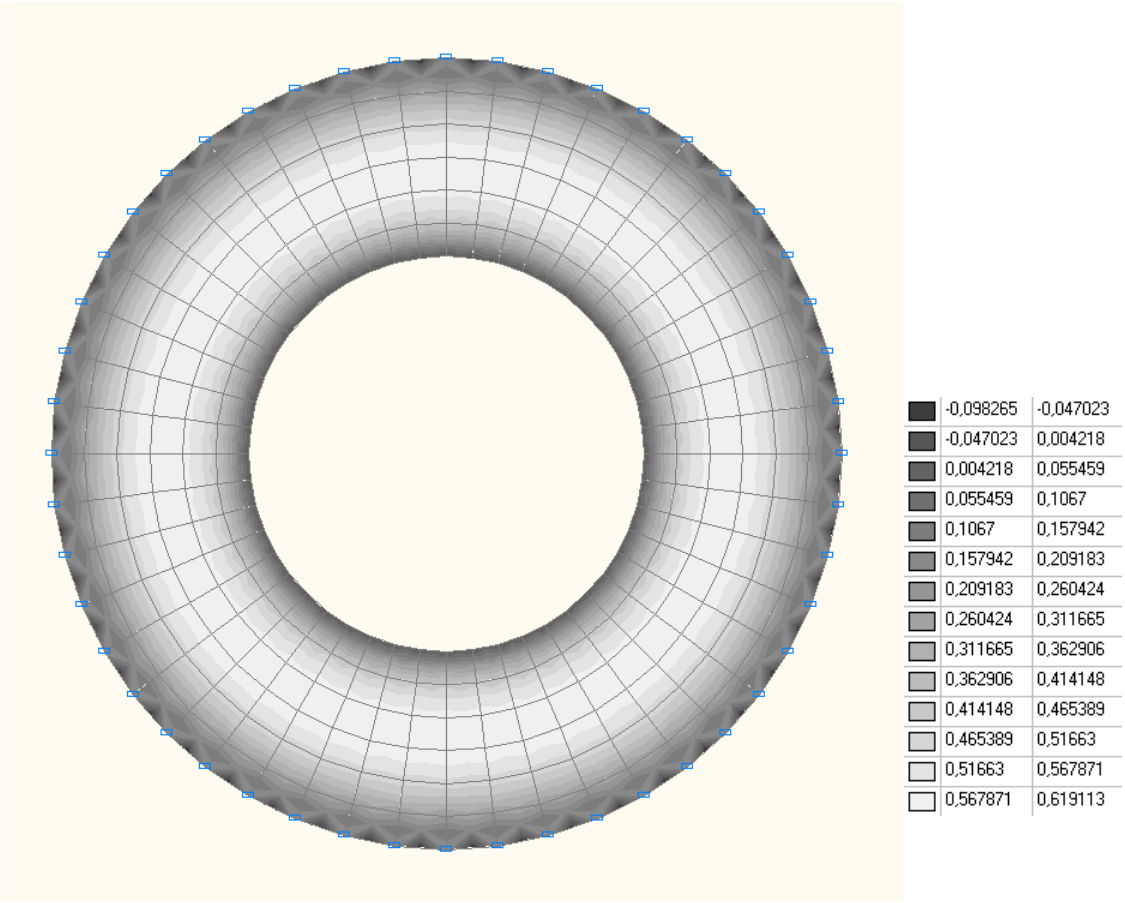
Результаты решения в SCAD



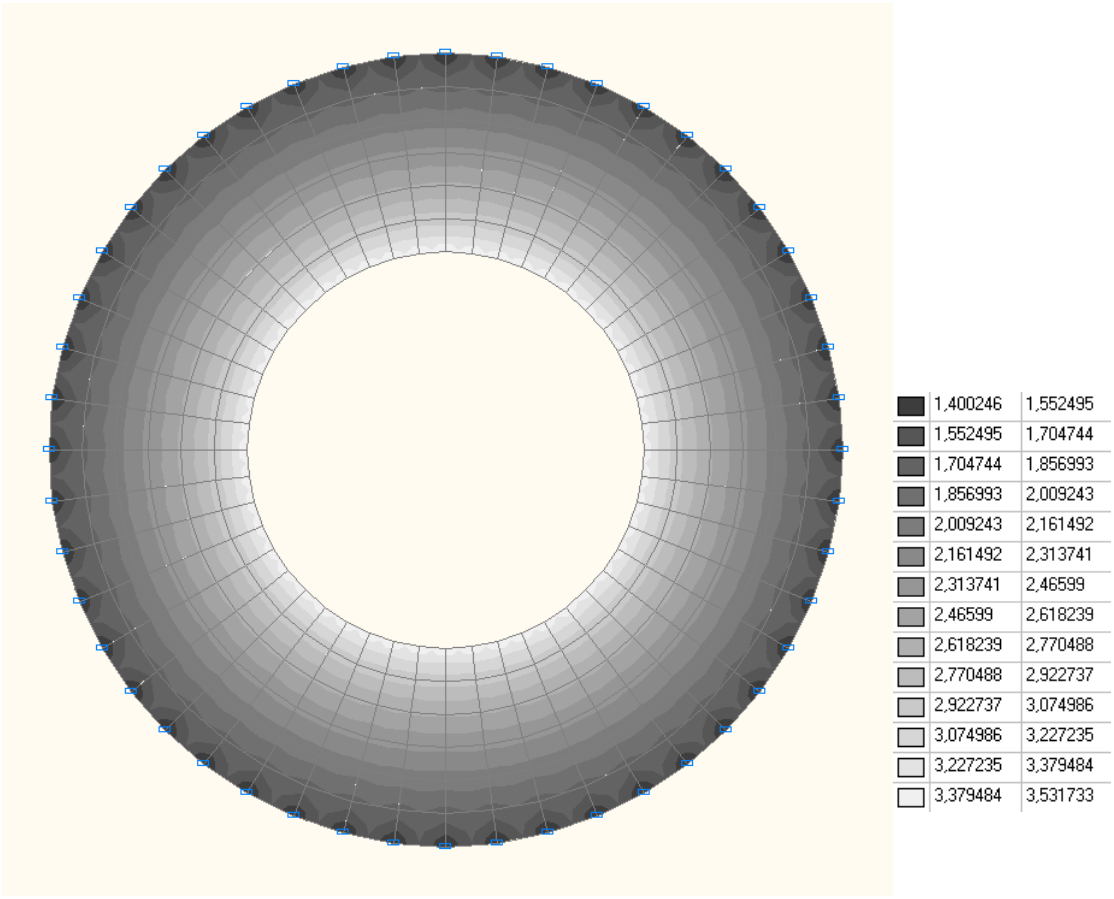
Расчетная схема



Значения прогибов w (мм)



Значения радиальных изгибающих моментов M_r (кН·м/м)



Значения тангенциальных изгибающих моментов M_θ (кН·м/м)

Сравнение решений:

Параметр	По внутреннему контуру пластины			По наружному контуру пластины		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
w, мм	-8.933	-8.863	0.78	0.000	0.000	–
M_r, кН·м/м	0.000	0.001	–	0.000	0.052	–
M_θ, кН·м/м	3.462	3.474	0.35	1.574	1.547	1.72

Замечания: При аналитическом решении прогиб w, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по внутреннему контуру пластины могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. стр. 71):

$$w = -\frac{q}{64 \cdot D} \cdot \left[\frac{R^2 - r^2}{1+\mu} \cdot \left(R^2 \cdot (5+\mu) - r^2 \cdot (7 + 2 \cdot \mu) \right) - \frac{4 \cdot R^2 \cdot r^2}{1-\mu} \cdot ln\frac{r}{R} \cdot \left(3 + \mu + \frac{4 \cdot r^2}{R^2 - r^2} \cdot (1+\mu) \cdot ln\frac{r}{R} \right) \right],$$ где:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)};$$

$$M_r = 0;$$

$$M_\theta = \frac{q}{8} \cdot \left[R^2 \cdot (3+\mu) - r^2 \cdot (1-\mu) + \frac{4 \cdot R^2 \cdot r^2}{R^2 - r^2} \cdot ln\frac{r}{R} \cdot (1+\mu) \right].$$

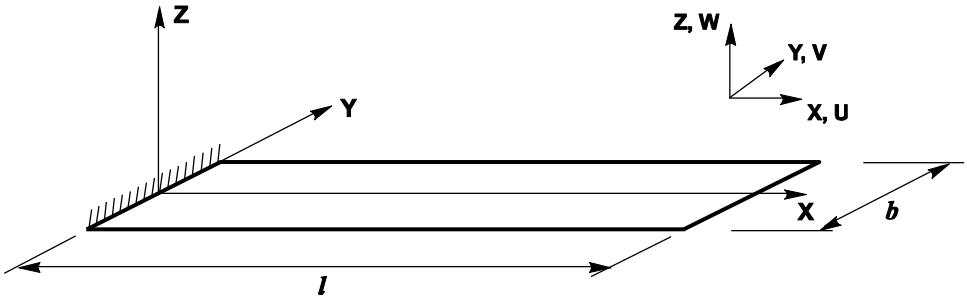
При аналитическом решении прогиб w, радиальный M_r и тангенциальный M_θ изгибающие моменты по наружному контуру пластины могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. стр. 71):

$$w = 0;$$

$$M_r = 0;$$

$$M_\theta = \frac{q}{8} \cdot \left[R^2 \cdot (1-\mu) + r^2 \cdot (1 + 3 \cdot \mu) + \frac{4 \cdot R^4}{R^2 - r^2} \cdot ln\frac{r}{R} \cdot (1+\mu) \right].$$

Прямоугольная узкая консольная пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



Цель: Определение деформированного состояния прямоугольной узкой консольной пластины от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Имя файла с исходными данными: **SSLS01_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Прямоугольная узкая консольная пластина находится под воздействием поперечной равномерно распределенной по ее площади нагрузки *P*. Определить поперечное перемещение Z свободной кромки пластины.

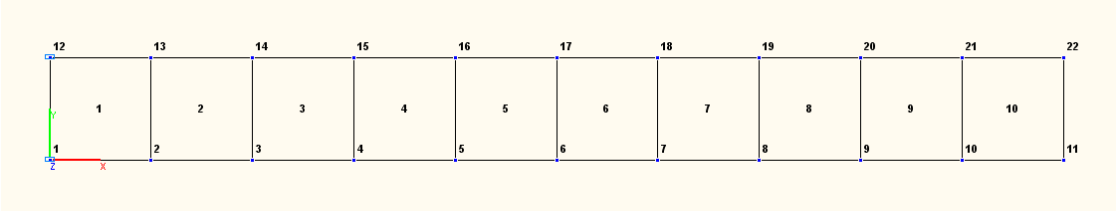
Ссылки: S. Timoshenko, Resistance des materiaux, t.1, Paris, Librairie Polytechnique Beranger, 1949.

Исходные данные:

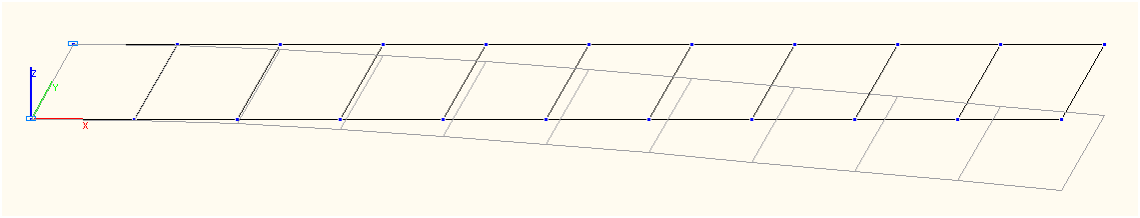
$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости;
$\nu = 0.0$	- коэффициент Пуассона;
$l = 1.0$ м	- длина пластины;
$b = 0.1$ м	- ширина пластины;
$h = 0.005$ м	- толщина пластины;
$P = 1.7 \cdot 10^3$ Н/м^2	- значение поперечной равномерно распределенной нагрузки.

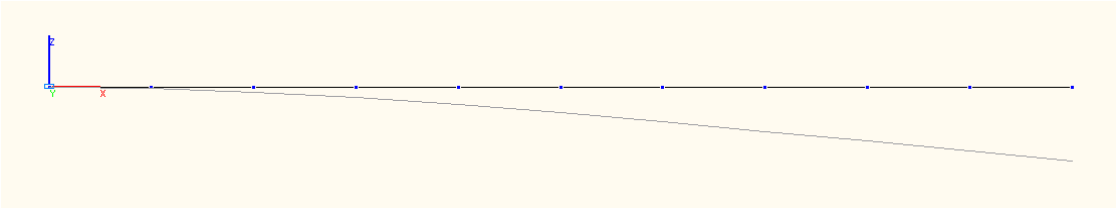
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 10 элементов плиты типа 11. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UX, UY для защемленной кромки. Количество узлов в расчетной схеме – 22.

Результаты решения в SCAD

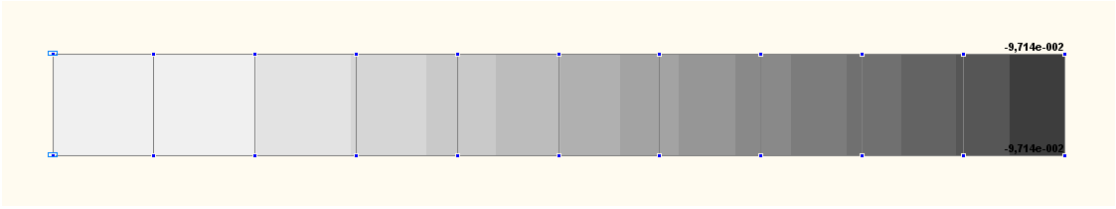


Расчетная схема





Деформированная схема



-9,714e-002	-9,02e-002
-9,02e-002	-8,327e-002
-8,327e-002	-7,633e-002
-7,633e-002	-6,939e-002
-6,939e-002	-6,245e-002
-6,245e-002	-5,551e-002
-5,551e-002	-4,857e-002
-4,857e-002	-4,163e-002
-4,163e-002	-3,469e-002
-3,469e-002	-2,776e-002
-2,776e-002	-2,082e-002
-2,082e-002	-1,388e-002
-1,388e-002	-6,939e-003
-6,939e-003	0.000000

Значения поперечных перемещений Z (м)

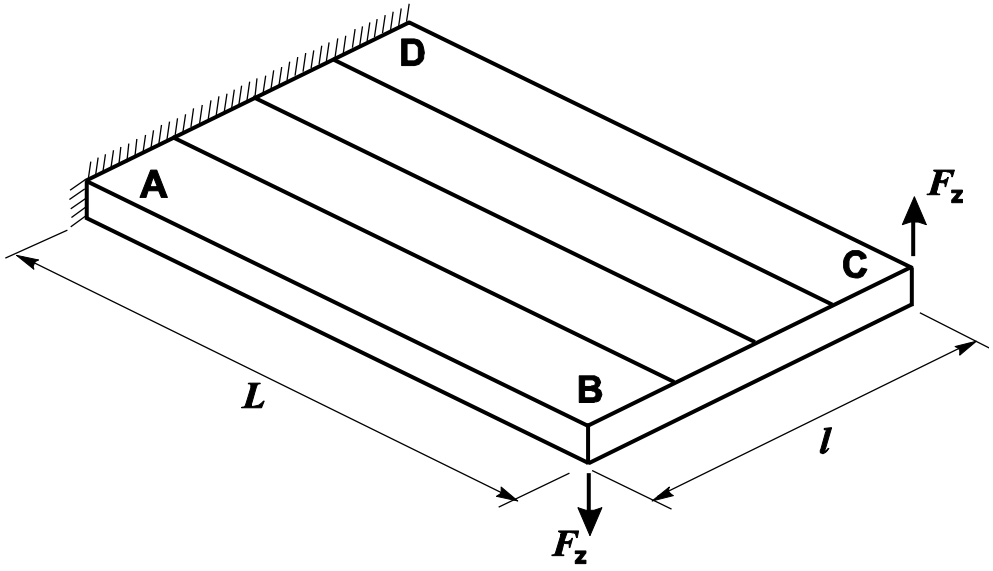
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение свободной кромки Z, м	$-9.714\cdot10^{-2}$	$-9.714\cdot10^{-2}$	0.00

Замечания: При аналитическом решении поперечное перемещение Z свободной кромки пластины определяется по следующей формуле:

$$Z = \frac{3 \cdot P \cdot l^4}{2 \cdot E \cdot h^3}.$$

Кручение прямоугольной консольной узкой пластины парой сосредоточенных сил



Цель: Определение деформированного состояния прямоугольной консольной узкой пластины от воздействия пары поперечных сосредоточенных сил, приложенных в углах ее свободной кромки.

Имя файла с исходными данными: **SSLS27_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Прямоугольная консольная узкая пластина нагружена в углах свободной кромки парой поперечных сосредоточенных сил F_z (точки B, C). Определить: поперечное перемещение Z угла свободной кромки пластины (точка C).

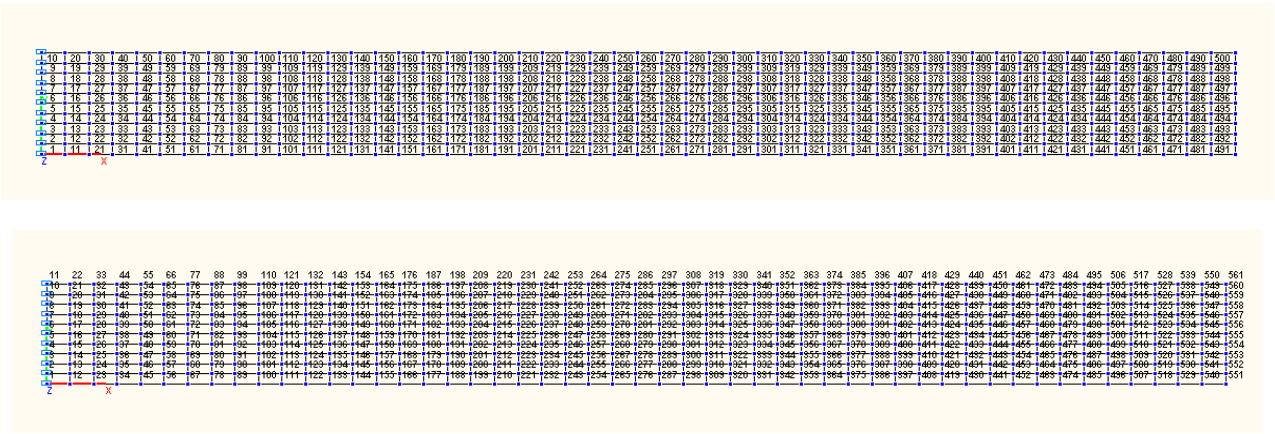
Ссылки: J. Robinson, Element evaluation. A set of assessment parts and standard tests, Proceeding of Finite Element Methods in the commercial environment, vol. 1, October 1978.
J.L. Batoz, M.B. Tahar, Evaluation of new quadrilateral thin plate boundary element, International Journal for numerical methods in engineering, vol. 18, Jon Wiley and Sons, 1982.

Исходные данные:

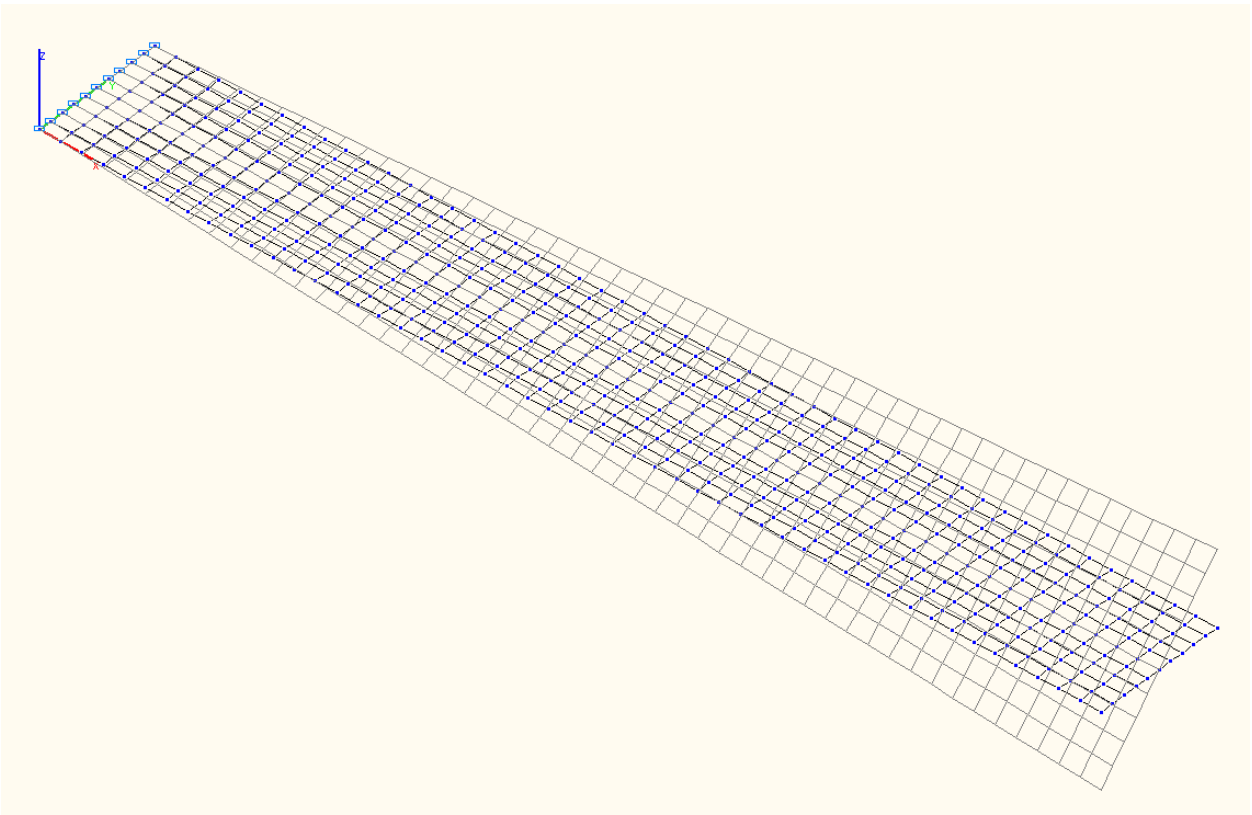
$E = 1.0 \cdot 10^7$ Па	- модуль упругости,
$\nu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
l = 1.0 м	- ширина консольной пластины,
L = 12.0 м	- длина консольной пластины,
h = 0.05 м	- толщина пластины,
Fz, = 1.0 Н	- значение поперечной сосредоточенной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 500 элементов плиты типа 11. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UX, UY для защемленной кромки (линия AD). Количество узлов в расчетной схеме – 561.

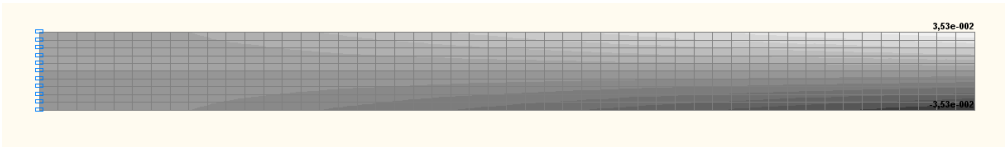
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Деформированная схема



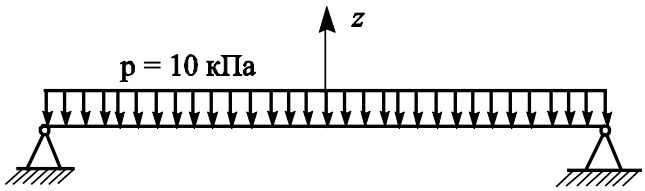
-3,53e-002	-3,025e-002
-3,025e-002	-2,521e-002
-2,521e-002	-2,017e-002
-2,017e-002	-1,513e-002
-1,513e-002	-1,008e-002
-1,008e-002	-5,042e-003
-5,042e-003	-1,451e-010
-1,451e-010	5,042e-003
5,042e-003	1,008e-002
1,008e-002	1,513e-002
1,513e-002	2,017e-002
2,017e-002	2,521e-002
2,521e-002	3,025e-002
3,025e-002	3,53e-002

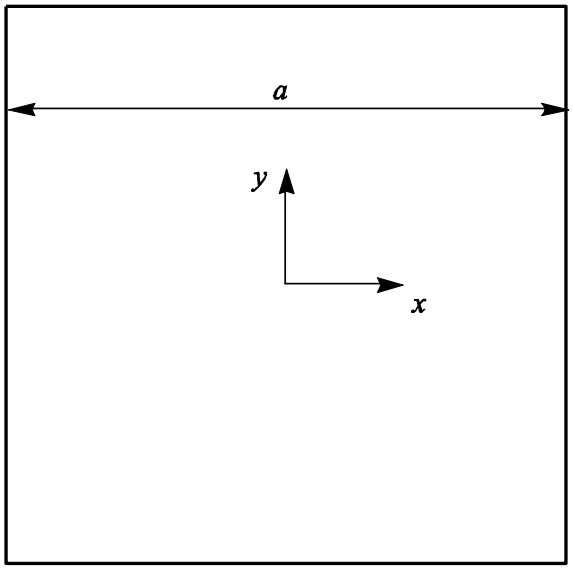
Значения поперечных перемещений Z (м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение Z угла свободной кромки пластины (точка C), м	$3.537 \cdot 10^{-2}$	$3.530 \cdot 10^{-2}$	0.20

Квадратная пластина, свободно опертая по периметру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой





Цель: Определение максимальных перемещений и изгибающих моментов в квадратной пластине, свободно опертой по периметру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой *p*.

Имя файла с исходными данными: **4.17.SPR**

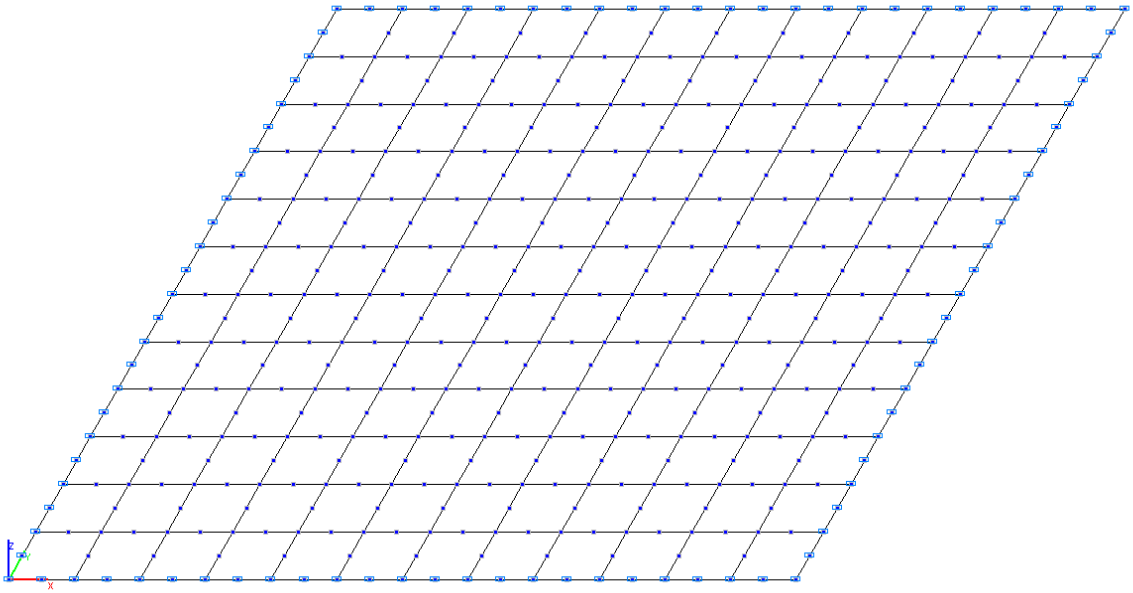
Формулировка задачи: Квадратная изотропная пластина постоянной толщины свободно оперта по периметру и нагружена равномерно распределенной нагрузкой *p*. Определить: максимальные перемещения и изгибающие моменты.

Ссылки: Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968, стр. 532-535

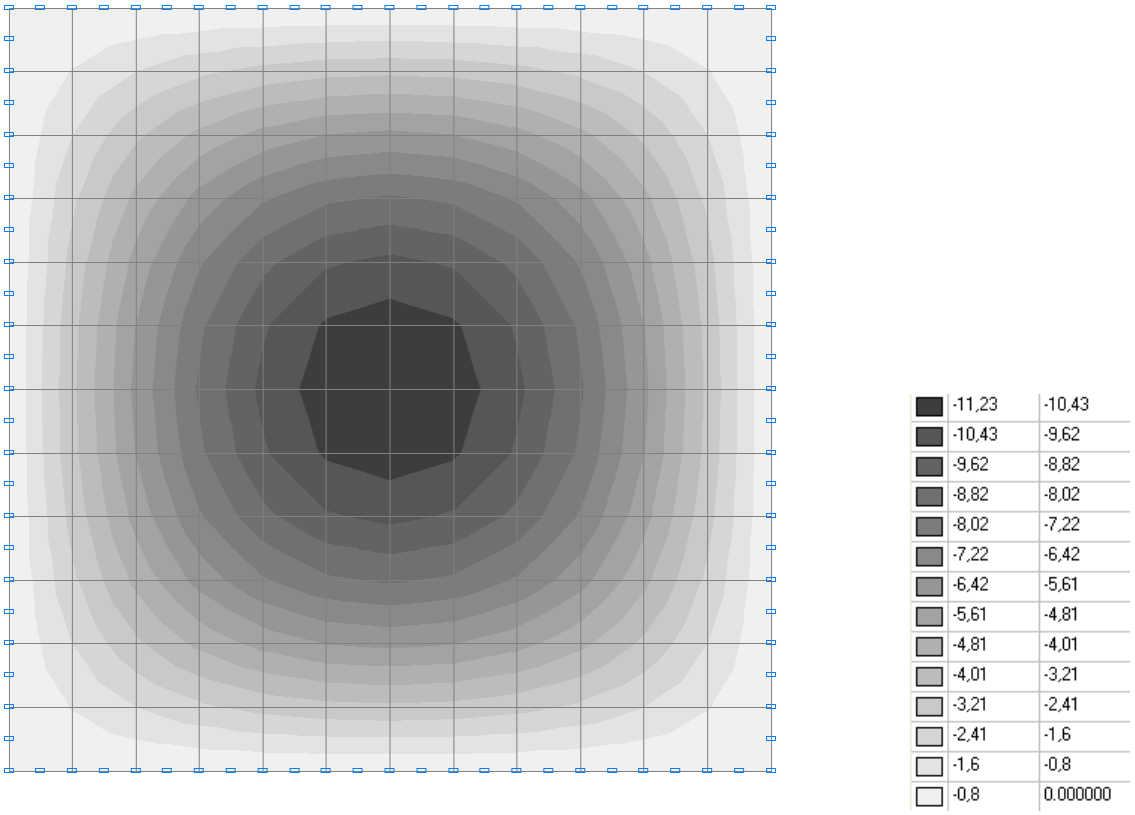
Исходные данные:
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
a = 1.5 м - размер сторон плиты,
h = 0.01 м - толщина пластины,
p = 10 кПа - нормальное давление,
Связи: шарнирное закрепление узлов по контуру из плоскости XOY (перемещение $w = 0$)

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк, плита. Элементы пластины – 144 восьмиузовых элемента типа 20. Количество узлов в расчетной схеме – 481.

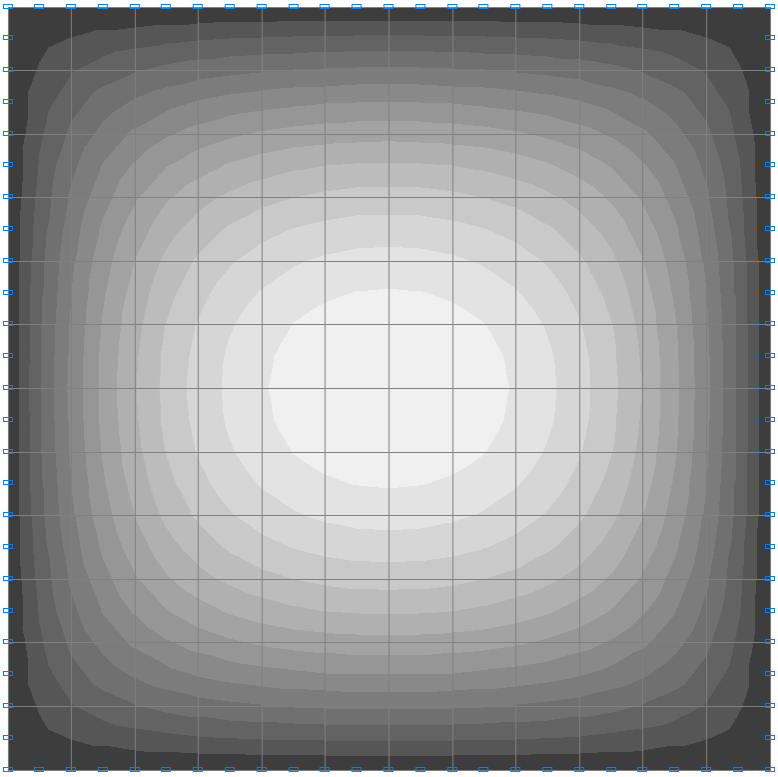
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема

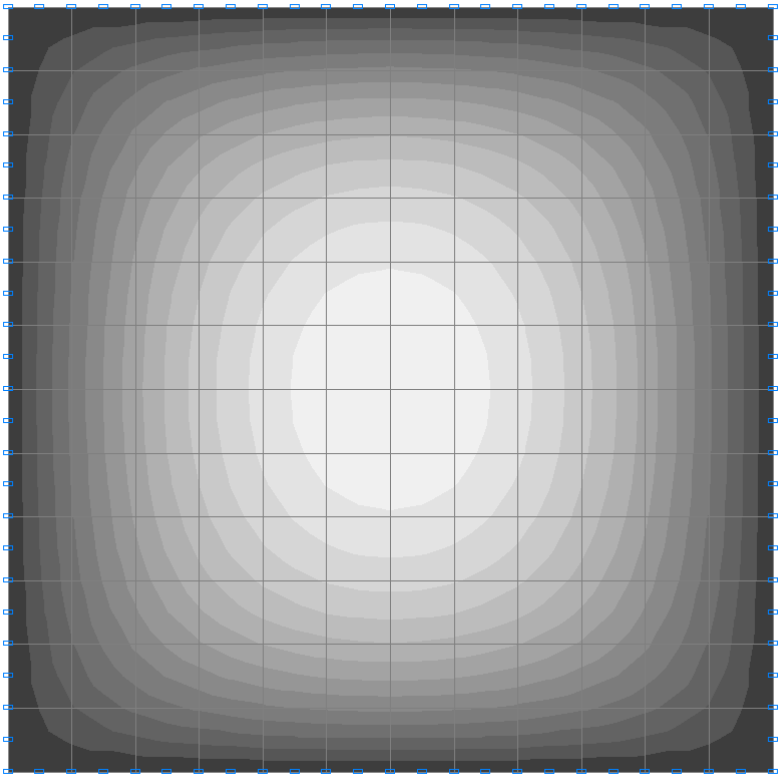


Значения перемещений w (мм)



0	0,07
0,07	0,15
0,15	0,23
0,23	0,31
0,31	0,38
0,38	0,46
0,46	0,54
0,54	0,61
0,61	0,69
0,69	0,77
0,77	0,85
0,85	0,92
0,92	1,0
1,0	1,08

Значения изгибающих моментов M_x (кН·м/м)



0	0,07
0,07	0,15
0,15	0,23
0,23	0,31
0,31	0,38
0,38	0,46
0,46	0,54
0,54	0,61
0,61	0,69
0,69	0,77
0,77	0,85
0,85	0,92
0,92	1,0
1,0	1,08

Значения изгибающих моментов M_y (кН·м/м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Перемещение в центре пластины *w*, мм	11.22	11.23	0.09
Изгибающий момент M_x, кН·м /м	1.078	1.077	0.09
Изгибающий момент M_y, кН·м /м	1.078	1.077	0.09

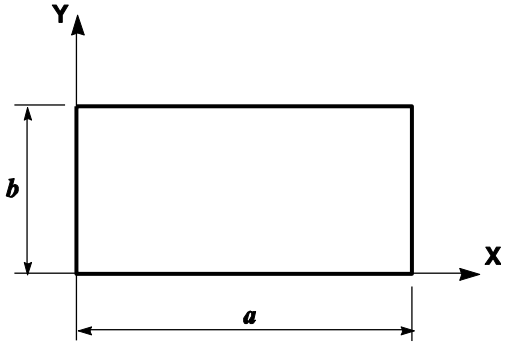
Замечания: При аналитическом решении перемещение *w* и изгибающие моменты M_x и M_y в центре пластины от воздействия равномерно распределенной нагрузки определяются по следующим формулам (Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. —М.: Машиностроение, 1968, стр. 532-535):

$$w = 0.00406 \cdot \frac{p \cdot a^4}{D}, \text{ где:}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)};$$

$$M_x = M_y = 0.0479 \cdot p \cdot a^2.$$

Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния прямоугольной свободно опертой по периметру пластины от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
SSLS24_b_1a_v11.3.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины b/a = 1.0
SSLS24_b_2a_v11.3.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины b/a = 2.0
SSLS24_b_5a_v11.3.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины b/a = 5.0

Формулировка задачи: Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина находится под воздействием поперечной равномерно распределенной по ее площади нагрузки p. Определить поперечное перемещение Z и изгибающие моменты M_x, M_y в центре пластины при различных соотношениях размеров ее сторон b/a.

Ссылки: S. Timoshenko, S. Woinowski, Theorie des plaques et des coques, Paris, Librairie Polytechnique Beranger, 1961.

Исходные данные:

$E = 1.0 \cdot 10^7$ Па - модуль упругости;
$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
h = 0.01 м - толщина пластины;
a = 1.0 м - размер короткой стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
b = 1.0 м, 2.0 м, 5.0 м - размер длинной стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат);
$p = 1.0$ Н/м^2 - значение поперечной равномерно распределенной нагрузки.

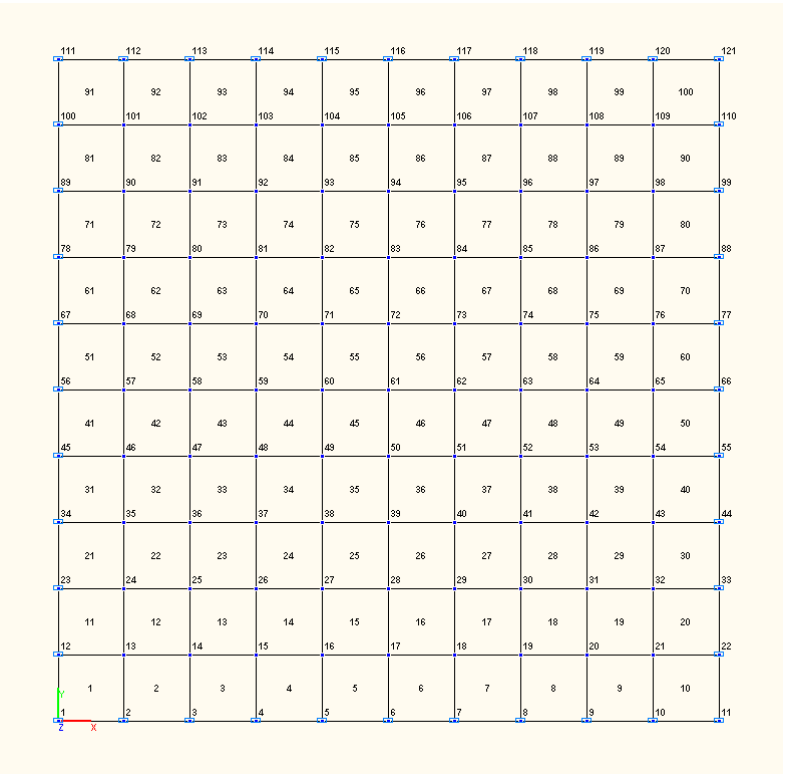
Конечно-элементная модель: Рассматриваются три расчетные схемы.

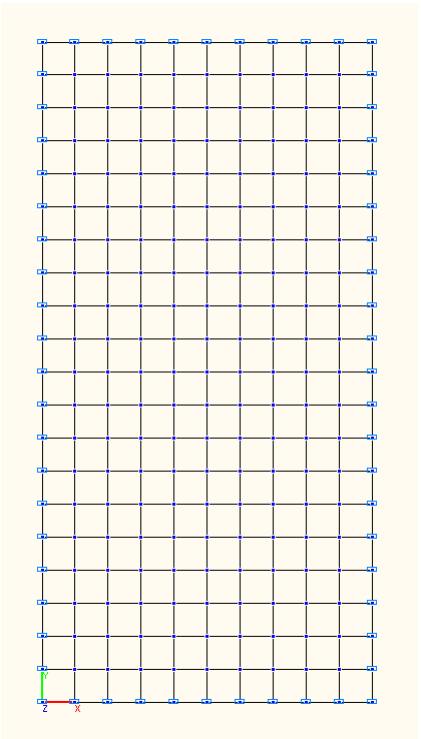
Расчетная схема 1 (b/a = 1.0) – балочный ростверк / плита, элементы оболочки – 100 элементов плиты типа 20. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UY для кромок, расположенных вдоль оси X общей системы координат, и Z, UX для кромок, расположенных вдоль оси Y общей системы координат. Количество узлов в расчетной схеме – 121.

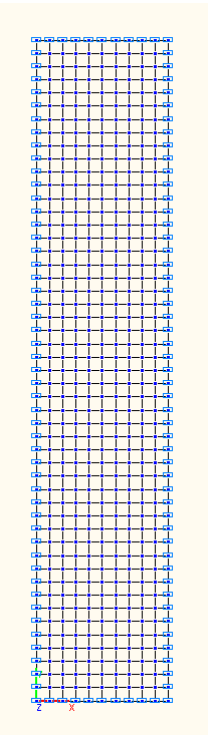
Расчетная схема 2 (b/a = 2.0) – балочный ростверк / плита, элементы оболочки – 200 элементов плиты типа 20. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UY для кромок, расположенных вдоль оси X общей системы координат, и Z, UX для кромок, расположенных вдоль оси Y общей системы координат. Количество узлов в расчетной схеме – 231.

Расчетная схема 3 (b/a = 5.0) – балочный ростверк / плита, элементы оболочки – 500 элементов плиты типа 20. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UY для кромок, расположенных вдоль оси X общей системы координат, и Z, UX для кромок, расположенных вдоль оси Y общей системы координат. Количество узлов в расчетной схеме – 561.

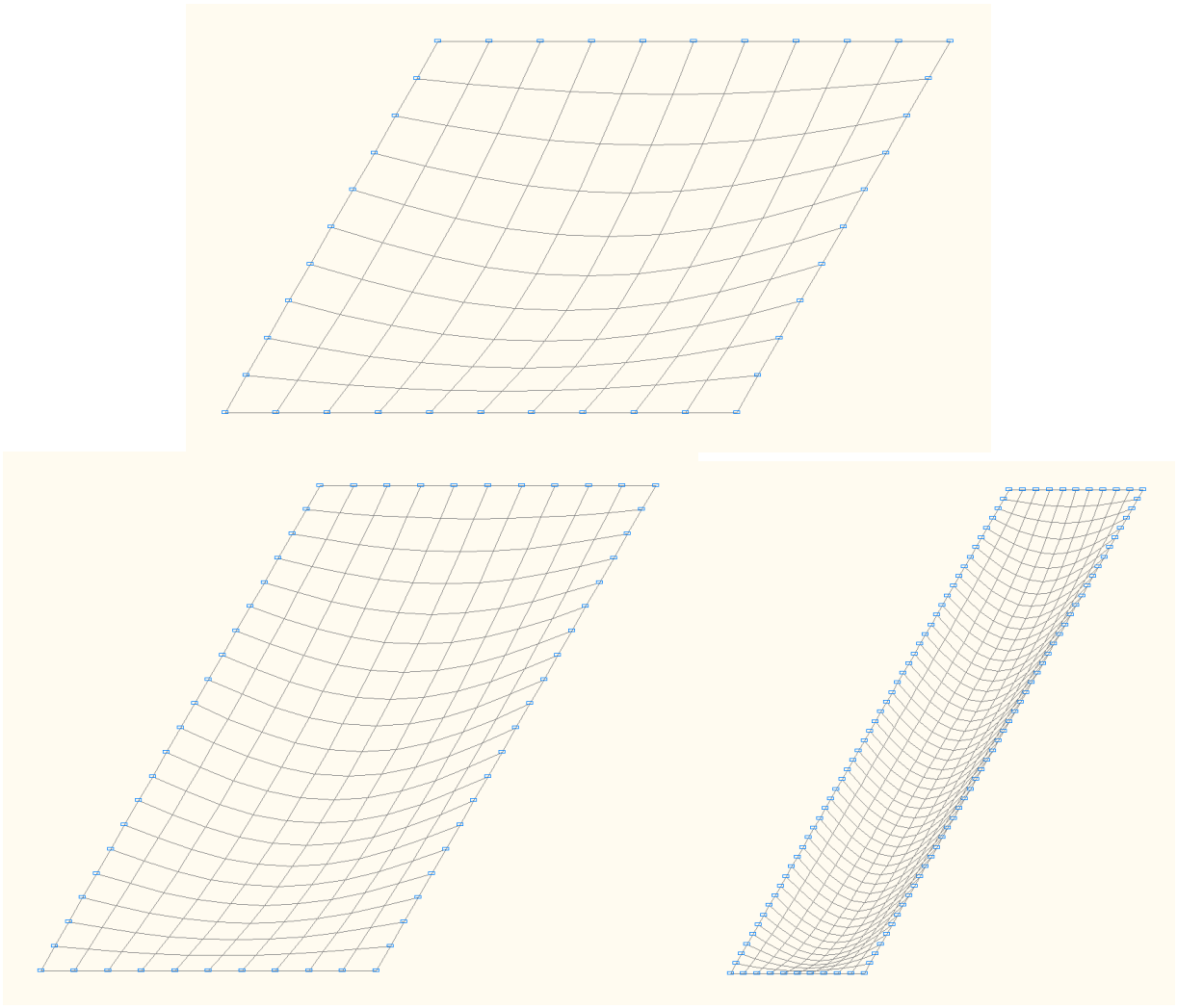
Результаты решения в SCAD



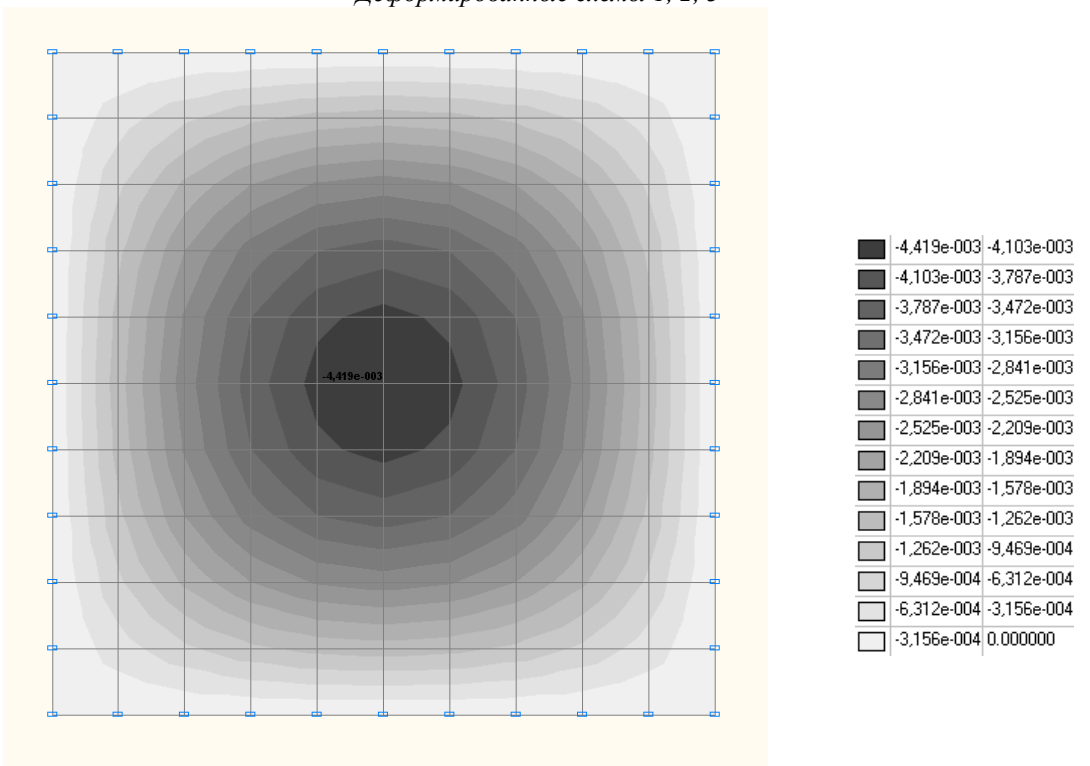




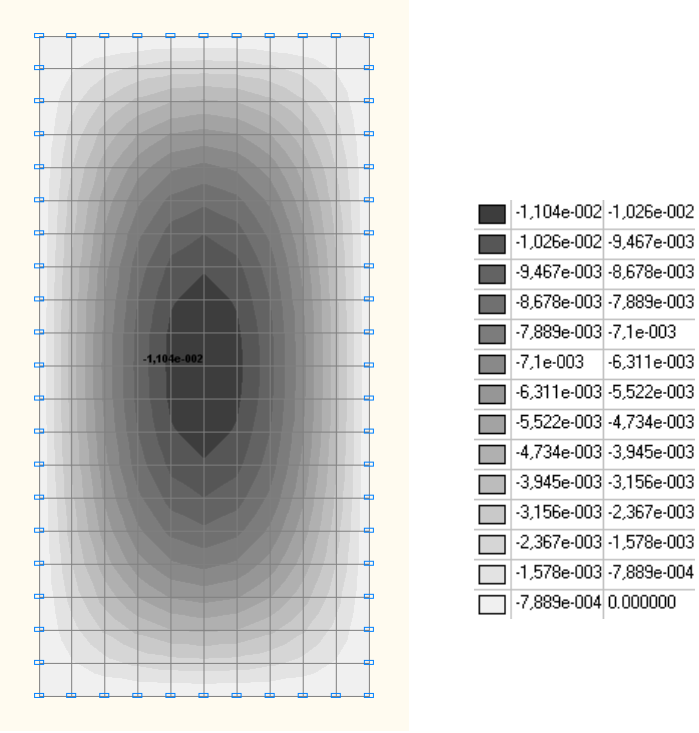
Расчетные схемы 1, 2, 3



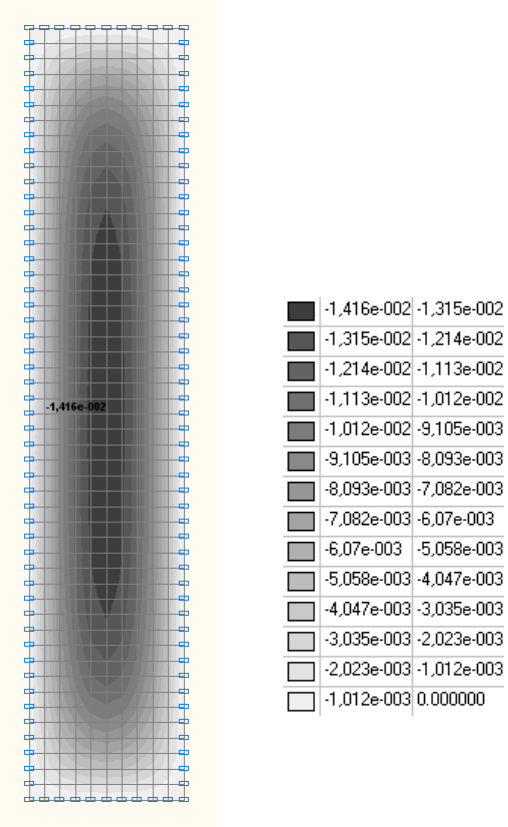
Деформированные схемы 1, 2, 3



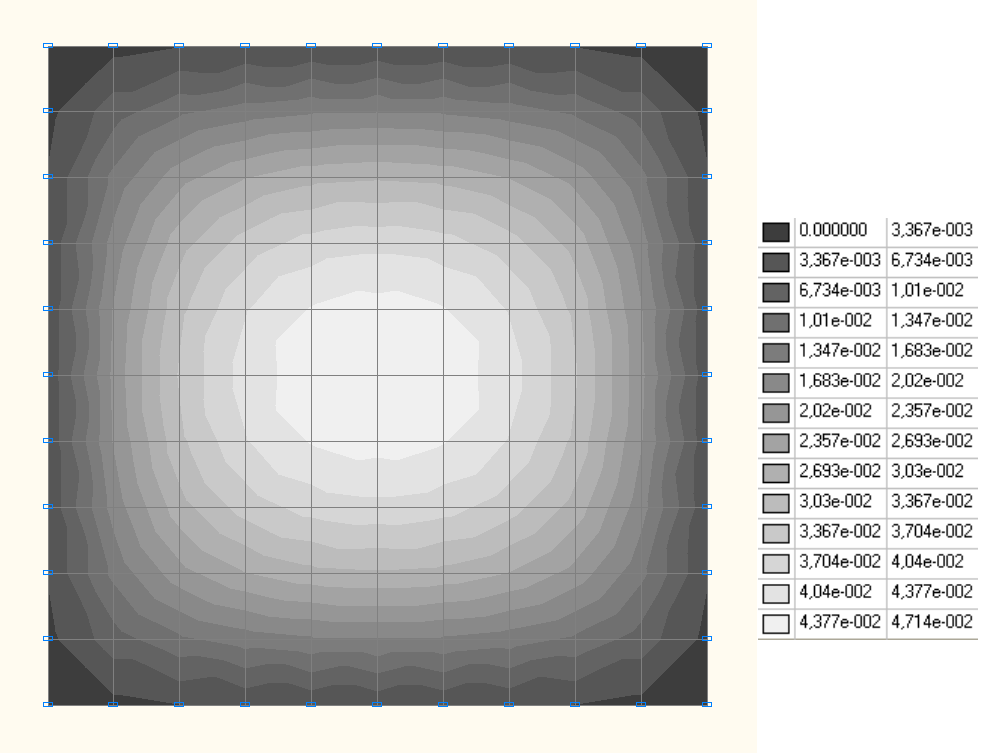
Значения поперечных перемещений Z (м)
для расчетной схемы 1



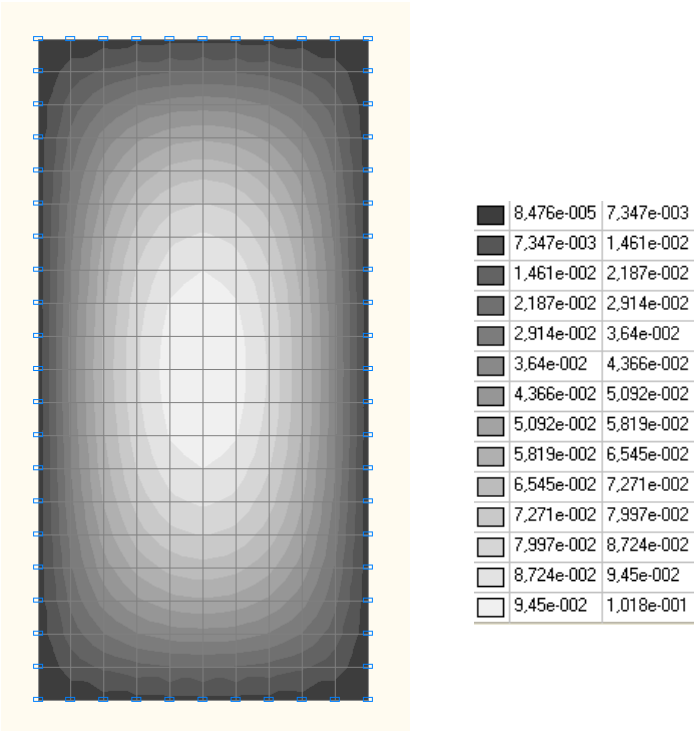
Значения поперечных перемещений Z (м)
для расчетной схемы 2



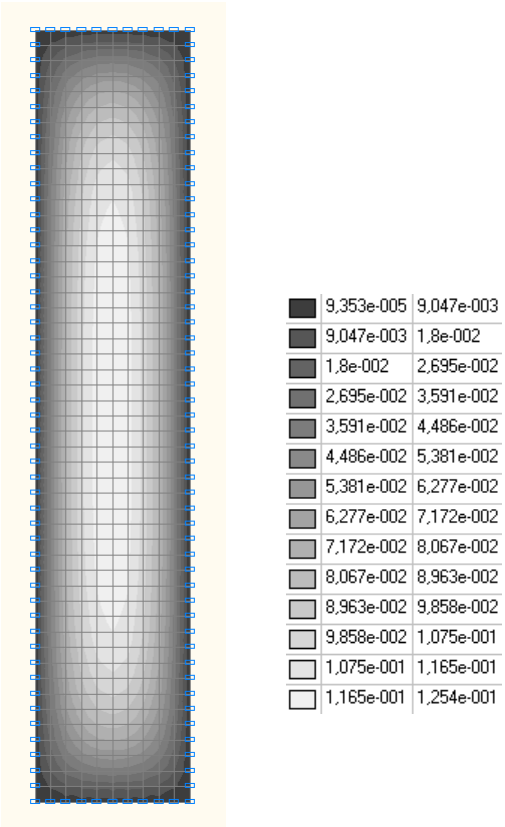
Значения поперечных перемещений Z (м)
для расчетной схемы 3



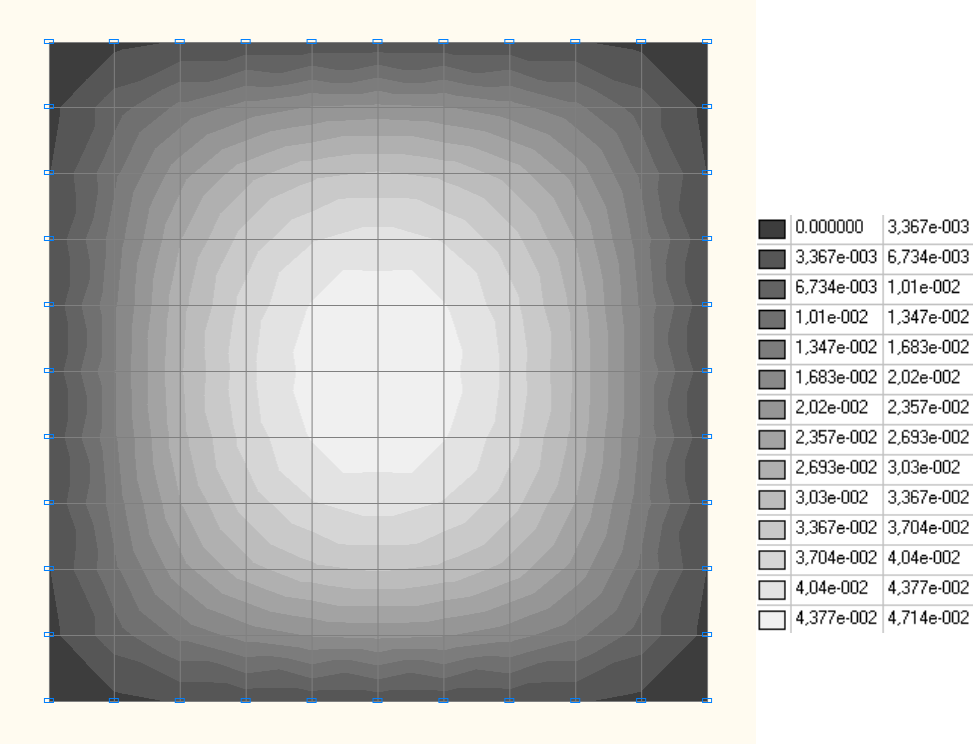
Значения изгибающих моментов M_x (Н·м/м)
для расчетной схемы 1



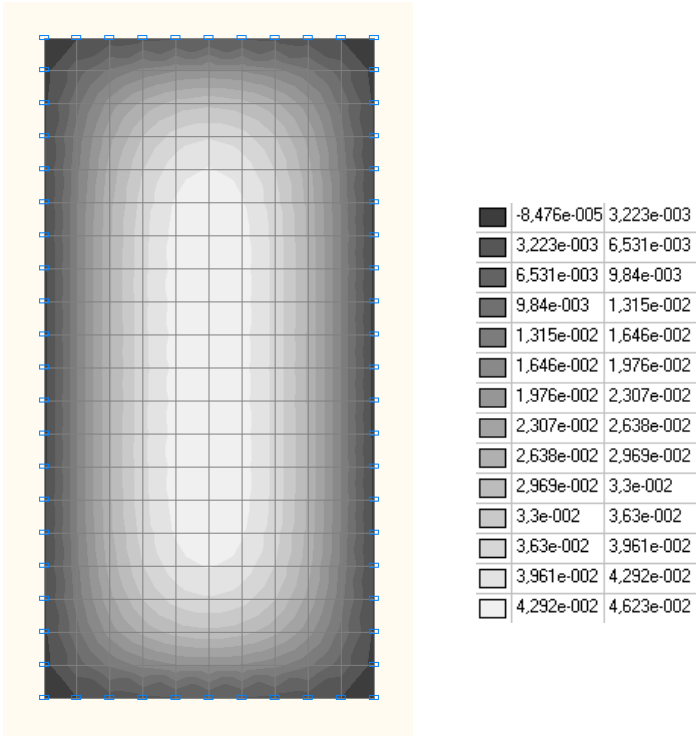
Значения изгибающих моментов M_x (Н·м/м)
для расчетной схемы 2



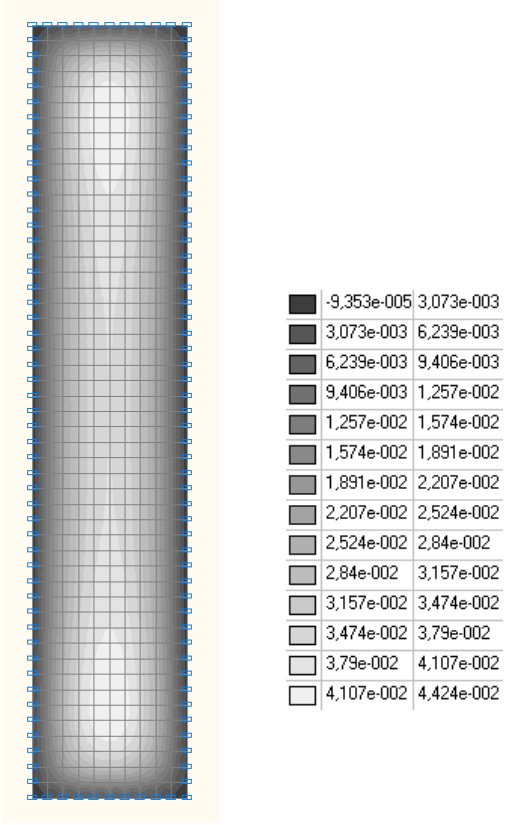
Значения изгибающих моментов M_x (Н·м/м)
для расчетной схемы 3



Значения изгибающих моментов M_y (Н·м/м)
для расчетной схемы 1



Значения изгибающих моментов M_y (Н·м/м)
для расчетной схемы 2



Значения изгибающих моментов M_y (Н·м/м)
для расчетной схемы 3

Сравнение решений:

Расчетная схема 1 (b/a = 1.0)

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение Z в центре пластины, м	$-4.436\cdot10^{-3}$	$-4.419\cdot10^{-3}$	0.38
Изгибающие моменты M_x в центре пластины, Н·м/м	$4.789\cdot10^{-2}$	$4.714\cdot10^{-2}$	1.57
Изгибающие моменты M_y в центре пластины, Н·м/м	$4.789\cdot10^{-2}$	$4.714\cdot10^{-2}$	1.57

Расчетная схема 2 (b/a = 2.0)

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение Z в центре пластины, м	$-1.106\cdot10^{-2}$	$-1.104\cdot10^{-2}$	0.18
Изгибающие моменты M_x в центре пластины, Н·м/м	$1.017\cdot10^{-2}$	$1.018\cdot10^{-2}$	0.10
Изгибающие моменты M_y в центре пластины, Н·м/м	$4.635\cdot10^{-2}$	$4.607\cdot10^{-2}$	0.60

Расчетная схема 3 (b/a = 5.0)

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение Z в центре пластины, м	$-1.416\cdot10^{-2}$	$-1.416\cdot10^{-2}$	0.00
Изгибающие моменты M_x в центре пластины, Н·м/м	$1.246\cdot10^{-1}$	$1.254\cdot10^{-1}$	0.64
Изгибающие моменты M_y в центре пластины, Н·м/м	$3.774\cdot10^{-2}$	$3.798\cdot10^{-2}$	0.64

***Замечания*:** При аналитическом решении поперечное перемещение Z и изгибающие моменты M_x, M_y в центре пластины при различных соотношениях размеров ее сторон b/a могут быть вычислены по следующим формулам:

$$Z = \alpha \cdot \frac{p \cdot a^4}{D}; \qquad M_x = \beta \cdot p \cdot a^2; \qquad M_y = \beta_1 \cdot p \cdot a^2,$$

где:

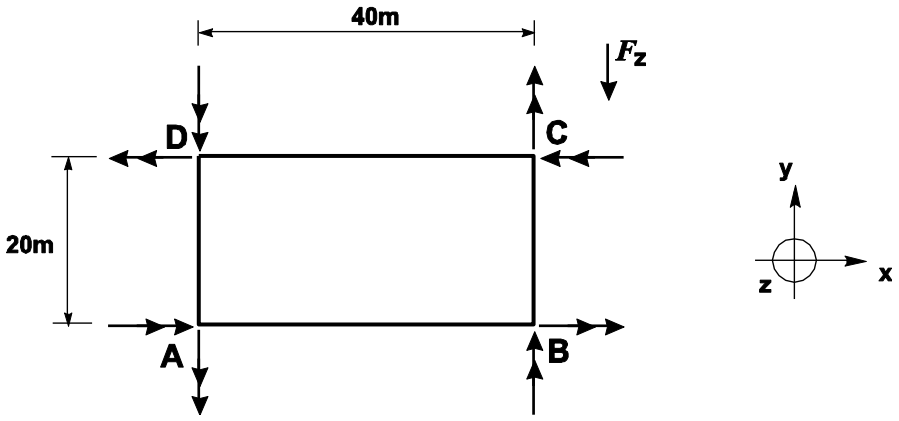
при $\frac{a}{b} = 1.0$ $\quad \alpha = 0.004062, \quad \beta = 0.047886, \quad \beta_1 = 0.047886,$

при $\frac{a}{b} = 2.0$ $\quad \alpha = 0.010129, \quad \beta = 0.101683, \quad \beta_1 = 0.046350,$

при $\frac{a}{b} = 5.0$ $\quad \alpha = 0.012971, \quad \beta = 0.124624, \quad \beta_1 = 0.037744,$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}.$$

Прямоугольная пластина, свободно опертая в трех вершинах, под действием из ее плоскости сосредоточенной силы и сосредоточенных моментов



Цель: Определение деформированного состояния прямоугольной пластины, свободно опертой в трех вершинах, от воздействия из ее плоскости сосредоточенной силы и сосредоточенных моментов.

Имя файла с исходными данными: **SSLS26_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Прямоугольная пластина, свободно опертая в трех вершинах (точки A, B, D), находится под воздействием из ее плоскости сосредоточенной силы F_z, приложенной к свободной вершине (точка C), и сосредоточенных моментов M_x и M_y, приложенных попарно ко всем четырем вершинам (точки A, B, C, D) с однонаправленным изгибом в плоскостях, параллельных смежным сторонам. Определить перемещение Z свободной вершины (точка C) из плоскости пластины.

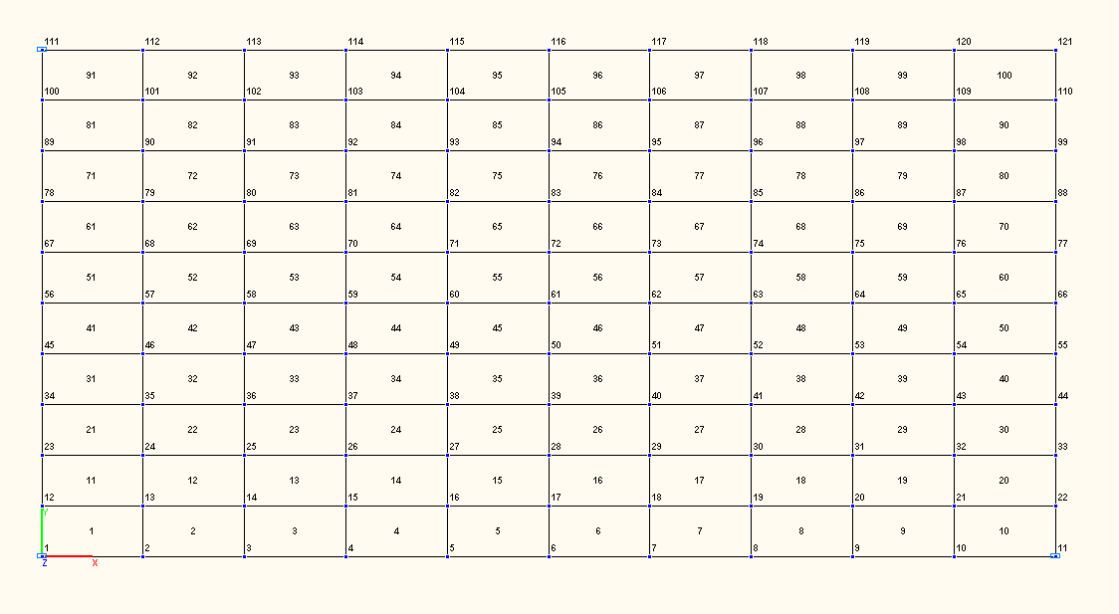
Ссылки: J.L. Batoz, An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.18, John Wiley and Sons, 1982.

Исходные данные:

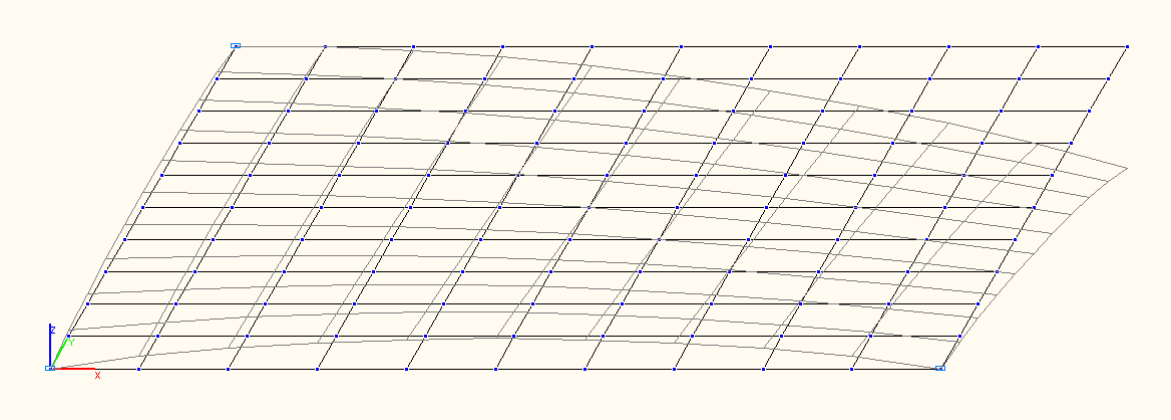
$E = 1.0 \cdot 10^3$ Па	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.0 м	- толщина пластины;
a = 40.0 м	- размер длинной стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
b = 20.0 м	- размер короткой стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат);
F_z = 2.0 Н	- значение поперечной сосредоточенной силы;
M_x = 20.0 Н·м	- значение сосредоточенных моментов, изгибающих пластину по короткой стороне (относительно оси X общей системы координат);
M_y = 10.0 Н·м	- значение сосредоточенных моментов, изгибающих пластину по длинной стороне (относительно оси Y общей системы координат).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, элементы оболочки – 100 элементов плиты типа 20. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z в вершинах пластины, расположенных на осях X и Y общей системы координат (точки A, B, C). Количество узлов в расчетной схеме – 121.

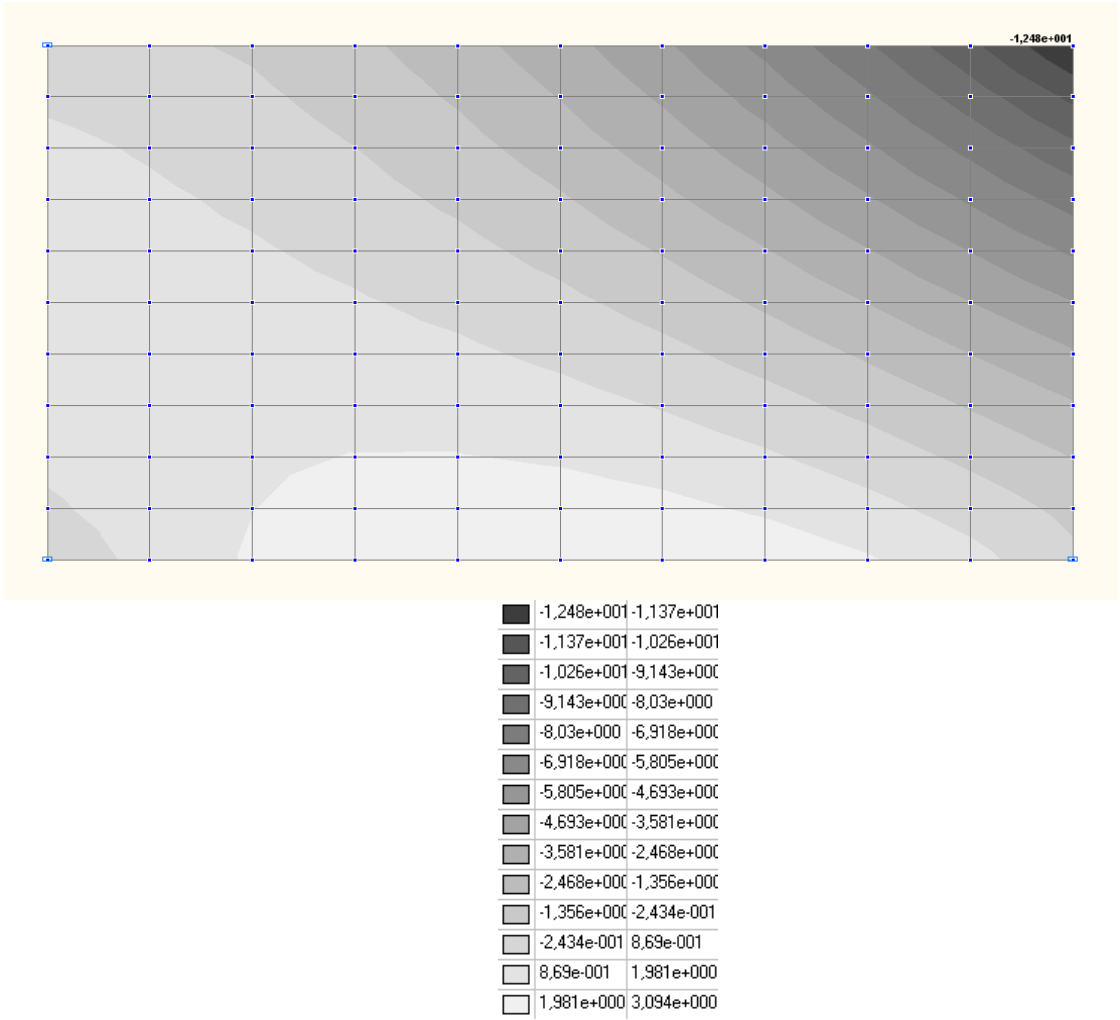
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Деформированная схема

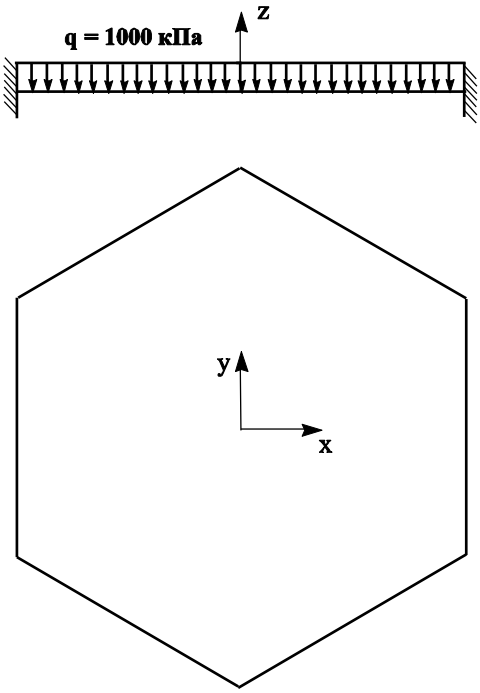


Значения поперечных перемещений Z (м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Перемещение Z свободной вершины (точка C), м	$-1.248\cdot10^{1}$	$-1.248\cdot10^{1}$	0.00

Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой



Цель: Определение перемещений и изгибающих моментов в центре защемленной по периметру шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой q.

***Имя файла с исходными данными*: 4.19.SPR**

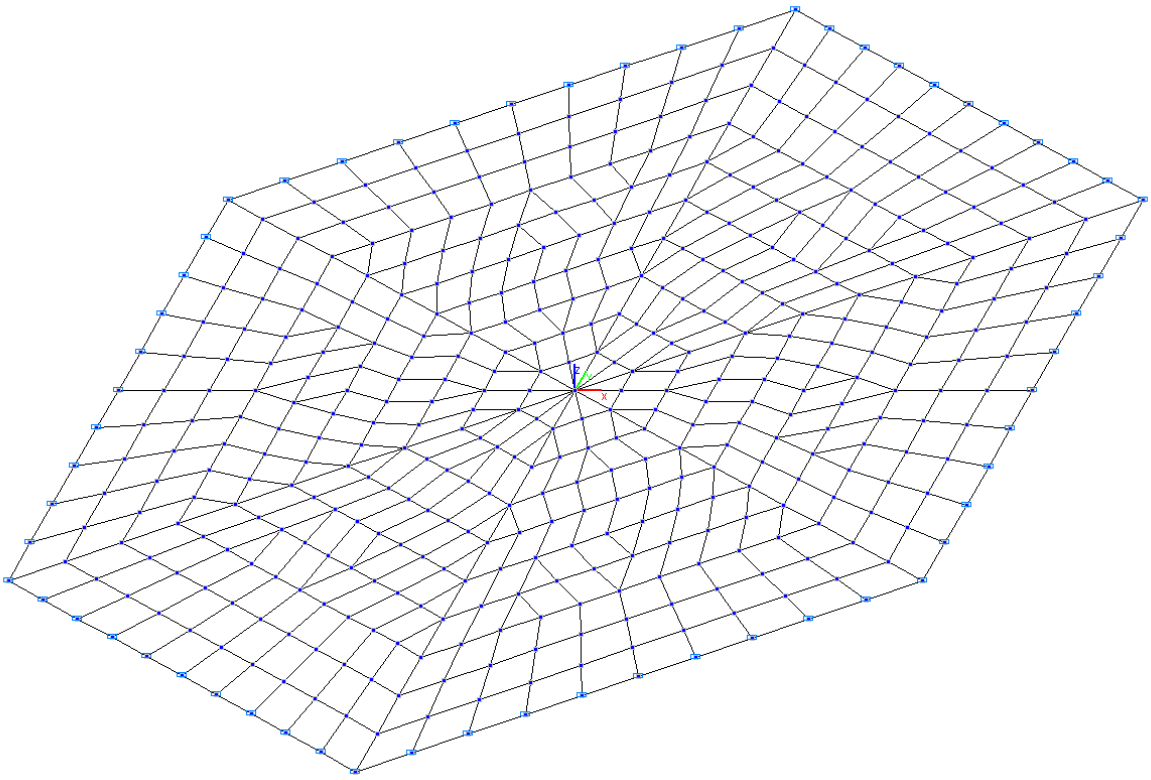
Формулировка задачи: Шестиугольная правильная пластина, защемленная по контуру, постоянной толщины нагружается нормальным давлением q. Определить: осевое перемещение w и изгибающие моменты M_x, M_y в центре пластины.

Ссылки: Вайнберг Д.В, Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. Киев: Будівельник, 1973.

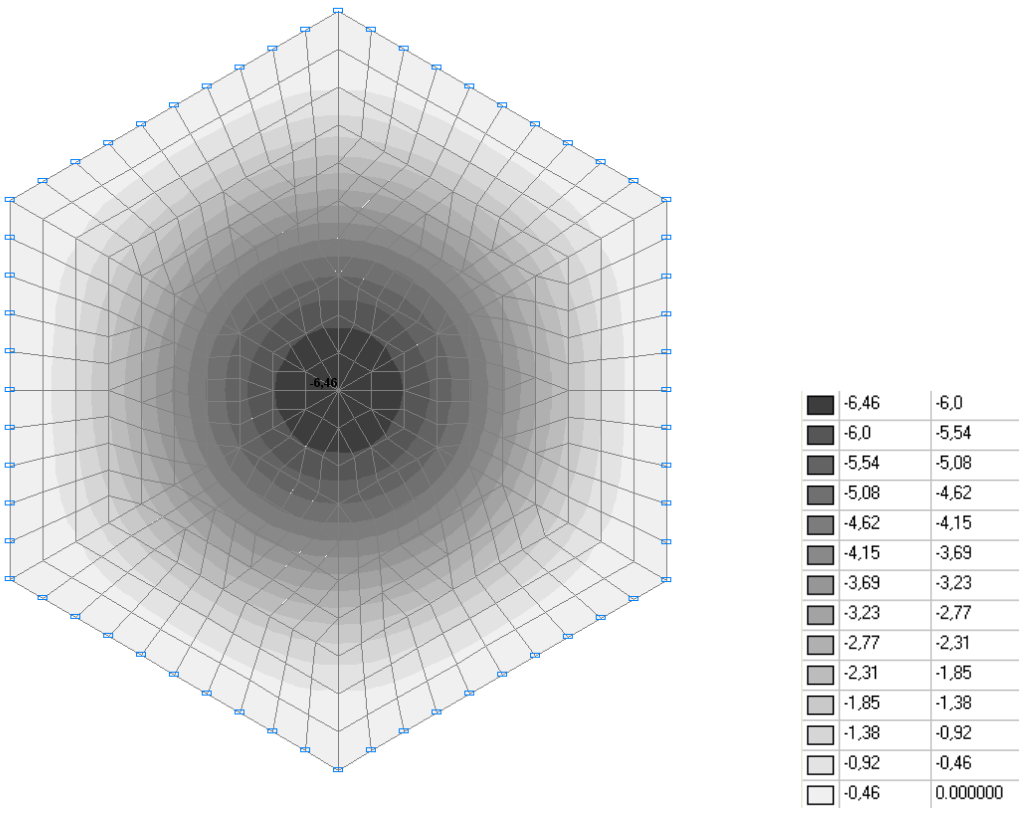
Исходные данные:
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
$a = 0.134$ м - сторона шестигранной пластины,
$h = 0.003$ м - толщина пластины,
$q = 1000$ кПа - нормальное давление,
Связи: жесткое закрепление узлов по контуру (перемещение $w = 0$)

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Элементы пластины – 389 четырехузловых элементов типа 44 и 73 трехузловых элемента типа 42. Количество узлов в расчетной схеме – 451.

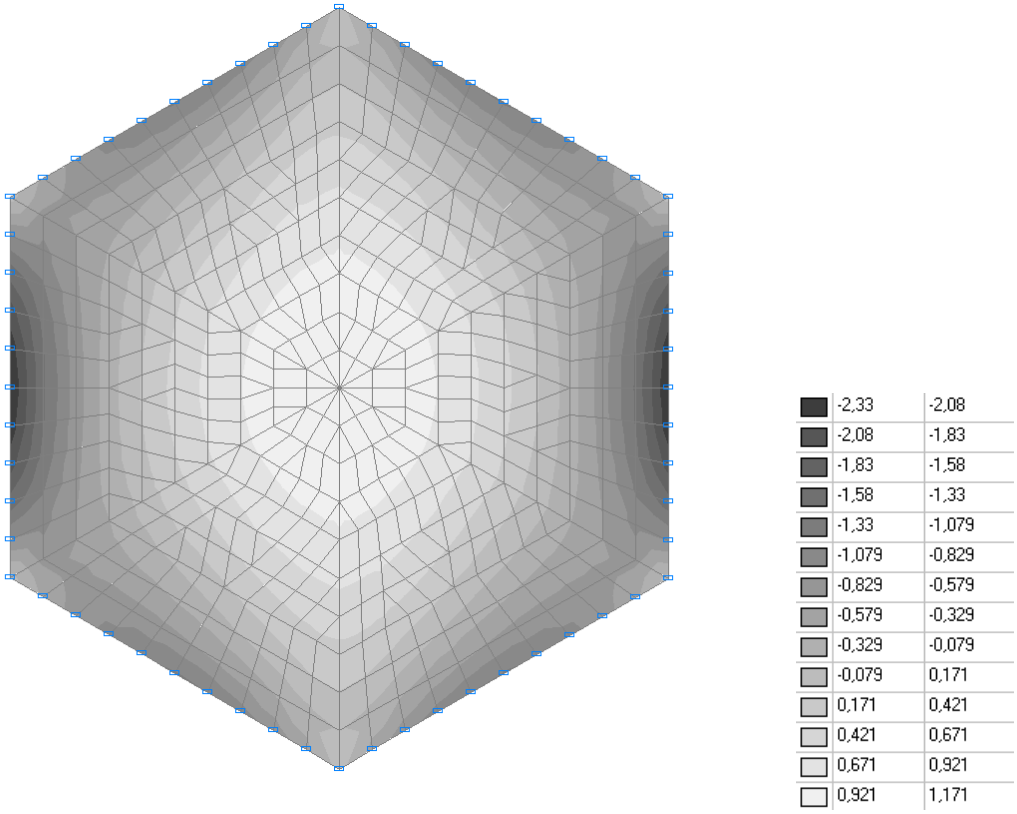
Результаты решения в SCAD



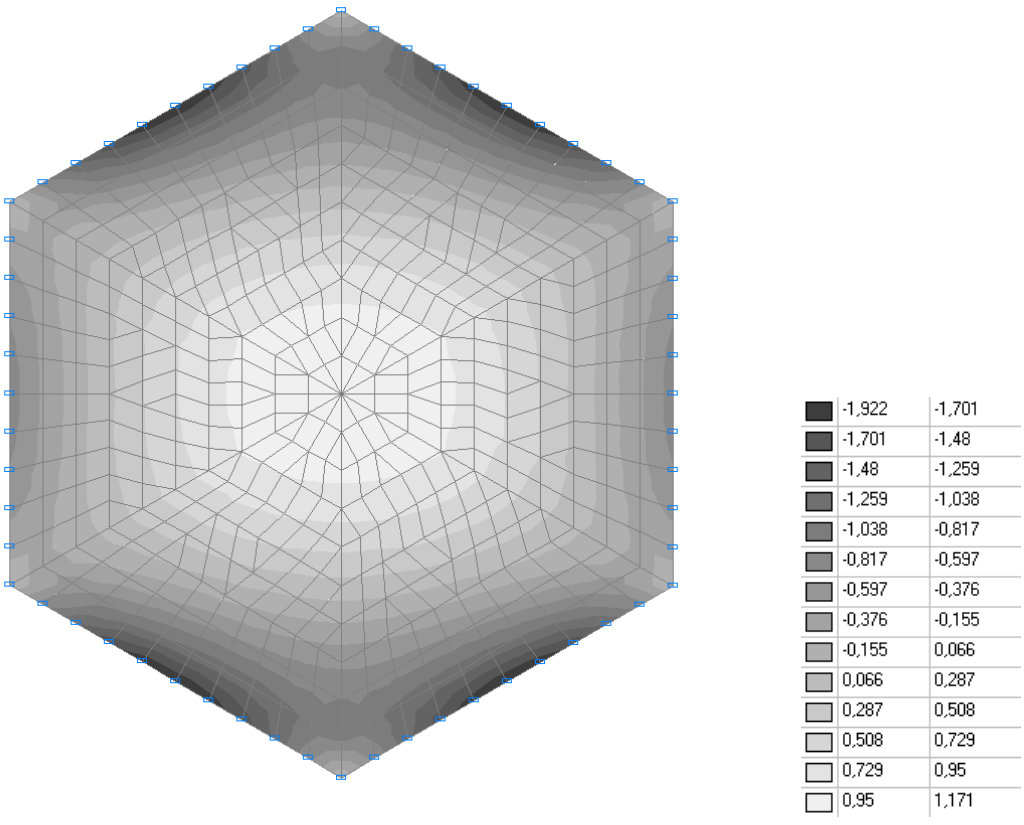
Расчетная схема



Значения перемещений w (мм)



Значения изгибающих моментов M_x (кН·м/м)



Значения изгибающих моментов M_y (кН·м/м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Перемещение в центре пластины *w*, мм	6.51	6.46	0.77
Изгибающий момент M_x, кН·м /м	1.163	1.171	0.69
Изгибающий момент M_y, кН·м /м	1.163	1.171	0.69

Замечания: При аналитическом решении формулы для перемещений *w* и изгибающих моментов M_x и M_y в центре пластины имеют следующий вид (Вайнберг Д.В., Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин, Киев: Будівельник, 1973):

$$w = 0.009979 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D}, \text{ где:}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)};$$

$$M_x = M_y = 0.049835 \cdot \left(1 + \mu\right) \cdot q \cdot a^2 .$$

Прямоугольная защемленная по контуру пластина постоянной толщины при температурном нагружении

***Цель*:** Определить изгибающие моменты и напряжения в прямоугольной пластине, защемленной по контуру при изменении температуры по толщине пластины по линейному закону.

Имя файла с исходными данными: **4.20.SPR**

Формулировка задачи: Рассматривается защемленная по контуру прямоугольная пластина постоянной толщины. Температура в плоскостях, параллельных срединной поверхности пластины постоянна, а по толщине пластины изменяется по линейному закону. Определить: перемещение w, изгибающие моменты M_x, M_y и максимальное температурное напряжение σ.

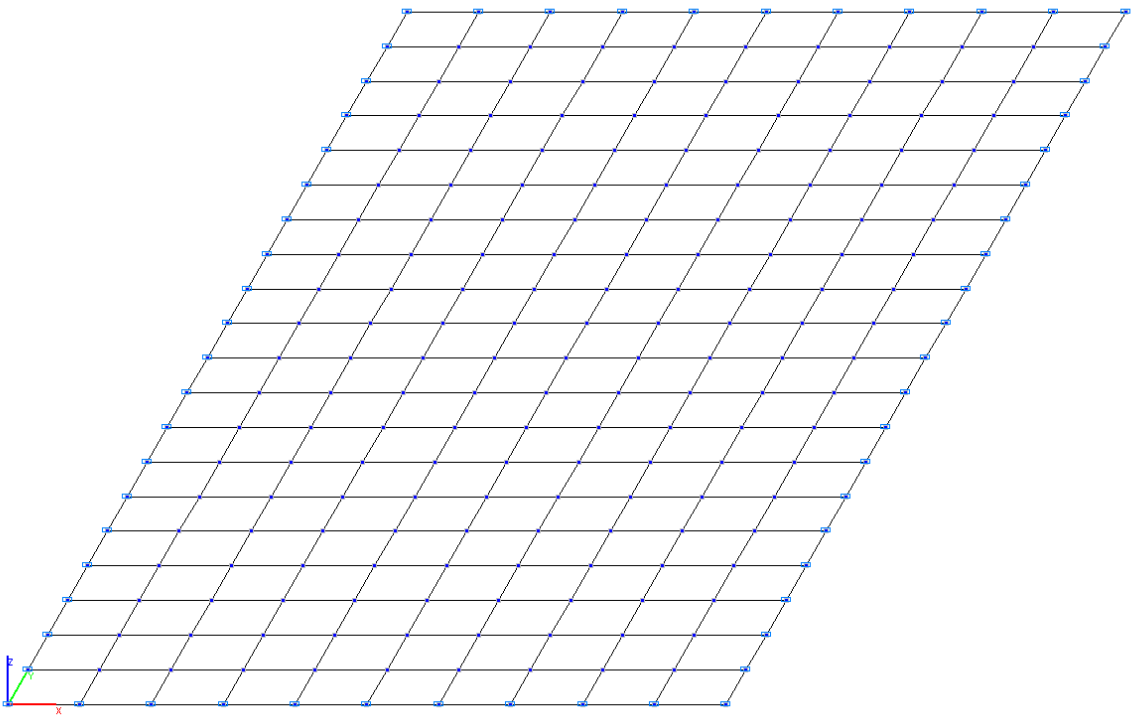
Ссылки: С.П. Тимошенко, С.Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1963.

Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
$a_x = 1.5$ м - ширина пластины,
$a_y = 2.5$ м - длина пластины
$h = 0.02$ м - толщина пластины,
$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-5}$ $1/C^0$ - коэффициент линейного температурного расширения материала,
$\Delta T = 20$ C^0 - разность температур между верхней и нижней поверхностями пластины

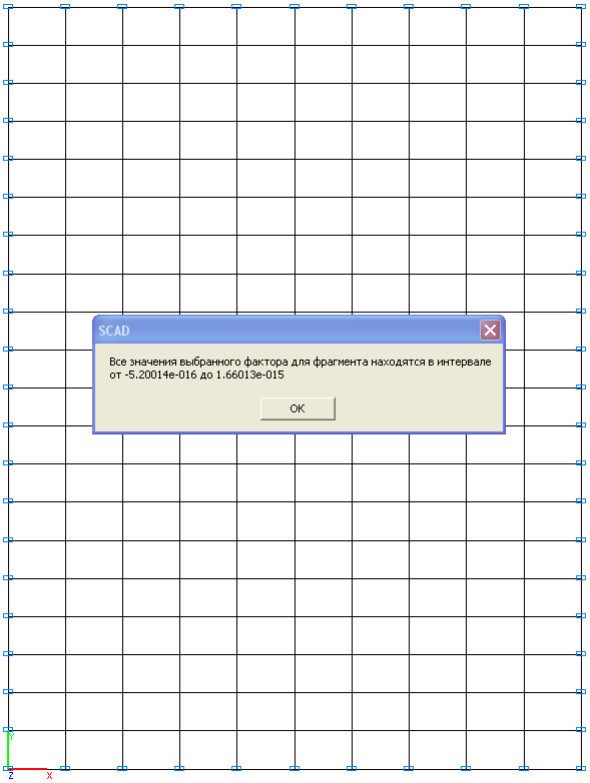
Связи: жесткое закрепление узлов по контуру (перемещение $u=v=w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$)

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Элементы пластины – 200 четырехузловых элементов типа 41. Количество узлов в расчетной схеме – 231.

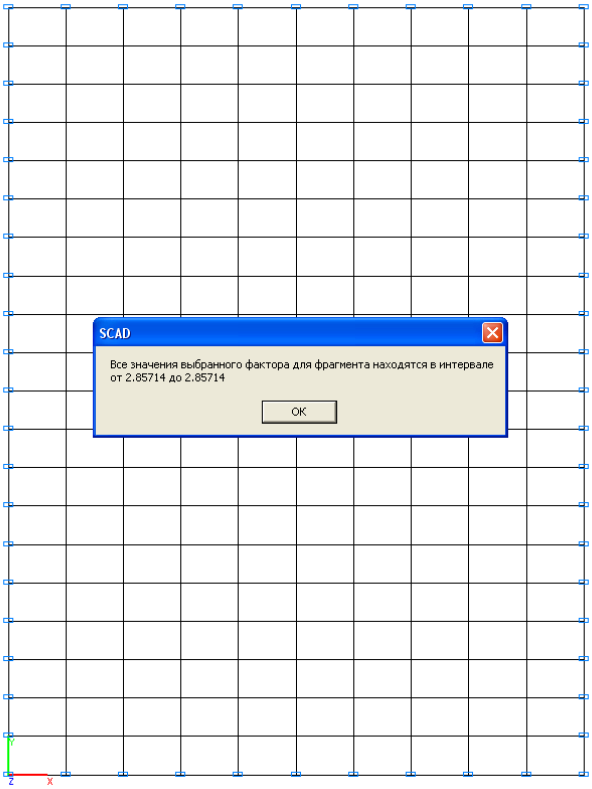


Расчетная схема

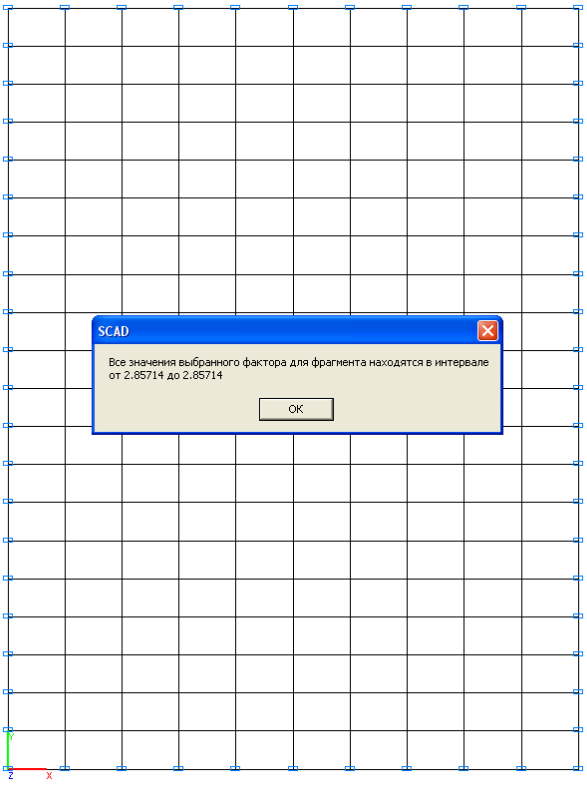
Результаты решения в SCAD



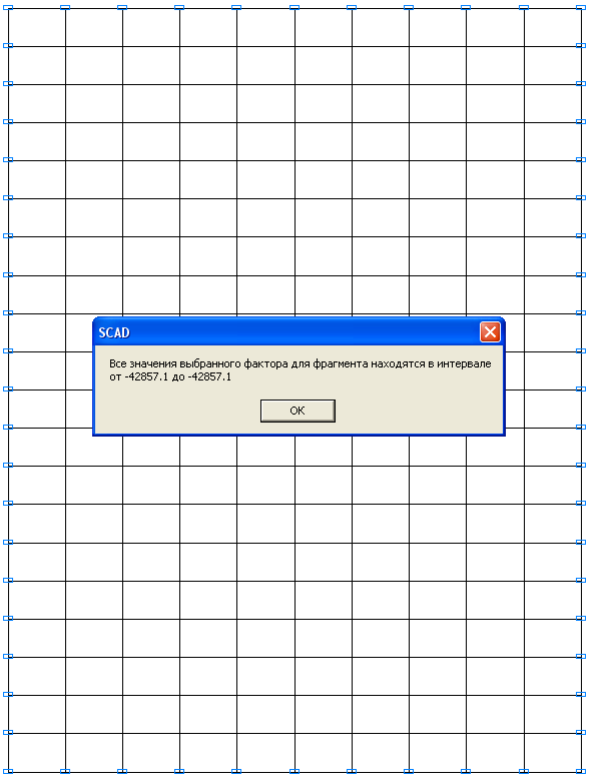
Значения перемещений w (мм)



Значения изгибающих моментов M_x (кН·м/м)



Значения изгибающих моментов M_y (кН·м/м)



Значения напряжений на верхней поверхности пластины σ (кН/м^2)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Перемещение *w*, мм	0.00	0.00	–
Изгибающие моменты $M_x = M_y$, кН·м /м	2.857	2.857	0.00
Наибольшие температурные напряжения, кПа	42857	42857	0.00

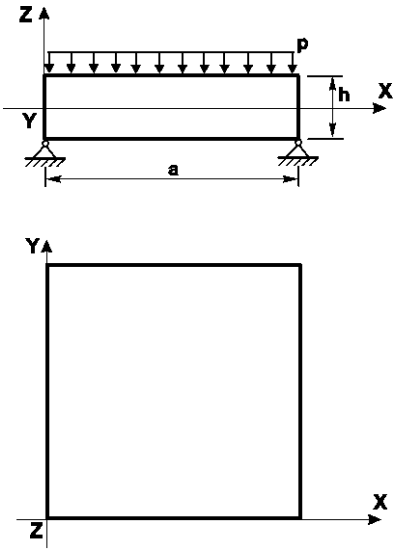
Замечания: При аналитическом решении формулы для изгибающих моментов M_x, M_y и максимальных температурных напряжений σ в заделанной пластине при изменении температуры по толщине пластины по линейному закону имеют следующий вид (С.П. Тимошенко, С.Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1963, стр. 64):

$$M_x = M_y = D \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot (1+\mu)}{h}$$, где:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\mu^2)},$$

$$\sigma = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot E}{2 \cdot (1-\mu)}.$$

Толстая квадратная шарнирно-опертая пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



Цель:
Определение деформированного состояния толстой квадратной шарнирно-опертой пластины от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Файлы с исходными данными:

Название файла	Описание файла расчета
толстая_плита_a_h_2.SPR	Расчетная модель для отношений размеров стороны плиты к толщине a/h = 2.0
толстая_плита_a_h_4.SPR	Расчетная модель для отношений размеров стороны плиты к толщине a/h = 4.0
толстая_плита_a_h_8.SPR	Расчетная модель для отношений размеров стороны плиты к толщине a/h = 8.0

Формулировка задачи:
Толстая квадратная шарнирно-опертая пластина находится под воздействием поперечной равномерно распределенной нагрузки *p*. Определить прогиб *w* в центре пластины с учетом деформаций поперечного сдвига.

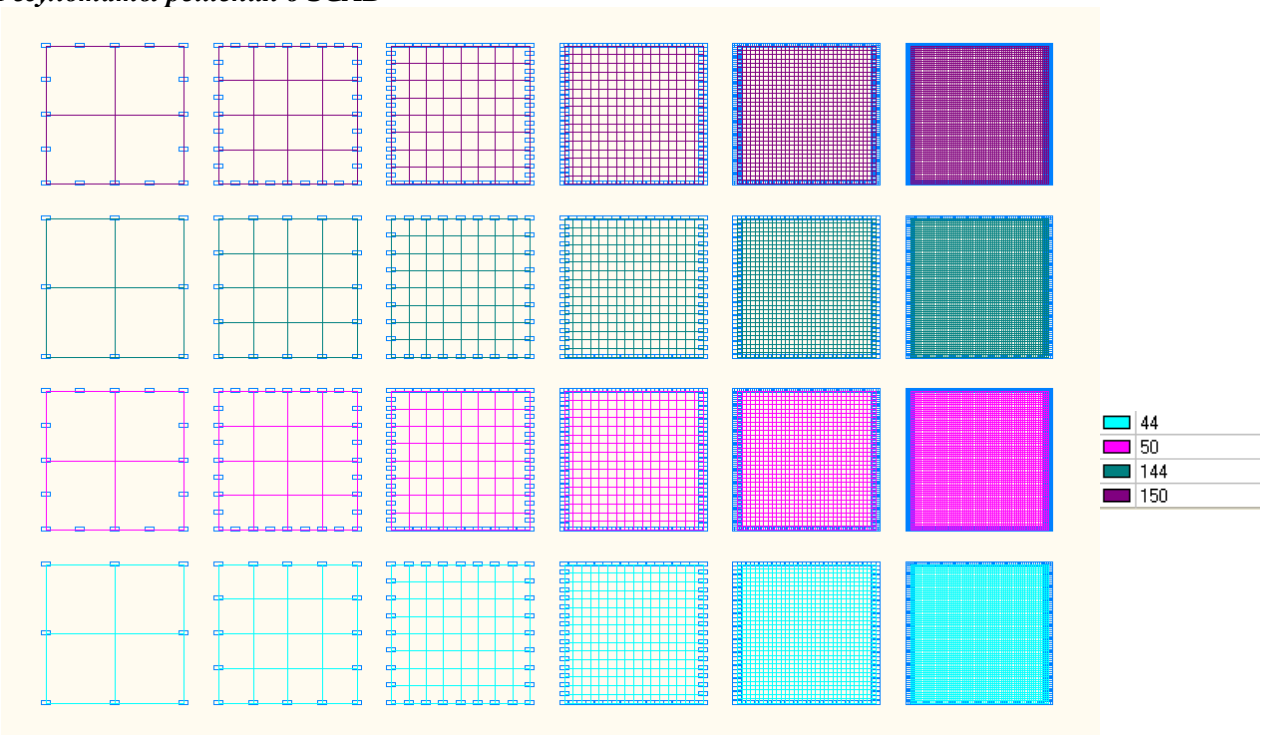
Ссылки: Л. Г. Доннелл, Балки, пластины и оболочки, Москва, Наука, 1982, стр. 313-316.

Исходные данные:
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости,
$\nu = 0.2$ - коэффициент Пуассона,
h = 2.0; 4.0; 8.0 м - толщина пластины;
a = 16.0 м - размер стороны пластины;
$p = 100.0$ кН/м^2 - значение поперечной равномерно распределенной нагрузки.

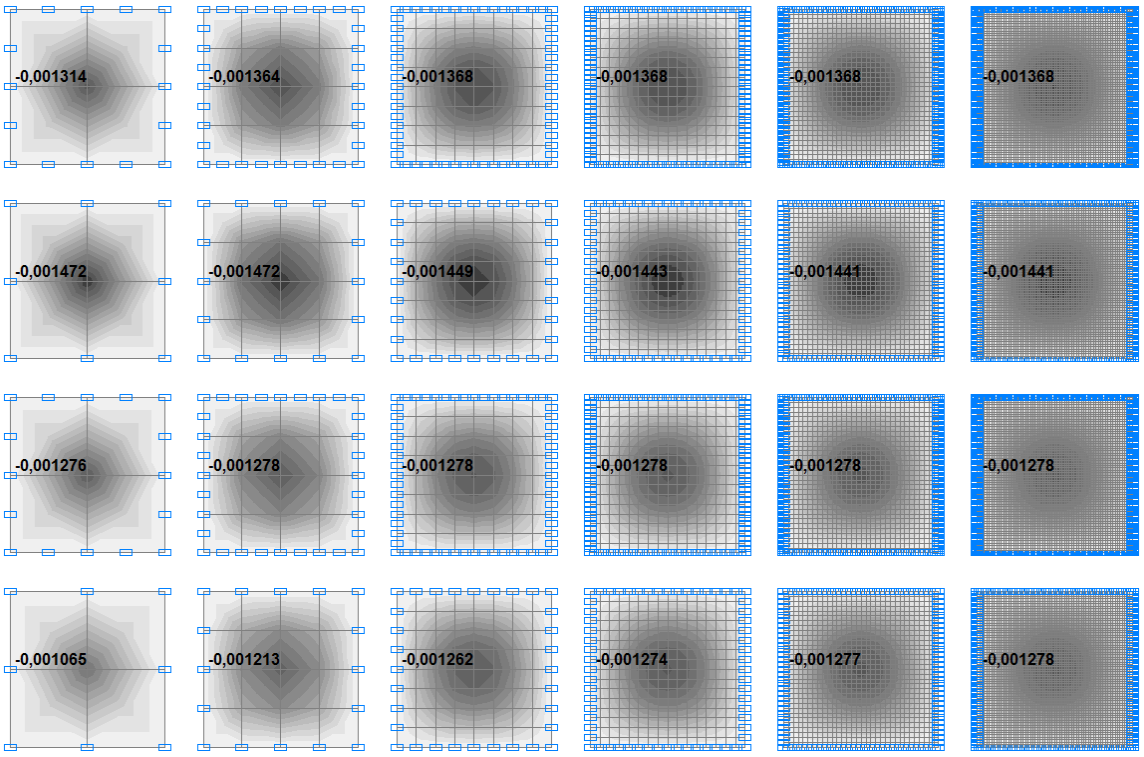
Конечно-элементная модель:
Рассматриваются три расчетные модели для отношений размеров стороны плиты к толщине a/h = 8.0; 4.0; 2.0. В каждой модели рассматриваются четыре расчетные схемы с типами конечных элементов: 44, 50 – четырехугольные четырехузловой и восьмиузловой элементы тонких оболочек для расчета по теории Кирхгофа-Лява; 144, 150 – четырехугольные четырехузловой и восьмиузловой элементы толстых оболочек для расчета по теории Рейсснера-Миндлина.
Расчетные схемы строятся для сеток с размерностями: 2x2; 4x4; 8x8; 16x16; 32x32; 64x64.

Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UY для кромок, расположенных вдоль оси X общей системы координат, и X, Y, Z, UX для кромок, расположенных вдоль оси Y общей системы координат.

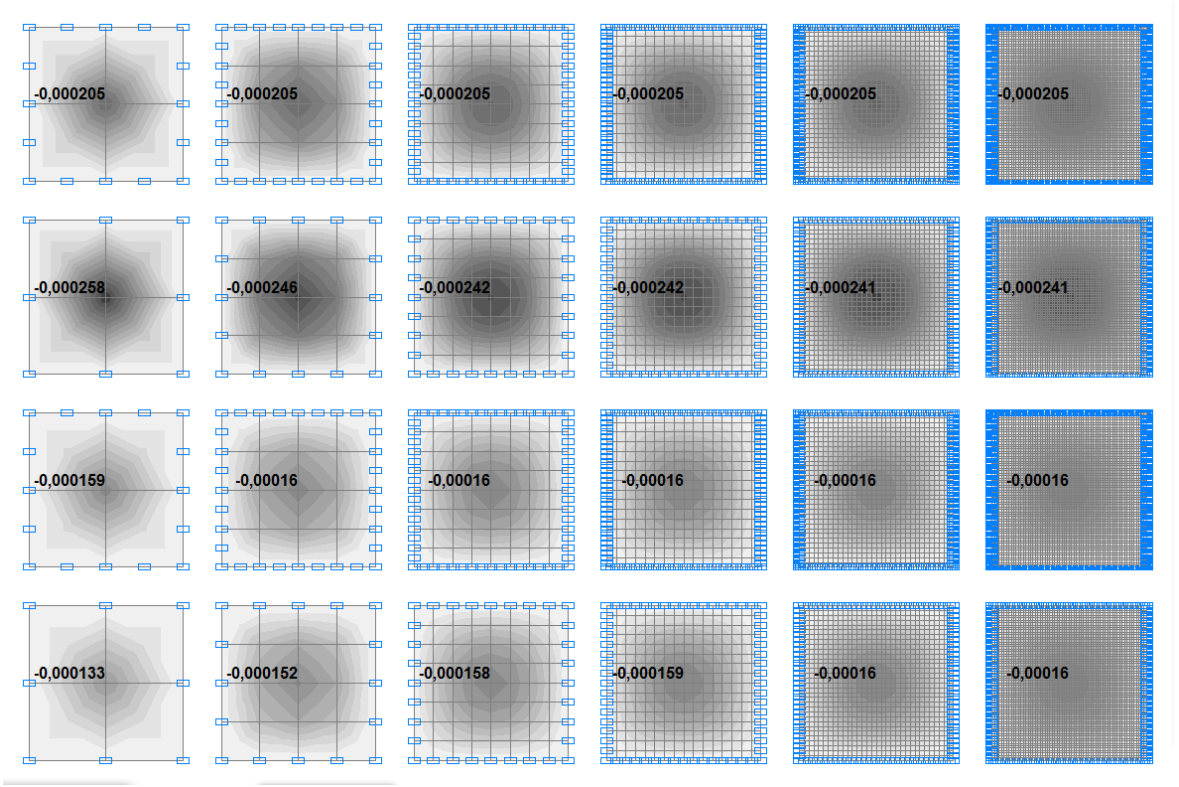
Результаты решения в SCAD



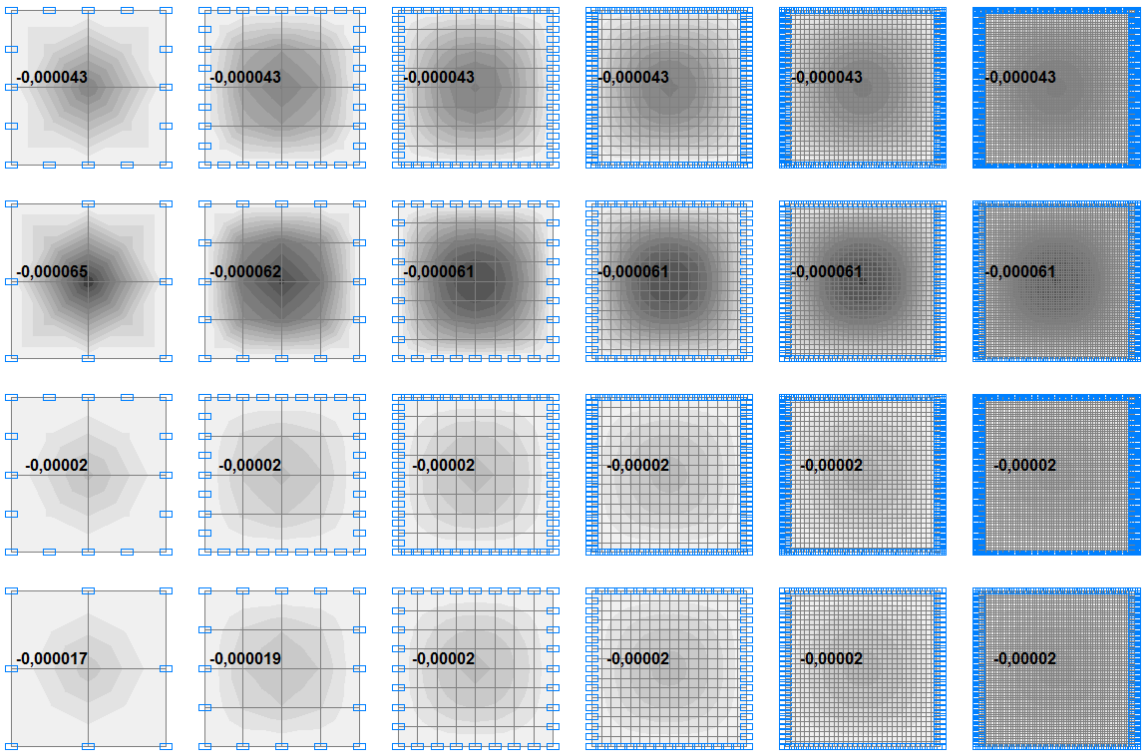
Расчетные схемы



Прогибы w пластин с отношением a/h = 8.0, м



Прогибы w пластин с отношением a/h = 4.0, м



Прогибы w пластин с отношением a/h = 2.0, м

Сравнение решений:

Прогибы *w* в центре пластин с отношением a/h = 8.0, м

Тип элемента	SCAD, сетка						Теория	Отклонение
	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64		
44	0.001065	0.001213	0.001262	0.001274	0.001277	0.001278	0.001278	0.00 %
50	0.001276	0.001278	0.001278	0.001278	0.001278	0.001278		0.00 %
144	0.001472	0.001472	0.001449	0.001443	0.001441	0.001441	0.001369	5.26 %
150	0.001314	0.001364	0.001368	0.001368	0.001368	0.001368		0.07 %

Прогибы *w* в центре пластин с отношением a/h = 4.0, м

Тип элемента	SCAD, сетка						Теория	Отклонение
	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64		
44	0.000133	0.000152	0.000158	0.000159	0.000160	0.000160	0.000160	0.00 %
50	0.000159	0.000160	0.000160	0.000160	0.000160	0.000160		0.00 %
144	0.000258	0.000246	0.000242	0.000242	0.000241	0.000241	0.000205	17.56 %
150	0.000205	0.000205	0.000205	0.000205	0.000205	0.000205		0.00 %

Прогибы *w* в центре пластин с отношением a/h = 2.0, м

Тип элемента	SCAD, сетка						Теория	Отклонение
	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64		
44	0.000017	0.000019	0.000020	0.000020	0.000020	0.000020	0.000020	0.00 %
50	0.000020	0.000020	0.000020	0.000020	0.000020	0.000020		0.00 %
144	0.000065	0.000062	0.000061	0.000061	0.000061	0.000061	0.000043	41.86 %
150	0.000043	0.000043	0.000043	0.000043	0.000043	0.000043		0.00 %

Замечания: При аналитическом решении прогибы *w* в центре пластины определяются по следующим формулам:

без учета деформаций поперечного сдвига

$$w = \frac{12\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot a^4\cdot p}{E\cdot h^3}\cdot\left[\frac{5}{384}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\cdot\left(4+m\cdot\pi\cdot th\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right)}{m^5\cdot\pi^5\cdot ch\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)}\right] \text{ или}$$

$$w = \frac{192\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot a^4\cdot p}{\pi^6\cdot E\cdot h^3}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m\cdot n}\cdot\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2}\cdot sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right];$$

При ν = 0.2 $\quad w\approx 0.004062\cdot\frac{a^4\cdot p}{D}$, где: $D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}$.

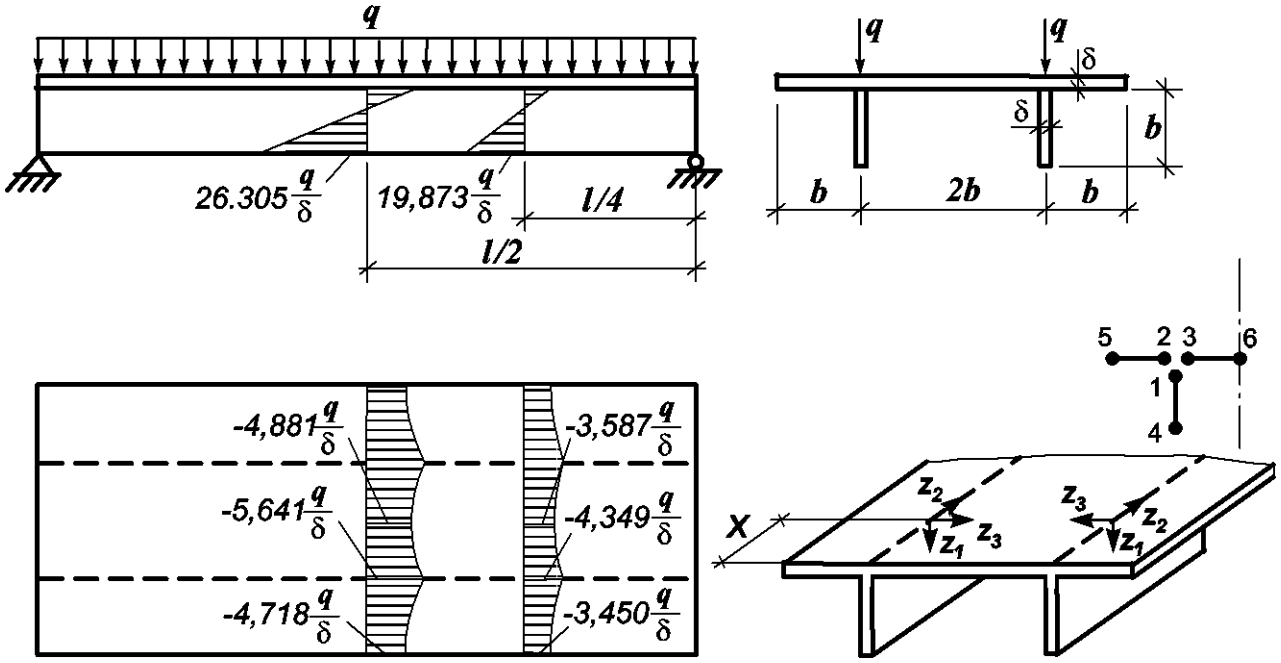
с учетом деформаций поперечного сдвига

$$w = \frac{12\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot a^4\cdot p}{E\cdot h^3}\cdot\left[\frac{5}{384}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\cdot\left(4+m\cdot\pi\cdot th\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right)}{m^5\cdot\pi^5\cdot ch\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)}+\frac{8-3\cdot\nu}{10\cdot(1-\nu)}\cdot\left(\frac{h}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{32}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)}{m^3\cdot\pi^3\cdot ch\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)}\right)\right] \text{ или}$$

$$w = \frac{192\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot a^4\cdot p}{\pi^6\cdot E\cdot h^3}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m\cdot n}\cdot\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2}\cdot\left[1+\frac{\pi^2\cdot h^2}{5\cdot(1-\nu)\cdot a^2}\cdot\left(m^2+n^2\right)\right]\cdot sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right];$$

При ν = 0.2 $\quad w\approx 0.004062\cdot\frac{a^4\cdot p}{D}\cdot\left[1+4.533786\cdot\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]$, где: $\quad D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}$.

Двухреберная балка под действием равномерно распределенных нагрузок, приложенных в плоскости ребер



Цель: Исследование распределения нормальных напряжений в двухреберной балке от действия равномерно распределенных нагрузок, приложенных в плоскости ребер.

Имя файла с исходными данными: **4.34.SPR**

Формулировка задачи: Двухреберная балка свободно опертая через торцевые идеальные диафрагмы абсолютно жесткие в их плоскости и абсолютно податливые из их плоскости находится под воздействием равномерно распределенных по линии вдоль ребер нагрузок q, приложенных в их плоскости. Определить нормальные напряжения σ_{xi}, действующие вдоль балки, в элементах ее конструкции в точках поперечного сечения i = 1, 4, 5, 6 для половины ($l/2$) и четверти ($l/4$) пролета балки при учете следующих допущений, принятых при выводе аналитического решения:

- Пренебрегаются изгибные деформации элементов конструкции балки из их плоскости;
- Принимается отсутствие перемещений в горизонтальной плоскости в направлении поперек балки на стыках ребер и полки;
- Не учитывается разность в напряжениях в конструктивных элементах балки на стыках ребер и полки.

Ссылки: А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. — Москва: Стройиздат, 1983.

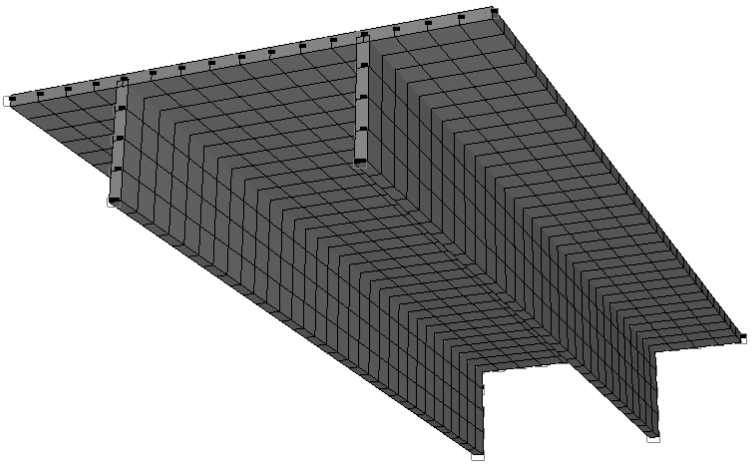
Исходные данные:

$E = 3 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.15$	- коэффициент Пуассона;
$\delta = 0.1$ м	- толщина ребер и полки;
$b = 1.0$ м	- высота ребер;
$2 \cdot b = 2.0$ м	- расстояние между ребрами;
$4 \cdot b = 4.0$ м	- ширина полки;
$l = 7.85 \cdot b = 7.85$ м	- длина балки;
$q = 10.0$ кН/м	- равномерно распределенная по линии вдоль ребер нагрузка.

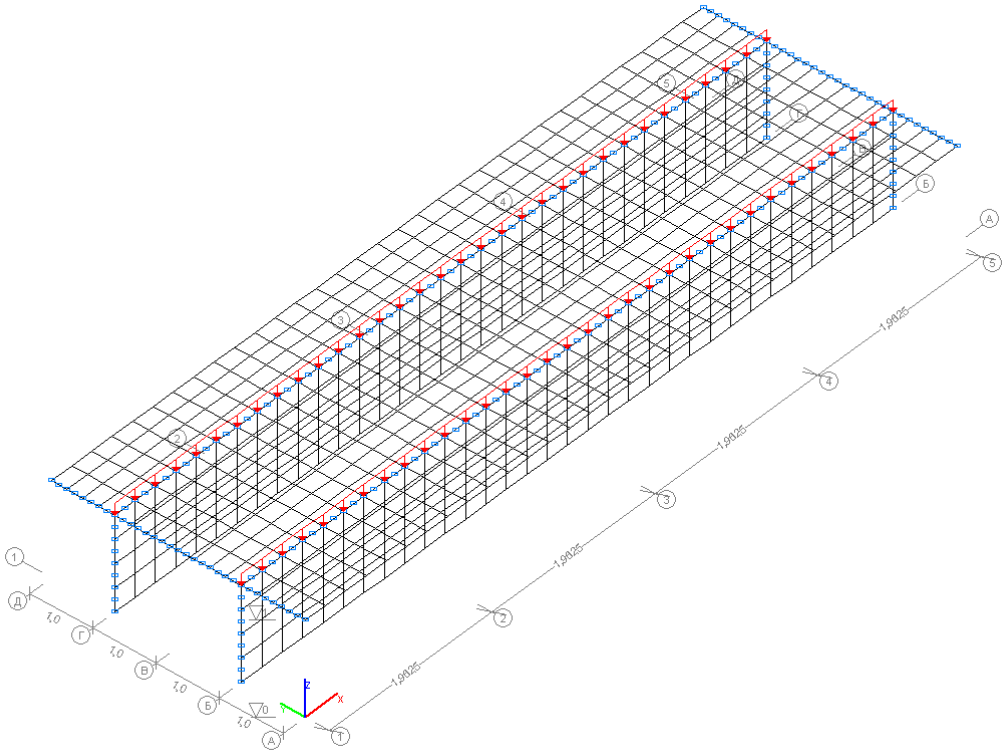
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы балки – 768 восьмиузловых элементов балки-стенки типа 27. Сетка конечных элементов разбита в направлении поперек балки с шагом 0.25 м и в направлении вдоль балки с шагом 0.2453125 м. Направление

выдачи внутренних усилий сориентировано по направлению вдоль оси OX общей системы координат. Количество узлов в расчетной схеме – 2417.

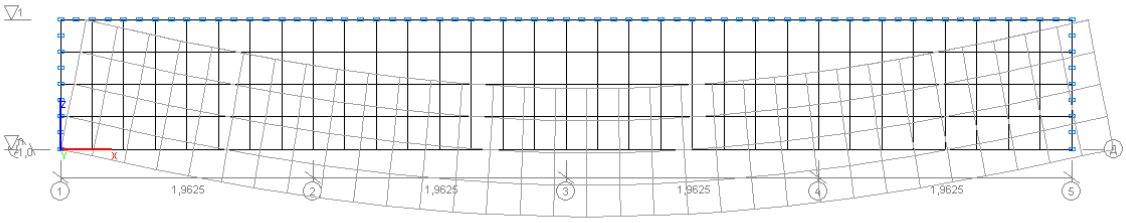
Результаты решения в SCAD



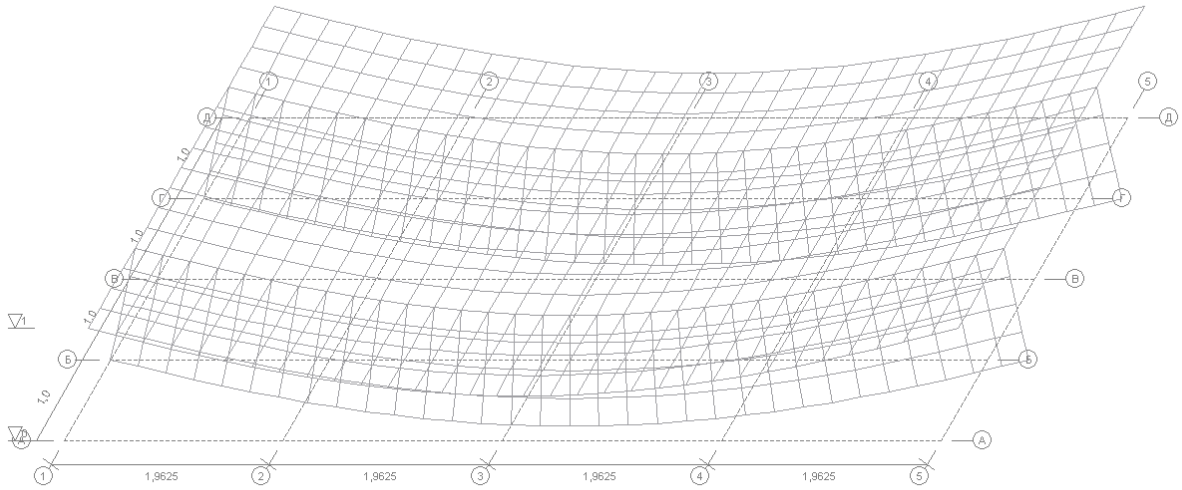
Расчетная схема



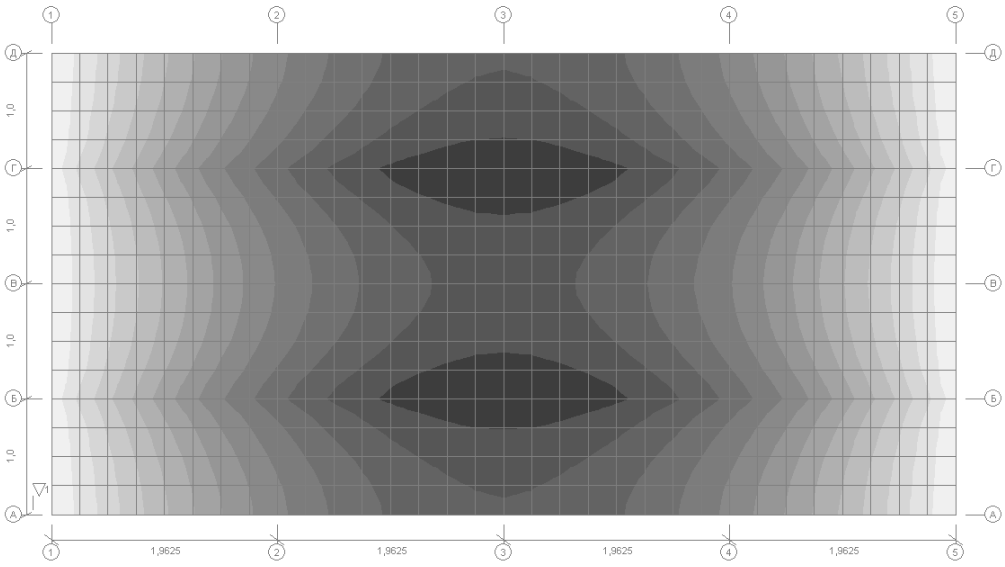
Расчетная схема



Деформированная схема

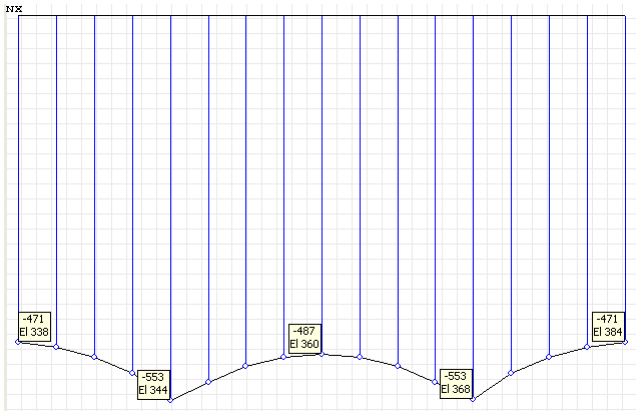


Деформированная схема

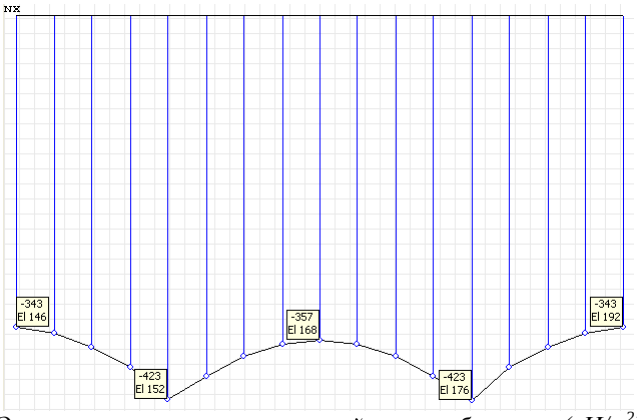


-553	-514
-514	-474
-474	-435
-435	-395
-395	-356
-356	-316
-316	-276
-276	-237
-237	-197
-197	-158
-158	-118
-118	-79
-79	-39
-39	0

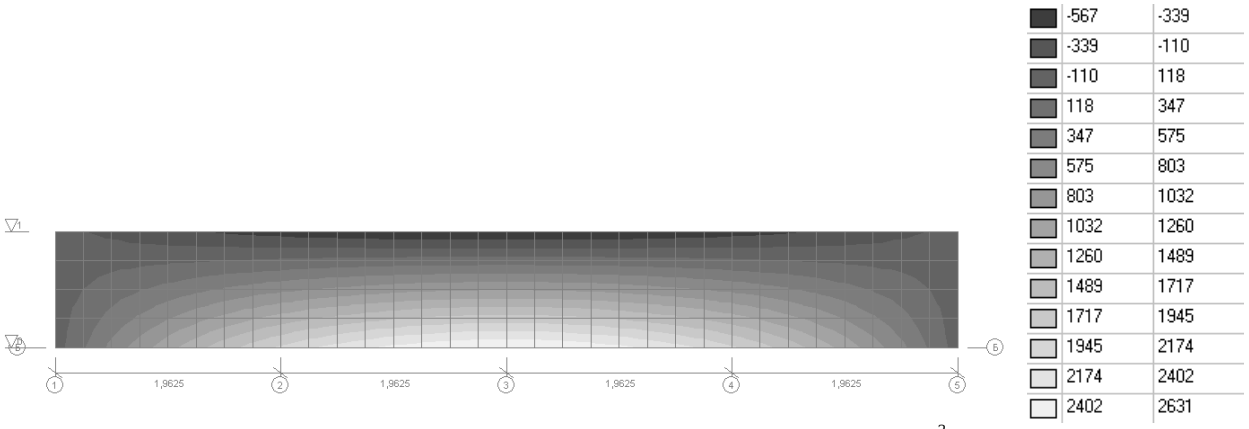
Значения нормальных напряжений в полке балки σ_{xi} (кН/м^2)



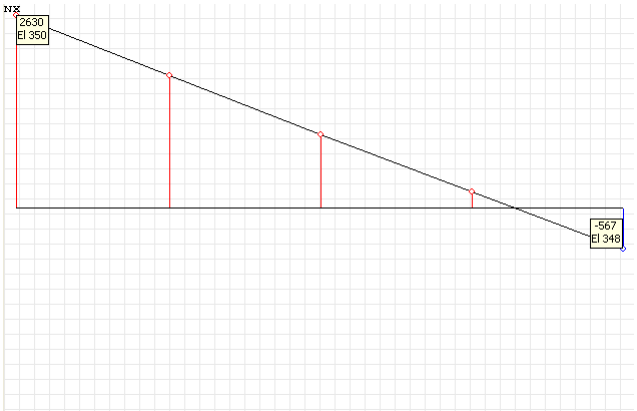
Эпюра нормальных напряжений в полке балки σ_{xi} (кН/м2)
для поперечного сечения, расположенного в середине пролета балки-стенки l/2



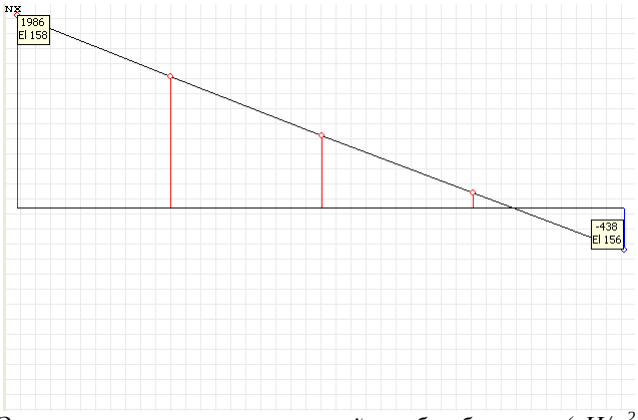
Эпюра нормальных напряжений в полке балки σ_{xi} (кН/м^2)
для поперечного сечения, расположенного в четверти пролета балки-стенки l/4



Значения нормальных напряжений в ребре балки σ_{xi} (кН/м^2)



Эпюра нормальных напряжений в ребре балки σ_{xi} (кН/м^2)
для поперечного сечения, расположенного в середине пролета балки-стенки l/2



Эпюра нормальных напряжений в ребре балки σ_{xi} (кН/м^2)
для поперечного сечения, расположенного в четверти пролета балки-стенки l/4

Сравнение решений:

Нормальные напряжения σ_{xi} (кН/м2), действующие вдоль балки, в элементах ее конструкции в точках поперечного сечения i = 1, 4, 5, 6 для половины (*l*/2) и четверти (*l*/4) пролета балки

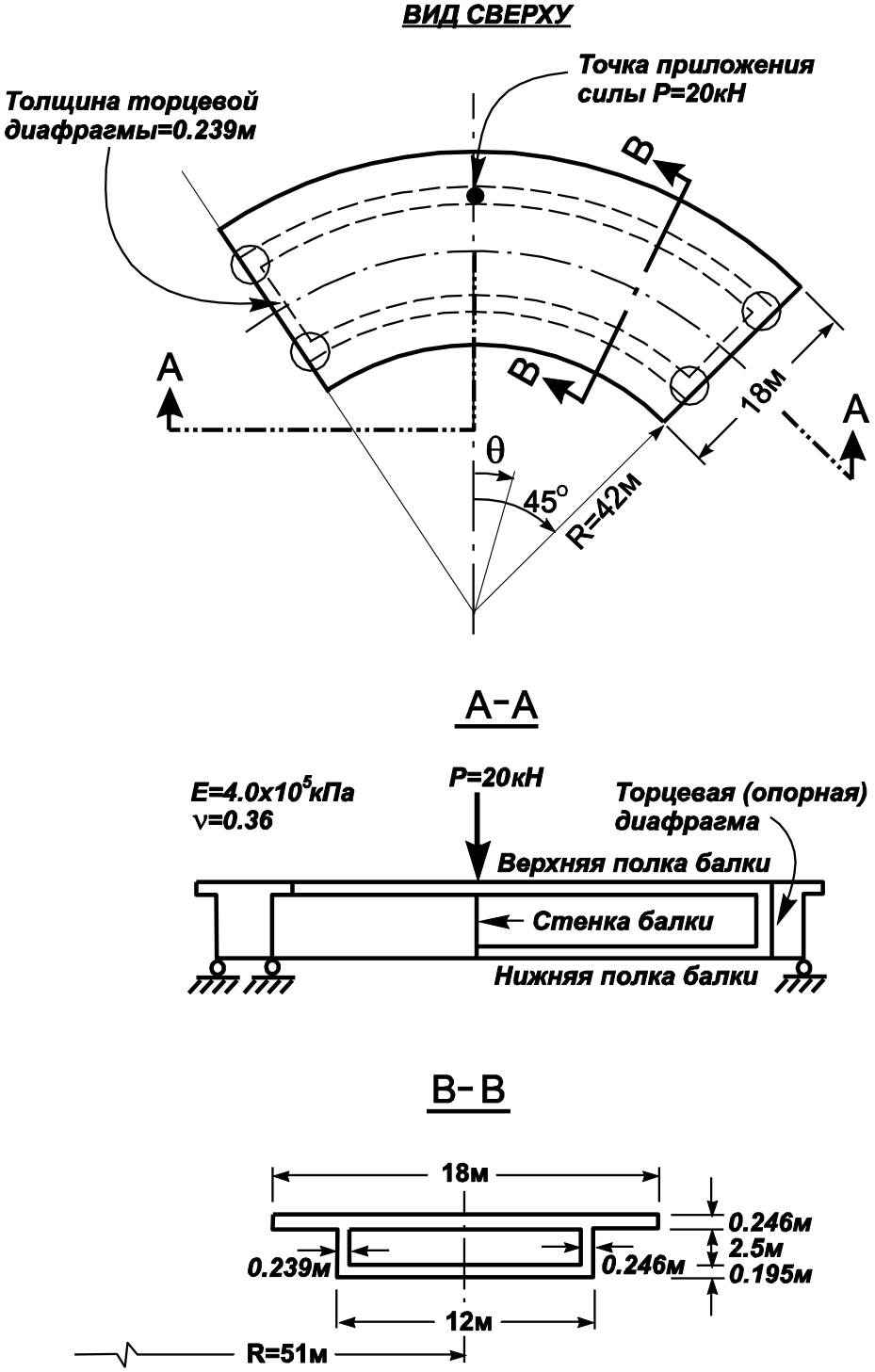
x, м	***l*/2 = 3.925**				***l*/4 = 1.9625**			
i	**1**	**4**	**5**	**6**	**1**	**4**	**5**	**6**
Теория	-564	2631	-472	-488	-435	1987	-345	-359
SCAD	-567	2631	-471	-487	-439	1989	-344	-358
Отклонения, %	0.53	0.00	0.21	0.20	0.92	0.10	0.29	0.28

***Замечания*:** При аналитическом решении нормальные напряжения σ_{xi} (кН/м2), действующие вдоль балки, в элементах ее конструкции в точках поперечного сечения i = 1, 4, 5, 6 для половины (*l*/2) и четверти (*l*/4) пролета балки при учете семи гармоник неизвестных обобщенных перемещений для μ = 0.15 и $l = 7.85 \cdot b$ могут быть вычислены по следующим формулам (А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. — Москва: Стройиздат, 1983, стр. 383):

$$\sigma_{x1}(l/2) = -5.641 \cdot \frac{q}{\delta}; \quad \sigma_{x4}(l/2) = 26.305 \cdot \frac{q}{\delta}; \quad \sigma_{x5}(l/2) = -4.718 \cdot \frac{q}{\delta}; \quad \sigma_{x6}(l/2) = -4.881 \cdot \frac{q}{\delta};$$

$$\sigma_{x1}(l/4) = -4.349 \cdot \frac{q}{\delta}; \quad \sigma_{x4}(l/4) = 19.873 \cdot \frac{q}{\delta}; \quad \sigma_{x5}(l/4) = -3.450 \cdot \frac{q}{\delta}; \quad \sigma_{x6}(l/4) = -3.587 \cdot \frac{q}{\delta};$$

Криволинейная в плане коробчатая балка пролетного строения моста под действием сосредоточенной силы



Цель: Исследование распределения тангенциальных напряжений и вертикальных перемещений в криволинейной в плане коробчатой балки пролетного строения моста от действия вертикальной сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета над внешней стенкой.

Имя файла с исходными данными: **4.35.SPR**

Формулировка задачи: Коробчатая балка пролетного строения моста, продольная ось которой представляет в плане круговую кривую, свободно оперта через торцевые диафрагмы и нагружена сосредоточенной силой *P*, приложенной в середине пролета над внешней стенкой. Определить:

- распределение тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, на внешних поверхностях и в срединных плоскостях верхней и нижней полок по поперечному сечению в середине пролета;
- распределение тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, на внешней поверхности нижней полки вдоль продольной оси;
- распределение вертикальных перемещений w по нижним граням внешней и внутренней стенок вдоль продольной оси.

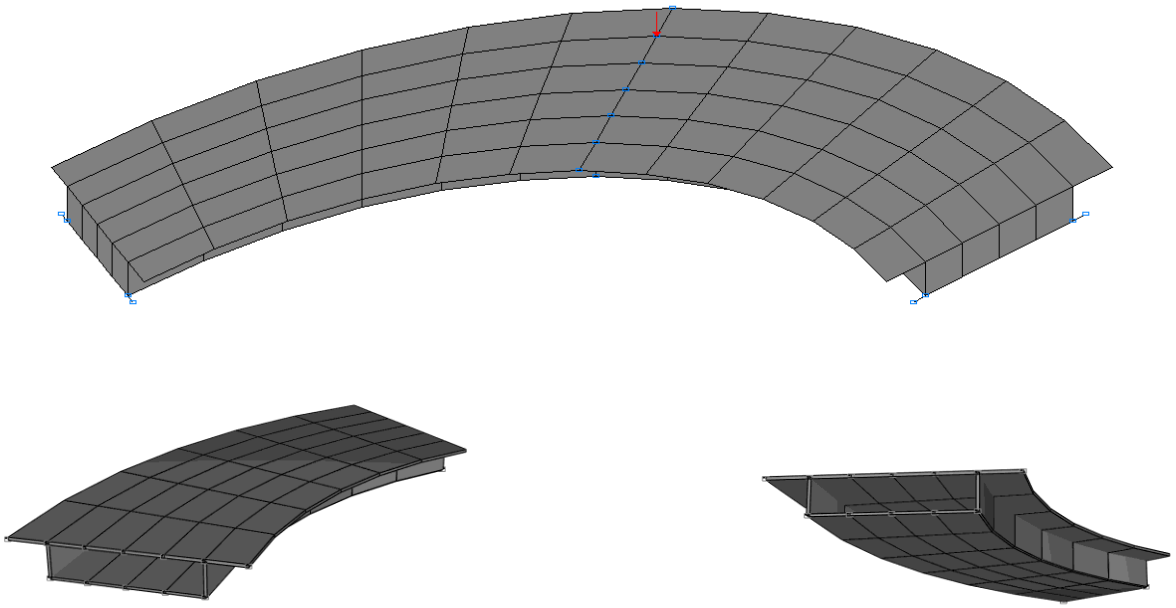
Ссылки: Worsak Kanok-Nukulchai, A simple and efficient finite element for general shell analysis, Int. J. num. meth. Engng, 14, 179-200 (1979); A.R.M. Fam and C. Turkstra, Model study of horizontally curved box girder, J. Engng Struct. Div., ASCE, 102, ST5, 1097-1108 (1976).

Исходные данные:

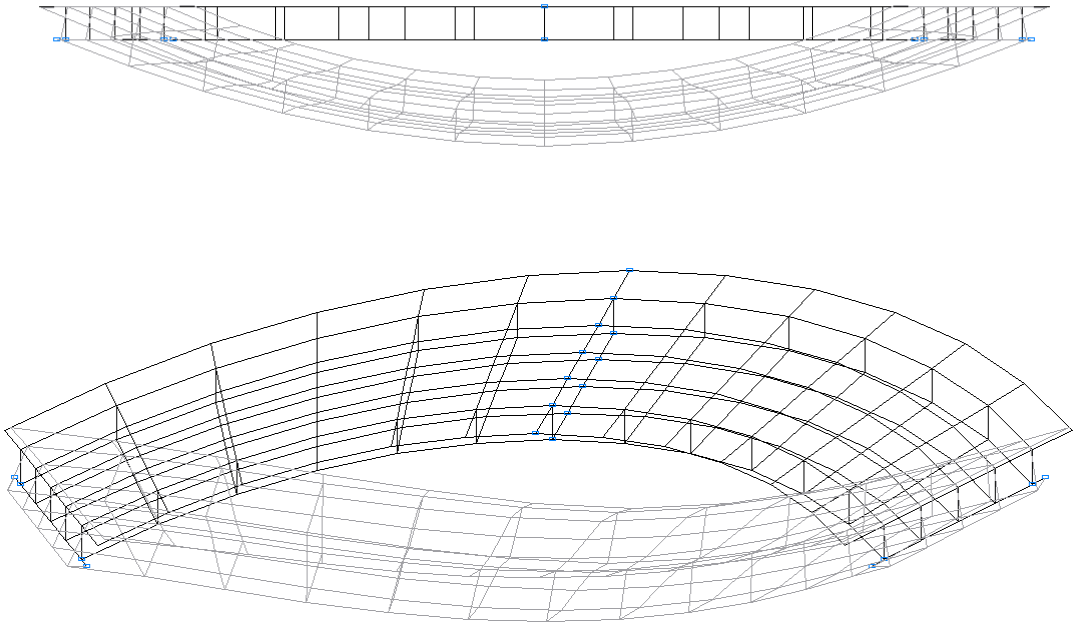
$E = 4.0 \cdot 10^5$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.36$	- коэффициент Пуассона;
$R = 51.0$ м	- радиус продольной оси балки;
$\theta = 45^o$	- центральный угол, содержащий половину пролета балки;
$P = 20$ кН	- сосредоточенная вертикальная сила, приложенная в середине пролета балки над внешней стенкой;
$b_{tf} = 18.0$ м	- ширина верхней полки;
$t_{tf} = 0.246$ м	- толщина верхней полки;
$b_{bf} = 12.0$ м	- ширина нижней полки;
$t_{bf} = 0.195$ м	- толщина нижней полки;
$h_{ew} = 2.5$ м	- высота внешней стенки по внутренним поверхностям полок;
$t_{ew} = 0.246$ м	- толщина внешней стенки;
$h_{iw} = 2.5$ м	- высота внутренней стенки по внутренним поверхностям полок;
$t_{iw} = 0.239$ м	- толщина внутренней стенки;
$t_{ed} = 0.239$ м	- толщина торцевой диафрагмы;

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы балки – 156 восьмиузловых элементов толстой оболочки для расчета по теории Рейсснера-Миндлина типа 150. Сетки конечных элементов верхней и нижней полок разбиты в радиальном направлении с шагом ~3.0 м и в тангенциальном направлении с шагом 7.5º, сетки конечных элементов внешней и внутренней стенок разбиты в вертикальном направлении с шагом ~2.7 м и в тангенциальном направлении – с шагом 7.5º. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. По узлам сопряжения элементов внешней и внутренней стенок с элементами торцевых диафрагм и нижней полки в вертикальном направлении установлены связи, обеспечивающие свободное опирание. Связи, предотвращающие смещения этих узлов в горизонтальной плоскости по радиальному направлению, моделируются 4 стержневыми элементами типа 4 с продольной жесткостью $EF = 4.0 \cdot 10^7$ кН, конечные узлы которых закреплены по всем линейным степеням свободы. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы в тангенциальном направлении обеспечивается за счет наложения связей по условиям ее симметрии. Количество узлов в расчетной схеме – 466.

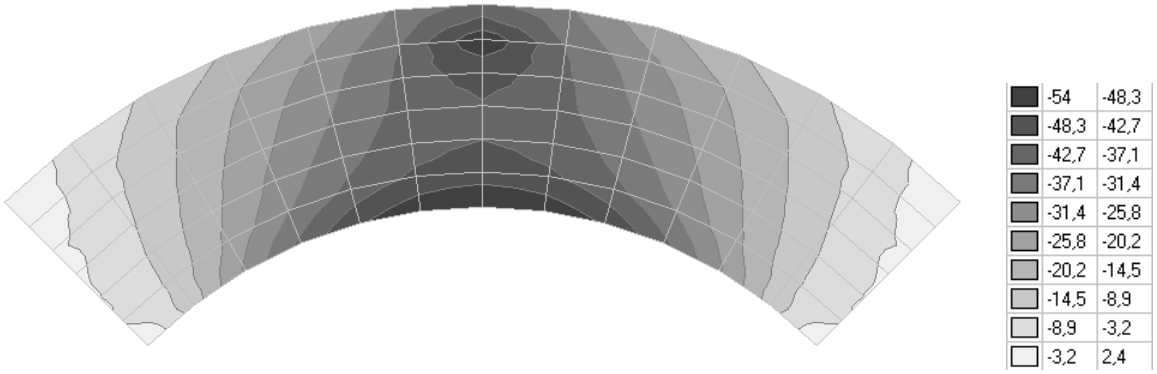
Результаты решения в SCAD



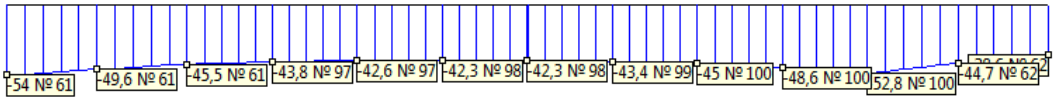
Расчетная схема



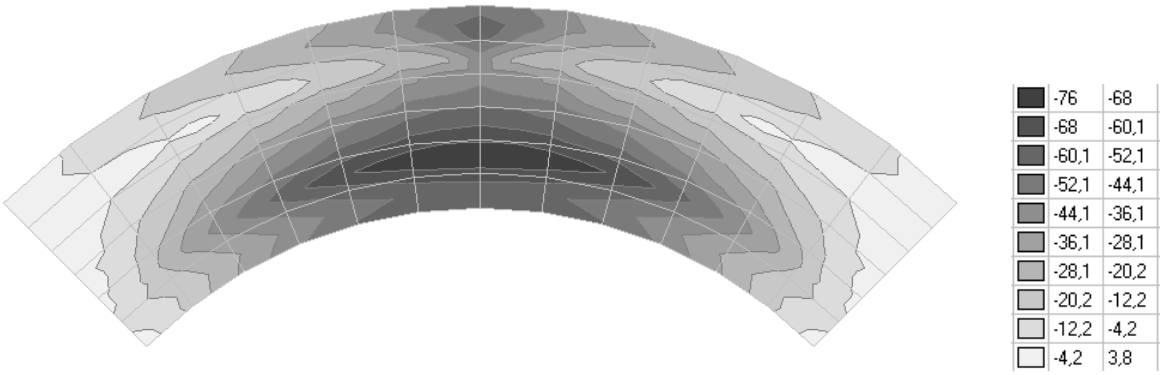
Деформированная схема



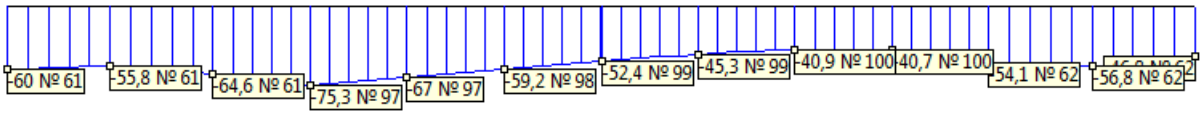
Значения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, в срединной плоскости верхней полки (кН/м^2)



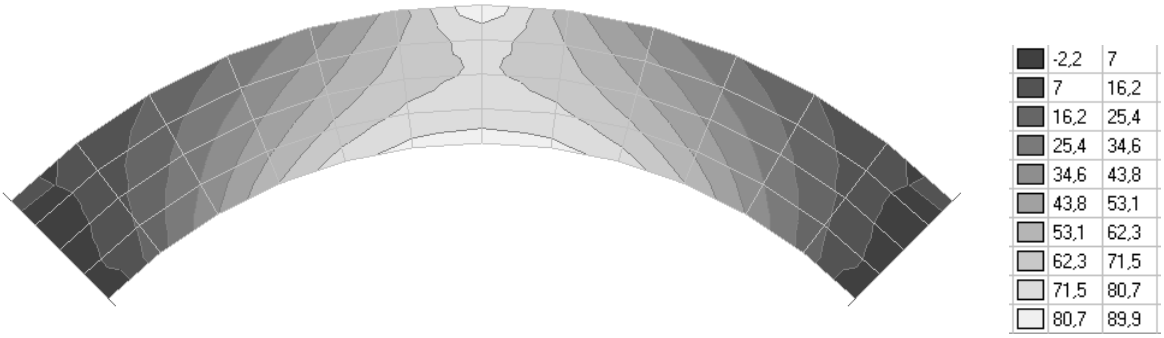
Эпюра распределения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, в срединной плоскости верхней полки по поперечному сечению в середине пролета (кН/м^2)



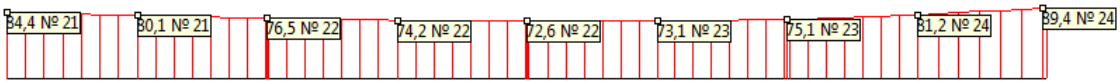
Значения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, на внешней поверхности верхней полки (кН/м^2)



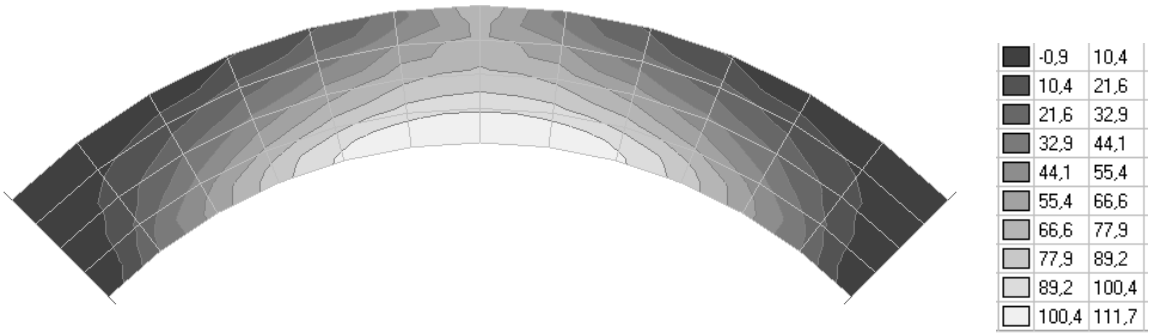
Эпюра распределения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, на внешней поверхности верхней полки по поперечному сечению в середине пролета (кН/м^2)



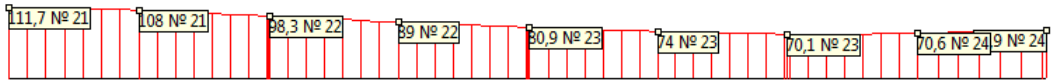
Значения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, в срединной плоскости нижней полки (кН/м^2)



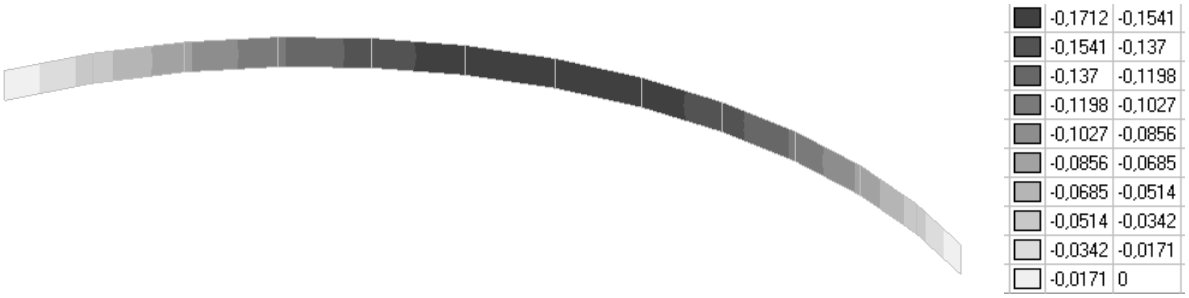
Эпюра распределения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, в срединной плоскости нижней полки по поперечному сечению в середине пролета (кН/м^2)



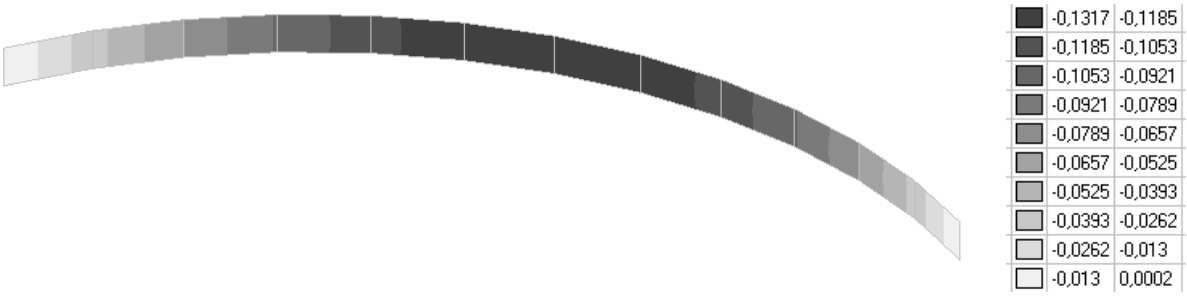
Значения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, на внешней поверхности нижней полки (кН/м^2)



Эпюра распределения тангенциальных напряжений σ_x, действующих вдоль балки, на внешней поверхности нижней полки по поперечному сечению в середине пролета (кН/м^2)

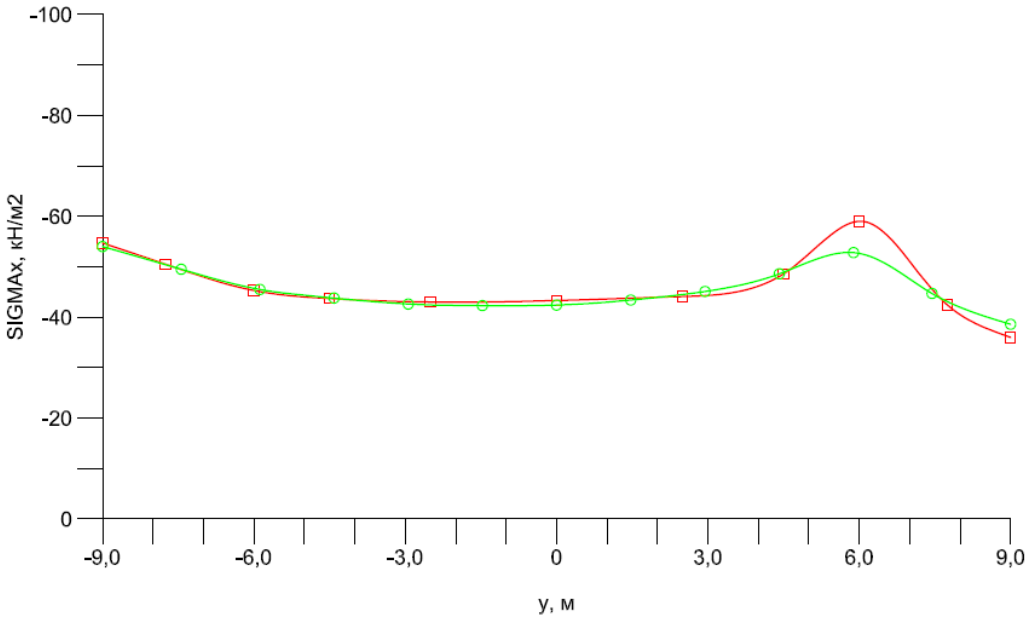


Значения вертикальных перемещений w внешней стенки (м)



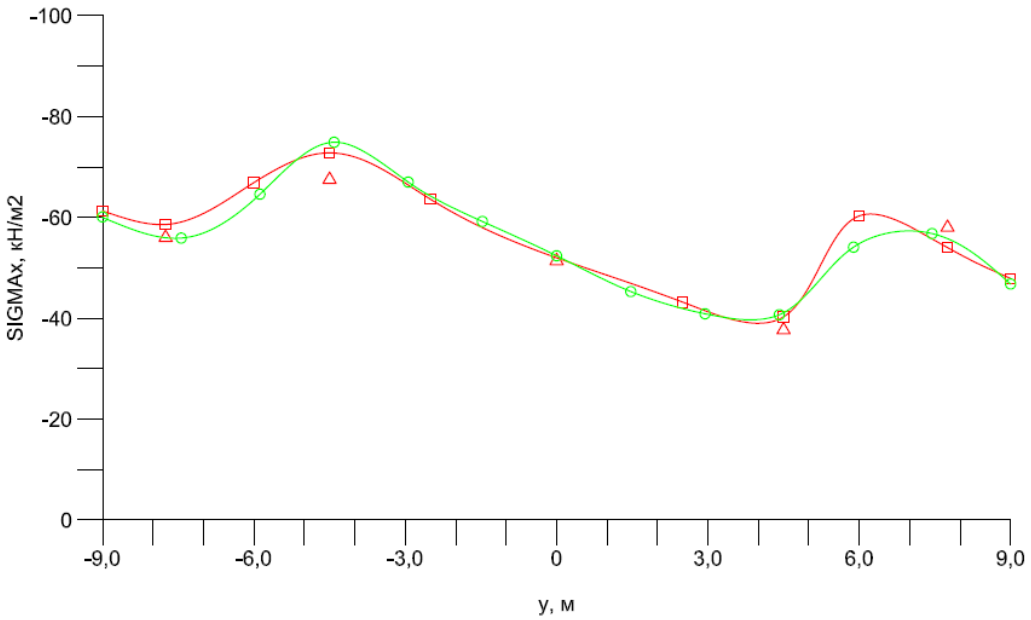
Значения вертикальных перемещений w внутренней стенки (м)

Сравнение решений:



Тангенциальные напряжения в срединной плоскости верхней полки в середине пролета коробчатой балки

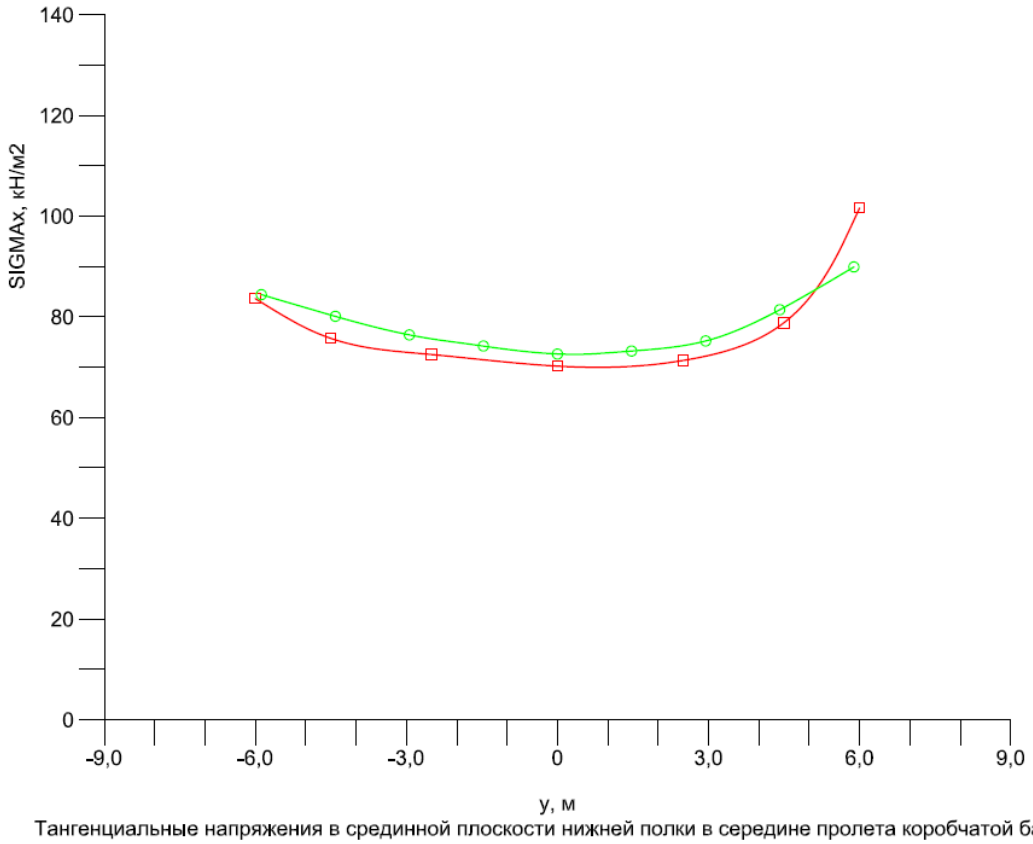
△ - результаты, полученные эксперементально (источник)
□ - результаты, полученные расчетом с использованием конечных элементов высокого порядка (источник)
○ - результаты, полученные расчетом (ПК SCAD)



Тангенциальные напряжения на внешней поверхности верхней полки в середине пролета коробчатой балки

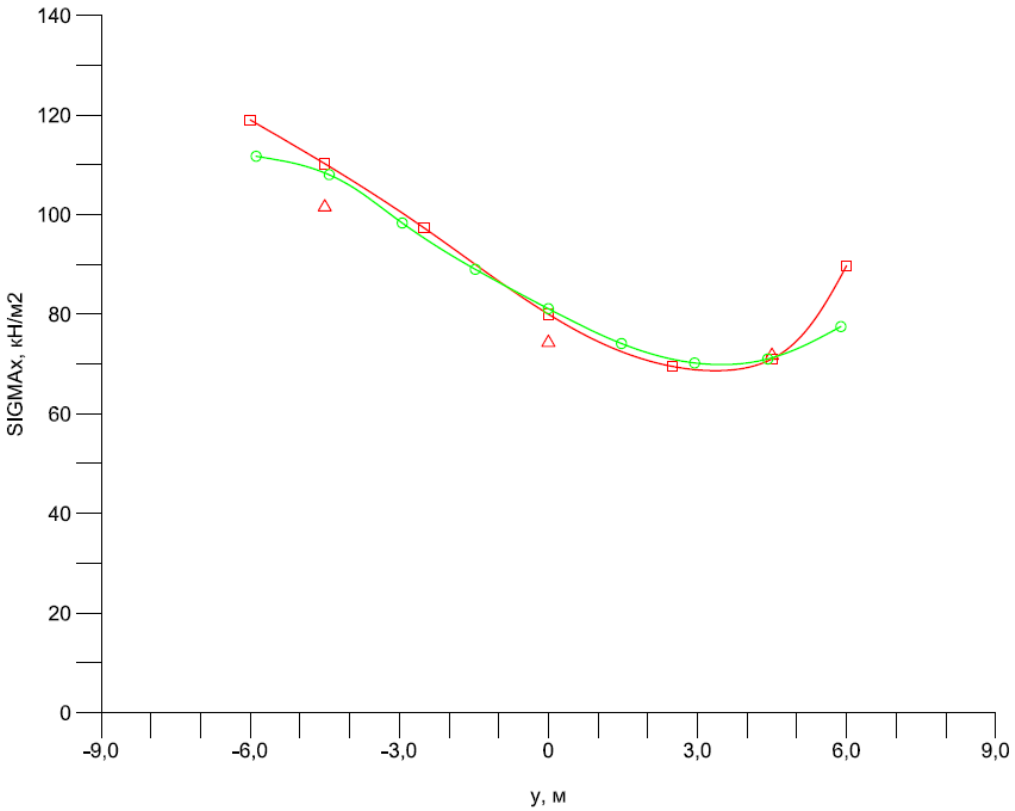
△ - результаты, полученные эксперементально (источник)
□ - результаты, полученные расчетом с использованием конечных элементов высокого порядка (источник)
○ - результаты, полученные расчетом (ПК SCAD)

y	Эксперимент	SCAD	Отклонения, %
-7.75	-56.0	-55.97	0.05
-4.50	-67.5	-74.82	10.84
0.00	-51.4	-52.40	1.95
4.50	-37.7	-41.10	9.02
7.75	-58.0	-55.79	3.81



Тангенциальные напряжения в срединной плоскости нижней полки в середине пролета коробчатой балки

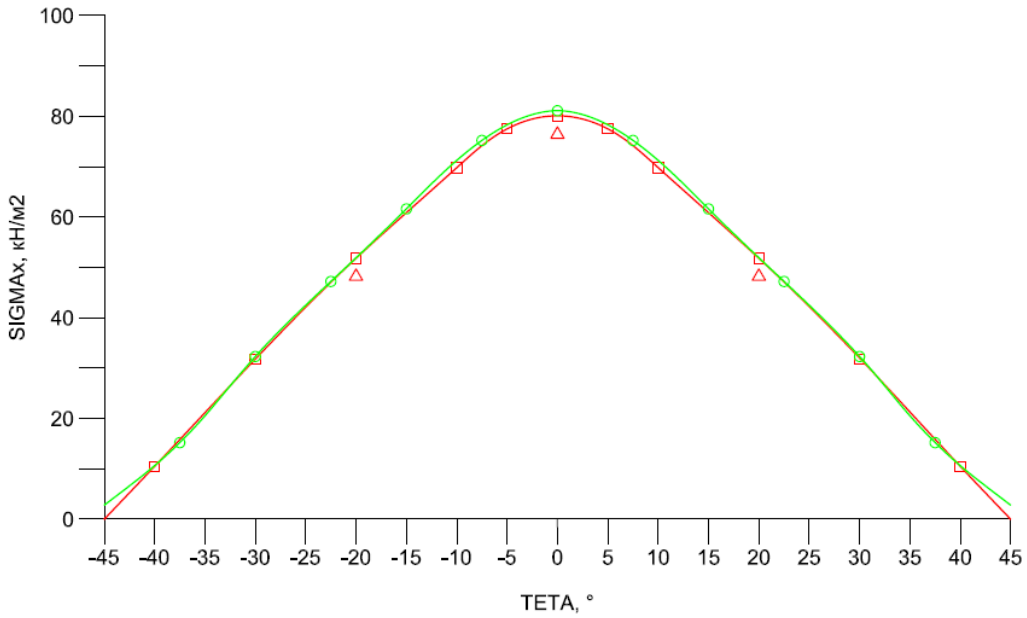
△ - результаты, полученные эксперементально (источник)
□ - результаты, полученные расчетом с использованием конечных элементов высокого порядка (источник)
○ - результаты, полученные расчетом (ПК SCAD)



Тангенциальные напряжения на внешней поверхности нижней полки в середине пролета коробчатой балки

△ - результаты, полученные эксперементально (источник)
□ - результаты, полученные расчетом с использованием конечных элементов высокого порядка (источник)
○ - результаты, полученные расчетом (ПК SCAD)

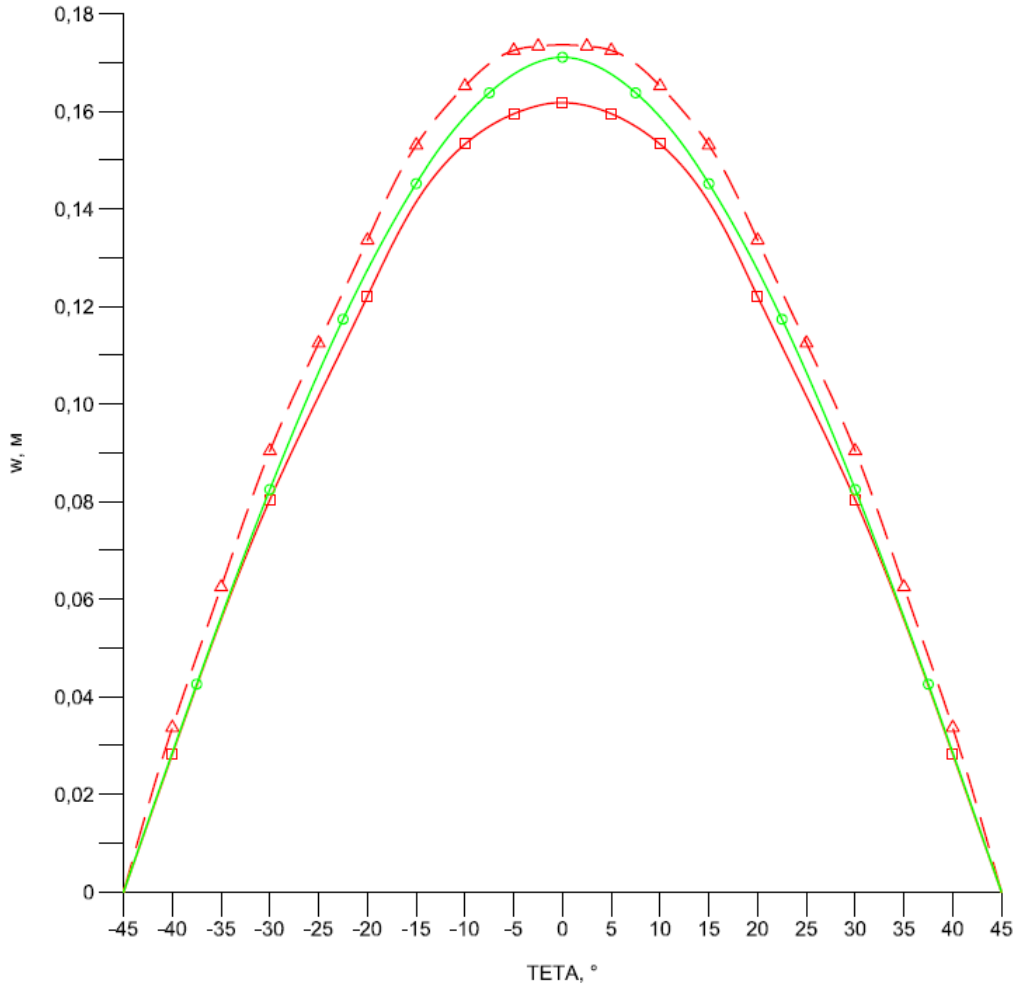
y	Эксперимент	SCAD	Отклонения, %
-4.50	101.5	108.38	6.78
0.00	74.3	81.10	9.15
4.50	71.7	71.23	0.66



Тангенциальные напряжения на внешней поверхности нижней полки вдоль оси пролета коробчатой балки

△ - результаты, полученные эксперементально (источник)
□ - результаты, полученные расчетом с использованием конечных элементов высокого порядка (источник)
○ - результаты, полученные расчетом (ПК SCAD)

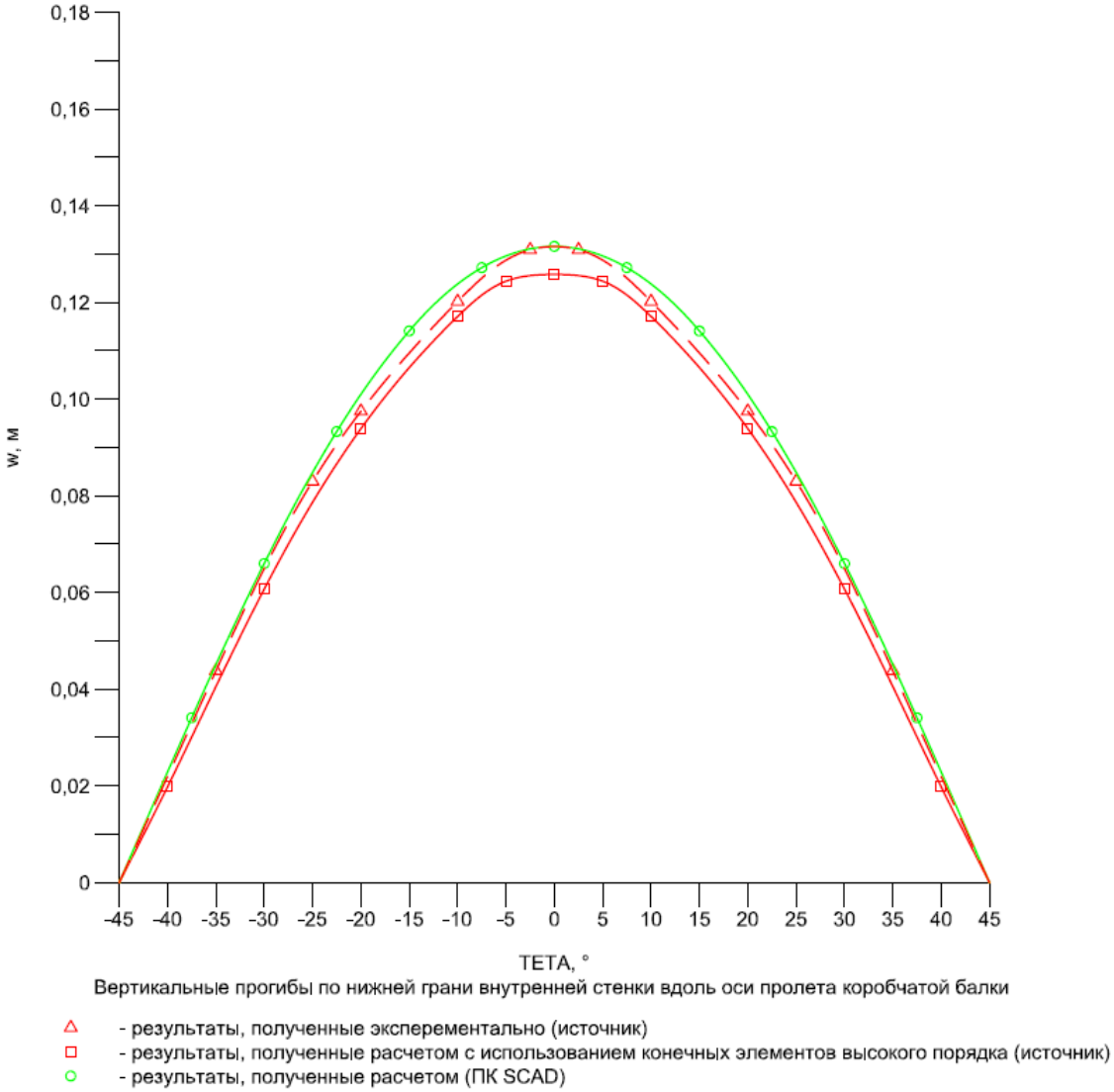
θ	**Эксперимент**	**SCAD**	**Отклонения, %**
-20	48.2	51.91	7.70
0	76.4	81.10	6.15
20	48.2	51.91	7.70



Вертикальные прогибы по нижней грани внешней стенки вдоль оси пролета коробчатой балки

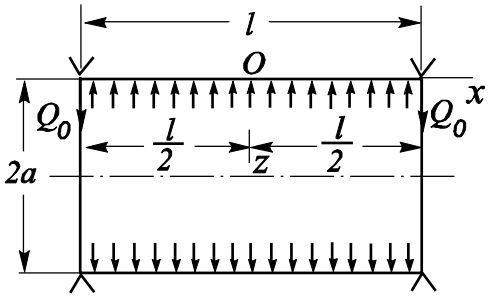
△ - результаты, полученные эксперементально (источник)
□ - результаты, полученные расчетом с использованием конечных элементов высокого порядка (источник)
○ - результаты, полученные расчетом (ПК SCAD)

θ	Эксперимент	SCAD	Отклонения, %
-35	0.0625	0.05631	9.90
-30	0.0904	0.08250	8.74
-25	0.1125	0.10650	5.33
-20	0.1336	0.12750	4.57
-15	0.1531	0.14520	5.16
-10	0.1652	0.15887	3.83
-5	0.1725	0.16762	2.83
-2.5	0.1734	0.17016	1.87
2.5	0.1734	0.17016	1.87
5	0.1725	0.16762	2.83
10	0.1652	0.15887	3.83
15	0.1531	0.14520	5.16
20	0.1336	0.12750	4.57
25	0.1125	0.10650	5.33
30	0.0904	0.08250	8.74
35	0.0625	0.05631	9.90



θ	**Эксперимент**	**SCAD**	**Отклонения, %**
-35	0.0438	0.04510	2.97
-25	0.0830	0.08487	2.25
-20	0.0975	0.10101	3.60
-10	0.1202	0.12384	3.03
-2.5	0.1309	0.13108	0.14
2.5	0.1309	0.13108	0.14
10	0.1202	0.12384	3.03
20	0.0975	0.10101	3.60
25	0.0830	0.08487	2.25
35	0.0438	0.04510	2.97

Цилиндрическая оболочка со свободно опертыми торцами под равномерным внутренним давлением



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки со свободно опертыми торцами от воздействия внутреннего давления.

Имя файла с исходными данными: **4.31.SPR**

Формулировка задачи: Цилиндрическая тонкостенная оболочка, свободно опертая по торцам, находится под воздействием внутреннего равномерного давления p. Определить изгибающие моменты и продольные силы, действующие на срединной поверхности оболочки в меридиональном M_x, N_x и окружном M_φ, N_φ направлениях, а также радиальные перемещения w для поперечного сечения, расположенного в середине пролета.

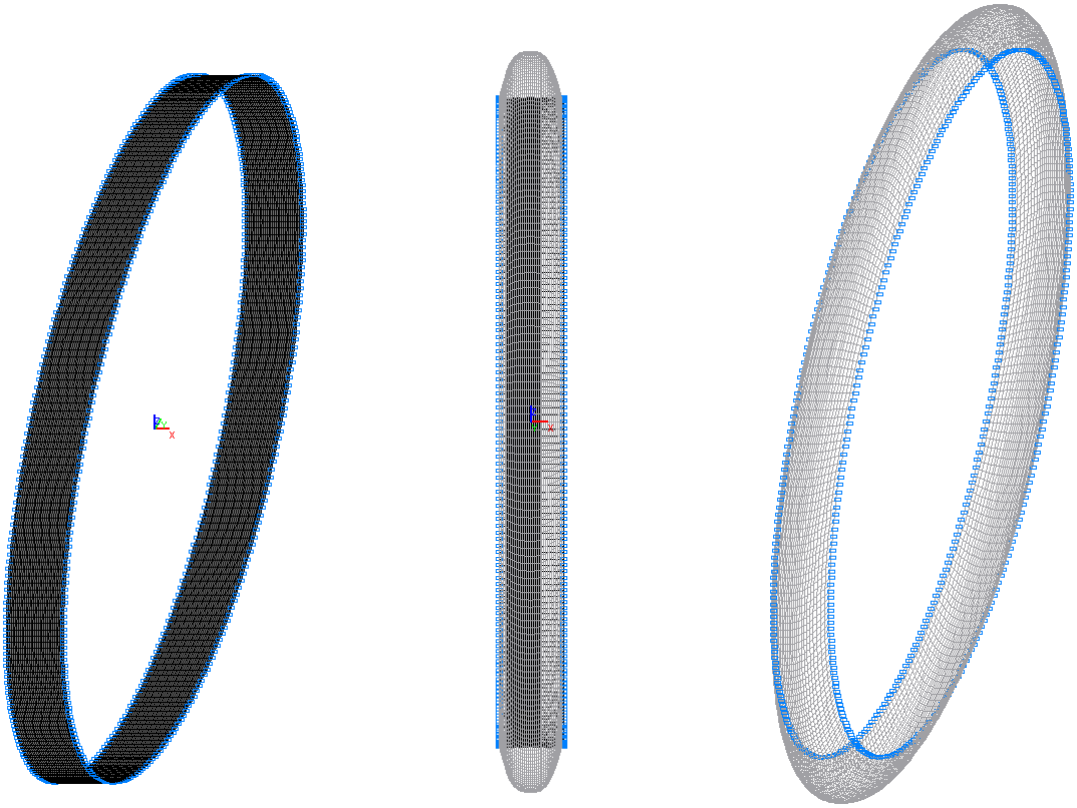
Ссылки: С.П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.

Исходные данные:

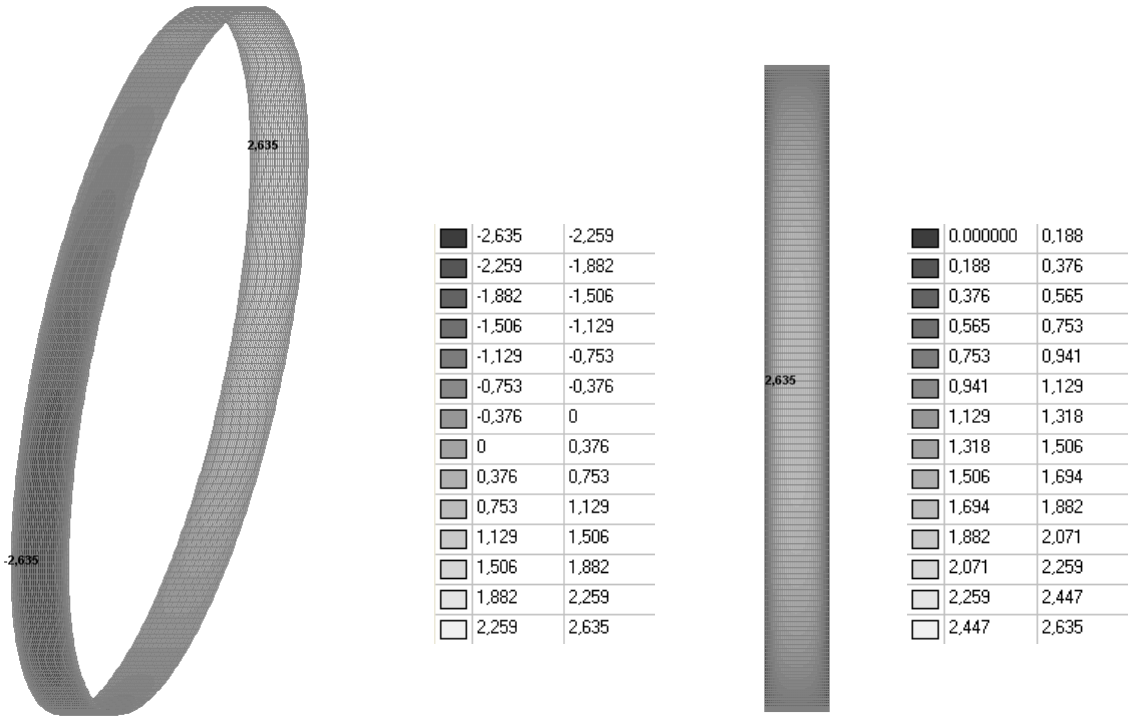
$E = 2.1 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
h = 0.02 м	- толщина оболочки;
a = 10.0 м	- радиус срединной поверхности оболочки;
l = 2.0 м	- длина оболочки;
p = 10.0 кПа	- внутреннее давление.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы оболочки – 9216 четырехузловых элементов типа 44. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.0625м в меридиональном направлении и с шагом 1.25º в окружном направлении. Обеспечение граничных условий на свободно опертых торцах достигается за счет наложения связей по направлениям углового и линейных перемещений в их плоскости. Количество узлов в расчетной схеме – 9504.

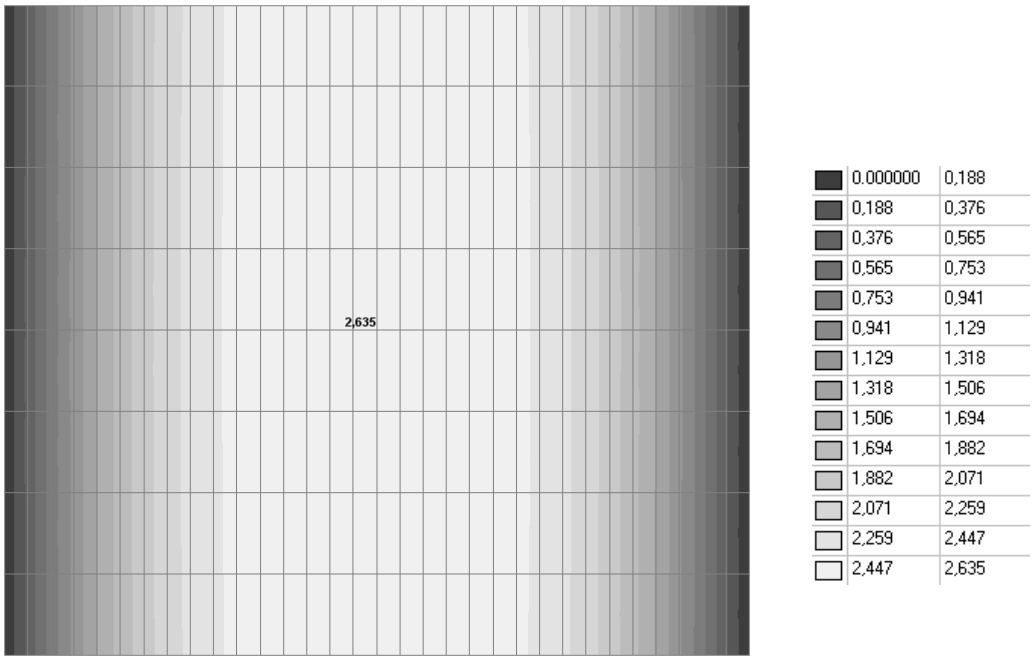
Результаты решения в SCAD



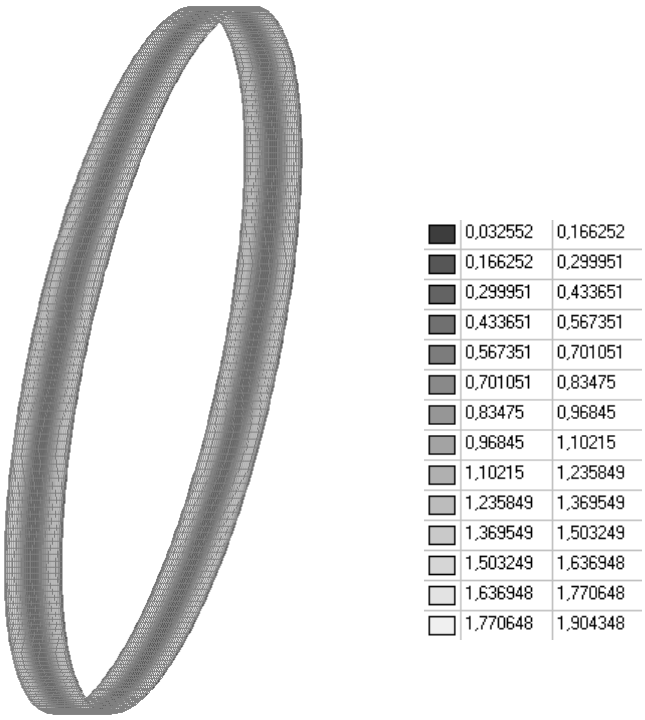
Расчетная и деформированная схемы



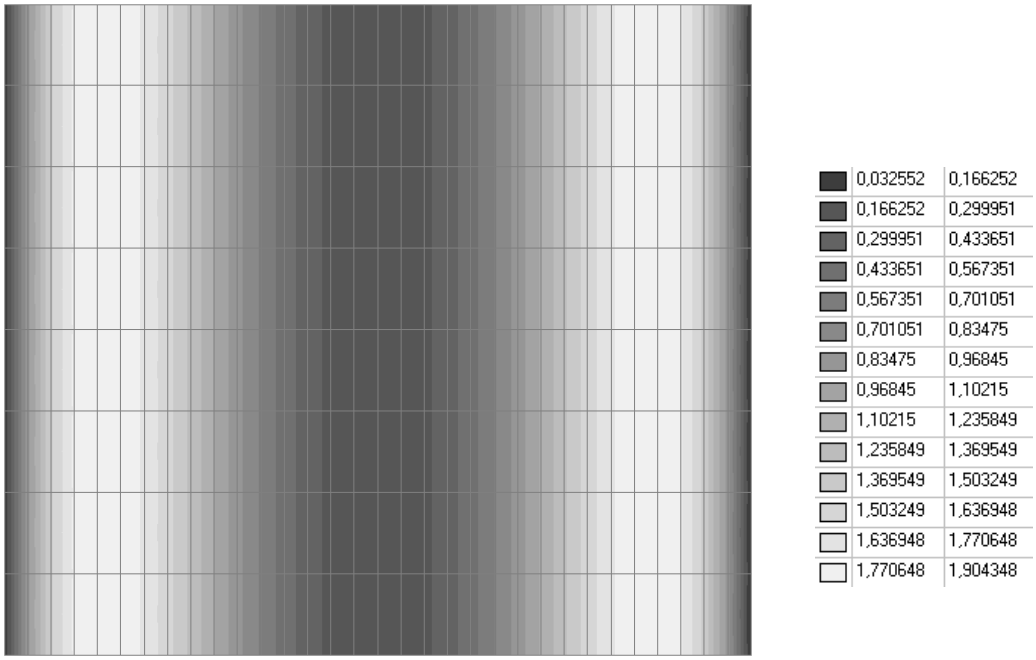
Значения радиальных перемещений w (мм)



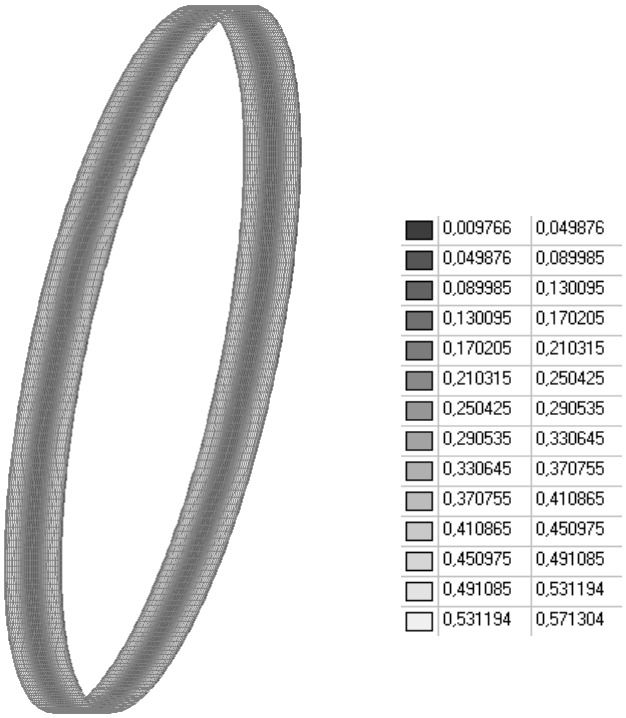
Значения радиальных перемещений w (мм)
для фрагмента схемы из участка в области горизонтального диаметра с центральным углом 5.00°



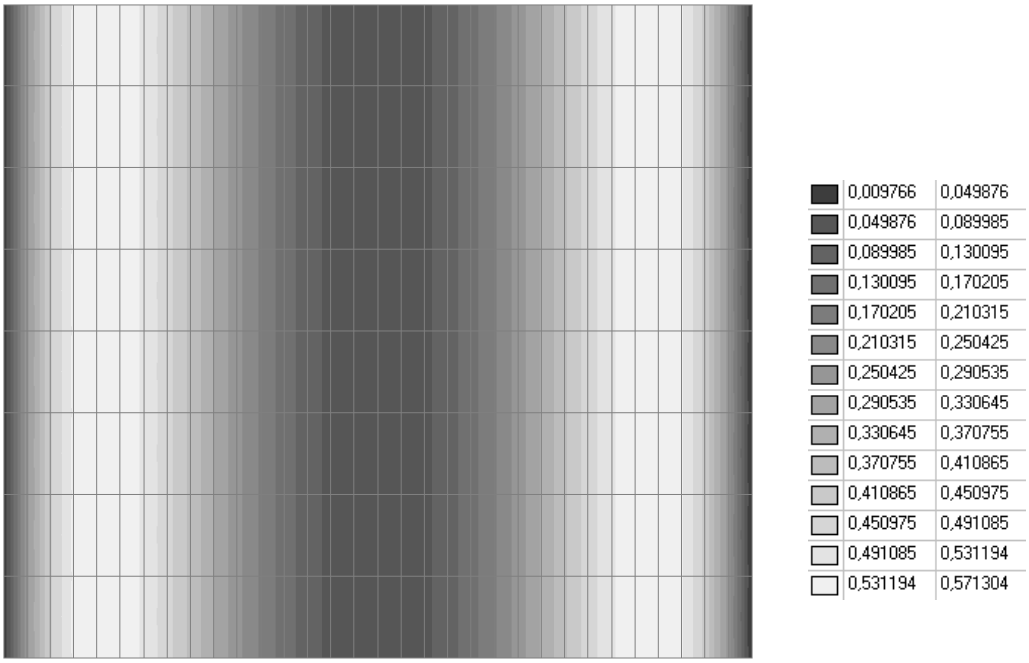
Значения изгибающих моментов, действующих на срединной поверхности оболочки
в меридиональном направлении M_x (кН·м/м)



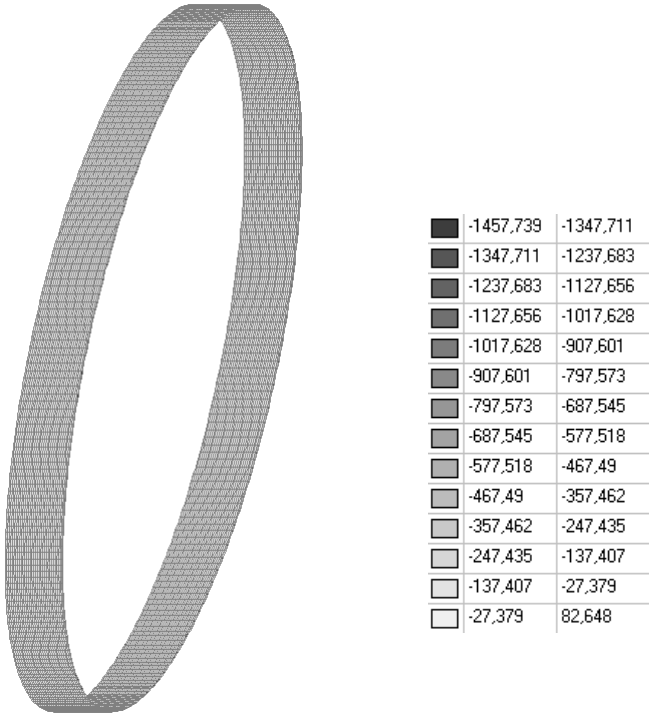
Значения изгибающих моментов, действующих на срединной поверхности оболочки
в меридиональном направлении M_x (кН·м/м)
для фрагмента схемы из участка в области горизонтального диаметра с центральным углом 5.00º



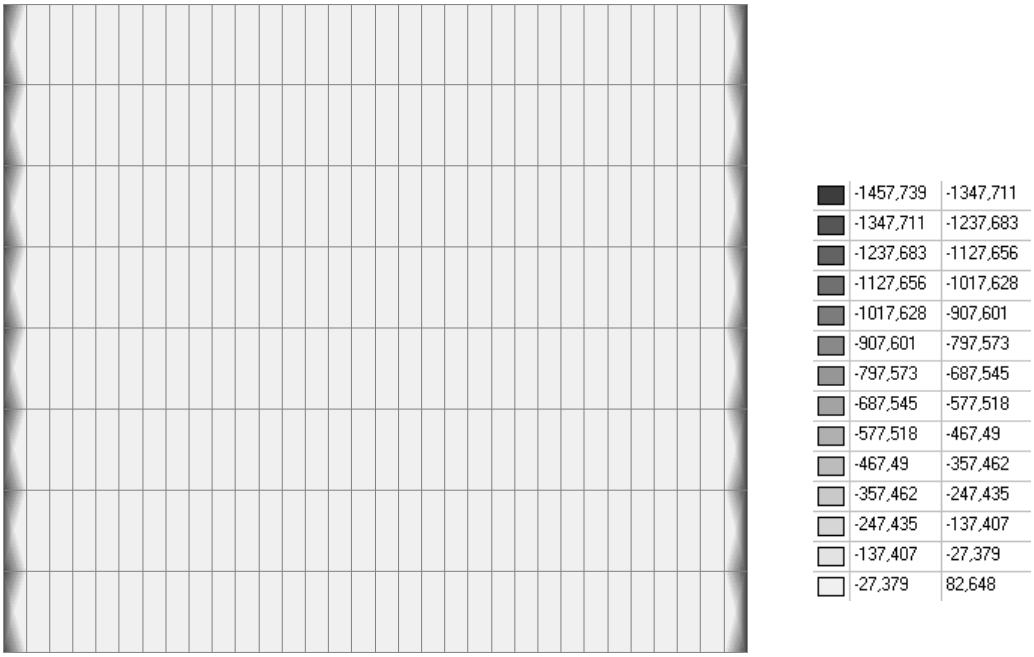
Значения изгибающих моментов, действующих на срединной поверхности оболочки
в окружном направлении M_φ (кН·м/м)



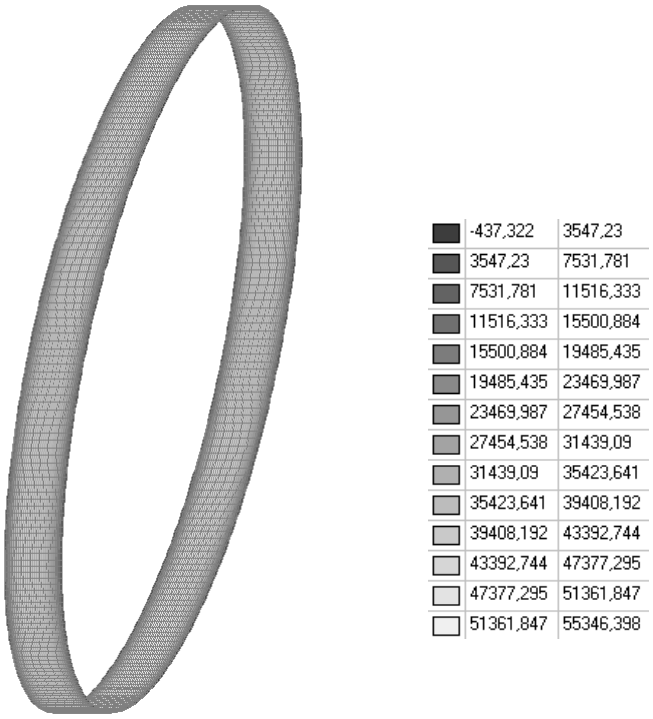
Значения изгибающих моментов, действующих на срединной поверхности оболочки
в окружном направлении M_φ (кН·м/м)
для фрагмента схемы из участка в области горизонтального диаметра с центральным углом 5.00°



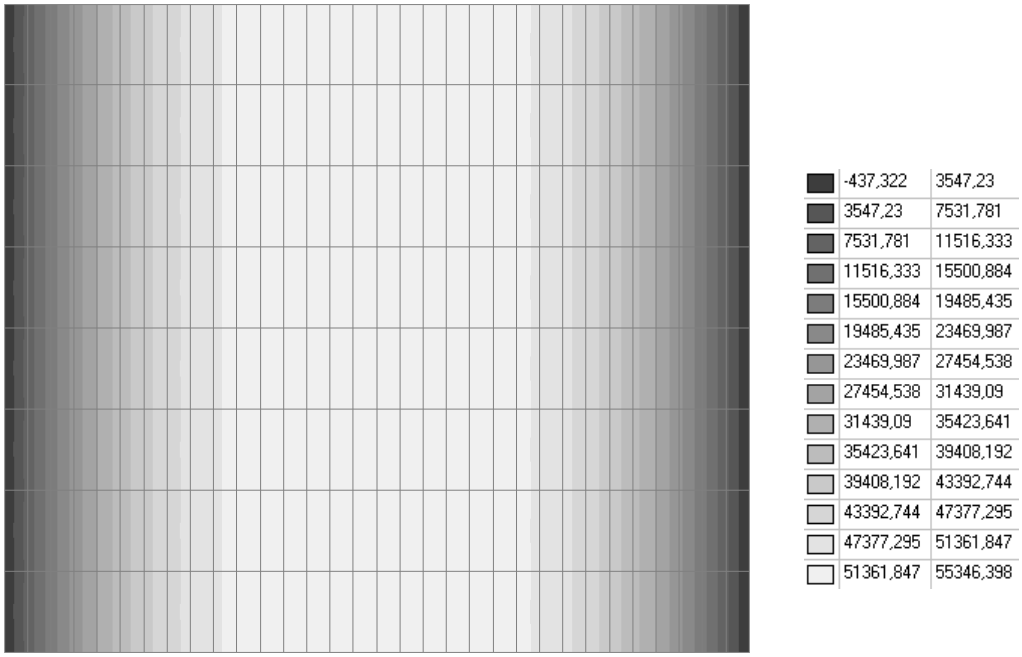
Значения продольных сил, действующих на срединной поверхности оболочки
в меридиональном направлении N_x (кН/м^2)



Значения продольных сил, действующих на срединной поверхности оболочки
в меридиональном направлении N_x (кН/м^2)
для фрагмента схемы из участка в области горизонтального диаметра с центральным углом 5.00º



Значения продольных сил, действующих на срединной поверхности оболочки
в окружном направлении N_φ (кН/м^2)



Значения продольных сил, действующих на срединной поверхности оболочки в окружном направлении N_φ (кН/м^2) для фрагмента схемы из участка в области горизонтального диаметра с центральным углом 5.00°

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
$w(l/2)$, мм	2.640	2.635	0.19
$M_x(l/2)$, кН·м/м	0.178969	0.180453	0.83
$M_\varphi(l/2)$, кН·м/м	0.053691	0.054136	0.83
$N_x(l/2)$, кН/м	0.000	8.238·0.02 = 0.165	–
$N_\varphi(l/2)$, кН/м	1108.655	55346.398·0.02 = 1106.928	0.16

***Замечания*:** При аналитическом решении изгибающие моменты и продольные силы, действующие на срединной поверхности оболочки в меридиональном M_x, N_x и окружном M_φ, N_φ направлениях, а также радиальные перемещения w для поперечного сечения, расположенного в половине пролета, могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948, стр. 377):

$$w=\frac{p\cdot l^4}{64\cdot D\cdot\alpha^4}\cdot\left(1-\frac{2\cdot\cos(\alpha)\cdot ch(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)+ch(2\cdot\alpha)}\right)=\frac{p\cdot a^2}{E\cdot h}\cdot\left(1-\frac{2\cdot\cos(\alpha)\cdot ch(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)+ch(2\cdot\alpha)}\right);$$

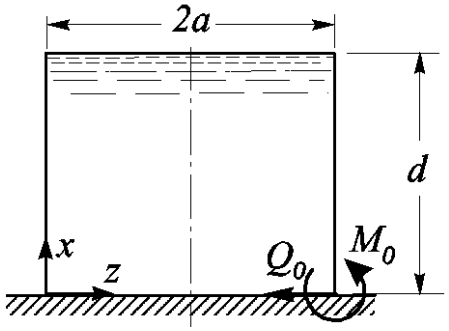
$$M_x=\frac{p\cdot l^2}{4\cdot\alpha^2}\cdot\frac{\sin(\alpha)\cdot sh(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)+ch(2\cdot\alpha)}=\frac{p\cdot a\cdot h}{\sqrt{3\cdot(1-\nu^2)}}\cdot\frac{\sin(\alpha)\cdot sh(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)+ch(2\cdot\alpha)};$$

$$M_\varphi=\nu\cdot M_x=\frac{p\cdot a\cdot h\cdot\nu}{\sqrt{3\cdot(1-\nu^2)}}\cdot\frac{\sin(\alpha)\cdot sh(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)+ch(2\cdot\alpha)};$$

$$N_x=0;\qquad N_\varphi=-\frac{E\cdot h}{a}\cdot w=-p\cdot a\cdot\left(1-\frac{2\cdot\cos(\alpha)\cdot ch(\alpha)}{\cos(2\cdot\alpha)+ch(2\cdot\alpha)}\right),\ \text{где:}$$

$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot(1-\nu^2)},\qquad \beta=\sqrt[4]{\frac{3\cdot(1-\nu^2)}{a^2\cdot h^2}},\ \alpha=\frac{\beta\cdot l}{2}.$$

Цилиндрический вертикальный резервуар со стенкой постоянной толщины с плоским днищем под действием внутреннего давления жидкости



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрического вертикального резервуара со стенкой постоянной толщины, защемленного в плоское днище, от воздействия внутреннего давления жидкости, линейно изменяющегося по высоте.

Имя файла с исходными данными: **4.32.SPR**

Формулировка задачи: Цилиндрический вертикальный резервуар со стенкой постоянной толщины защемлен в плоское днище и находится под воздействием линейно изменяющегося по высоте внутреннего давления жидкости с объемным весом γ. Определить изгибающие моменты и продольные силы, действующие на срединной поверхности стенки резервуара в меридиональном M_x, N_x и окружном M_φ, N_φ направлениях, а также радиальные перемещения w стенки резервуара.

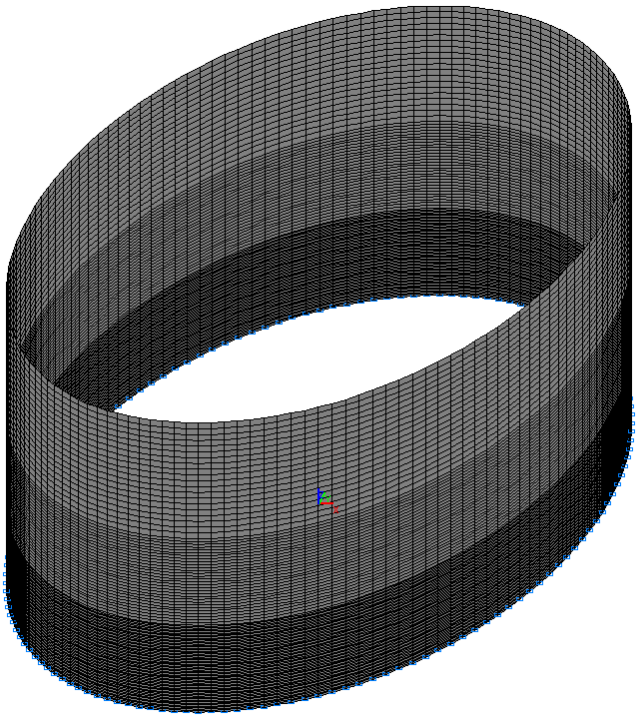
Ссылки: С.П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.

Исходные данные:

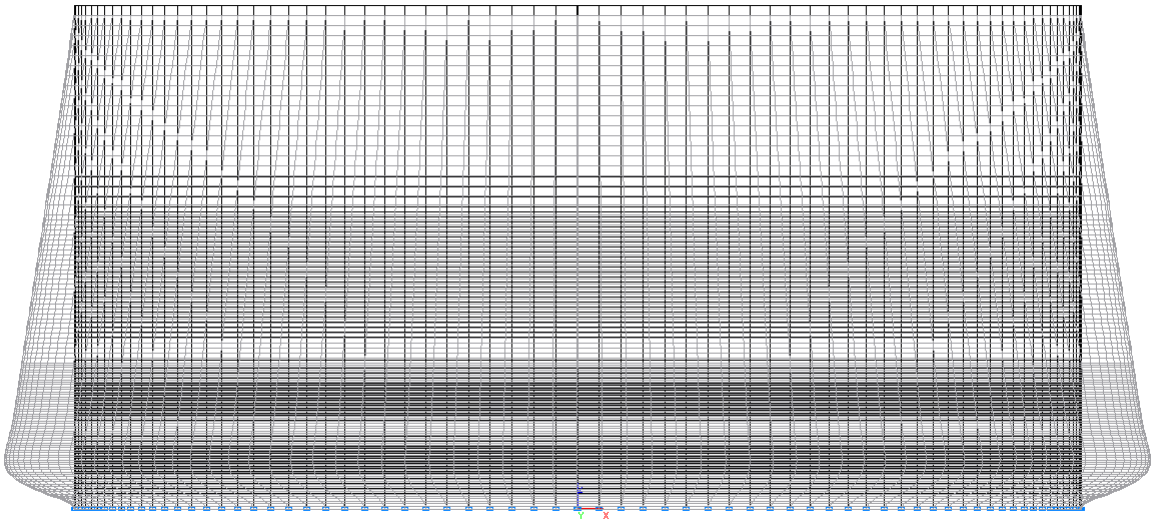
$E = 2.1 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
h = 0.01 м	- толщина стенки резервуара;
a = 5.0 м	- радиус срединной поверхности стенки резервуара;
d = 5.0 м	- высота резервуара;
$\gamma = 10.0$ кН/м^3	- объемный вес жидкости, находящейся в резервуаре.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы оболочки – 15840 четырехузловых элементов типа 44. Сетка конечных элементов разбита в меридиональном направлении с шагом 0.025 м на высоте x от днища с 0.0 м до 1.5 м, с шагом 0.050 м на высоте x от днища с 1.5 м до 3.0 м, с шагом 0.100 м на высоте x от днища с 3.0 м до 5.0 м и в окружном направлении с шагом 2.5º. Обеспечение граничных условий в уровне защемления в днище достигается за счет наложения связей по всем направлениям угловых и линейных перемещений. Количество узлов в расчетной схеме – 15984.

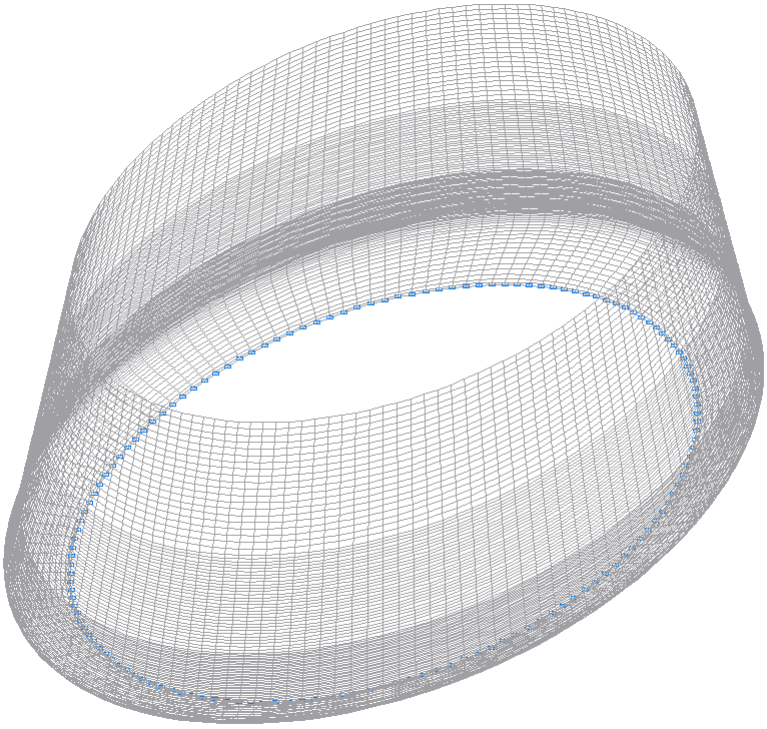
Результаты решения в SCAD



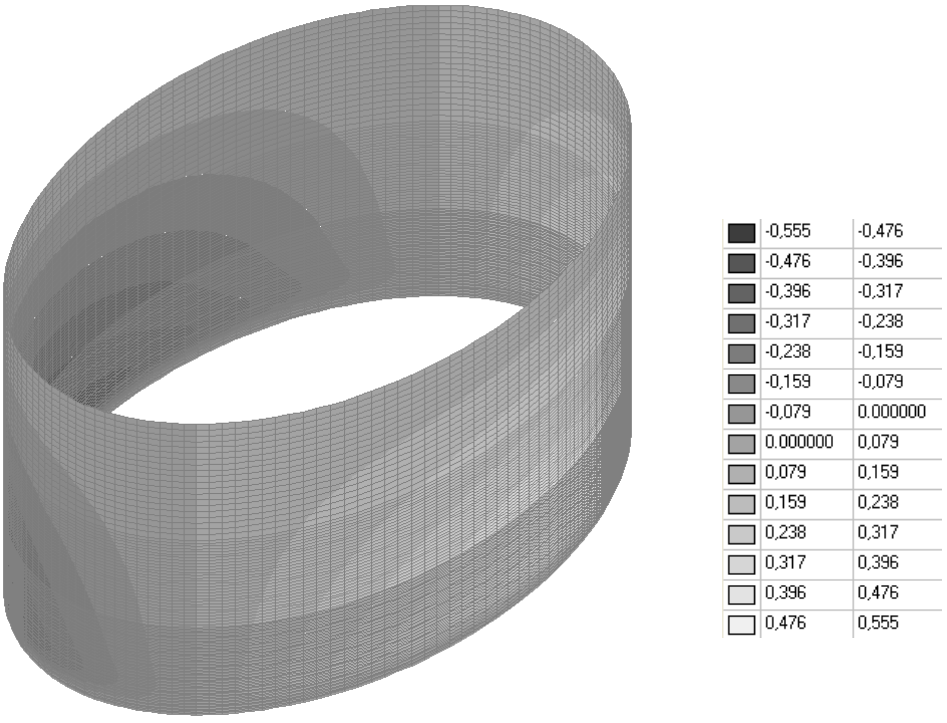
Расчетная схема



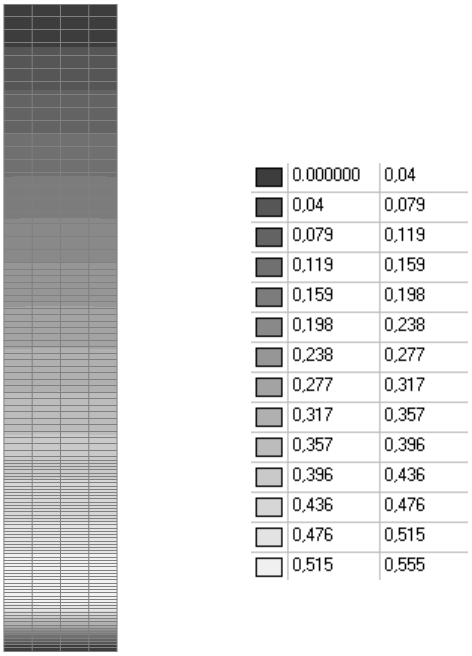
Деформированная схема



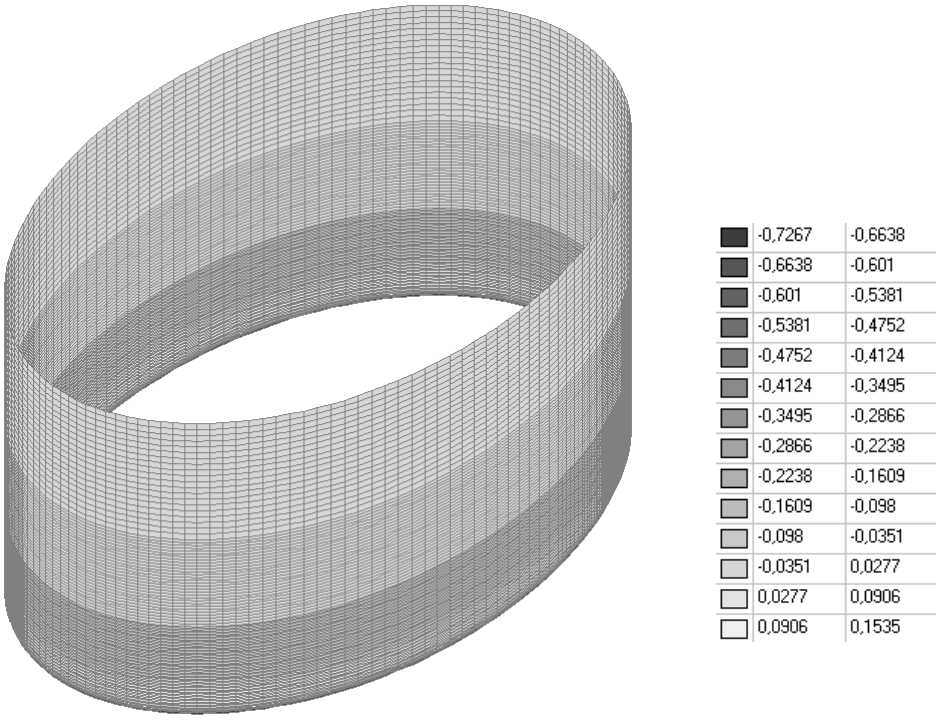
Деформированная схема



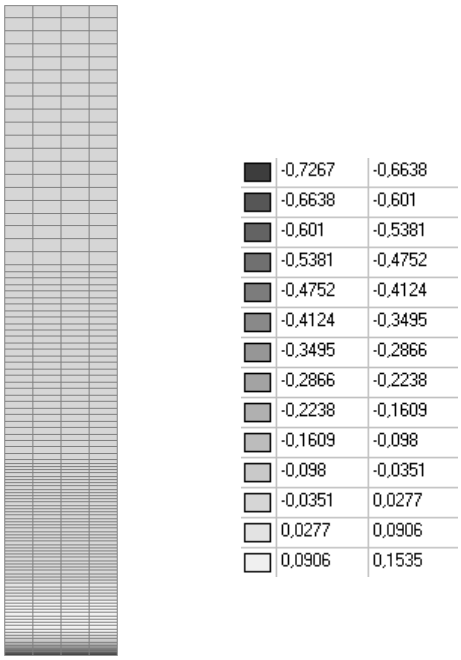
Значения радиальных перемещений w (мм)



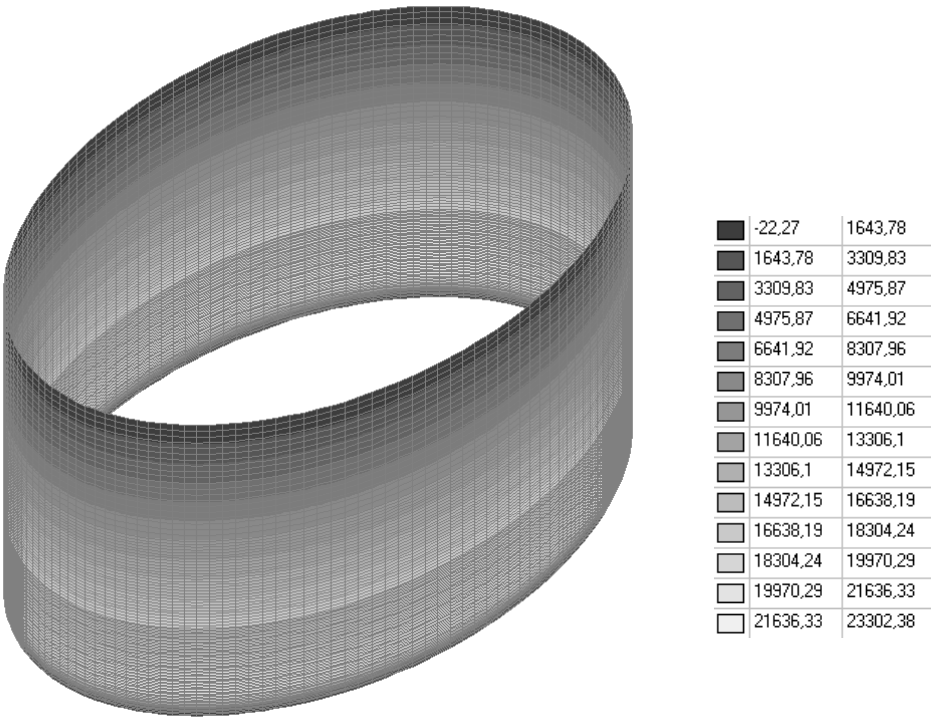
Значения радиальных перемещений w (мм)
для фрагмента схемы из участка с центральным углом 10.0°



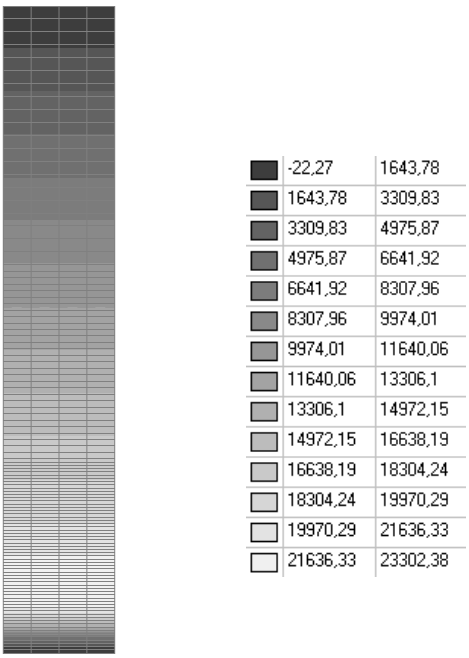
Значения изгибающих моментов, действующих на срединной поверхности стенки резервуара
в меридиональном направлении M_x (кН·м/м)



Значения изгибающих моментов, действующих на срединной поверхности стенки резервуара в меридиональном направлении M_x (кН·м/м) для фрагмента схемы из участка с центральным углом 10.0°



Значения продольных сил, действующих на срединной поверхности стенки резервуара в окружном направлении N_φ (кН/м^2)



Значения продольных сил, действующих на срединной поверхности стенки резервуара в окружном направлении N_φ (кН/м^2) для фрагмента схемы из с центральным углом 10.0°

Сравнение решений:

x, м	*w*, мм			M_x, кН·м/м			N_φ, кН/м		
	Теория	**SCAD**	**Откло-нения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Откло-нения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Откло-нения, %**
0.000	0.000	0.000	–	-0.7302	-0.7267	0.48	0.00	-22.27·0.01 = -0.22	–
0.025	0.011	0.011	0.00	-0.5321	-0.5253	1.28	4.52	432.34·0.01 = 4.32	4.42
0.050	0.039	0.039	0.00	-0.3644	-0.3564	2.20	16.33	1612.89·0.01 = 16.13	1.22
0.075	0.079	0.078	1.27	-0.2256	-0.2179	3.41	33.15	3285.96·0.01 = 32.86	0.87
0.100	0.126	0.125	0.79	-0.1134	-0.1069	5.73	53.08	5261.88·0.01 = 52.62	0.87
0.125	0.178	0.176	1.12	-0.0252	-0.0204	–	74.59	7388.51·0.01 = 73.89	0.94
0.150	0.230	0.227	1.30	0.0419	0.0448	–	96.46	9547.11·0.01 = 95.47	1.03
0.175	0.280	0.277	1.07	0.0907	0.0918	1.21	117.78	11648.07·0.01 = 116.48	1.10
0.200	0.328	0.324	1.22	0.1241	0.1235	0.48	137.88	13626.65·0.01 = 136.27	1.17
0.225	0.372	0.367	1.34	0.1448	0.1428	1.38	156.30	15439.08·0.01 = 154.39	1.22
0.250	0.411	0.406	1.22	0.1550	0.1520	1.94	172.76	17058.39·0.01 = 170.58	1.26
0.275	0.445	0.440	1.12	0.1572	0.1535	2.35	187.11	18471.73·0.01 = 184.72	1.28
0.300	0.475	0.468	1.47	0.1532	0.1491	2.68	199.32	19676.68·0.01 = 196.77	1.28
0.325	0.499	0.492	1.40	0.1447	0.1405	2.90	209.44	20678.89·0.01 = 206.79	1.27
0.350	0.518	0.512	1.16	0.1332	0.1291	3.08	217.60	21489.82·0.01 = 214.90	1.24
0.375	0.533	0.527	1.13	0.1198	0.1160	3.17	223.93	22124.83·0.01 = 221.25	1.20
0.400	0.544	0.538	1.10	0.1054	0.1021	3.13	228.64	22601.65·0.01 = 226.02	1.15
0.425	0.552	0.546	1.09	0.0909	0.0881	3.08	231.90	22939.13·0.01 = 229.39	1.08
0.450	0.557	0.551	1.08	0.0767	0.0745	2.87	233.93	23156.28·0.01 = 231.56	1.01

x, м	*w*, мм			M_x, кН·м/м			N_φ, кН/м		
	Теория	SCAD	Откло-нения, %	Теория	SCAD	Откло-нения, %	Теория	SCAD	Откло-нения, %
0.475	0.559	0.554	0.89	0.0633	0.0617	2.53	234.90	23271.56·0.01 = 232.72	0.93
0.500	0.560	0.555	0.89	0.0510	0.0500	1.96	235.01	23302.38·0.01 = 233.02	0.85
0.550	0.555	0.552	0.54	0.0303	0.0302	0.33	233.29	23172.87·0.01 = 231.73	0.67
0.600	0.547	0.545	0.37	0.0148	0.0155	4.73	229.89	22875.52·0.01 = 228.76	0.49
0.650	0.537	0.535	0.37	0.0043	0.0055	–	225.66	22490.85·0.01 = 224.91	0.33
0.700	0.527	0.526	0.19	-0.0022	-0.0008	–	221.17	22074.31·0.01 = 220.74	0.19
0.750	0.516	0.516	0.00	-0.0055	-0.0042	–	216.79	21660.60·0.01 = 216.61	0.08
0.800	0.506	0.506	0.00	-0.0067	-0.0055	–	212.70	21268.60·0.01 = 212.69	0.00
0.850	0.498	0.498	0.00	-0.0066	-0.0056	–	208.97	20906.05·0.01 = 209.06	0.04
0.900	0.490	0.490	0.00	-0.0057	-0.0049	–	205.59	20573.53·0.01 = 205.74	0.07
0.950	0.482	0.483	0.21	-0.0045	-0.0039	–	202.53	20267.56·0.01 = 202.68	0.07
1.000	0.475	0.476	0.21	-0.0032	-0.0028	–	199.71	19982.79·0.01 = 199.83	0.06

Замечания: При аналитическом решении изгибающие моменты и продольные силы, действующие на срединной поверхности стенки резервуара в меридиональном M_x, N_x и окружном M_φ, N_φ направлениях, а также радиальные перемещения w стенки резервуара могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948, стр. 388):

$$w = \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot d}{E \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{x}{d} - e^{-\beta \cdot x} \cdot \left(cos(\beta \cdot x) + \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot d}\right) \cdot sin(\beta \cdot x)\right)\right);$$

$$M_x = \frac{\gamma \cdot a \cdot d \cdot h}{\sqrt{12 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot \left(sin(\beta \cdot x) - \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot d}\right) \cdot cos(\beta \cdot x)\right);$$

$$M_\varphi = \nu \cdot M_x = \frac{\gamma \cdot a \cdot d \cdot h \cdot \nu}{\sqrt{12 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot \left(sin(\beta \cdot x) - \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot d}\right) \cdot cos(\beta \cdot x)\right);$$

$N_x = 0;$ $\qquad N_\varphi = \frac{E \cdot h}{a} \cdot w = \gamma \cdot a \cdot d \cdot \left(1 - \frac{x}{d} - e^{-\beta \cdot x} \cdot \left(cos(\beta \cdot x) + \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot d}\right) \cdot sin(\beta \cdot x)\right)\right)$, где:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1 - \nu^2)}{a^2 \cdot h^2}}.$$

Цилиндрическая оболочка со свободными торцами при градиенте температуры по толщине (в радиальном направлении)

Цель: Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки со свободными торцами от воздействия градиента температуры по толщине.

Имя файла с исходными данными: **4.33.SPR**

Формулировка задачи: Цилиндрическая тонкостенная оболочка, свободная от закреплений, находится под воздействием градиента температуры по толщине. Температуры стенки цилиндра на ее внутренней t_1 и наружной t_2 поверхностях постоянны, температура по толщине стенки изменяется линейно. Определить компоненты тензора напряжений на наружной и внутренней поверхностях оболочки в меридиональном σ_x^{ext} (σ_x^{int}) и окружном σ_φ^{ext} (σ_φ^{int}) направлениях, а также радиальные перемещения *w*.

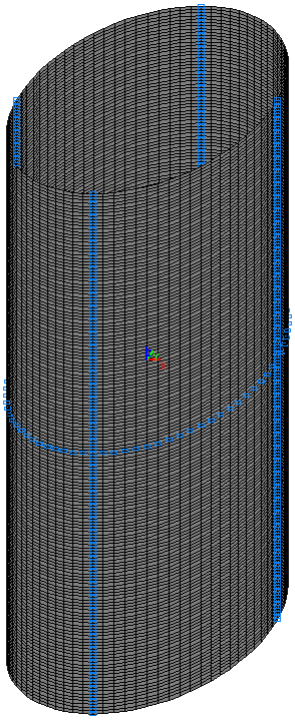
Ссылки: С.П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.

Исходные данные:

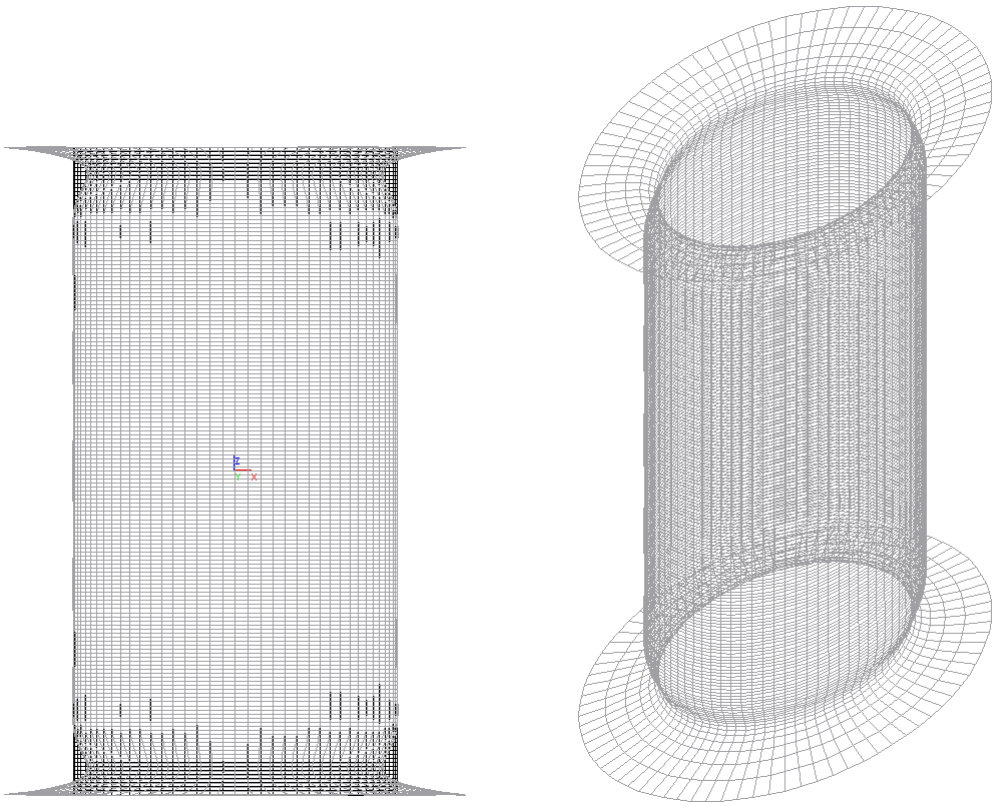
$E = 2.1 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$h = 0.02$ м	- толщина стенки оболочки;
$a = 1.0$ м	- радиус срединной поверхности стенки оболочки;
$l = 4.0$ м	- длина оболочки;
$\alpha = 0.12 \cdot 10^{-4}$ 1/ºC	- коэффициент линейного расширения;
$t_1 = 20$ ºC	- температура на внутренней поверхности стенки цилиндра;
$t_2 = 0$ ºC	- температура на наружной поверхности стенки цилиндра.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы оболочки – 12800 четырехузловых элементов типа 44. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.025 м в меридиональном направлении и с шагом 4.5º в окружном направлении. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связей по условиям ее симметрии. Количество узлов в расчетной схеме – 12880.

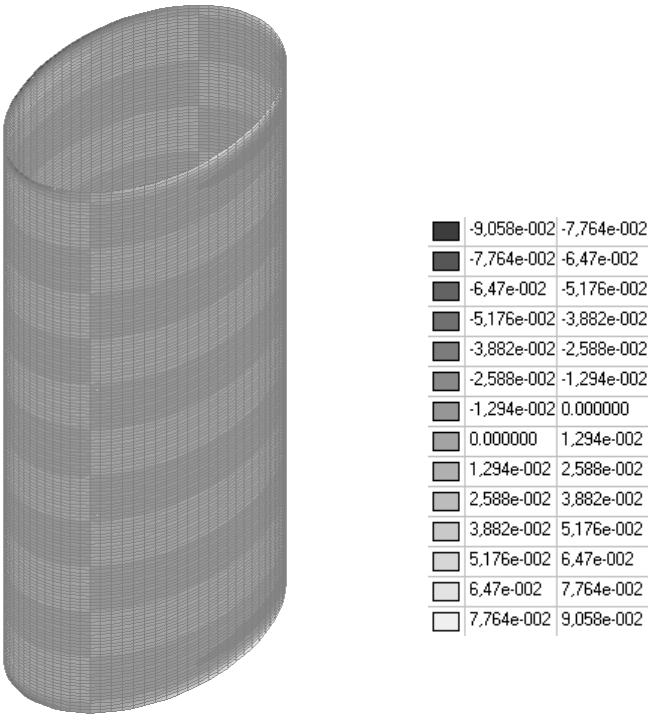
Результаты решения в SCAD



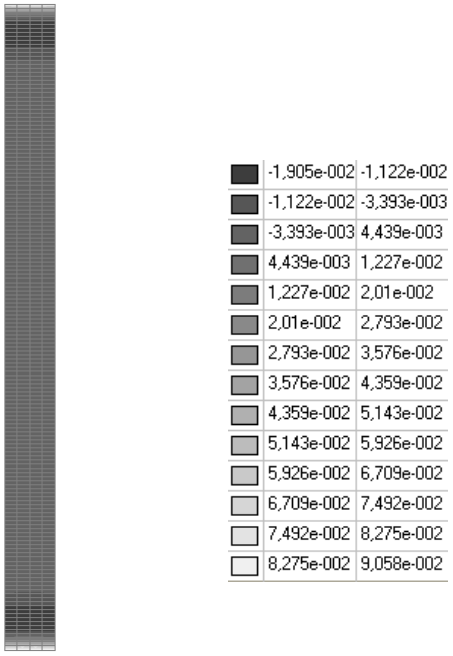
Расчетная схема



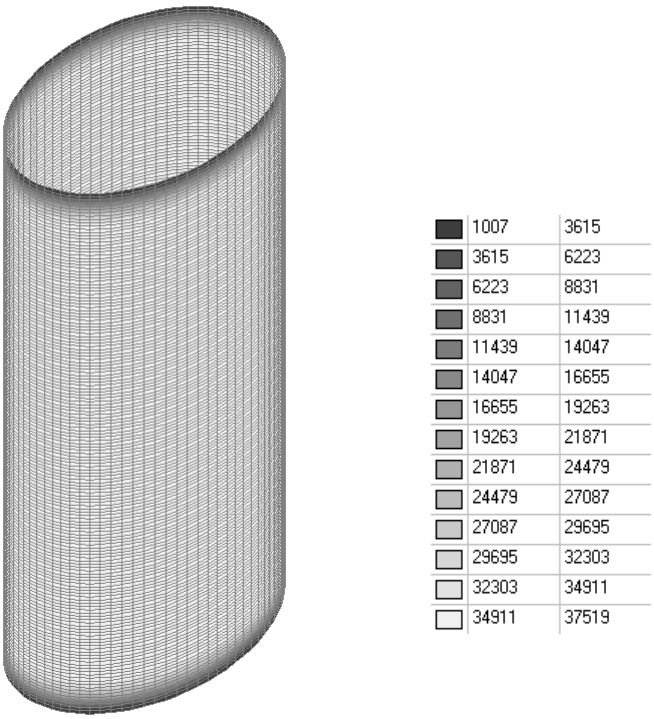
Деформированная схема



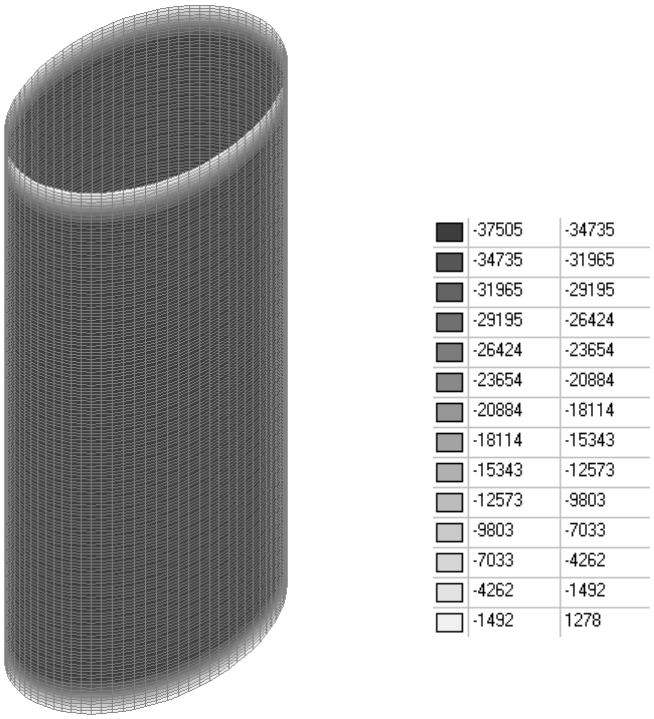
Значения радиальных перемещений w (мм)



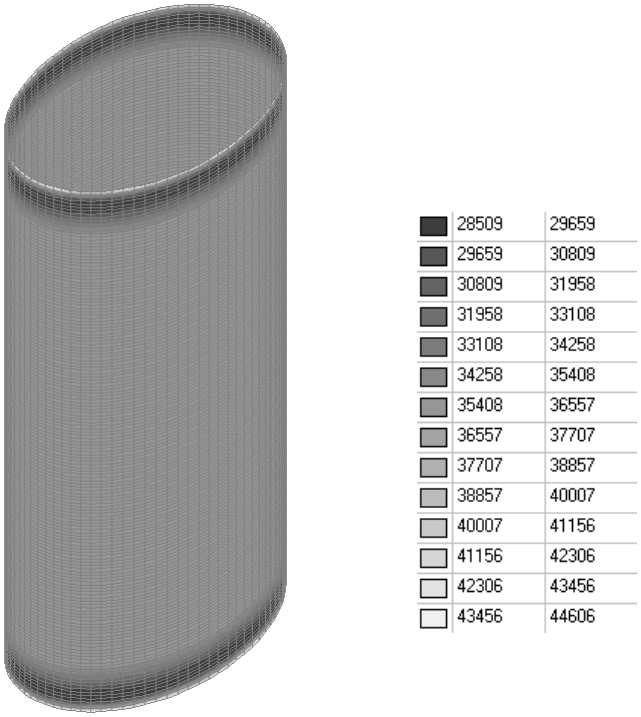
Значения радиальных перемещений w (мм)
для фрагмента схемы из участка с центральным углом 18.0º



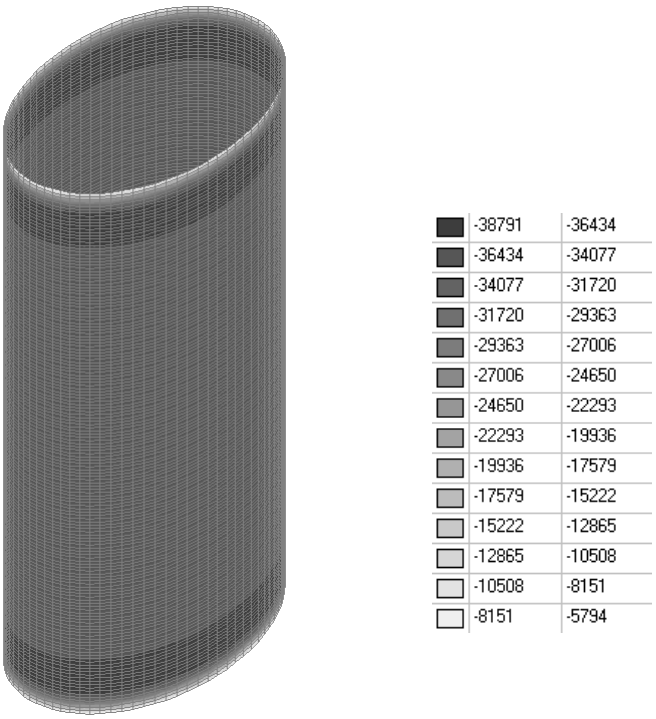
Значения напряжений на наружной поверхности оболочки в меридиональном направлении σ_x^{ext} (кН/м2)



Значения напряжений на внутренней поверхности оболочки в меридиональном направлении σ_x^{int} (кН/м2)



Значения напряжений на наружной поверхности оболочки в окружном направлении σ_{φ}^{ext} (кН/м2)



Значения напряжений на внутренней поверхности оболочки в окружном направлении σ_{φ}^{int} (кН/м2)

Сравнение решений:

x, м	***w*, мм**		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.200	$-18.61 \cdot 10^{-3}$	$-18.01 \cdot 10^{-3}$	3.22
0.250	$-13.71 \cdot 10^{-3}$	$-13.20 \cdot 10^{-3}$	3.72

x, м	*w*, мм		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.300	$-8.14\cdot10^{-3}$	$-7.81\cdot10^{-3}$	4.05
0.350	$-3.76\cdot10^{-3}$	$-3.60\cdot10^{-3}$	4.26
0.400	$-1.01\cdot10^{-3}$	$-0.97\cdot10^{-3}$	3.96
0.450	$0.36\cdot10^{-3}$	$0.34\cdot10^{-3}$	5.56
0.500	$0.82\cdot10^{-3}$	$0.78\cdot10^{-3}$	4.88
0.550	$0.79\cdot10^{-3}$	$0.75\cdot10^{-3}$	5.06
0.600	$0.57\cdot10^{-3}$	$0.54\cdot10^{-3}$	5.26
0.650	$0.33\cdot10^{-3}$	$0.32\cdot10^{-3}$	3.03
0.700	$0.15\cdot10^{-3}$	$0.14\cdot10^{-3}$	6.67
0.750	$0.04\cdot10^{-3}$	$0.04\cdot10^{-3}$	0.00
0.800	$-0.02\cdot10^{-3}$	$-0.02\cdot10^{-3}$	–
0.850	$-0.04\cdot10^{-3}$	$-0.03\cdot10^{-3}$	–
0.900	$-0.03\cdot10^{-3}$	$-0.03\cdot10^{-3}$	–
0.950	$-0.02\cdot10^{-3}$	$-0.02\cdot10^{-3}$	–
1.000	$-0.01\cdot10^{-3}$	$-0.01\cdot10^{-3}$	–
1.100	0	0	–
1.200	0	0	–
1.300	0	0	–
1.400	0	0	–
1.500	0	0	–
1.600	0	0	–
1.700	0	0	–
1.800	0	0	–
1.900	0	0	–
2.000	0	0	–

x, м	σ_x^{ext} (кН/м2)			σ_x^{int} (кН/м2)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.200	31761	32052	0.92	-31761	-32090	1.04
0.250	35560	35681	0.34	-35560	-35685	0.35
0.300	37206	37221	0.04	-37206	-37210	0.01
0.350	37553	37519	0.09	-37553	-37505	0.13
0.400	37286	37241	0.12	-37286	-37229	0.15
0.450	36841	36804	0.10	-36841	-36796	0.12
0.500	36441	36418	0.06	-36441	-36414	0.07
0.550	36164	36154	0.03	-36164	-36152	0.03
0.600	36010	36007	0.01	-36010	-36007	0.01
0.650	35945	35947	0.01	-35945	-35947	0.01
0.700	35933	35936	0.01	-35933	-35937	0.01
0.750	35946	35949	0.01	-35946	-35949	0.01
0.800	35965	35967	0.01	-35965	-35968	0.01
0.850	35982	35983	0.00	-35982	-35983	0.00
0.900	35994	35994	0.00	-35994	-35994	0.00
0.950	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.000	36002	36002	0.00	-36002	-36002	0.00
1.100	36002	36002	0.00	-36002	-36002	0.00
1.200	36001	36001	0.00	-36001	-36001	0.00
1.300	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.400	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.500	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.600	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.700	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.800	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.900	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
2.000	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
0.000	45027	44606	0.93	-5373	-5794	7.84
0.025	37510	37025	1.29	-13846	-14584	5.33
0.050	32614	32413	0.62	-21047	-21639	2.81
0.075	29785	29786	0.00	-26849	-27290	1.64
0.100	28500	28633	0.47	-31284	-31586	0.97
0.150	28809	29047	0.83	-36646	-36735	0.24
0.200	30819	31034	0.70	-38637	-38608	0.08
0.250	32988	33133	0.44	-38748	-38677	0.18
0.300	34652	34726	0.21	-38072	-38003	0.18
0.350	35676	35700	0.07	-37256	-37208	0.13
0.400	36173	36169	0.01	-36598	-36572	0.07
0.450	36328	36313	0.04	-36176	-36167	0.02
0.500	36305	36289	0.04	-35960	-35961	0.00

x, м	σ_x^{ext} (кН/м2)			σ_x^{int} (кН/м2)		
	Теория	SCAD	Отклонения, %	Теория	SCAD	Отклонения, %
0.550	36215	36203	0.03	-35883	-35888	0.01
0.600	36123	36116	0.02	-35883	-35888	0.01
0.650	36053	36050	0.01	-35914	-35918	0.01
0.700	36011	36011	0.00	-35949	-35951	0.01
0.750	35991	35992	0.00	-35976	-35977	0.00
0.800	35986	35987	0.00	-35993	-35994	0.00
0.850	35987	35988	0.00	-36002	-36002	0.00
0.900	35991	35992	0.00	-36005	-36005	0.00
0.950	35995	35995	0.00	-36005	-36005	0.00
1.000	35998	35998	0.00	-36004	-36003	0.00
1.100	36000	36000	0.00	-36001	-36001	0.00
1.200	36001	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.300	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.400	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.500	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.600	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.700	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.800	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
1.900	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00
2.000	36000	36000	0.00	-36000	-36000	0.00

x – ордината вдоль оси цилиндрической оболочки (меридиональное направление), отсчитываемая от свободного торца.

***Замечания*:** При аналитическом решении напряжения на наружной и внутренней поверхностях оболочки в меридиональном σ_x^{ext} (σ_x^{int}) и окружном σ_φ^{ext} (σ_φ^{int}) направлениях, а также радиальные перемещения *w* могут быть вычислены по следующим формулам (С.П. Тимошенко, Пластинки и оболочки. — Москва: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948, стр. 399), которые дают хорошее приближение "в точках, находящихся на значительном расстоянии от концов оболочки":

$$w = 0.5 \cdot \alpha \cdot (t_1 - t_2) \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1+\nu}{3 \cdot (1-\nu)}} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (sin(\beta \cdot x) - cos(\beta \cdot x));$$

$$\sigma_x^{ext} = \frac{E \cdot \alpha \cdot (t_1 - t_2)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \left[-1 + e^{-\beta \cdot x} \cdot (cos(\beta \cdot x) + sin(\beta \cdot x)) \right];$$

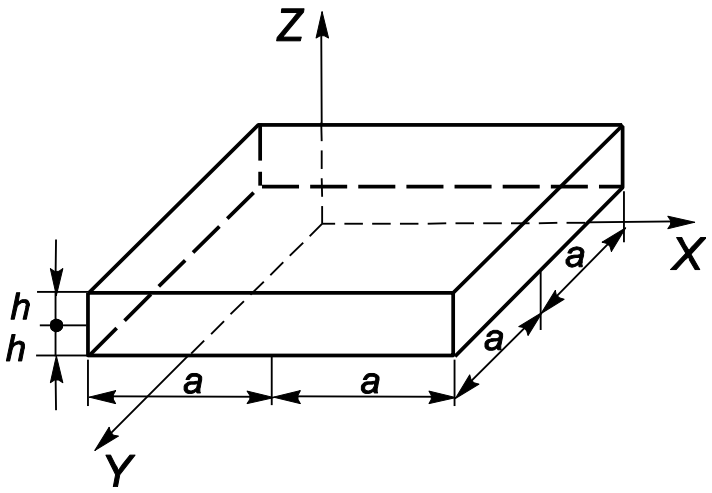
$$\sigma_x^{int} = \frac{E \cdot \alpha \cdot (t_1 - t_2)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \left[1 - e^{-\beta \cdot x} \cdot (cos(\beta \cdot x) + sin(\beta \cdot x)) \right];$$

$$\sigma_\varphi^{ext} = \frac{E \cdot \alpha \cdot (t_1 - t_2)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \left[-1 + \nu \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (cos(\beta \cdot x) + sin(\beta \cdot x)) - \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (sin(\beta \cdot x) - cos(\beta \cdot x)) \right];$$

$$\sigma_\varphi^{int} = \frac{E \cdot \alpha \cdot (t_1 - t_2)}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \left[1 - \nu \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (cos(\beta \cdot x) + sin(\beta \cdot x)) - \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (sin(\beta \cdot x) - cos(\beta \cdot x)) \right], \text{ где:}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1-\nu^2)}{a^2 \cdot h^2}}.$$

Толстая квадратная в плане плита, шарнирно опертая по боковым граням, под действием поперечной нагрузки, распределенной по верхней грани по закону косинуса



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния толстой квадратной в плане плиты, шарнирно опертой по боковым граням, от действия поперечной нагрузки, распределенной по верхней грани по закону косинуса в соответствии с объемной задачей теории упругости.

Использованная версия SCAD: **21.1**
Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
4.36a_gamma_3.SPR	Расчетная схема для толщины плиты 4 м (γ = a / h = 3)

Формулировка задачи: Толстая квадратная в плане плита шарнирно оперта по боковым граням и находится под воздействием поперечной нагрузки, распределенной по верхней грани по закону косинуса $q\cdot\cos((\pi\cdot x)/(2\cdot a))\cdot\cos((\pi\cdot y)/(2\cdot a))$.
Определить:

- распределение горизонтальных нормальных напряжений σ_x по толщине плиты z в ее центре (x = 0, y = 0);
- распределение горизонтальных касательных напряжений τ_{xy} по толщине плиты z на ее боковом ребре (x = a, y = a);
- значение вертикальных нормальных напряжений σ_z в центре плиты (x = 0, y = 0, z = 0);
- значение вертикальных касательных напряжений τ_{xz} на середине боковой грани плиты (x = a, y = 0, z = 0);
- распределение вертикальных перемещений z по толщине плиты z в ее центре (x = 0, y = 0);
- распределение горизонтальных перемещений x по толщине плиты на середине ее боковой грани (x = a, y = 0, z = 0).

Ссылки: М.К. Усаров, *Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке*, Magazine of Civil Engineering, 2011, № 4, стр. 40-47.

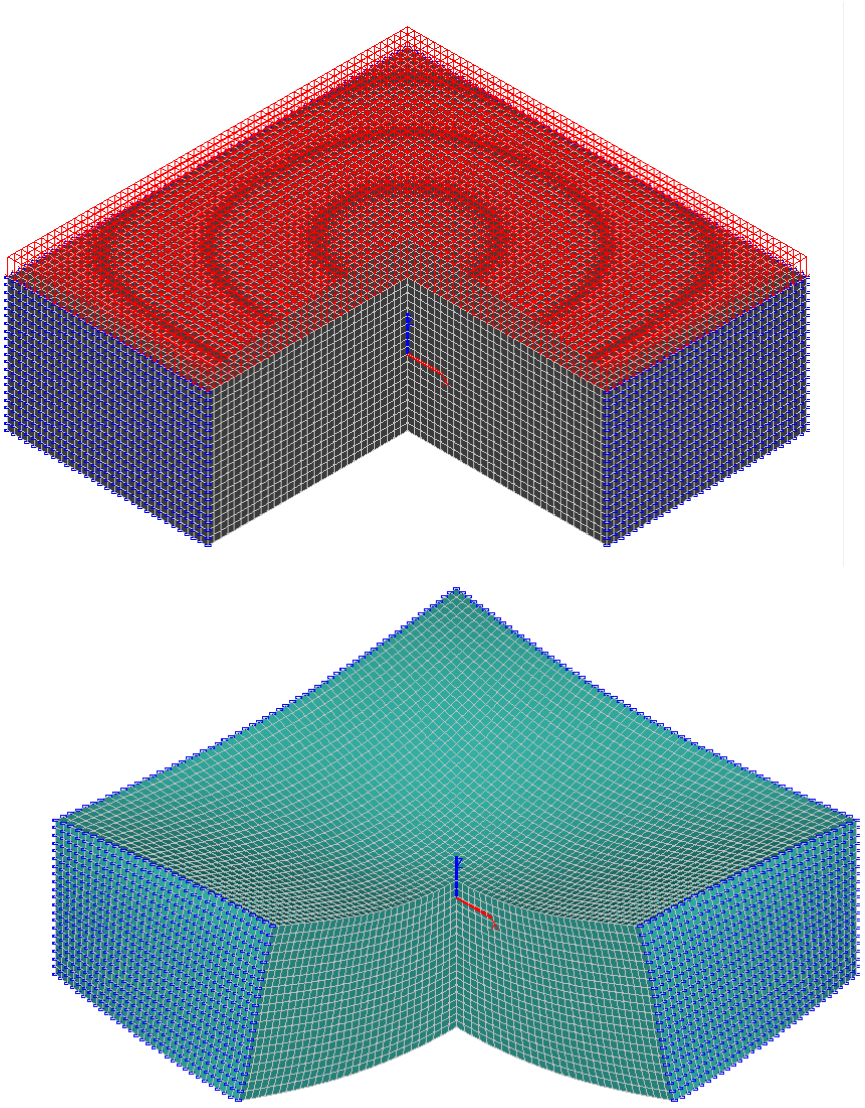
Исходные данные:

$E = 1.0\cdot10^5$ тс/м^2 - модуль упругости материала плиты;
$\upsilon = 0.3$ - коэффициент Пуассона материала плиты;
$2\cdot a = 30.0$ м - длина стороны плиты;
$2\cdot h = 10.0$ м - толщина плиты;
$q = 10.0$ тс/м^2 - амплитудное значение поперечной нагрузки, распределенной по верхней грани плиты по закону косинуса.

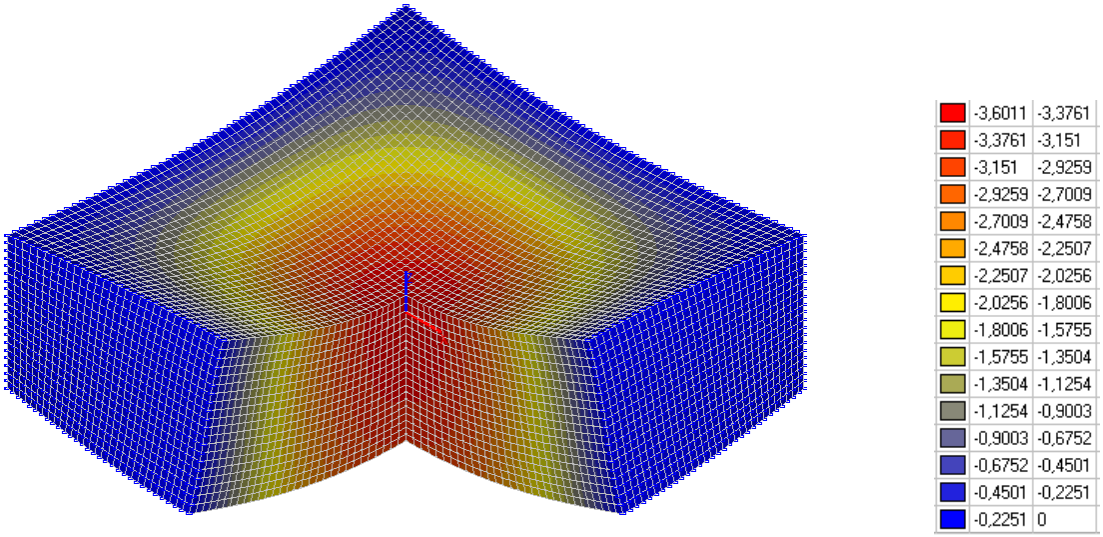
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы плиты – 72000 объемных восьмиузловых изопараметрических элементов типа 36. Сетка конечных элементов плиты

в плане и по толщине имеет шаг 0.5 м. Направление выдачи внутренних усилий сориентировано по осям общей системы координат. По узлам боковых граней плиты x = ± a установлены связи по линейным степеням свободы Y, Z; По узлам боковых граней плиты y = ± a установлены связи по линейным степеням свободы X, Z. Количество узлов в расчетной схеме – 78141.

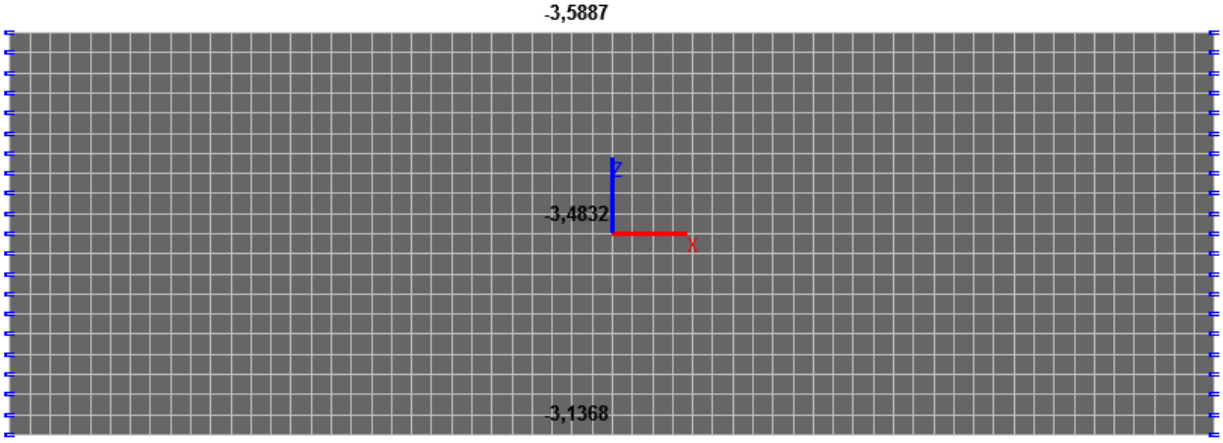
Результаты решения в SCAD



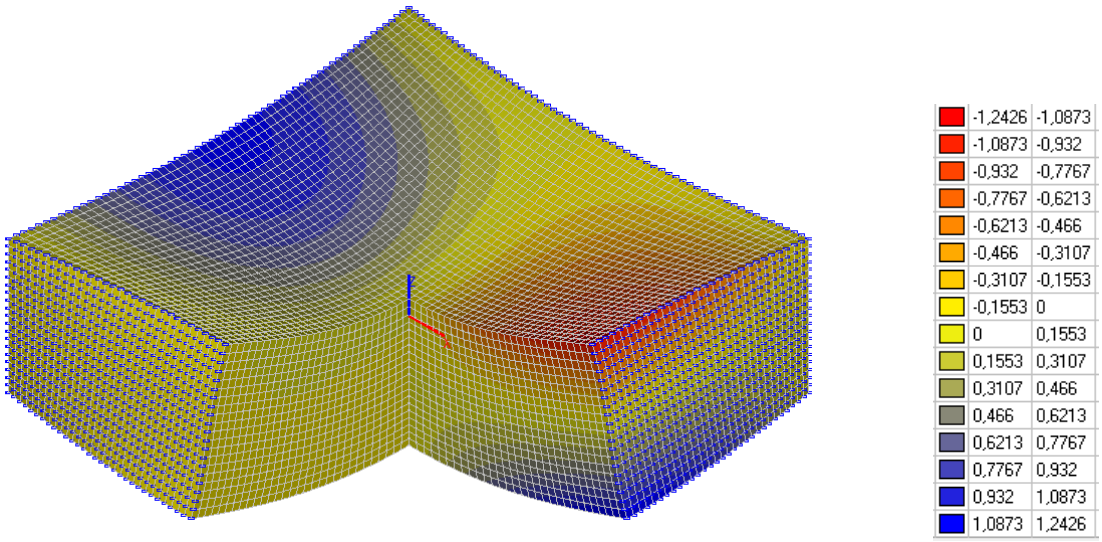
Расчетная и деформированная схемы



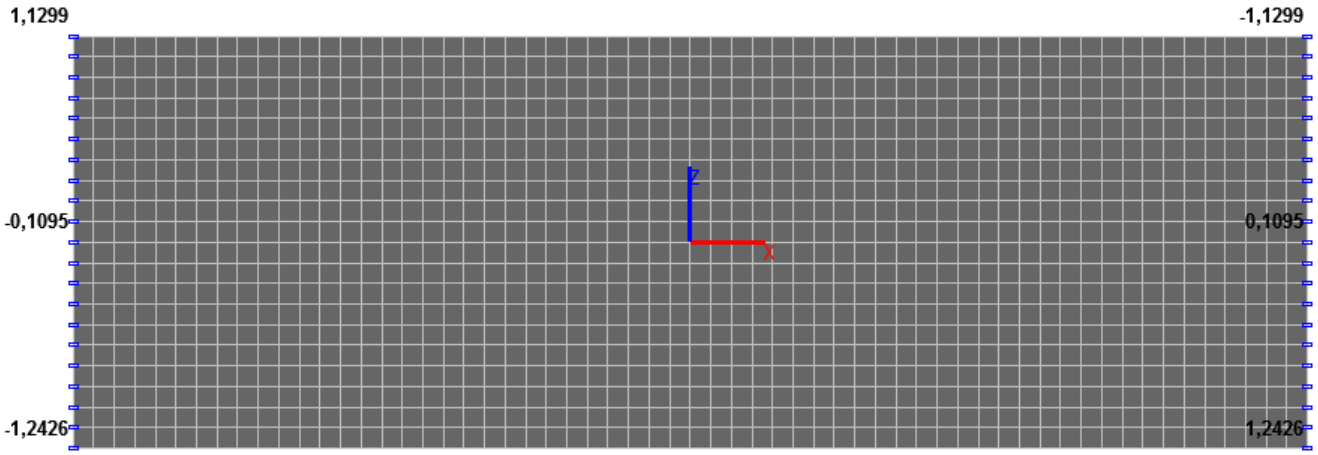
Значения вертикальных перемещений z (мм)



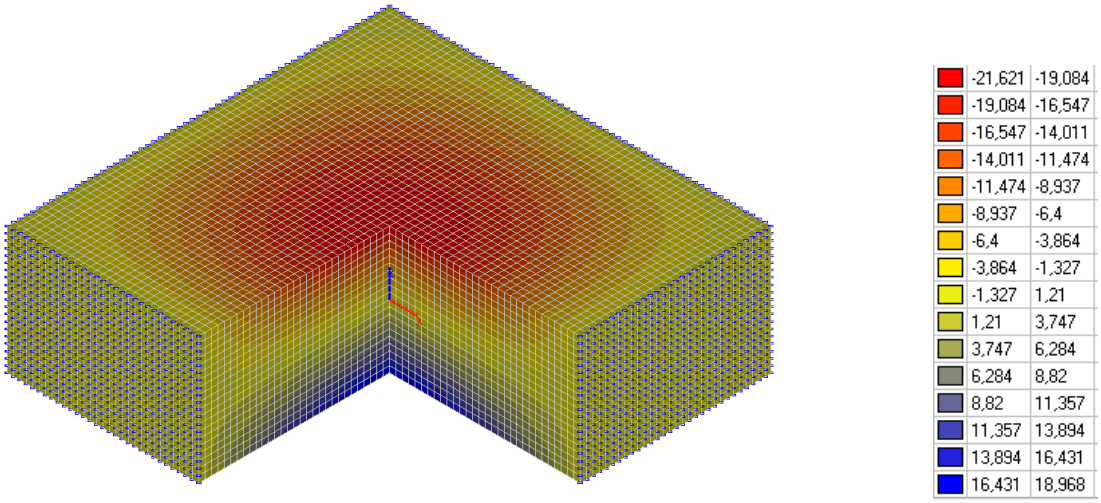
Значения вертикальных перемещений z (мм) в центре плиты (x = 0, y = 0)



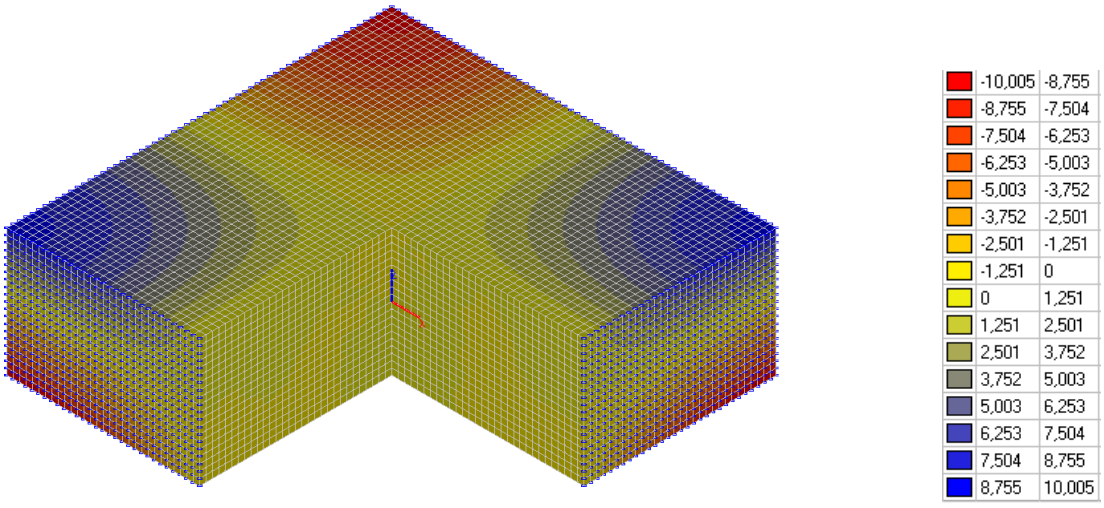
Значения горизонтальных перемещений x (мм)



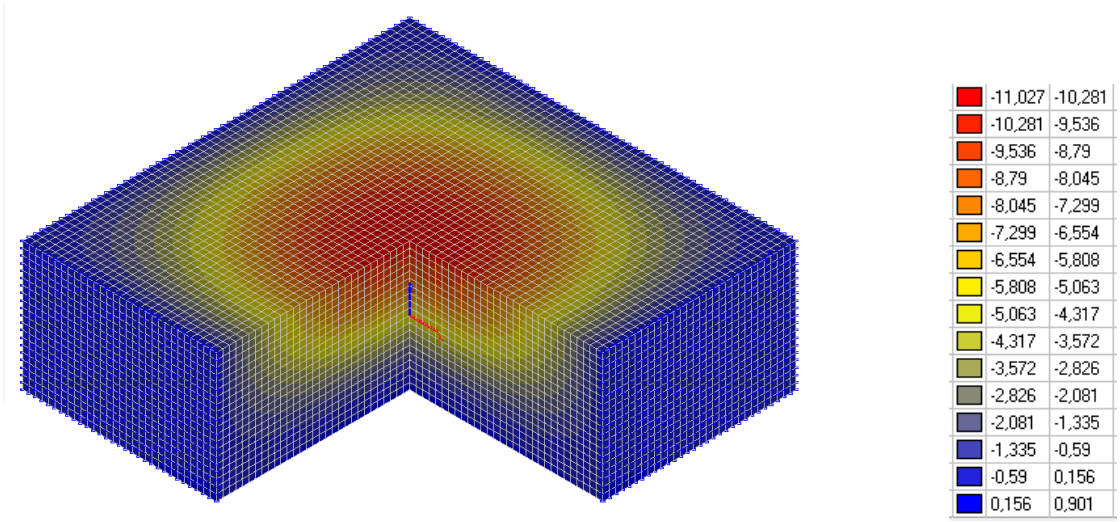
Значения горизонтальных перемещений x (мм) на середине боковых граней плиты ($x = \pm a, y = 0, z = 0$)



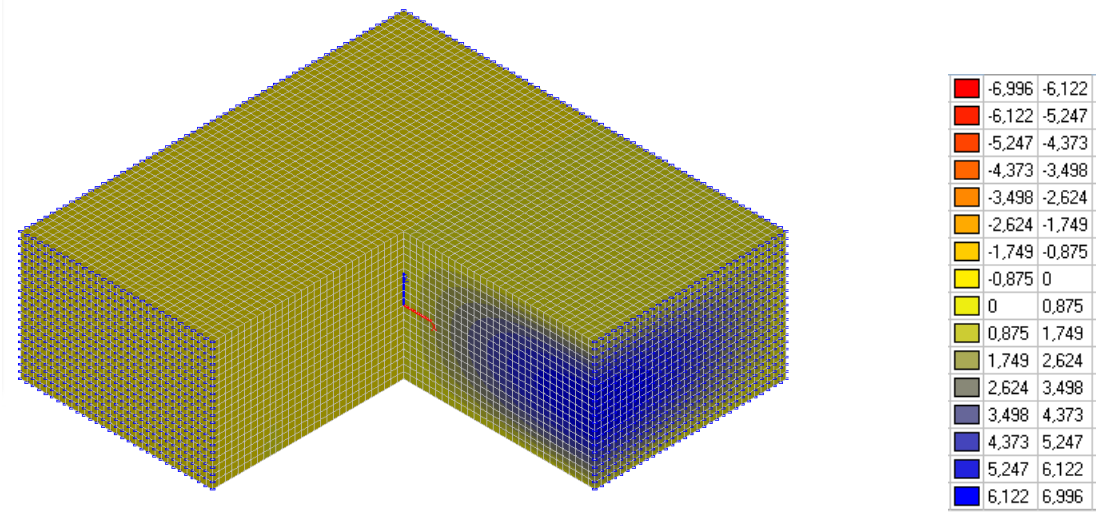
Значения горизонтальных нормальных напряжений σ_x ($тс/м^2$)



Значения горизонтальных касательных напряжений τ_{xy} ($тс/м^2$)



Значения вертикальных нормальных напряжений σ_z ($тс/м^2$)



Значения вертикальных касательных напряжений τ_{xz} ($тс/м^2$)

Сравнение решений:

z / h	σ_x , $тс/м^2$ (x = y = 0)			τ_{xy} , $тс/м^2$ (x = y = a)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1.0	-21.240	-21.591	1.65	9.129	9.098	0.34
0.0	-0.481	-0.479	0.42	-0.882	-0.881	0.11
-1.0	18.639	18.942	1.63	-10.036	-10.005	0.31

z / h	σ_z , $тс/м^2$ (x = y = 0)			τ_{xz} , $тс/м^2$ (x = a, y = 0)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
0.0	-4.944	-4.939	0.10	7.023	6.996	0.38

z / h	z, мм (x = y = 0)			x, мм (x = a, y = 0)		
	Теория	**SCAD**	**Отклонения, %**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1.0	-3.5963	-3.5887	0.21	-1.1333	-1.1299	0.30
0.0	-3.4906	-3.4832	0.21	0.1095	0.1095	0.00
-1.0	-3.1440	-3.1368	0.23	1.2459	1.2426	0.26

***Замечания*:** При аналитическом решении горизонтальные нормальные напряжения σ_x по толщине плиты z в ее центре (x = 0, y = 0), горизонтальные касательные напряжения τ_{xy} по толщине плиты z на ее боковом ребре (x = a, y = a), вертикальные нормальные напряжения σ_z в центре плиты (x = 0, y = 0, z = 0), вертикальные касательные напряжения τ_{xz} на середине боковой грани плиты (x = a, y = 0, z = 0), вертикальные перемещения z по толщине плиты z в ее центре (x = 0, y = 0), горизонтальных перемещений x по толщине плиты на середине ее боковой грани (x = a, y = 0, z = 0) для $\upsilon = 0.3$ и $\gamma = a / h = 3$ могут быть вычислены по следующим формулам:

$\frac{z}{h} = 1.0$: $\sigma_x = -2.1240 \cdot q$; $\tau_{xy} = -0.9129 \cdot q$;

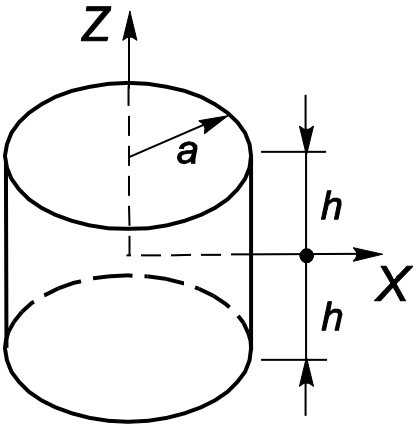
$z = -3596.3 \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot h}{E}$; $x = -1133.3 \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot h}{E}$;

$\frac{z}{h} = 0.0$: $\sigma_x = -0.0481 \cdot q$; $\tau_{xy} = -0.0882 \cdot q$ $\sigma_z = -0.4944 \cdot q$;

$\tau_{xy} = 0.7023 \cdot q$ $z = -3490.6 \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot h}{E}$; $x = 109.5 \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot h}{E}$;

$\frac{z}{h} = -1.0$: $\sigma_x = 1.8639 \cdot q$; $\tau_{xy} = 1.0036 \cdot q$; $z = -3144.0 \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot h}{E}$; $x = 1245.9 \cdot \frac{q \cdot 2 \cdot h}{E}$;

Толстая круглая в плане плита, жестко защемленная по боковой поверхности, под действием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния толстой круглой в плане плиты, жестко защемленной по боковой поверхности, от действия равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки в соответствии с объемной задачей теории упругости.

Использованная версия SCAD: **21.1**
Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
4.37_4m.SPR	Расчетная схема для толщины плиты 4 м
4.37_6m.SPR	Расчетная схема для толщины плиты 6 м

Формулировка задачи: Толстая круглая в плане плита жестко защемлена по боковой поверхности и находится под воздействием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки q. Определить:

- распределение радиальных σ_r и вертикальных σ_z нормальных напряжений по толщине плиты в ее центре ($r = 0$);
- распределение вертикальных перемещений w по толщине плиты в ее центре ($r = 0$).

Ссылки: Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости. – М.: Стройиздат. 1987. 336с.

Исходные данные:

$E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона;
$2 \cdot a = 20.0$ м	- диаметр плиты;
$2 \cdot h = 4.0$ м; 6.0 м	- толщина плиты;
$q = 10$ кПа	- равномерно распределенная по верхней грани нагрузка.

Конечноэлементная модель

Сетка конечных элементов разбита по радиусу с шагом 0.5 м и по толщине на 16-ть слоев (*схемы* 1x1).

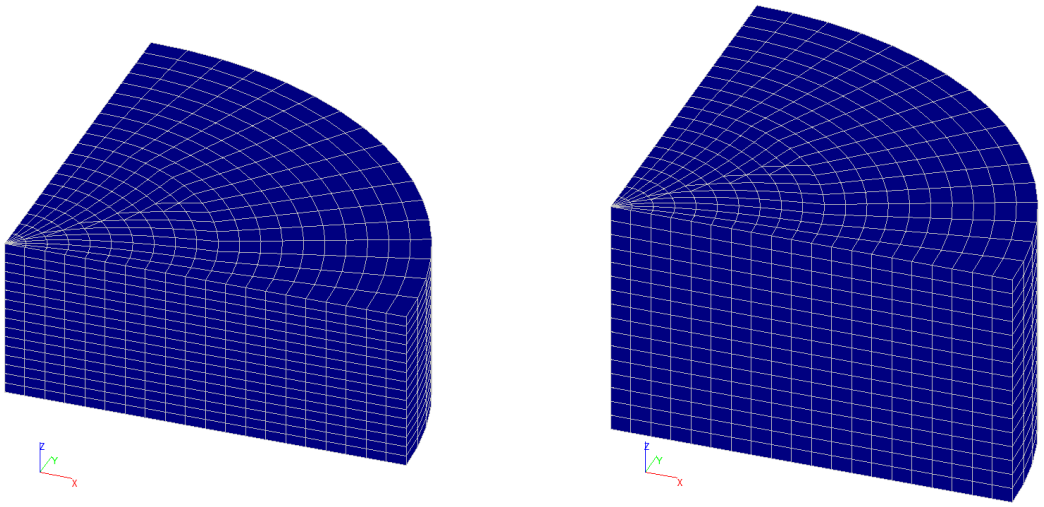
Элементы расчетной схемы:

- 4384 объемных 20-ти узловых изопараметрических элементов типа 37 (параллелепипед);
- 400 объемных 15-ти узловых элементов изопараметрических элементов типа 35(треугольная призма).

Узлов расчетной схемы – 20866.

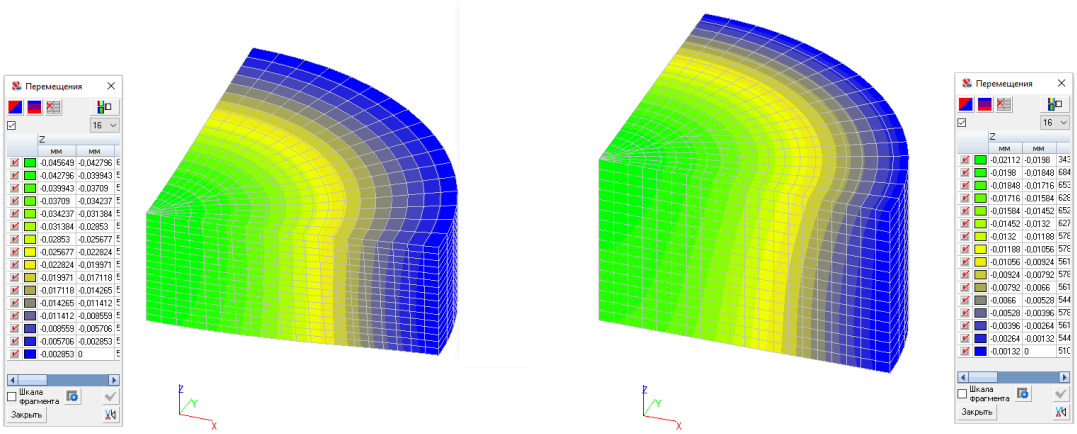
Расчет выполнен с учетом плоскостей симметрии. Заданы связи:

- на боковой поверхности по всем линейным степенями свободы;
- на плоскости YOZ – по *x*;
- на плоскости XOZ – по *y*.



- *Расчетные схемы плит толщиной 4.0 м и 6.0 м*

Результаты решения в SCAD



Значения вертикальных перемещений w (мм) в плитах толщиной 4.0 м 6.0 м

Сравнение решений:

Толщина	***Величина***	***Точка***	***Приближенная теория***	***SCAD***	**Отклонение (%)**
4m	***w(mm)***	(0,0,2)	-0.0436	–0.04538	4.08
		(0,0,0)	–0.0424	–0.0454	7.08
		(0,0,–2)	–0.0411	–0.04364	6.18
	$\sigma_r=\sigma_\theta$ (кПа)	(0,0,2)	-34.51	-33.78	2.12
		(0,0,0)	-1.6667	-1.5547	6.72
		(0,0,-2)	31.1719	30.62	1.76
	σ_z (кПа)	(0,0,2)	-10	-10.16	0.16
		(0,0,0)	-5	-5.07	0.14
		(0,0,-2)	0	-0.05	–
6m	***w***	(0,0,3)	-0.02097	-0.02112	0.72
		(0,0,0)	-0.01916	-0.01994	4.07
		(0,0,-3)	-0.01722	-0.01851	7.49
	$\sigma_r=\sigma_\theta$ (кПа)	(0,0,3)	-18.2292	-18.51	1.54
		(0,0,0)	-1.6667	-1.5149	9.12
		(0,0,-3)	14.896	14.4884	2.74

Толщина	*Величина*	*Точка*	*Приближенная теория*	*SCAD*	**Отклонение (%)**
	σ_z *(кПа)*	(0,0,3)	-10	-9.797	2.03
		(0,0,0)	-5	-5.0569	1.14
		(0,0,-3)	0	0.043	–

Замечание 1: *Приближенные аналитические значения вычислены по формулам, приведенным на стр. 124-125 в книге «Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости. – М.: Стройиздат. 1987.»*

Замечания 2: Были выполнены расчеты с уменьшением шага сетки в два и четыре раза (*схемы 4x4*) для исследования сходимости метода. Расчеты также выполнены с учетом плоскостей симметрии. Максимальная расчетная схема содержала:

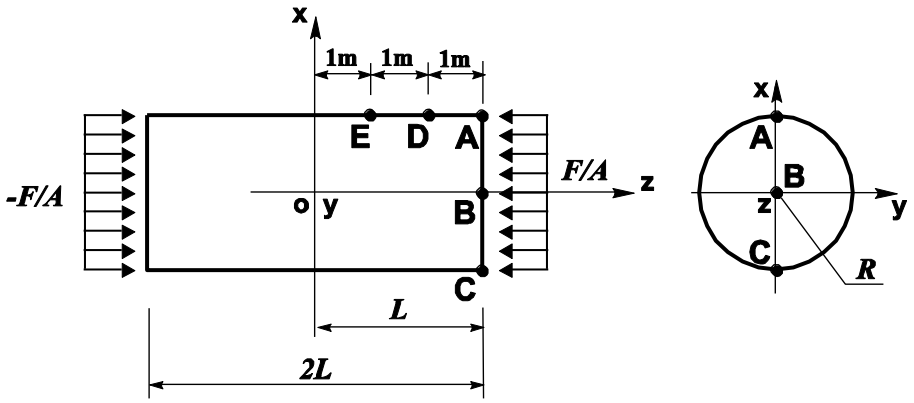
- 280576 объемных 20-ти узловых изопараметрических элементов типа 37 (параллелепипед);
- 25600 объемных 15-ти узловых элементов изопараметрических элементов типа 35 (треугольная призма).

Узлов расчетной схемы – 1222501.

Сравнение решений SCAD:

Толщина	*Вели-чина*	*Точка*	*SCAD*		**Отклонение (%)**
			4x4	1x1	
4m	***w(mm)***	(0,0,2)	-0.04534	–0.04538	0.09
		(0,0,0)	-0.0454	–0.0454	–
		(0,0,–2)	-0.04374	–0.04364	0.23
	$\sigma_r=\sigma_\theta$ *(кПа)*	(0,0,2)	-33.6603	-33.78	0.36
		(0,0,0)	-1.5683	-1.5547	0.87
		(0,0,-2)	30.527	30.62	0.30
	σ_z *(кПа)*	(0,0,2)	-10.0062	-10.16	1.36
		(0,0,0)	-5.0037	-5.0742	1.41
		(0,0,-2)	0.00326	-0.05	–
6m	***w***	(0,0,3)	-0.02108	-0.02112	0.19
		(0,0,0)	-0.01995	-0.01994	0.05
		(0,0,-3)	-0.01852	-0.01851	0.05
	$\sigma_r=\sigma_\theta$ *(кПа)*	(0,0,3)	-17.373	-17.557	1.06
		(0,0,0)	-1.5213	-1.5149	0.42
		(0,0,-3)	14.3485	14.4884	0.98
	σ_z *(кПа)*	(0,0,3)	-10.0006	-9.797	2.03
		(0,0,0)	-5.0367	-5.0694	0.65
		(0,0,-3)	0.0028	0.0434	–

Цилиндрическое тело, свободное от закреплений, под действием продольной равномерно распределенной по торцам нагрузки



Цель: Определение деформированного состояния цилиндрического тела свободного от закреплений от воздействия продольной равномерно распределенной по торцам нагрузки.

Имя файла с исходными данными: **SSLV01_v11.5.SPR**

***Формулировка задачи*:** Цилиндрическое тело, свободное от закреплений, находится под воздействием продольной равномерно распределенной по торцам нагрузки F/A. Определить меридиональные ΔL и радиальные ΔR перемещения точек E, D, A (C) боковой поверхности цилиндра, отстоящих от поперечной плоскости его симметрии вдоль образующей соответственно на расстояния $L/3$, $2 \cdot L/3$, L, а также точки B центра его торцевой поверхности.

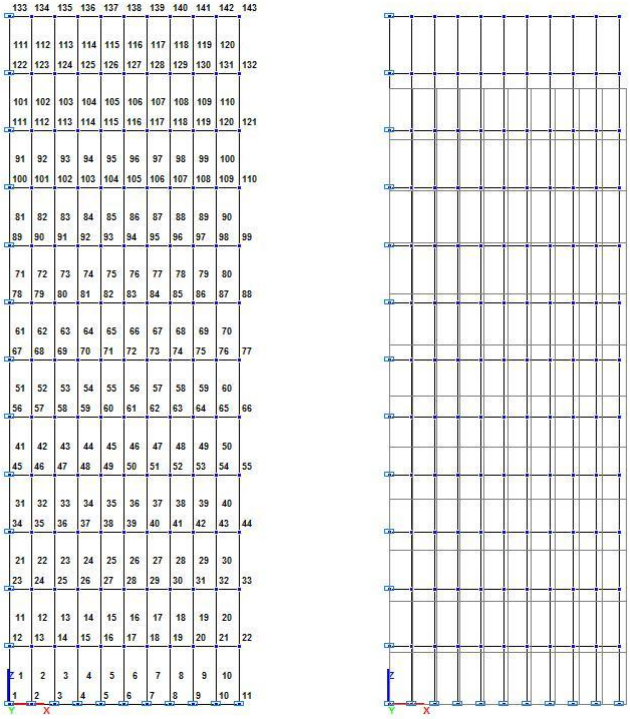
Ссылки: P. Germain, Introduction a la mecanique des milieux continus, Paris, Masson, 1986.

Исходные данные:

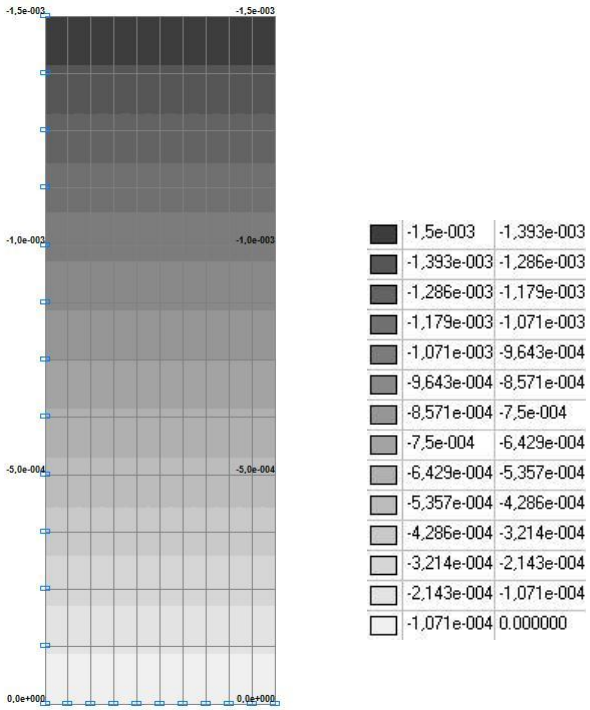
$E = 2.0 \cdot 10^5$ Па	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$R = 1.0$ м	- радиус цилиндра;
$L = 4.0$ м	- длина цилиндра;
$F/A = 1.0 \cdot 10^2$ Па	- равномерно распределенная по торцам нагрузка.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – осесимметричная задача, осесимметричные элементы – 120 элементов оболочки типа 61. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.25 м в меридиональном направлении и с шагом 0.10 м в радиальном направлении. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связей по условиям ее симметрии. Количество узлов в расчетной схеме – 143.

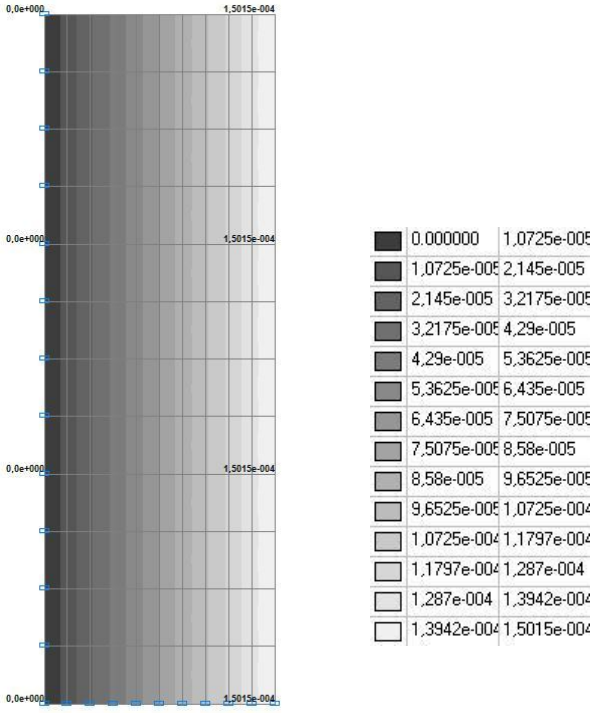
Результаты решения в SCAD



Расчетная и деформированная схемы



Значения меридиональных перемещений Z (ΔL) м



Значения радиальных перемещений X (ΔR) м

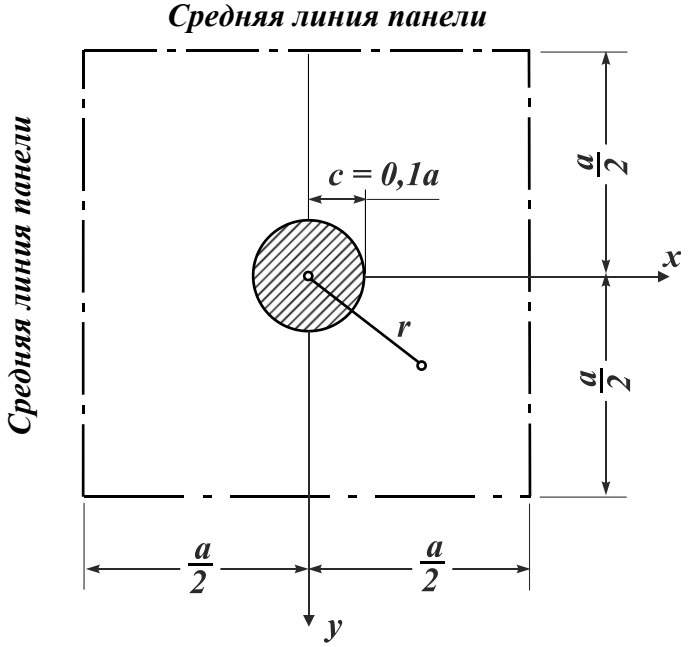
Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
Меридиональное перемещение Δ*L* (точка E), м	$-0.500\cdot10^{-3}$	$-0.500\cdot10^{-3}$	0.00
Радиальное перемещение ΔR (точка E), м	$-0.150\cdot10^{-3}$	$-0.150\cdot10^{-3}$	0.00
Меридиональное перемещение Δ*L* (точка D), м	$-1.000\cdot10^{-3}$	$-1.000\cdot10^{-3}$	0.00
Радиальное перемещение ΔR (точка D), м	$-0.150\cdot10^{-3}$	$-0.150\cdot10^{-3}$	0.00
Меридиональное перемещение Δ*L* (точки A и C), м	$-1.500\cdot10^{-3}$	$-1.500\cdot10^{-3}$	0.00
Радиальное перемещение ΔR (точки A и C), м	$-0.150\cdot10^{-3}$	$-0.150\cdot10^{-3}$	0.00
Меридиональное перемещение Δ*L* (точка B), м	$-1.500\cdot10^{-3}$	$-1.500\cdot10^{-3}$	0.00
Радиальное перемещение ΔR (точка B), м	$0.000\cdot10^{-3}$	$0.000\cdot10^{-3}$	0.00

Замечания: При аналитическом решении меридиональные Δ*L* и радиальные ΔR перемещения могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\Delta L = \frac{P \cdot X}{E}; \qquad \Delta R = \frac{\nu \cdot P \cdot R}{E}.$$

Квадратной вадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной круглого поперечного сечения, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



Цель:
Определение изгибающих моментов в характерных точках квадратной панели безбалочного перекрытия, жестко сочлененной с колонной круглого поперечного сечения, от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Файл с исходными данными: **Flate_plate_Circular_column.spr**

Формулировка задачи:
Квадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной круглого поперечного сечения, находится под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки q. Определить изгибающие моменты M_x, M_y в характерных точках квадратной панели безбалочного перекрытия.

Ссылки:
С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, Москва, Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009, стр. 287-289.

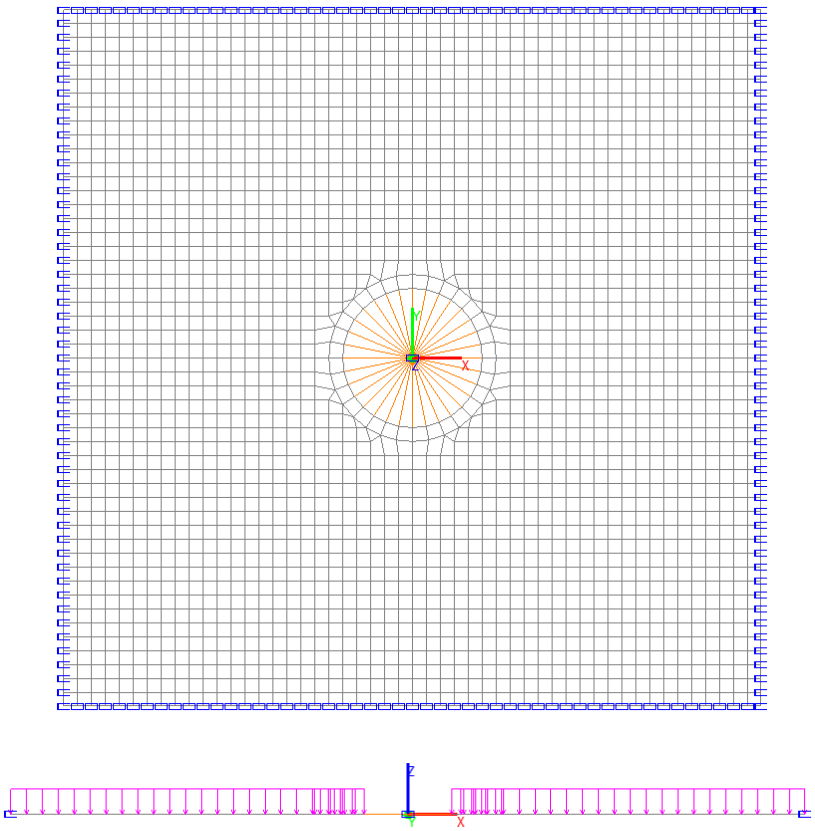
Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^7$ Н/м^2	- модуль упругости,
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
h = 0.1 м	- толщина панели безбалочного перекрытия;
a = 2.5 м	- размер стороны панели безбалочного перекрытия;
$c = 0.1 \cdot a = 0.25$ м	- размер стороны поперечного сечения колонны;
q = 100.0 Н/м^2	- значение поперечной равномерно распределенной нагрузки.

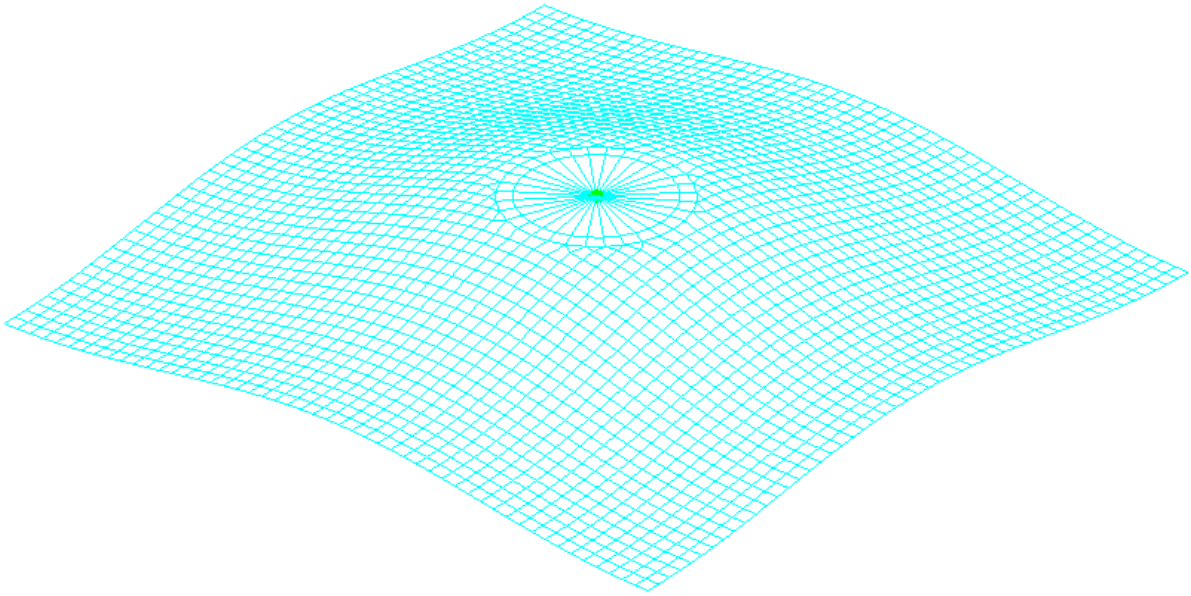
Конечно-элементная модель:
Расчетная схема – балочный ростверк, плита; элементы панели безбалочного перекрытия – 2412 четырехугольных четырехузловых элементов тонких плит для расчета по теории Кирхгофа-Лява типа 20 и 16 треугольных трехузловых элементов тонких плит для расчета по теории Кирхгофа-Лява типа 15; элемент поперечного сечения колонны – 1 элемент твердого тела типа 100. Сетка конечных элементов панели безбалочного перекрытия разбита в направлениях осей глобальной системы

координат с шагом 0.05 м кроме контура опирания, где сетка конечных элементов разбита в радиальном направлении с шагом 0.05 м и в окружном направлении с шагом 11.25°. Направление выдачи усилий – вдоль осей глобальной системы координат. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы UX для кромок панели, расположенных вдоль оси X общей системы координат, и UY для кромок панели, расположенных вдоль оси Y общей системы координат. Мастер-узел твердого тела колонны расположен по центру ее поперечного сечения и закреплен связью по направлению степени свободы Z. Количество узлов в расчетной схеме – 2537.

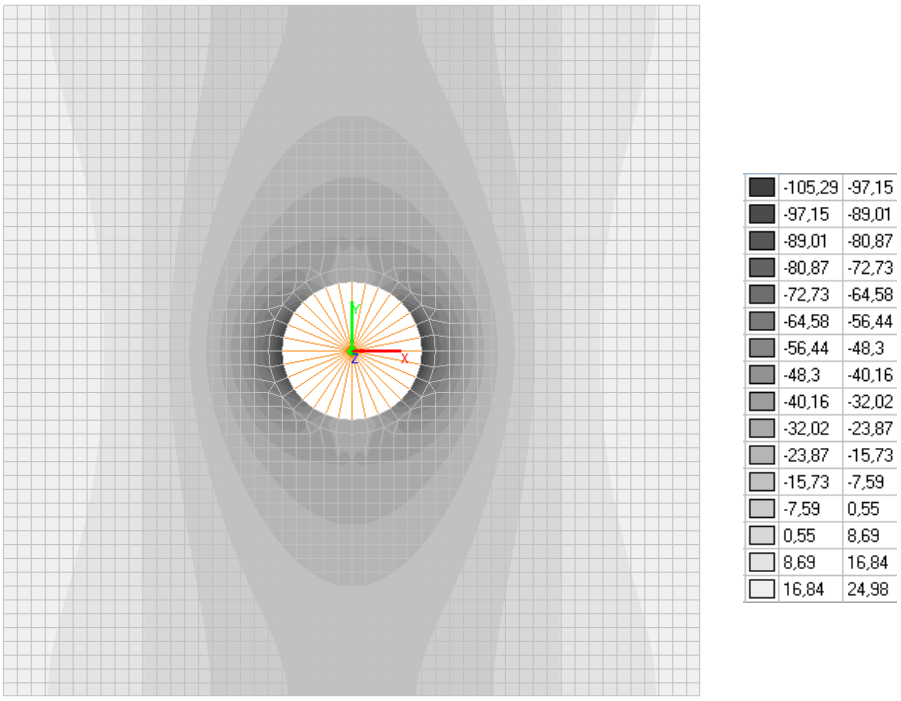
Результаты решения в SCAD:



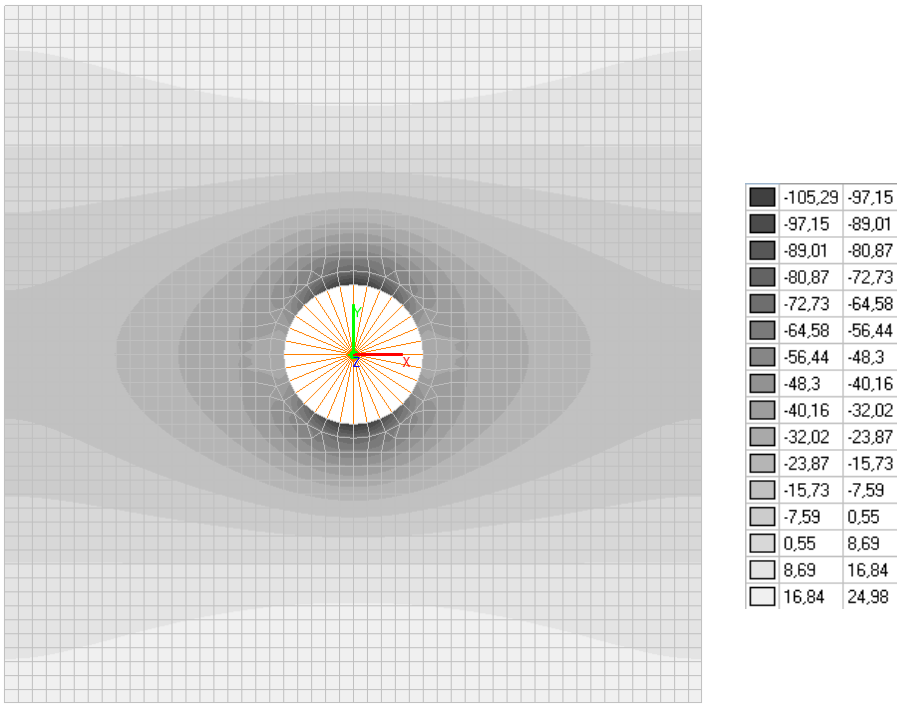
Расчетная схема



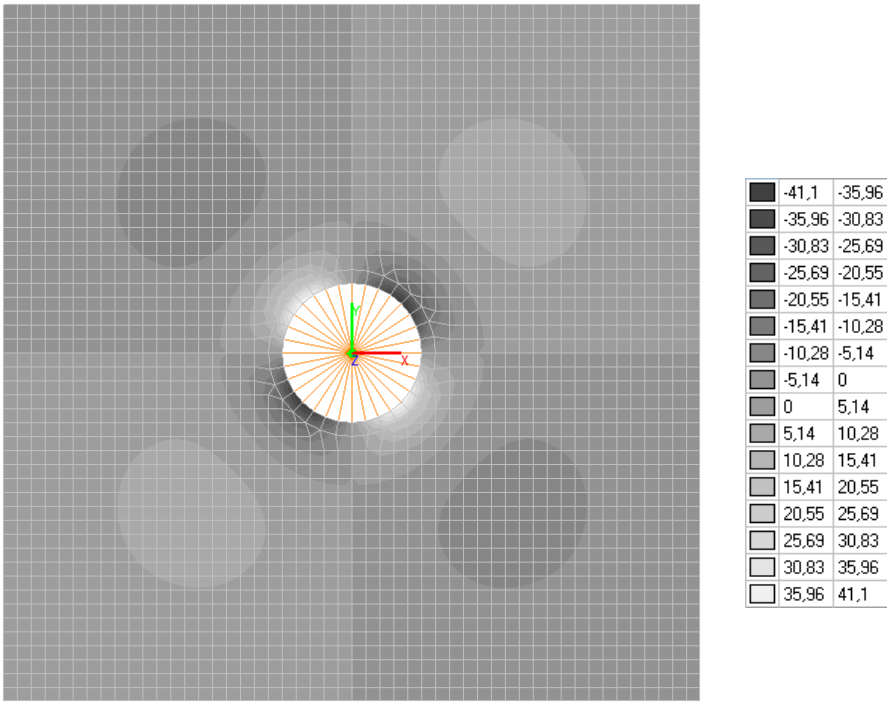
Деформированная схема



Изгибающие моменты M_x, Н· м/м



Изгибающие моменты M_y, Н· м/м



Изгибающие моменты M_{xy}, Н· м/м

Сравнение решений:

Изгибающий момент	Точка панели	Теория	SCAD	Отклонения
$M_x = M_y$	$x = a/2$, $y = a/2$	18.2500	17.8300	2.30
M_x	$x = a/2$, $y = 0$	24.9375	24.9800	0.17
M_y	$x = a/2$, $y = 0$	-10.0625	-10.1400	0.77
M_x	$x = c$, $y = 0$	-105.1250	-105.2900	0.16

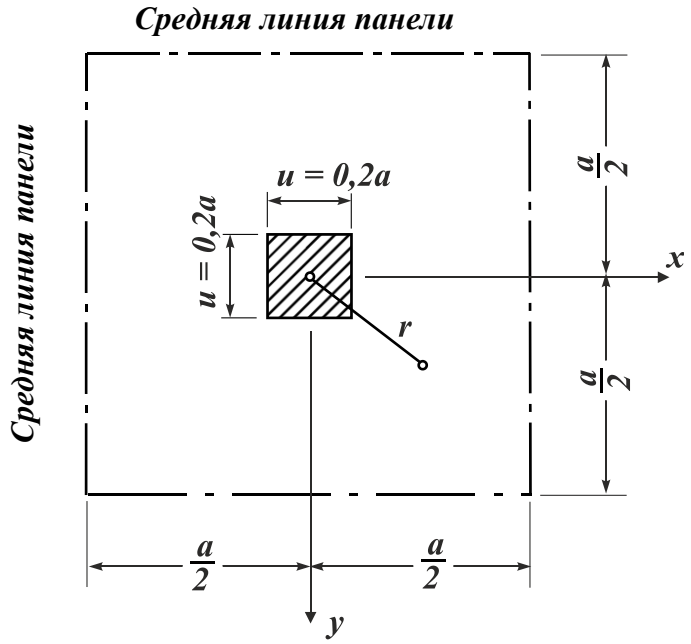
Замечания: При аналитическом решении изгибающие моменты M_x, M_y в характерных точках квадратной панели безбалочного перекрытия определяются по следующим формулам:

$$M=\beta \cdot q \cdot a^2 .$$

Коэффициенты β для вычисления изгибающих моментов при $c = 0.1 \cdot a$ и $\upsilon = 0.2$

Изгибающий момент	Точка панели	β
$M_x = M_y$	$x = a/2$, $y = a/2$	0.0292
M_x	$x = a/2$, $y = 0$	0.0399
M_y	$x = a/2$, $y = 0$	-0.0161
M_x	$x = c$, $y = 0$	-0.1682

Квадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной квадратного поперечного сечения, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



Цель:
Определение изгибающих моментов в характерных точках квадратной панели безбалочного перекрытия, жестко сочлененной с колонной квадратного поперечного сечения, от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Файл с исходными данными: **Flate_plate_Square_column.spr**

Формулировка задачи:
Квадратная панель безбалочного перекрытия, жестко сочлененная с колонной квадратного поперечного сечения, находится под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки q. Определить изгибающие моменты M_x, M_y в характерных точках квадратной панели безбалочного перекрытия.

Ссылки:
С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, Москва, Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009, стр. 287-289.

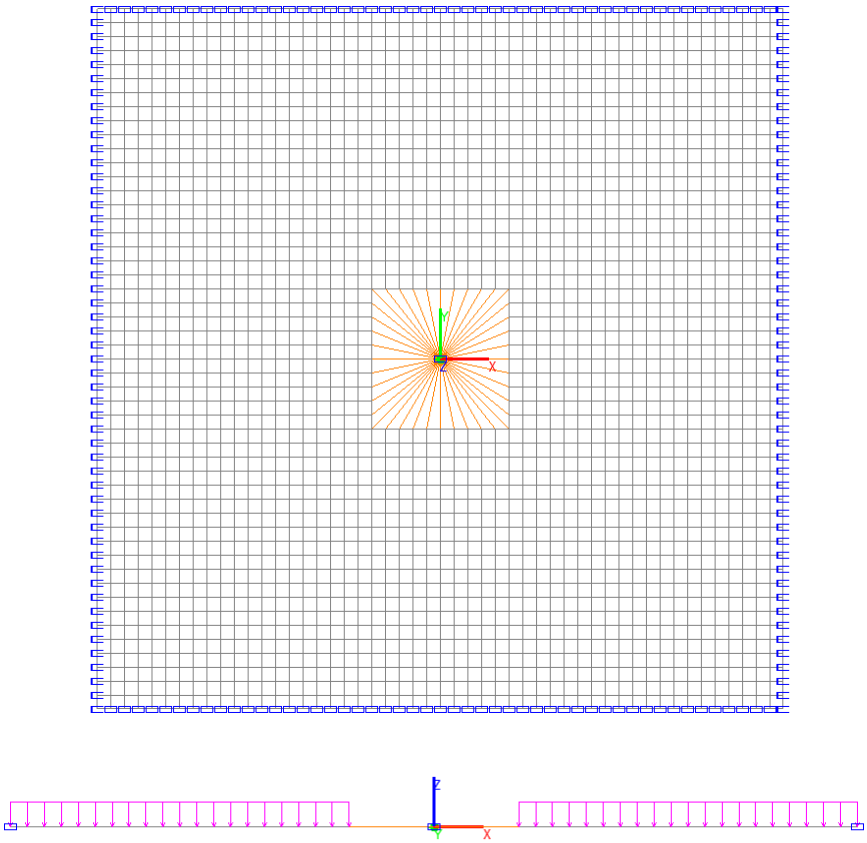
Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^7$ Н/м^2	- модуль упругости,
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 0.1$ м	- толщина панели безбалочного перекрытия;
$a = 2.5$ м	- размер стороны панели безбалочного перекрытия;
$u = 0.2 \cdot a = 0.5$ м	- размер стороны поперечного сечения колонны;
$q = 100.0$ Н/м^2	- значение поперечной равномерно распределенной нагрузки.

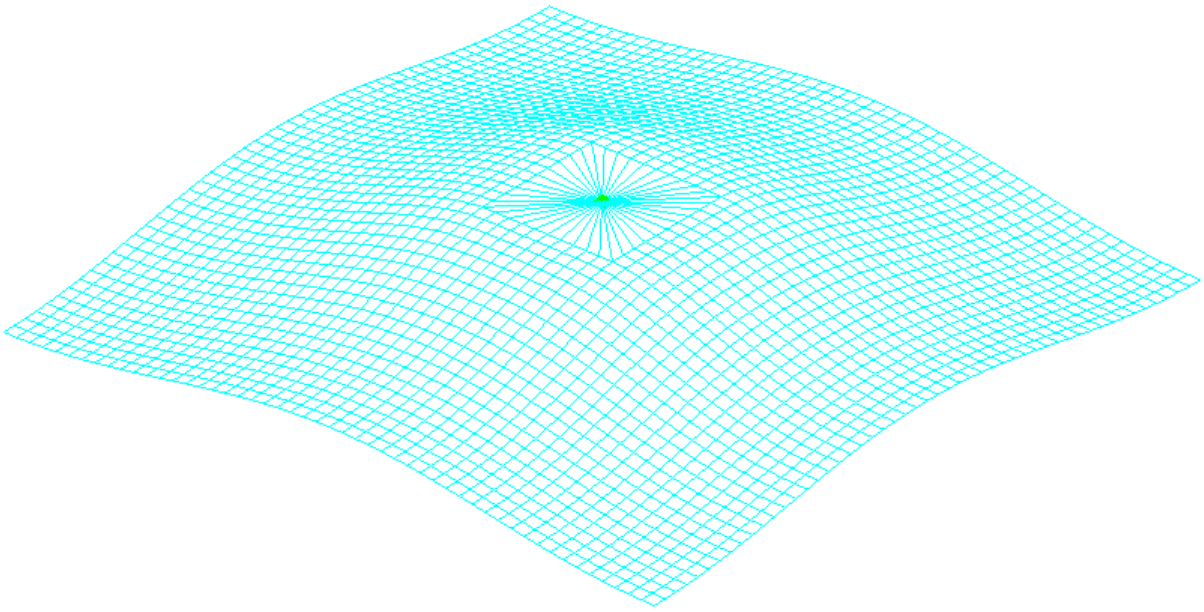
Конечно-элементная модель:
Расчетная схема – балочный ростверк, плита; элементы панели безбалочного перекрытия – 2400 четырехугольных четырехузловых элементов тонких плит для расчета по теории Кирхгофа-Лява типа 20; элемент поперечного сечения колонны – 1 элемент твердого тела типа 100. Сетка конечных элементов панели безбалочного перекрытия разбита в направлениях осей глобальной системы координат с шагом 0.05 м. Направление выдачи усилий – вдоль осей глобальной системы координат. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям

степеней свободы UX для кромок панели, расположенных вдоль оси X общей системы координат, и UY для кромок панели, расположенных вдоль оси Y общей системы координат. Мастер-узел твердого тела колонны расположен по центру ее поперечного сечения и закреплен связью по направлению степени свободы Z. Количество узлов в расчетной схеме – 2521.

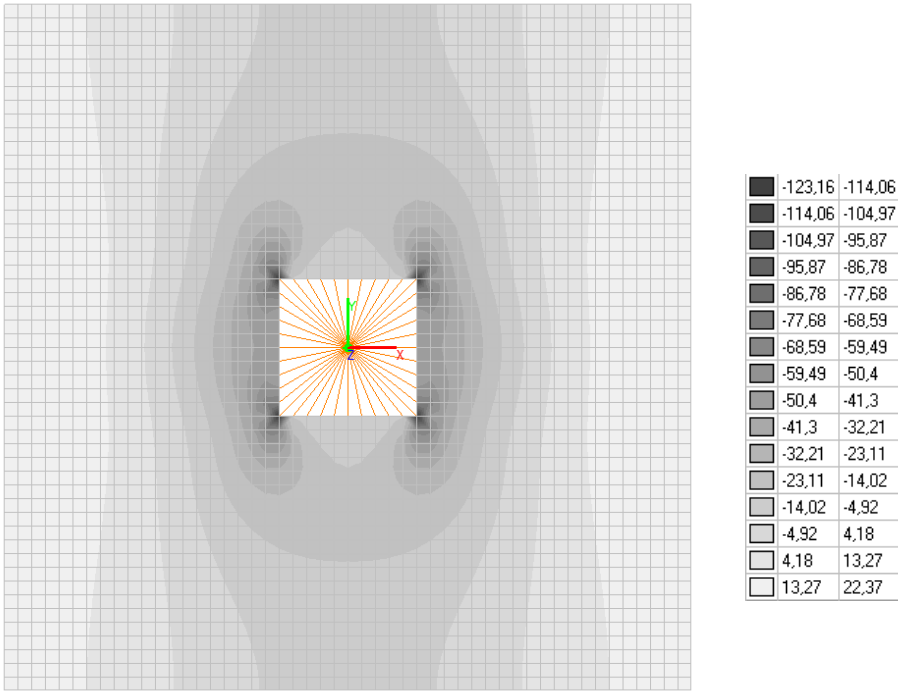
Результаты решения в SCAD:



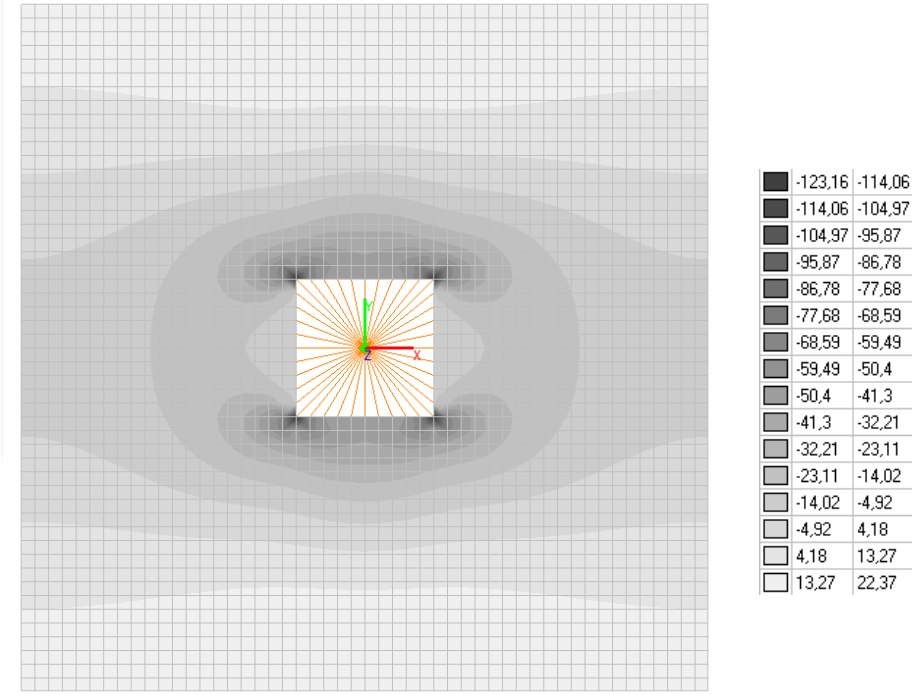
Расчетная схема



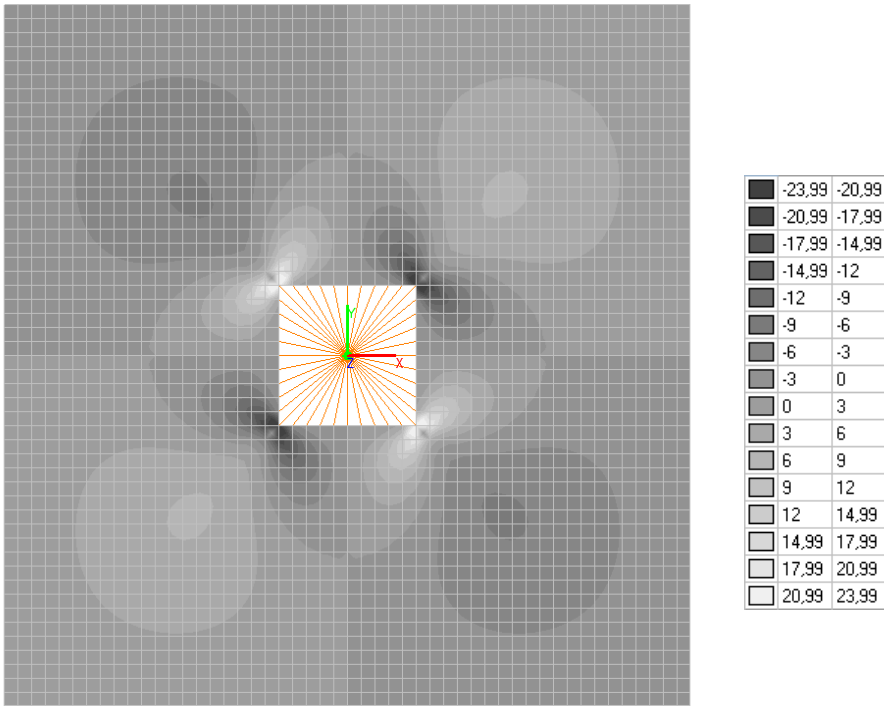
Деформированная схема



Изгибающие моменты M_x, Н· м/м



Изгибающие моменты M_y, Н· м/м



Изгибающие моменты M_{xy}, Н· м/м

Сравнение решений:

Изгибающий момент	**Точка панели**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения**
$M_x = M_y$	$x = a/2$, $y = a/2$	16.500	16.620	0.73
M_x	$x = a/2$, $y = 0$	21.750	22.370	2.85
M_y	$x = a/2$, $y = 0$	-9.125	-8.770	3.89
M_x	$x = u/2$, $y = 0$	-39.125	-43.210	9.45
M_x	$x = u/2$, $y = u/2$	-∞	-123.16	–

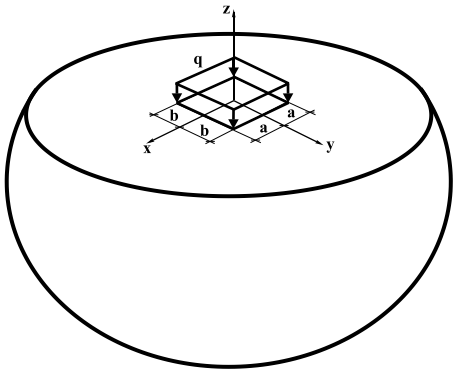
Замечания: При аналитическом решении изгибающие моменты M_x, M_y в характерных точках квадратной панели безбалочного перекрытия определяются по следующим формулам:

$$M=\beta \cdot q \cdot a^2 .$$

Приближенные значения коэффициентов β для вычисления изгибающих моментов при $u = 0.2 \cdot a$ и $\upsilon = 0.2$

Изгибающий момент	**Точка панели**	**β**
$M_x = M_y$	$x = a/2$, $y = a/2$	0.0264
M_x	$x = a/2$, $y = 0$	0.0348
M_y	$x = a/2$, $y = 0$	-0.0146
M_x	$x = u/2$, $y = 0$	-0.0626
M_x	$x = u/2$, $y = u/2$	-∞

Упругое полупространство под действием равномерно распределенной по поверхности прямоугольной в плане поперечной нагрузки. Задача Лява



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния упругого полупространства от действия равномерно распределенной по поверхности прямоугольной в плане поперечной нагрузки в соответствии с объемной задачей теории упругости.

***Имя файлов с исходными данными*: Lave.SPR**

Формулировка задачи: Упругое полупространство находится под воздействием равномерно распределенной по поверхности прямоугольной в плане поперечной нагрузки q. Определить:

- распределение нормальных напряжений σ_x, σ_y, σ_z по полупространству;
- распределение касательных напряжений τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} по полупространству;
- распределение перемещений u, v, w по полупространству.

Ссылки: З. Г. Тер-Мартиросян, Механика грунтов, Москва, МГСУ Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009, стр. 204;
В.А. Флорин, Основы механики грунтов, Том 1, Ленинград, Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1959, стр. 123;
В.А. Флорин, Основы механики грунтов, Том 2, Ленинград, Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1959, стр. 24.

Исходные данные:

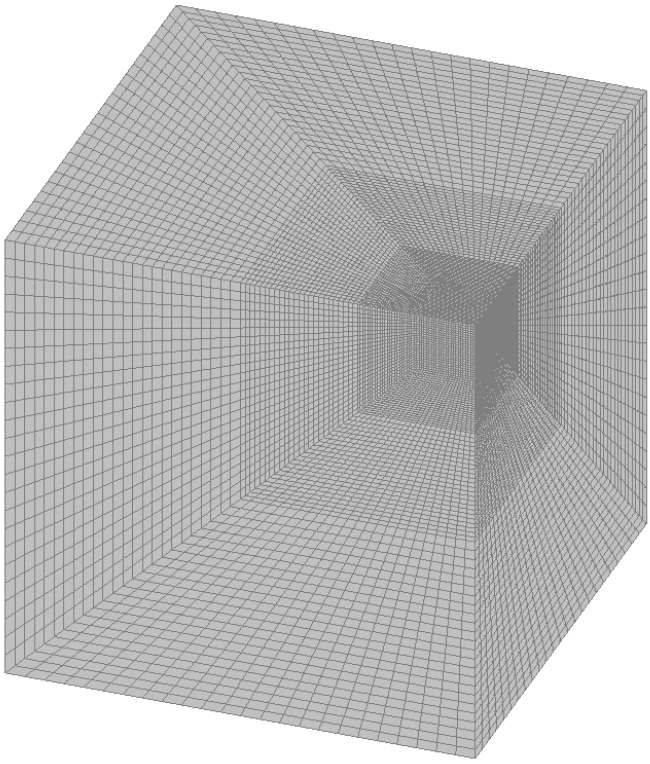
$E = 30000$ кН/м^2	- модуль упругости полупространства;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$a = b = 2.0$ м	- длина половины стороны прямоугольной в плане загруженной поверхности;
$q = 100$ кН/м^2	- равномерно распределенная по поверхности прямоугольной в плане поперечная нагрузка.

Конечно-элементная модель: Рассчитывается параллелепипед со сторонами 96×96×48 м. Расчетная схема (представляет собой ¼ часть параллелепипеда, отсеченную плоскостями симметрии XOZ и YOZ) – система общего вида, элементы упругого полупространства – 138253 20-и узловых изопараметрических объемных элементов типа 37. Первоначальная сетка конечных элементов полупространства в районе приложения нагрузки в плане и по глубине имеет шаг 0,25 м с последующим увеличением размеров конечных элементов по мере удаления от нее.
Направление выдачи внутренних усилий сориентировано по осям общей системы координат. Верхние грани элементов границы полупространства загружены поверхностной поперечной нагрузкой в плане в пределах 2a×2b = 4.0 м×4.0 м.

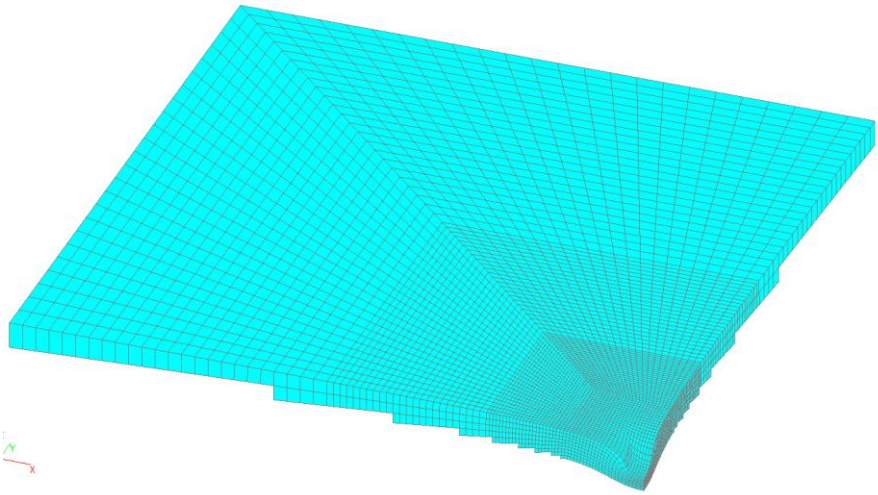
Краевые условия были определены следующим образом: на нижней и боковых поверхностях запрещены перемещения по нормали.

Количество узлов в расчетной схеме – 573985.

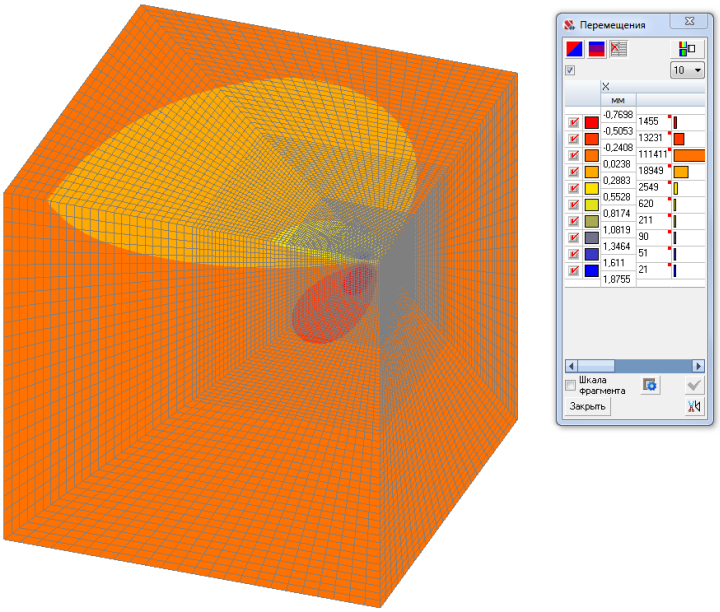
Результаты решения в SCAD



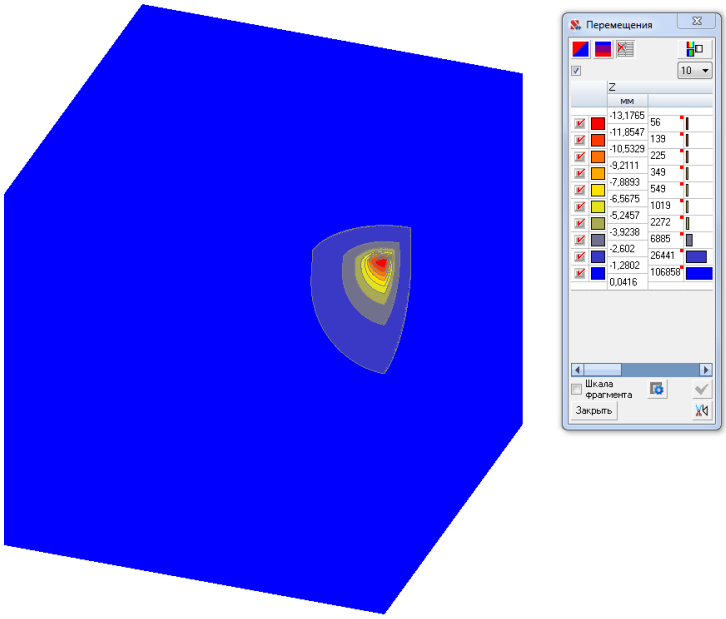
Расчетная схема



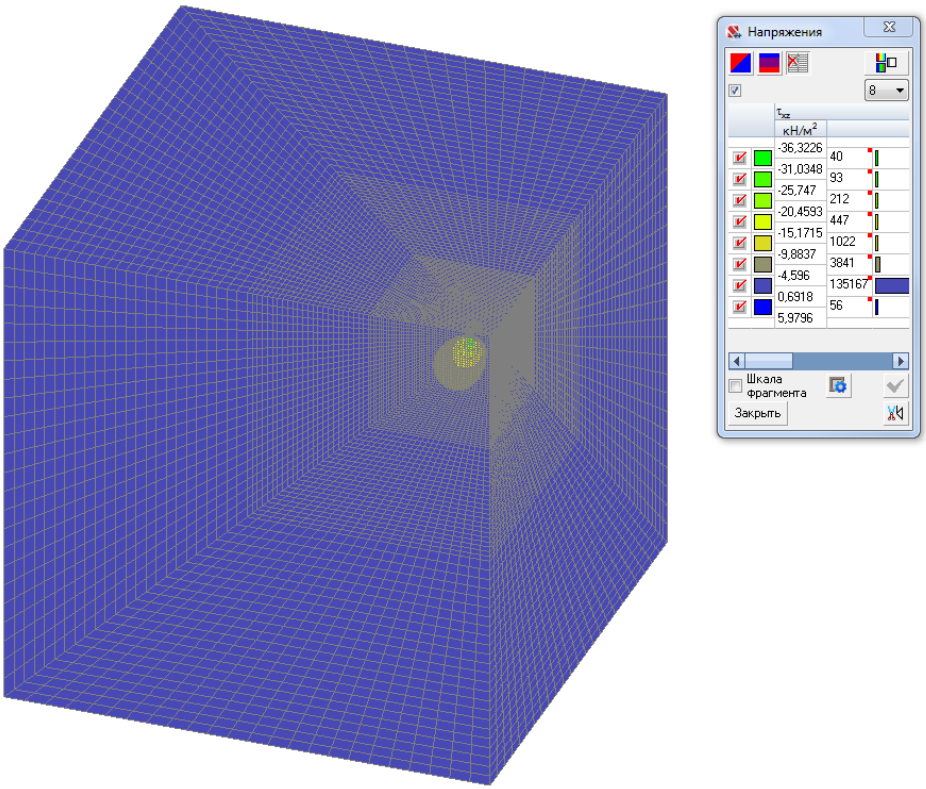
Деформированная схема поверхности упругого полупространства



Значения горизонтальных перемещений u (мм)



Значения вертикальных перемещений w (мм)



Значения вертикальных τ_{xz} касательных напряжений (т/м^2)

Сравнение решений:

Решение задачи Лява 20-и узловыми
изопараметрическими элементами (мм, кН/м^2)

Точка	Параметр		Теория	SCAD	Отклонения, %
(0,0,0) Узел 1	w	мм	-13,616	-13,177	3,2
	$\sigma_x=\sigma_y$	кН/м^2	-80,0	-79,919	0,10
	σ_z	кН/м^2	-100,0	-100,079	0,09
(0,0,-2) Узел 10005	w	мм	-9,017	-8,574	4,91
	$\sigma_x=\sigma_y$	кН/м^2	-8,29	-8,189	1,21
	σ_z	кН/м^2	-70,09	-70,109	0,03
(-2,2,-2) Узел 10213	u=v	мм	0,488	0,492	0,82
	w	мм	-5,704	-5,262	7,75
	$\sigma_x=\sigma_y$	кН/м^2	-7,56	-7,496	0,85
	σ_z	кН/м^2	-23,25	-23,267	0,07
	τ_{xy}	кН/м^2	-5,27	-5,288	0,34
	$\tau_{xz}=\tau_{yz}$	кН/м^2	12,11	12,166	0,46

***Замечания*:** При аналитическом решении распределение нормальных напряжений σ_x, σ_y, σ_z, касательных напряжений τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} и перемещений u, v, w по полупространству вычисляется по следующим формулам:

$$\sigma_x(x,y,z)=\frac{q}{2\cdot\pi}\cdot\left\{-(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{(x-a)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x-a)^2-(y-b)^2+z^2}}\right]+\right.$$

$$+2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-\frac{z\cdot(x-a)\cdot(y-b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+$$

$$\left.+(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y+b)}{(x-a)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]-\right.$$

$$-2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]+\frac{z\cdot(x-a)\cdot(y+b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}+$$

$$+(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y-b)}{(x+a)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-$$

$$-2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]+\frac{z\cdot(x+a)\cdot(y-b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-$$

$$-(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y+b)}{(x+a)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]+$$

$$+2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]-\frac{z\cdot(x+a)\cdot(y+b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\Bigg\}.$$

$$\sigma_y(x,y,z)=\frac{q}{2\cdot\pi}\cdot\Bigg\{-(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{(y-b)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x-a)^2-(y-b)^2+z^2}}\right]+$$

$$+2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-\frac{z\cdot(x-a)\cdot(y-b)}{\left[(y-b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+$$

$$+(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y+b)}{(y+b)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]+$$

$$+\frac{z\cdot(x-a)\cdot(y+b)}{\left[(y+b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}+$$

$$+(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y-b)}{(y-b)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-$$

$$+2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]+\frac{z\cdot(x+a)\cdot(y-b)}{\left[(y-b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-$$

$$+(1-2\cdot\mu)\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y+b)}{(y+b)^2+z^2-z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]+$$

$$+2\cdot\mu\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]-\frac{z\cdot(x+a)\cdot(y+b)}{\left[(y+b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\Bigg\}.$$

$$\sigma_z(x,y,z)=\frac{q}{2\cdot\pi}\cdot\left\{\frac{z\cdot(x-a)\cdot(y-b)\cdot\left[(x-a)^2+(y-b)^2+2\cdot z^2\right]}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\cdot\left[(y-b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+\right.$$

$$+arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-$$

$$-\frac{z\cdot(x-a)\cdot(y+b)\cdot\left[(x-a)^2+(y+b)^2+2\cdot z^2\right]}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\cdot\left[(y+b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-$$

$$-arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]-$$

$$-\frac{z\cdot(x+a)\cdot(y-b)\cdot\left[(x+a)^2+(y-b)^2+2\cdot z^2\right]}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\cdot\left[(y-b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-$$

$$-arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]+$$

$$+\frac{z\cdot(x+a)\cdot(y+b)\cdot\left[(x+a)^2+(y+b)^2+2\cdot z^2\right]}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\cdot\left[(y+b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}+$$

$$\left.+arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]\right\}.$$

$$\tau_{xy}(x,y,z)=\frac{q}{2\cdot\pi}\cdot\left\{-(1-2\cdot\mu)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}-z\right]+\right.$$

$$+\frac{z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+$$

$$+(1-2\cdot\mu)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}-z\right]-$$

$$-\frac{z}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}+$$

$$+(1-2\cdot\mu)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}-z\right]-$$

$$-\frac{z}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-$$

$$-(1-2\cdot\mu)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}-z\right]+$$

$$\left.+\frac{z}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right\}.$$

$$\tau_{xz}(x,y,z)=\frac{q}{2\cdot\pi}\cdot\left\{-\frac{z^2\cdot(y-b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+\right.$$
$$+\frac{z^2\cdot(y+b)}{\left[(x-a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}+$$
$$+\frac{z^2\cdot(y-b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-$$
$$\left.-\frac{z^2\cdot(y+b)}{\left[(x+a)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right\}.$$

$$\tau_{yz}(x,y,z)=\frac{q}{2\cdot\pi}\cdot\left\{-\frac{z^2\cdot(x-a)}{\left[(y-b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+\right.$$
$$+\frac{z^2\cdot(x+a)}{\left[(y-b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}+$$
$$+\frac{z^2\cdot(x-a)}{\left[(y+b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-$$
$$\left.-\frac{z^2\cdot(x+a)}{\left[(y+b)^2+z^2\right]\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right\}.$$

$$u(x,y,z)=\frac{q\cdot(1+\mu)}{2\cdot\pi\cdot E}\cdot\left\{2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}+(y-b)\right]-\right.$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(y-b)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}-z\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(x-a)\cdot arctg\left(\frac{y-b}{x-a}\right)-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(x-a)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(y-b)}{(x-a)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}+(y+b)\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(y+b)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}-z\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(x-a)\cdot arctg\left(\frac{y+b}{x-a}\right)+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(x-a)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(y+b)}{(x-a)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]-$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}+(y-b)\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(y-b)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}-z\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(x+a)\cdot arctg\left(\frac{y-b}{x+a}\right)+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(x+a)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(y-b)}{(x+a)\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]+$$
$$+2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}+(y+b)\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(y+b)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}-z\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(x+a)\cdot arctg\left(\frac{y+b}{x+a}\right)-$$
$$\left.-(1-2\cdot\mu)\cdot(x+a)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(y+b)}{(x+a)\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]\right\}.$$

$$v(x,y,z)=\frac{q\cdot(1+\mu)}{2\cdot\pi\cdot E}\cdot\left\{2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}+(x-a)\right]-\right.$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(x-a)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}-z\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(y-b)\cdot arctg\left(\frac{x-a}{y-b}\right)-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(y-b)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(x-a)}{(y-b)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}+(x-a)\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(x-a)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}-z\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(y+b)\cdot arctg\left(\frac{x-a}{y+b}\right)+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(y+b)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(x-a)}{(y+b)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]-$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}+(x+a)\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(x+a)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}-z\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(y-b)\cdot arctg\left(\frac{x+a}{y-b}\right)+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot(y-b)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(x+a)}{(y-b)\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]+$$
$$+2\cdot(1-\mu)\cdot z\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}+(x+a)\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(x+a)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}-z\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot(y+b)\cdot arctg\left(\frac{x+a}{y+b}\right)-$$
$$\left.-(1-2\cdot\mu)\cdot(y+b)\cdot arctg\left[\frac{z\cdot(x+a)}{(y+b)\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]\right\}.$$

$$w(x,y,z)=\frac{q\cdot(1+\mu)}{2\cdot\pi\cdot E}\cdot\left\{-2\cdot(1-\mu)\cdot(x-a)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}+(y-b)\right]-\right.$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot(y-b)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}+(x-a)\right]+$$
$$+(1-2\cdot\mu)\cdot z\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]+$$
$$+2\cdot(1-\mu)\cdot(x-a)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}+(y+b)\right]+$$
$$+2\cdot(1-\mu)\cdot(y+b)\cdot ln\left[\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}+(x-a)\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot z\cdot arctg\left[\frac{(x-a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]+$$
$$+2\cdot(1-\mu)\cdot(x+a)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}+(y-b)\right]+$$
$$+2\cdot(1-\mu)\cdot(y-b)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}+(x+a)\right]-$$
$$-(1-2\cdot\mu)\cdot z\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y-b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]-$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot(x+a)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}+(y+b)\right]-$$
$$-2\cdot(1-\mu)\cdot(y+b)\cdot ln\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}+(x+a)\right]+$$
$$\left.+(1-2\cdot\mu)\cdot z\cdot arctg\left[\frac{(x+a)\cdot(y+b)}{z\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]\right\}.$$

Определение внутренних усилий при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля

Цель: Проверить правильность определения значений внутренних усилий при стесненном кручении тонкостенного стержня открытого профиля на примере пятипролетной балки.

Формулировка задачи: пятипролетная балка с равными пролетами величиной 2,5 м нагружена поперечной равномерно-распределенной нагрузкой 20 кН/м, ориентированной в плоскости стенки. Поперечное сечение балки принято из С-образного тонкостенного холодногнутого профиля. Нагрузка приложена по верхней полке балки в плоскости стенки с эксцентриситетом по отношению к центру масс равным 46.3 мм. Определить значения бимоментов в сечениях балки.

Источник: A.D. Pavlenko, V.A. Rybakov, A.V. Pikht, E.S. Mikhailov. Non-uniform torsion of thin-walled open-section multi-span beams // Magazine of Civil Engineering, No. 7(67), 2016, pp. 55-69.

Имя файла с исходными данными:
Rybakov_5SpanBeam.spr;

Версия программ:
SCAD++ 23.1.1.3

Исходные данные задачи:

E = 210000 Н/мм^2	Модуль упругости
ν = 0.3	Коэффициент Пуассона
Тип сечения	Швеллер
h = 220 мм	Высота сечения (по внешней грани)
b = 70 мм	Ширина полки (по внешней грани)
t = 2 мм	Толщина профиля (за минусом толщины покрытия)
q = 20 кН/м	Равномерно-распределенная нагрузка на балку
l = 2.5 м	Длина каждого пролета балки
e = 46.3 мм	Эксцентриситет приложенной нагрузки (нагрузка приложена по верхней полке профиля, посередине полки)

Конечно-элементная модель: расчетная схема многопролетной балки – пространственная стержневая система. Ось балки совмещена с направлением оси $x - x$ глобальной системы координат. На крайней левой опоре заданы ограничения на поворот относительно оси $x - x$, а также линейные перемещения в направлении $y - y$ и $z - z$ осей глобальной системы координат. На промежуточных опорах заданы ограничения на линейные перемещения в направлении осей $y - y$ и $z - z$.
Принимая во внимание конструктивное решение стыков многопролетной балки внахлест, на промежуточных опорах задавалось условие равенства депланаций. Кроме того, это же условие задавалось во всех промежуточных узлах балки. На крайних опорах балки условие равенства нулю бимомента реализовывалось введением шарнира по депланациям.
Эксцентриситет приложения равномерно-распределенной нагрузки на балку учтен путем приложения равномерно-распределенного крутящего момента величиной $M = q \times e$ = 20 кН/м × 46.3 мм = 0,926 кНм/м.

Результаты программы SCAD++:
Результирующая эпюра бимоментов, вычисленная в SCAD++, представлена на рис. 1.

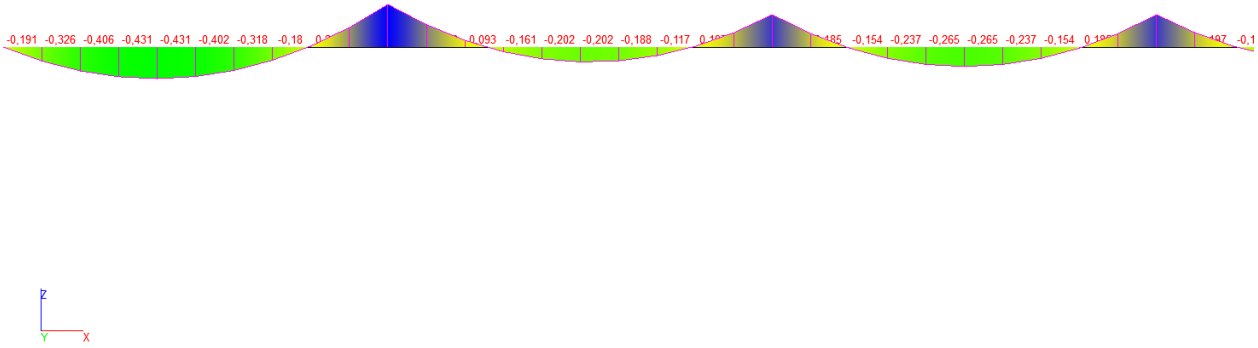
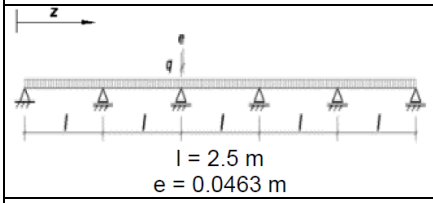


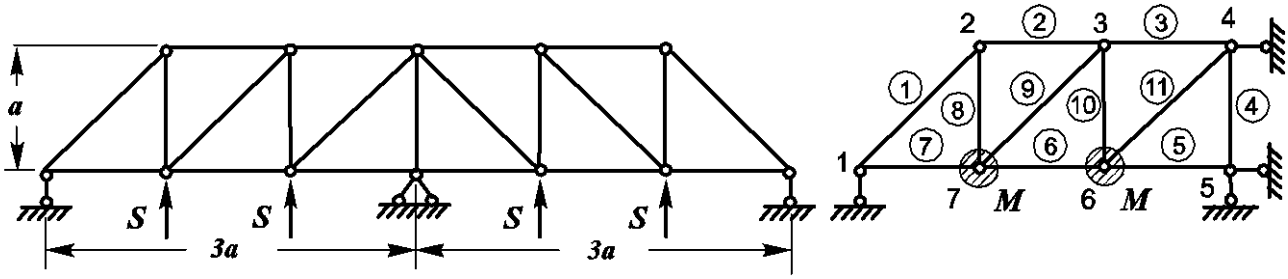
Рис. 1. Эпюра бимоментов при стесненном кручении пятипролетной балки с пролетами 2,5 м.

Сравнение решений

Расчетная схема балки	Расположение сечения балки					
	z = 1 м	z = 1,25 м	z = 2,5 м	z = 3,75 м	z = 5,0 м	z = 6,25 м
Бимомент (аналитическое решение), кНм^2	0,43	0,39	–0,59	0,19	–0,45	0,25
Бимомент (SCAD++), кНм^2	0,431	0,402	–0,583	0,202	–0,443	0,265
Отклонение, %	0,2	3,1	1,2	6,3	1,6	6

Линейная динамика

Плоская ферма под действием мгновенных импульсов, сосредоточенных в неопорных узлах нижнего пояса



***Цель*:** Определение деформированного состояния плоской фермы от воздействия мгновенных импульсов, сосредоточенных в неопорных узлах нижнего пояса.

Имя файлов с исходными данными: **5.11.SPR, График_5.11.txt**

***Формулировка задачи*:** Плоская двухпролетная ферма с параллельными поясами и раскосной решеткой по три панели равной длины в каждом пролете опирается нижним поясом. В промежуточных (неопорных) узлах нижнего пояса сосредоточены массы M и действуют сосредоточенные мгновенные поперечные импульсы S. Определить собственные формы и частоты колебаний ω плоской фермы, а также поперечные перемещения узловых масс Z во времени.

***Ссылки*:** И.М. Рабинович, А.П. Синицын, О.В. Лужин, В.М. Теренин, Расчет сооружений на импульсные воздействия, Москва, Стройиздат, 1970, стр. 153.

***Исходные данные*:**

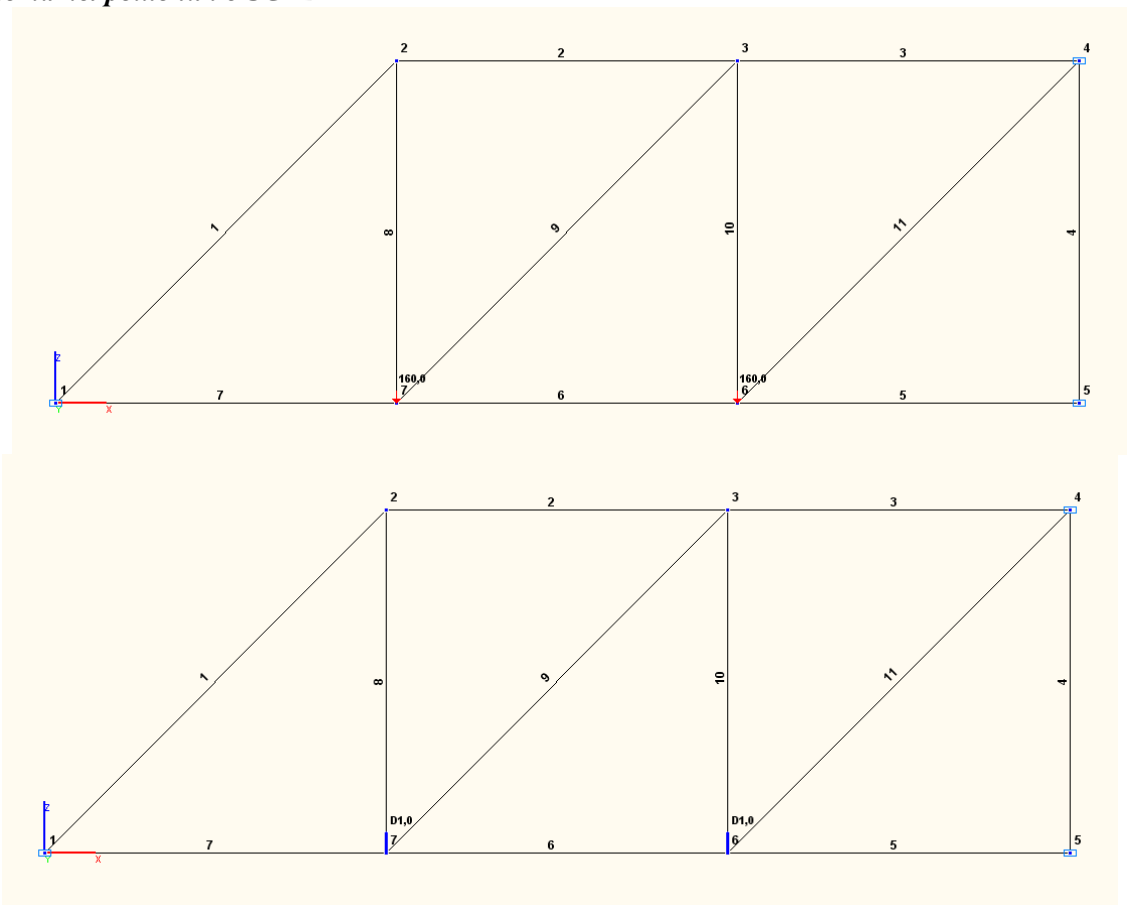
$E = 2.0 \cdot 10^8$ тс/м^2	- модуль упругости;
$F = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2	- площадь поперечного сечения элементов фермы, исключая стойку, находящуюся над средней опорой;
$2 \cdot F = 2 \cdot 10^{-2}$ м^2	- площадь поперечного сечения стойки, находящейся над средней опорой;
a = 2.0 м	- высота фермы и длина панели фермы;
M = 16.0 тс·с^2/м	- значение сосредоточенных масс в промежуточных (неопорных) узлах нижнего пояса фермы;
S = 4.0· тс·с	- значение сосредоточенных мгновенных поперечных импульсов, действующих в промежуточных (неопорных) узлах нижнего пояса фермы;
g = 10.00 м/с^2	- значение ускорения свободного падения.

***Конечно-элементная модель*:** По условиям симметрии конструкции и симметрии действия нагрузок рассматривается только половина фермы с раскреплением нижнего и верхнего пояса на оси симметрии в продольном (горизонтальном) направлении (степень свободы X) и уменьшением в два раза жесткости стойки, находящейся над средней опорой. Расчетная схема – плоская шарнирно-стержневая система, 11 стержневых элементов типа 1. Обеспечение граничных условий по опорным узлам нижнего пояса фермы достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Сосредоточенные массы задаются преобразованием статических узловых нагрузок $M \cdot g$.

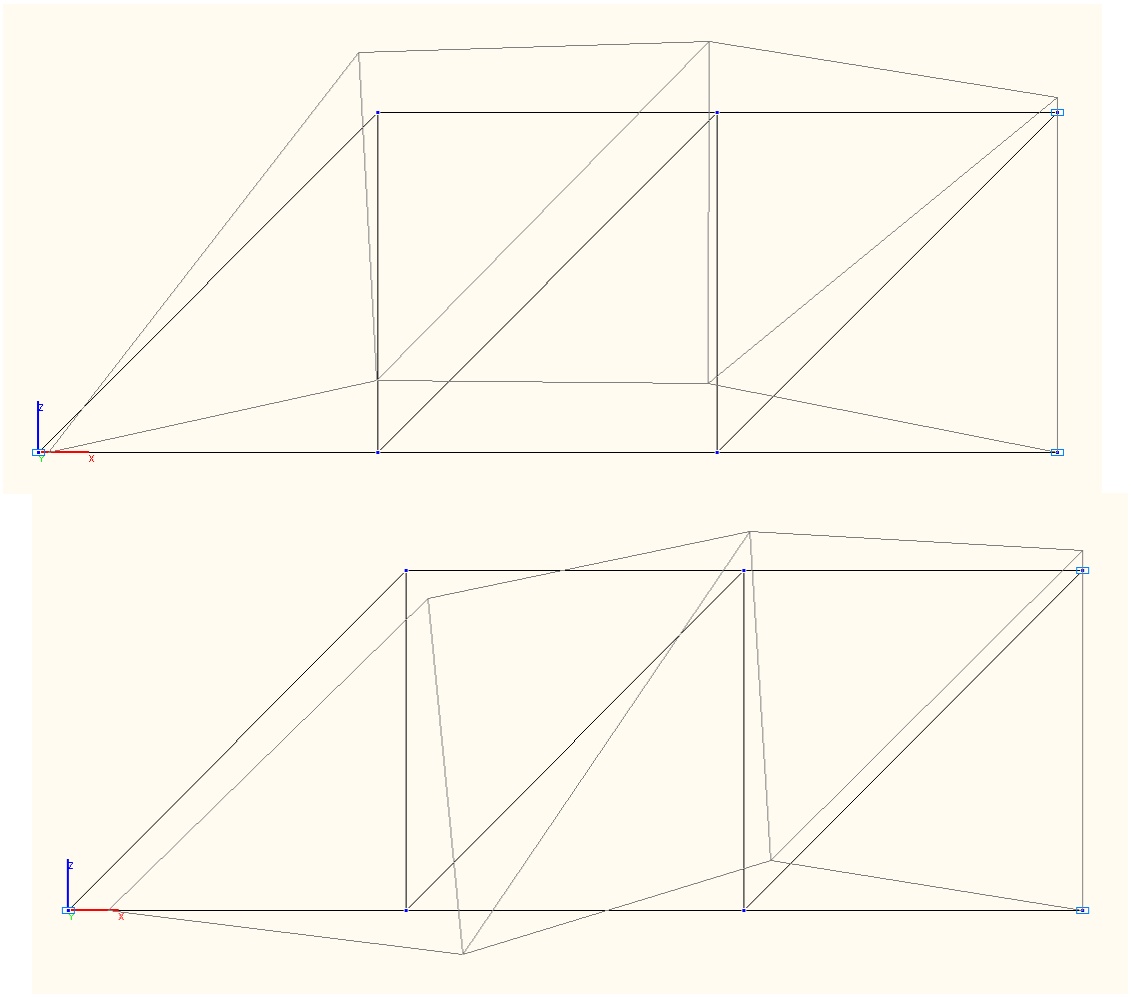
Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний ω, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются поперечные перемещения узловых масс Z во времени. Воздействие сосредоточенных мгновенных поперечных импульсов описывается графиком изменения нагрузки во времени и задается в виде узловых сил, действующих по оси Z общей системы координат с масштабным множителем 1.0 и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы между моментами времени графика изменения нагрузки равны $\Delta t_{int} = 0.00001$ с и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика импульсное воздействие принимается с прямоугольной функцией формы, значением силы P = 400000 тс и продолжительностью во времени $\Delta t_{int} = 0.00001$ с. Продолжительность процесса во времени равна t = 0.12 с, что примерно соответствует величине удвоенного периода колебаний основного тона $4 \cdot \pi / \omega_1$. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с

минимальным значением ξ = 0.0001. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 7. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я и 2-я собственные формы колебаний (симметричные)

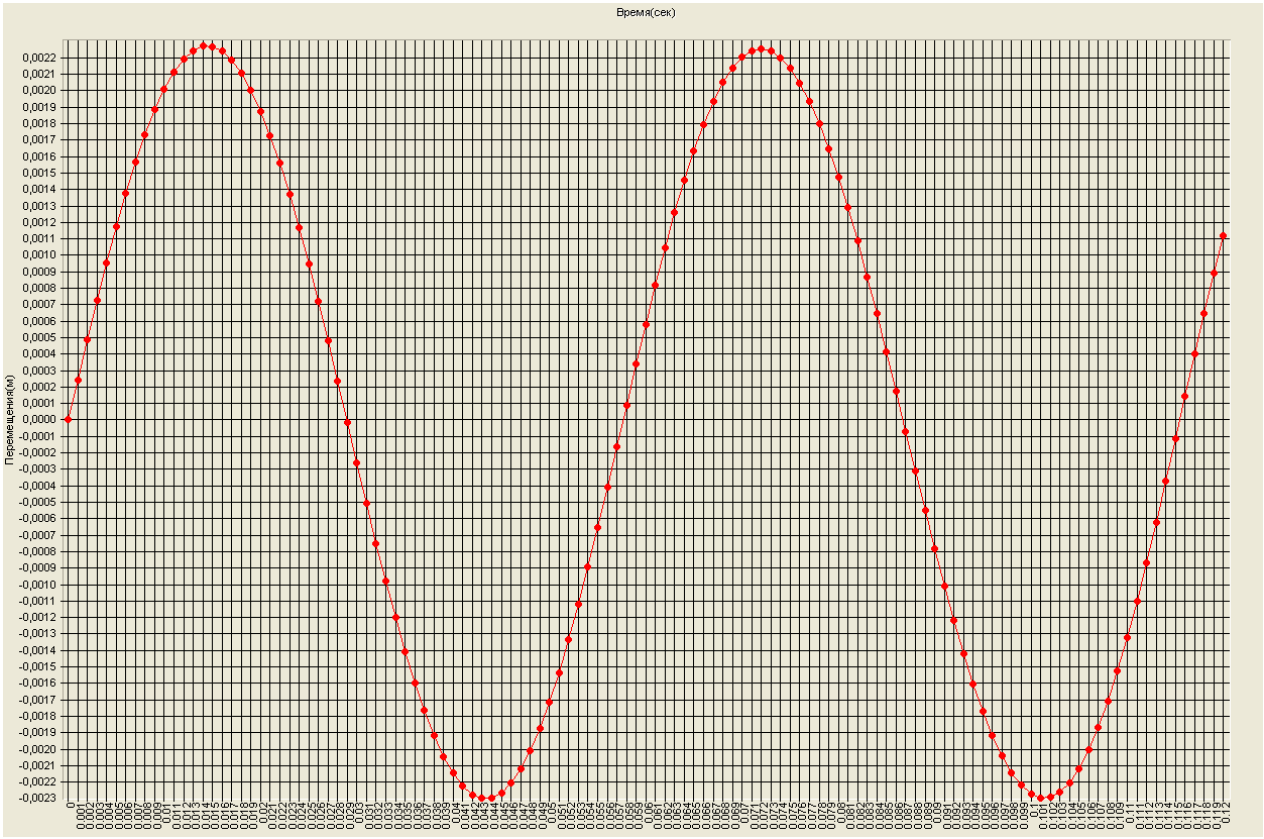


График изменения поперечных перемещений узловой массы Z7 (ближней к крайней опоре) во времени (м)

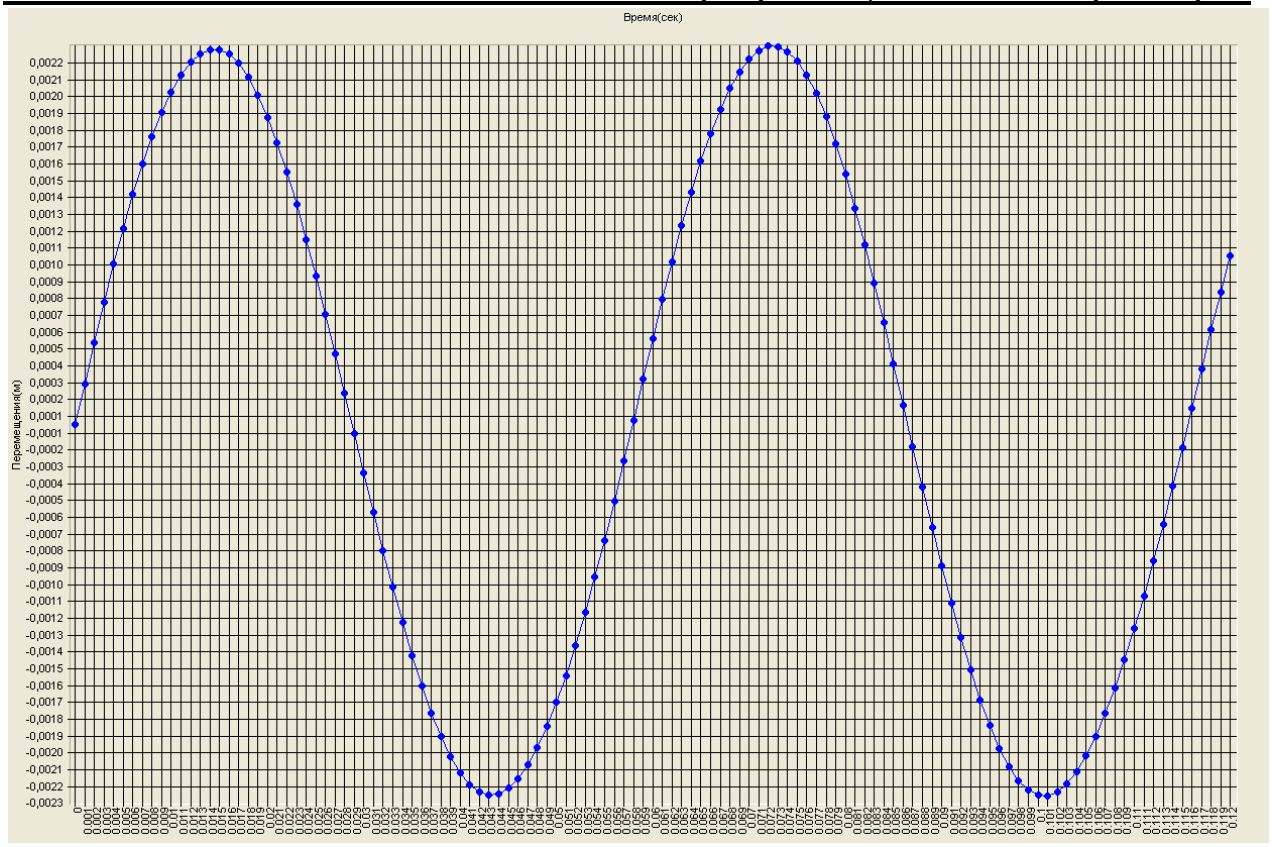
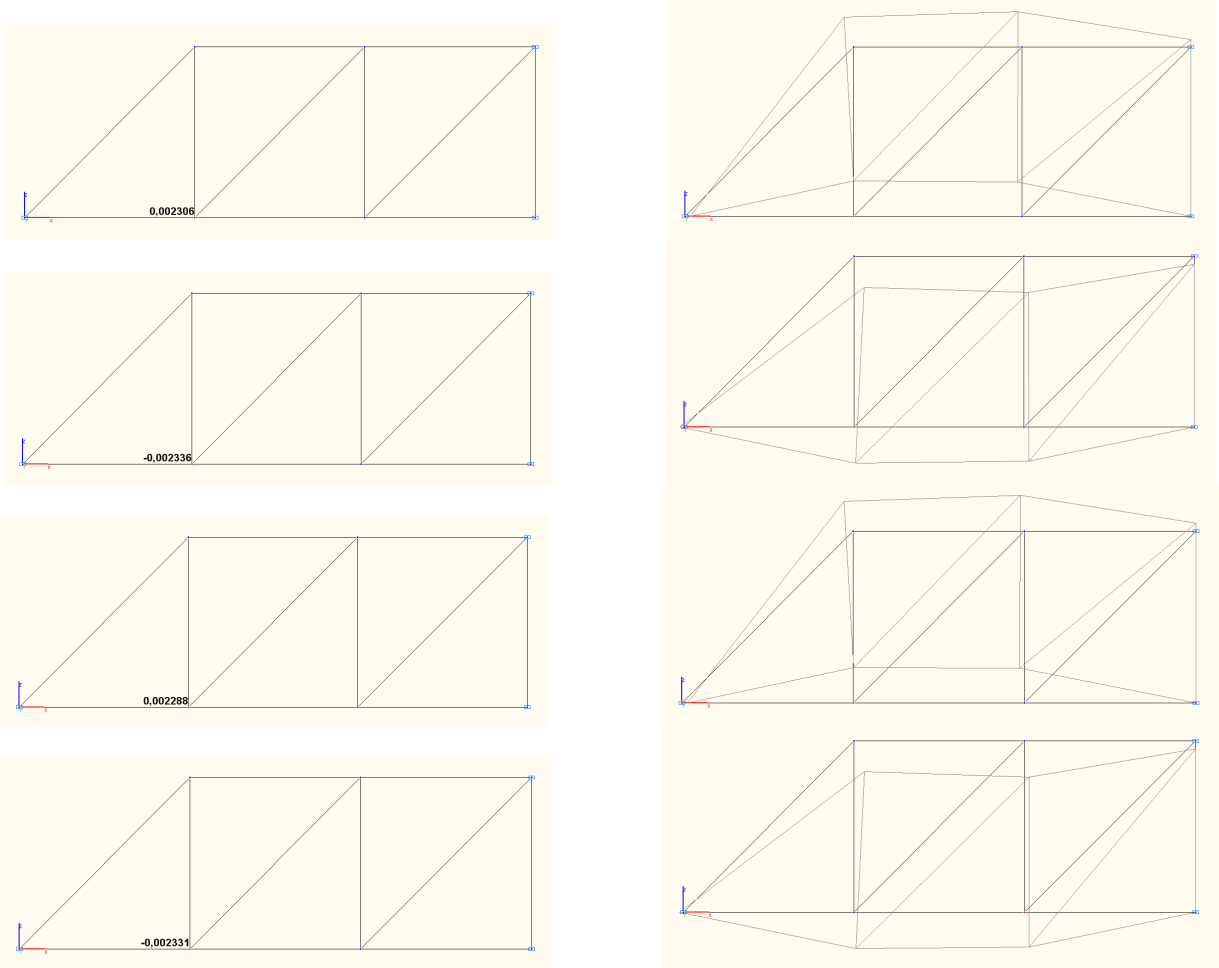
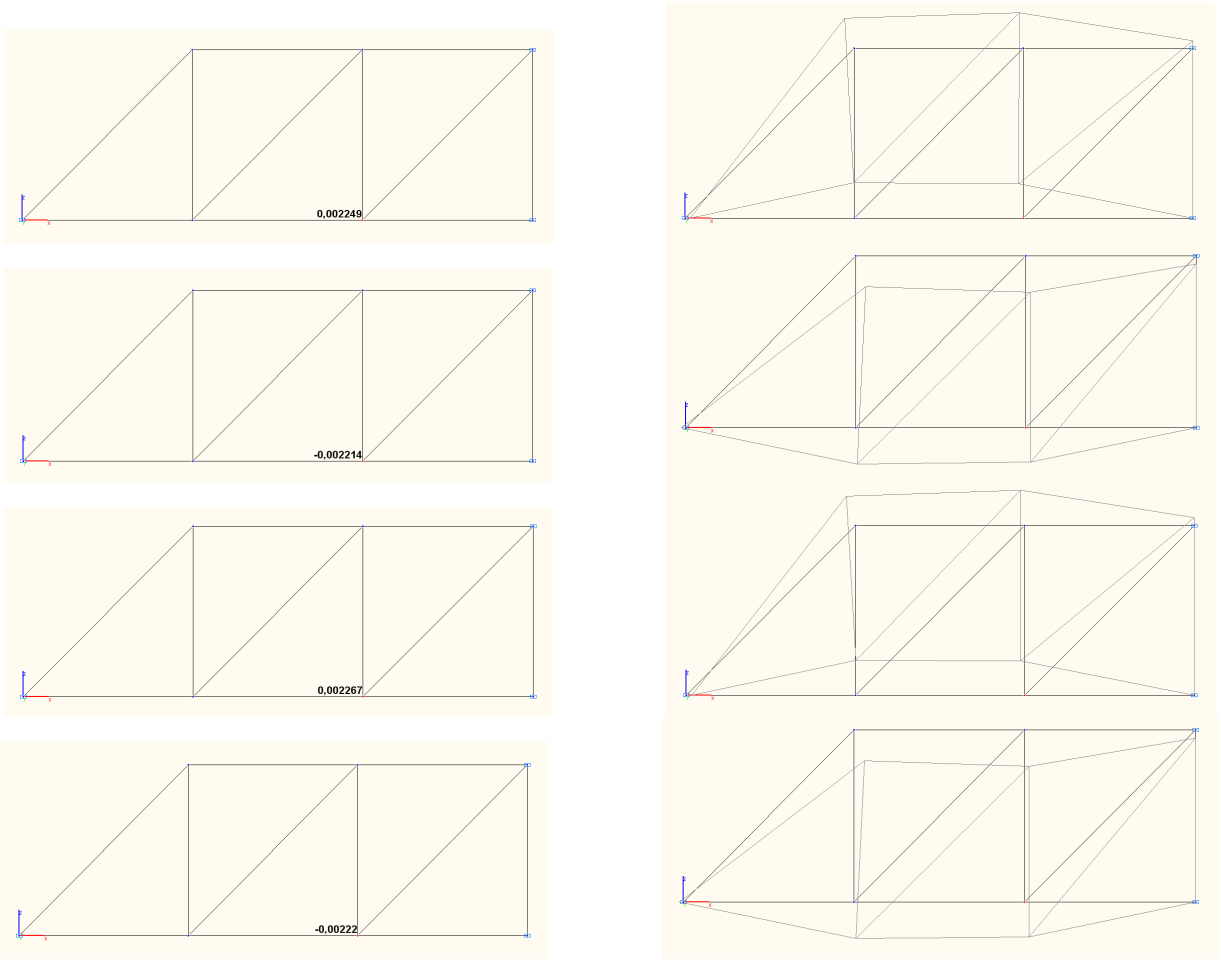


График изменения поперечных перемещений узловой массы Z6 (ближней к средней опоре) во времени (м)



Амплитудные значения поперечных перемещений узловой массы Z7 (м) и деформированные схемы в соответствующие моменты



Амплитудные значения поперечных перемещений узловой массы Z6 (м)
и деформированные схемы в соответствующие моменты

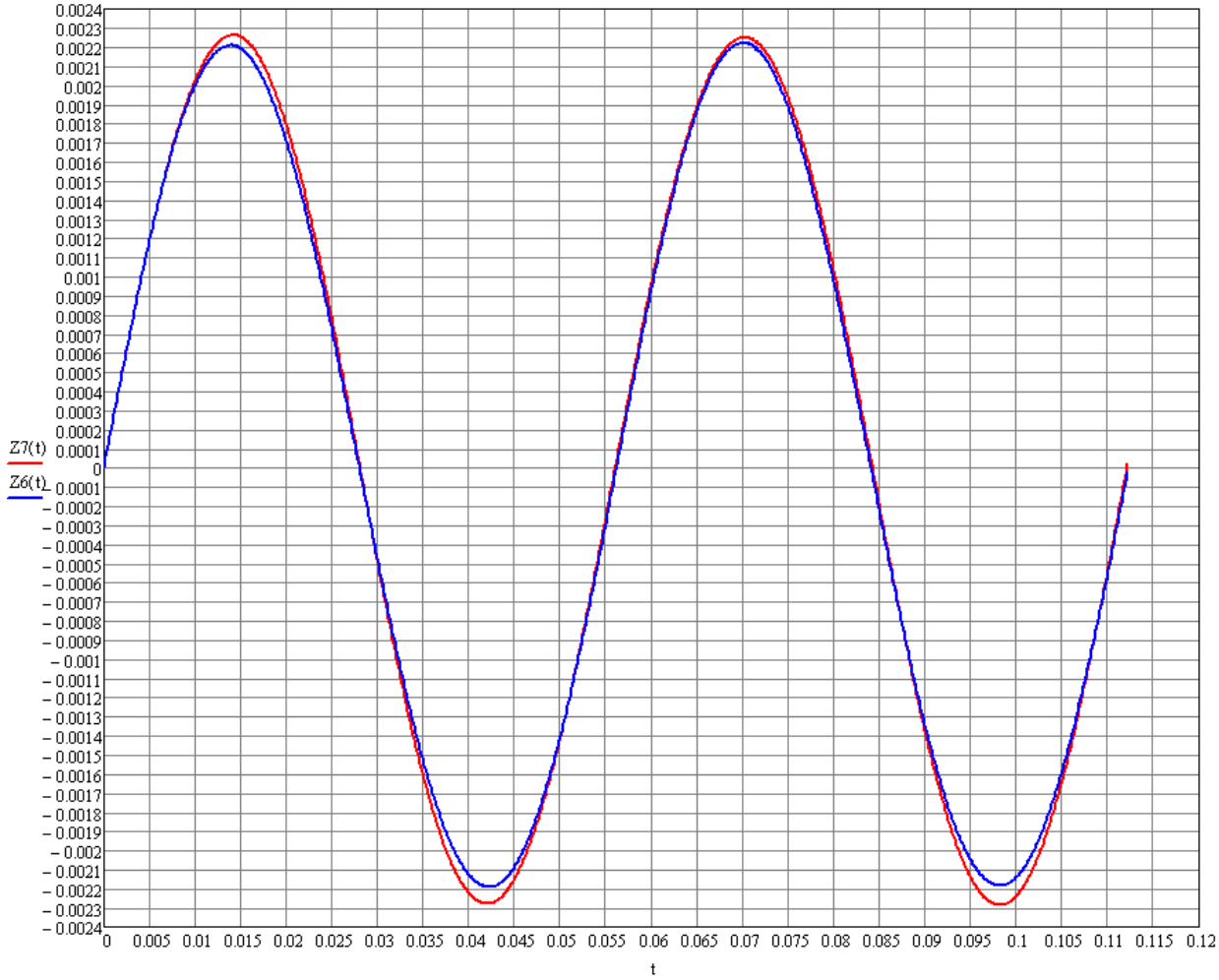
Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	112.0	108.8	2.86
2	208.0	197.4	5.10

Амплитудные значения поперечных перемещений узловых масс Z

Узловая масса	**Теория**		**SCAD**		
	Время, с	**Перемещение, м**	**Время, с**	**Перемещение, м**	**Отклонения, %**
7	0.0142	0.002264	0.0144	0.002306	1.86
7	0.0420	-0.002280	0.0433	-0.002336	2.46
7	0.0702	0.002251	0.0720	0.002288	1.64
7	0.0982	-0.002287	0.1014	-0.002331	1.92
6	0.0139	0.002209	0.0145	0.002249	1.81
6	0.0422	-0.002192	0.0432	-0.002214	1.00
6	0.0701	0.002222	0.0724	0.002267	2.03
6	0.0982	-0.002185	0.1006	-0.002220	1.60



Графики изменения поперечных перемещений узловых масс Z7 и Z6 во времени по теоретическому решению (м)

Замечания: При выводе аналитического решения кроме учета симметрии были приняты следующие допущения:

- пренебрегается смещение масс в продольном (горизонтальном) направлении;
- пренебрегается разность взаимных поперечных (вертикальных) смещений нижних и верхних узлов каждой стойки фермы, ввиду чего массы сосредотачиваются только в нижних узлах.

При аналитическом решении собственные частоты колебаний ω плоской фермы определяются по формулам:

$$\omega_7 = 0.448 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot F}{a \cdot M}}\,; \qquad \omega_6 = 0.832 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot F}{a \cdot M}}\,.$$

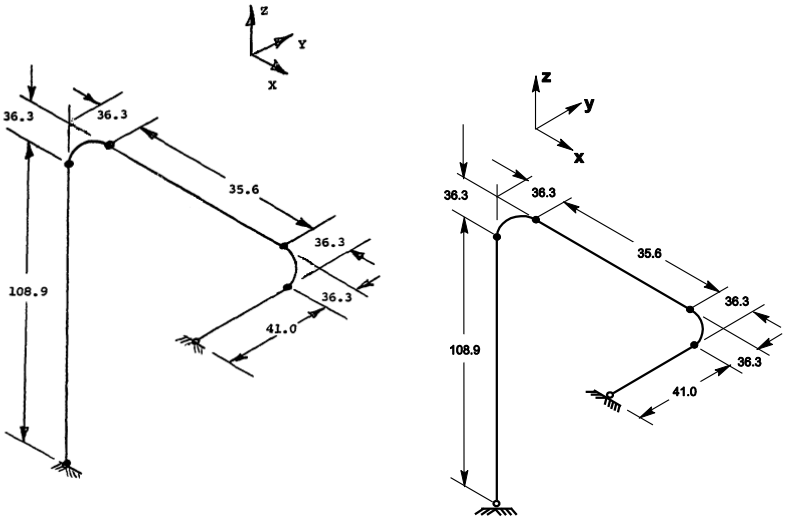
При аналитическом решении поперечные перемещения узловых масс плоской фермы Z во времени определяются по формулам:

$$Z_7 = 1 \cdot \frac{1.016 \cdot S}{0.448 \cdot M} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot M}{E \cdot F}} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) - 1 \cdot \frac{0.016 \cdot S}{0.832 \cdot M} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot M}{E \cdot F}} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t);$$

$$Z_6 = 0.972 \cdot \frac{1.016 \cdot S}{0.448 \cdot M} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot M}{E \cdot F}} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + 1.028 \cdot \frac{0.016 \cdot S}{0.832 \cdot M} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot M}{E \cdot F}} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t).$$

Расхождения с теорией для собственных частот колебаний связаны с тем, что в источнике "ручной" счет выполнен со значительными погрешностями.

Свободные колебания пространственного трубопровода, защемленного по торцам (задача Ховгарда)



Цель: Модальный анализ пространственного трубопровода, защемленного по торцам.

***Имя файла с исходными данными*: 5.1.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний *f* пространственного стального трубопровода, составленного из трех последовательно соединенных и взаимно ортогональных прямых участков, соединенных отводами, защемленного по торцам и заполненного водой.

Ссылки: William Hovgaard, Stresses in Three-dimensional Pipe Bends. Transactions of ASME, vol. 57, FSP 75-12, 1935.

Исходные данные:

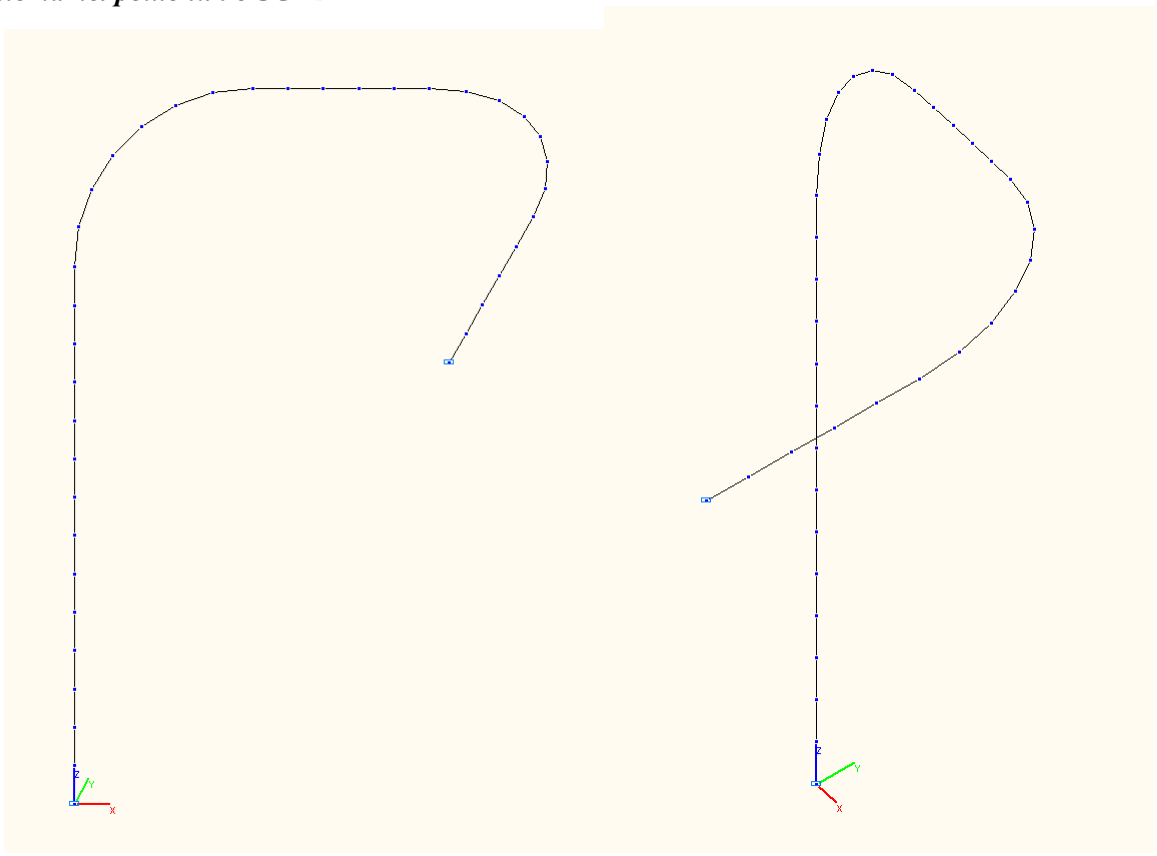
$E = 24.0 \cdot 10^6$ psi $= 1.654740 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$D_e = 7.288$ in $= 0.185115$ м	- наружный диаметр поперечного сечения трубы;
$t = 0.241$ in $= 0.006121$ м	- толщина поперечного сечения трубы;
$\rho_s = 0.283$ lb/in^3 $= 7.833$ т/м^3	- плотность материала трубы (сталь);
$\rho_w = 0.036$ lb/in^3 $= 0.996$ т/м^3	- плотность материала заполнения (вода);
$L_{str1} = 108.9$ in $= 2.766$ м	- длина первого прямого участка трубопровода;
$L_{str2} = 35.6$ in $= 0.904$ м	- длина второго прямого участка трубопровода;
$L_{str3} = 41.0$ in $= 1.041$ м	- длина третьего прямого участка трубопровода;
$R_{elb} = 36.3$ in $= 0.922$ м	- радиус оси отводов трубопровода;

жесткостные характеристики и массы:

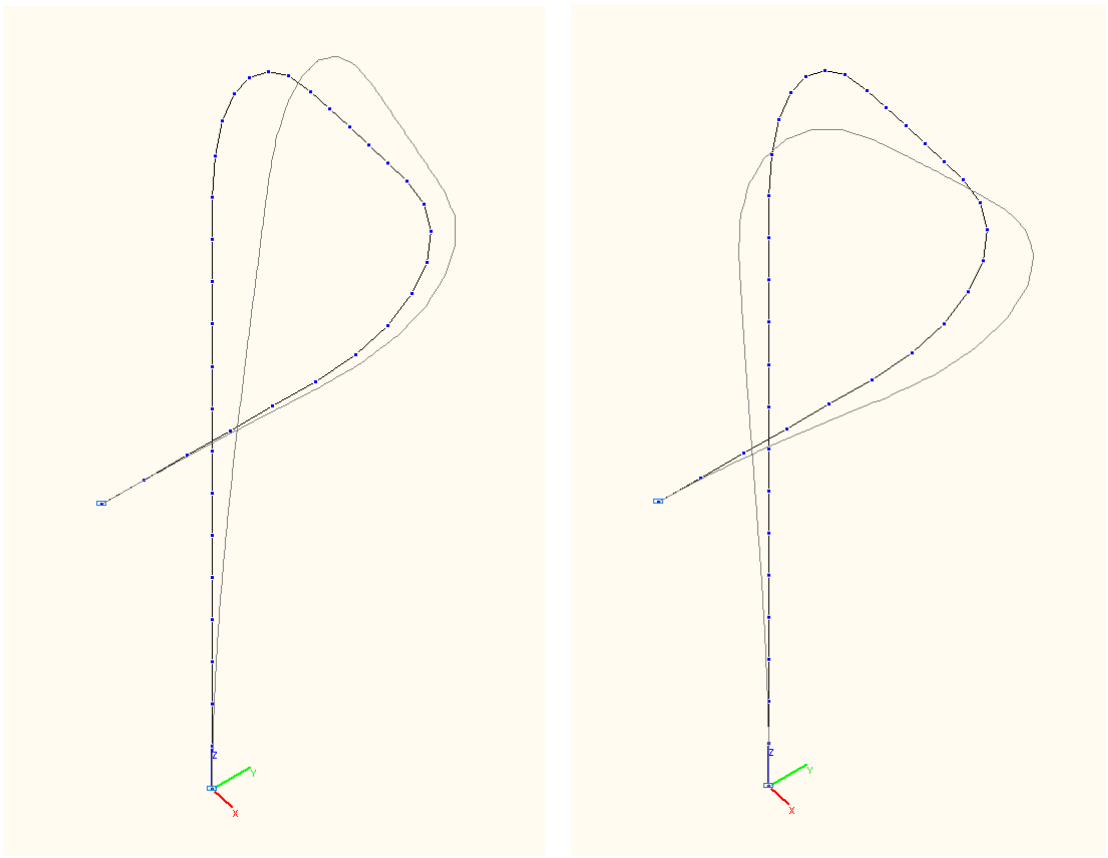
$EA = E \cdot (\pi \cdot D_e^2/4) \cdot (1-(1-2 \cdot t/D_e)^2) = 569598$ кН	- продольная жесткость поперечного сечения трубы;
$EI_{b,str} = E \cdot (\pi \cdot D_e^4/64) \cdot (1-(1-2 \cdot t/D_e)^4) = 2283.81$ кН·м	- изгибная жесткость поперечного сечения прямого участка трубы;
$EI_{b,elb} = E \cdot (\pi \cdot D_e^4/64) \cdot (1-(1-2 \cdot t/D_e)^4)/k = 995.824$ кН·м	- изгибная жесткость поперечного сечения отвода трубы (с учетом сплющивания), где:
$k = (10+12 \cdot \lambda^2)/ (1+12 \cdot \lambda^2) = 2.293391$	- коэффициент гибкости по фон Карману,
$\lambda = t \cdot R_{elb}/((D_e-2 \cdot t)/4) = 0.704654$	- геометрический параметр;
$GI_t = (E/(2 \cdot (1+ \nu)) \cdot (\pi \cdot D_e^4/32) \cdot (1-(1-2 \cdot t/D_e)^4) = 1756.78$ кН·м	- крутильная жесткость поперечного сечения трубы;
$m = \cdot (\pi \cdot D_e^2/4) \cdot (\rho_s - (\rho_s - \rho_w)(1-2 \cdot t/D_e)^2) \cdot g = 0.4938$ кН/м	- погонная статическая нагрузка от веса трубы, заполненной водой.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы трубопровода – 38 стержневых элементов типа 5. Сетка конечных элементов разбита в продольном направлении (вдоль оси X1 местной системы координат) с шагом ≈ 0.2 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ для торцевых узлов трубопровода. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от веса трубы, заполненной водой, *m*. Количество узлов в расчетной схеме – 39. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

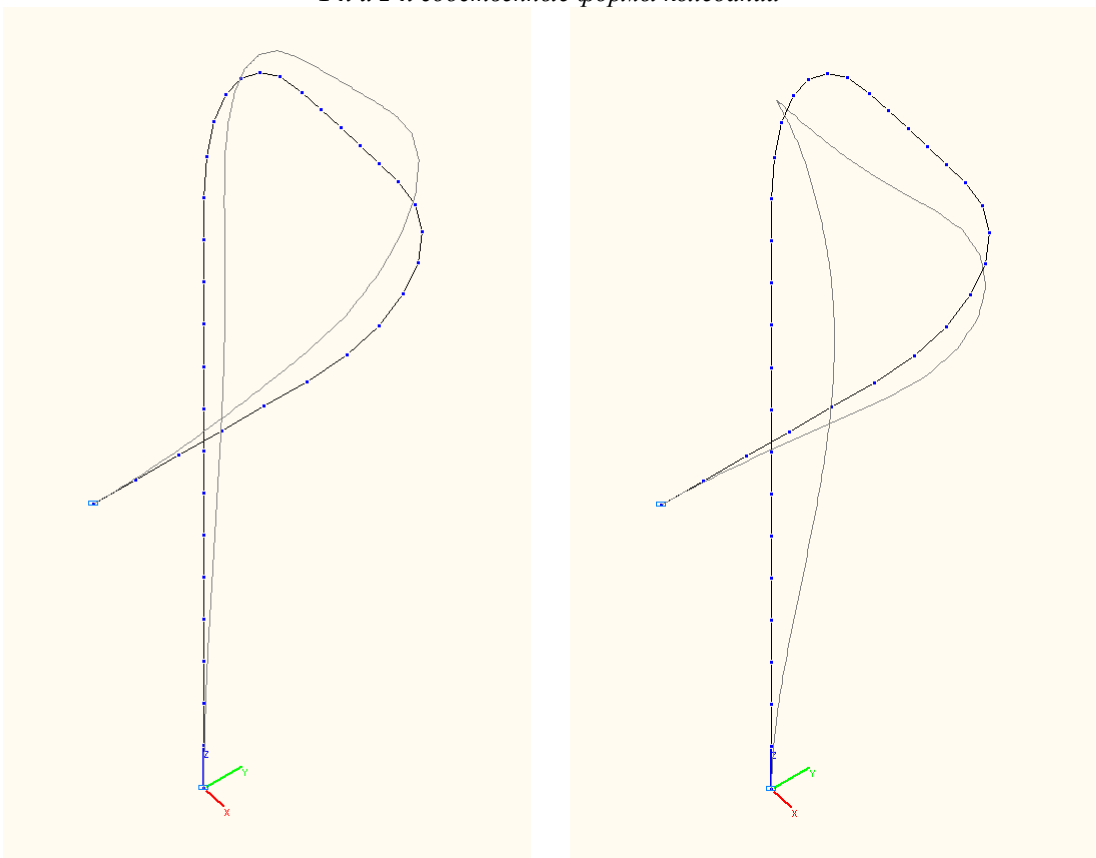
Результаты решения в SCAD



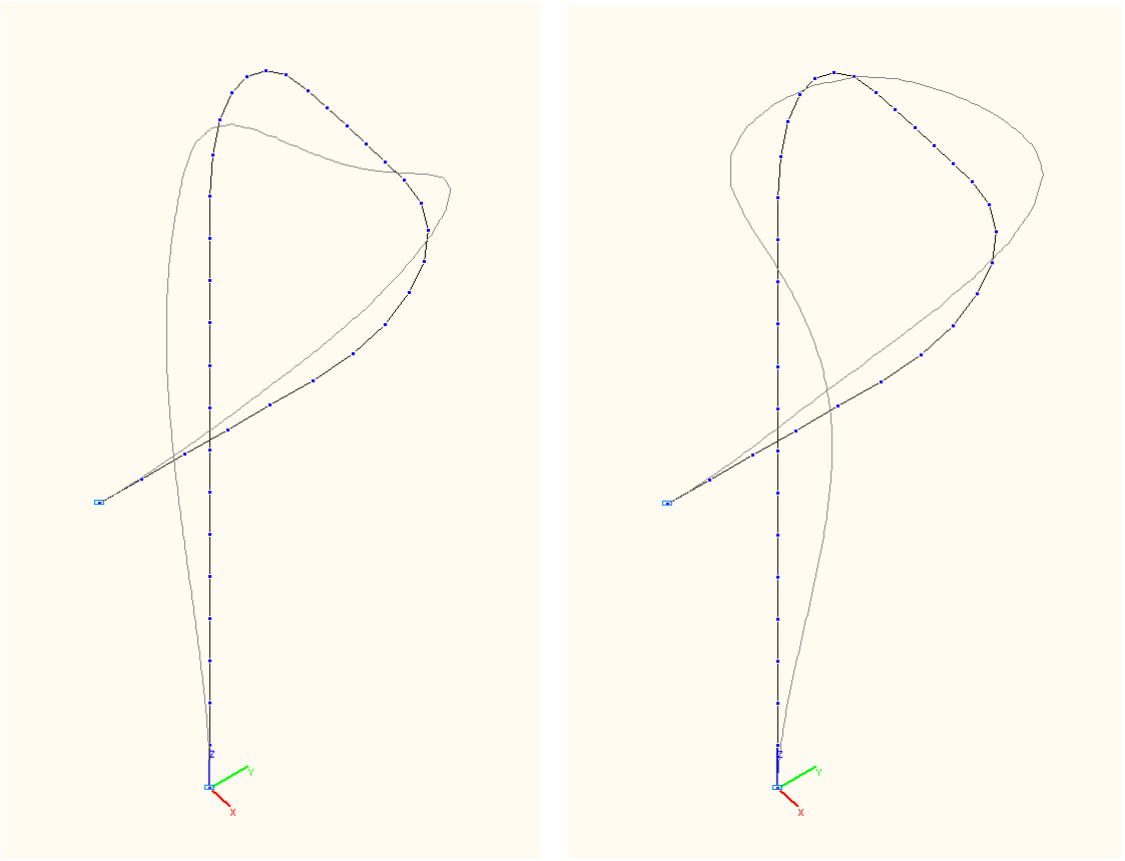
Расчетная схема



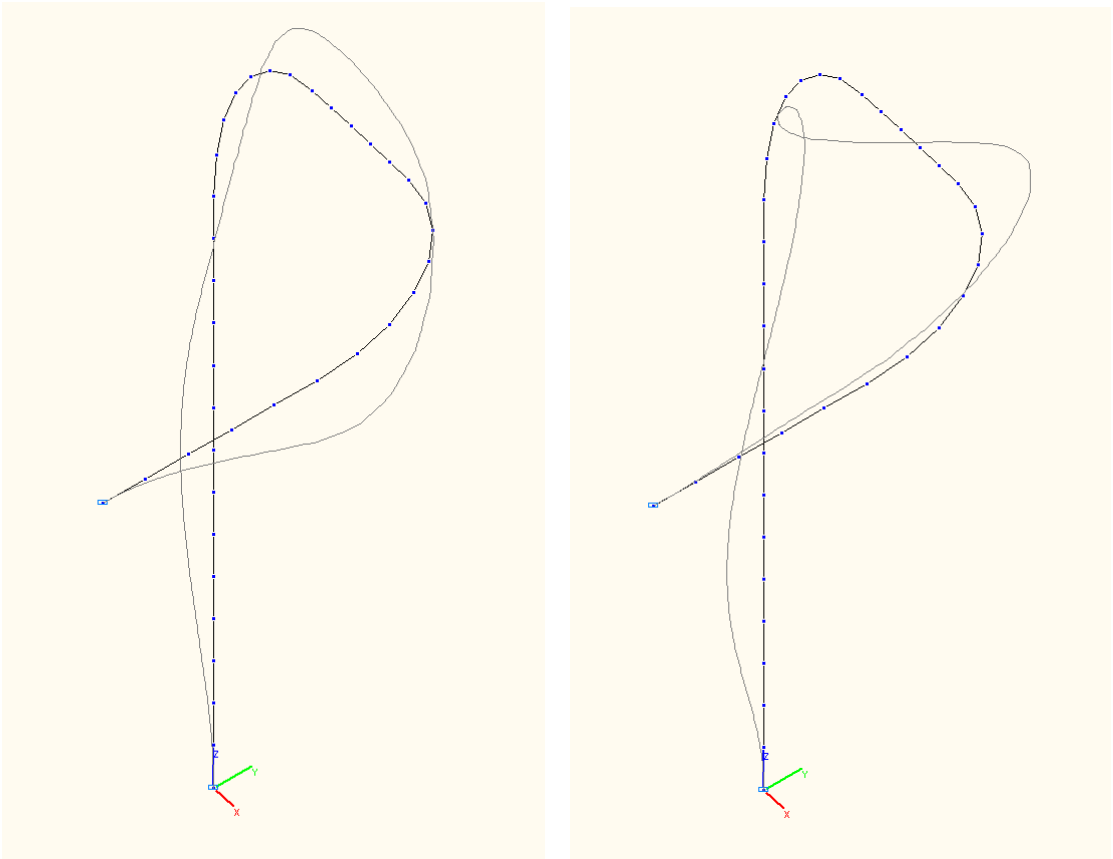
1-я и 2-я собственные формы колебаний



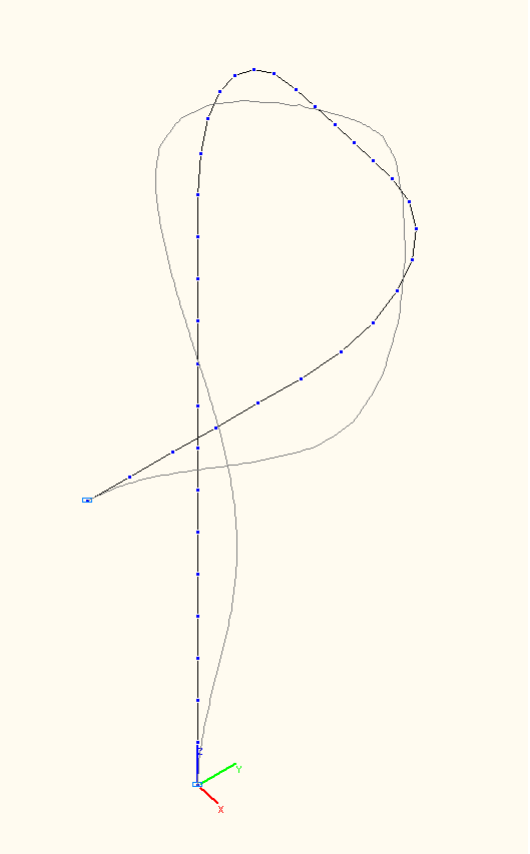
3-я и 4-я собственные формы колебаний



5-я и 6-я собственные формы колебаний



7-я и 8-я собственные формы колебаний



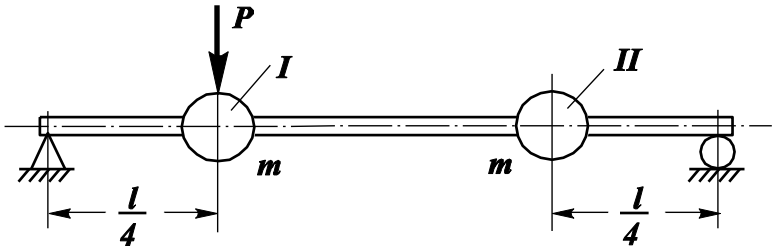
9-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний *f*, Гц

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	10.18	10.01	1.67
2	19.54	19.29	1.28
3	25.47	24.55	3.61
4	48.09	46.79	2.70
5	52.86	50.77	3.95
6	75.94	82.21	8.26
7	80.11	84.29	5.22
8	122.34	126.58	3.47
9	123.15	128.51	4.35

Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной внезапно приложенной постоянной силы



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния свободно опертой невесомой балки с двумя сосредоточенными массами от воздействия на одну из них поперечной внезапно приложенной постоянной силы.

Файлы с исходными данными: **5.12_Sudd_L.SPR, График_5.12_Sudd_L.txt**

Формулировка задачи: К свободно опертой балке постоянного сечения присоединены два одинаковых груза массой *m* на расстоянии четверти пролета от каждой из опор. Собственная масса балки по сравнению с массами грузов пренебрегается. В начальный момент времени к одной из масс прикладывается сила *P*, остающаяся в дальнейшем постоянной. Определить собственные формы и частоты колебаний p свободно опертой балки, а также прогибы η и изгибающие моменты *M* в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени.

Ссылки: С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев, Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть. Москва, Машгиз, 1952, стр. 150.

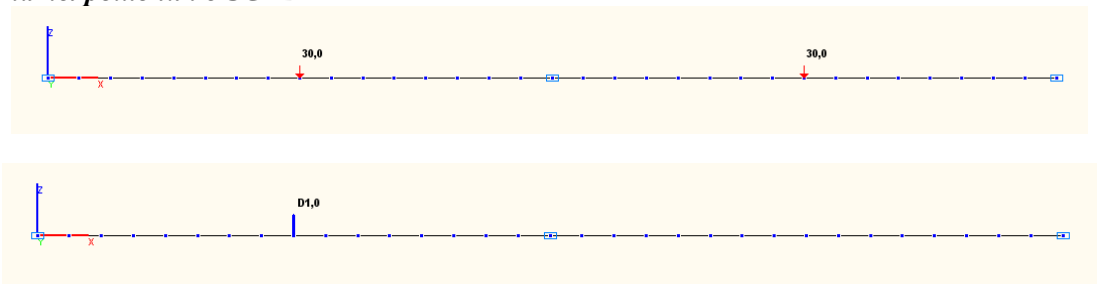
Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^6$ тс/м^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$b = 0.4$ м	- ширина прямоугольного поперечного сечения балки;
$h = 0.8$ м	- высота прямоугольного поперечного сечения балки;
$l = 8.0$ м	- длина пролета балки;
$m = 3.0$ тс·с^2/м	- значение сосредоточенных масс, присоединенных к балке;
$P = 76.8$ тс	- значение поперечной внезапно приложенной постоянной силы, приложенной к одной из масс;
$g = 10.00$ м/с^2	- значение ускорения свободного падения;
$I = b \cdot h^3/12 = 0.017067$	- момент инерции поперечного сечения балки.

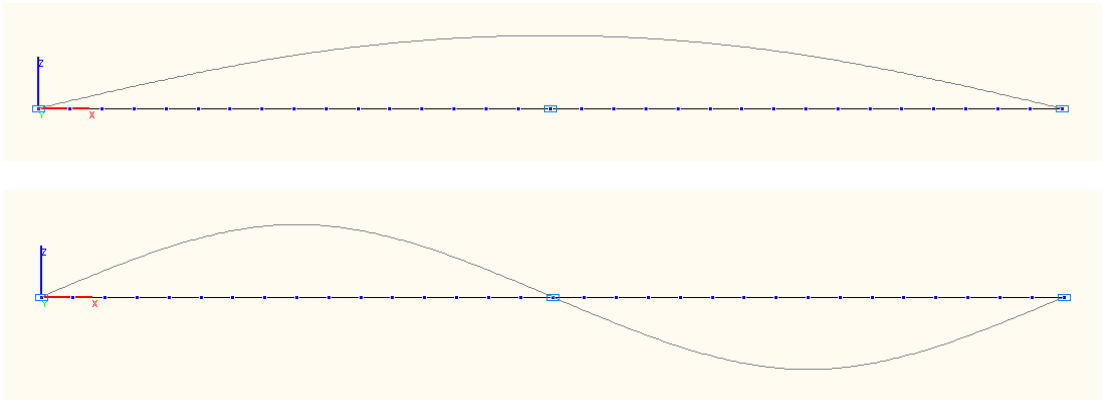
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 32 стержневых элемента типа 2. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле на оси симметрии балки по направлению степени свободы X. Сосредоточенные массы задаются преобразованием статических узловых нагрузок $m \cdot g$. Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний *p*, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются прогибы η и изгибающие моменты *M* в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени. Воздействие поперечной внезапно приложенной постоянной силы описывается графиком изменения нагрузки во времени и задается в виде узловой силы, действующей по оси Z общей системы координат с масштабным множителем 1.0 и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы между моментами времени графика изменения нагрузки равны $\Delta t_{int} = 0.001571$ с ($T_1/100$) и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика воздействие поперечной внезапно приложенной постоянной силы принимается со значением $P = 76.8$ тс во все моменты времени $n \cdot \Delta t_{int}$. Продолжительность процесса во времени равна $t = 0.3142$ с, что соответствует величине

удвоенного периода колебаний основного тона $2 \cdot T_1$. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с минимальным значением $\xi = 0.0001$. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен $k = 0.981$ (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я и 2-я собственные формы колебаний

График изменения прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы, во времени (м)

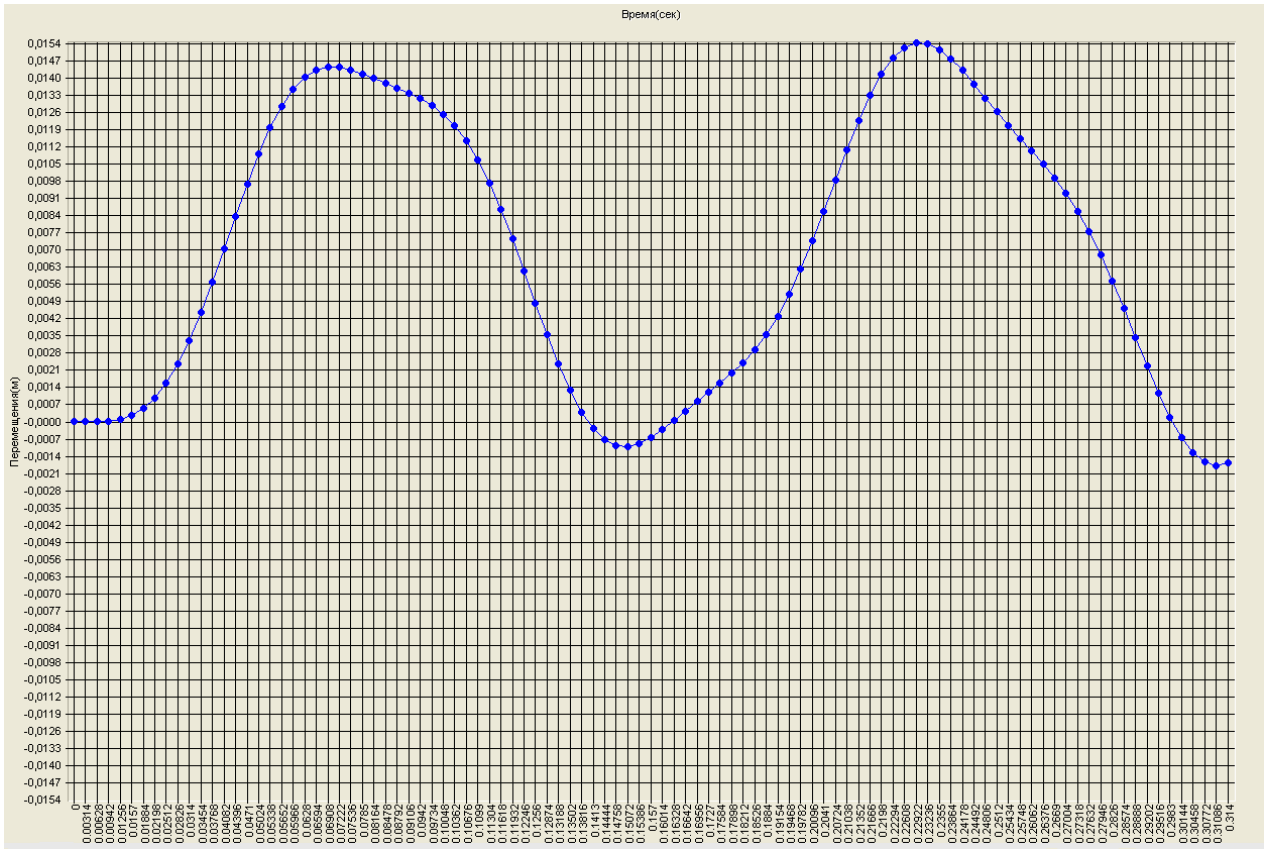
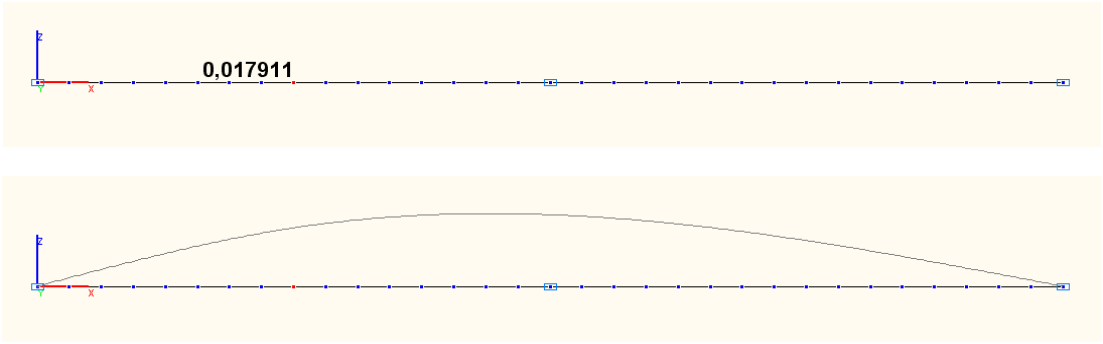
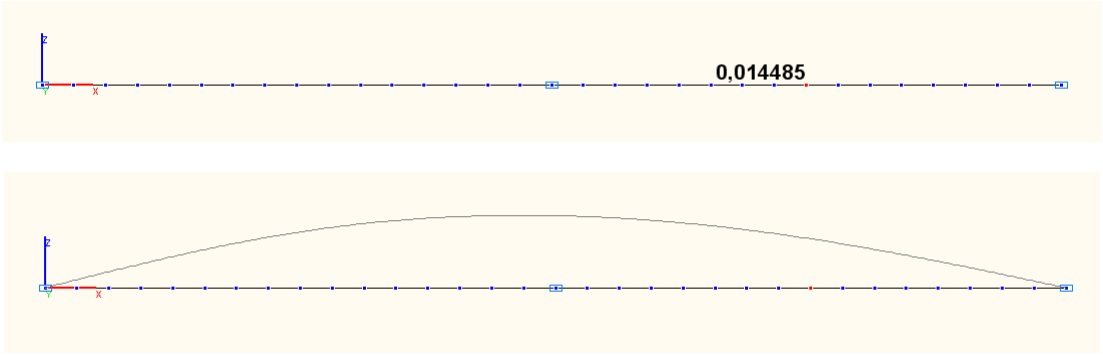


График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м)



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированная схема в соответствующий момент (м)



Амплитудное значение прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированная схема в соответствующий момент (м)

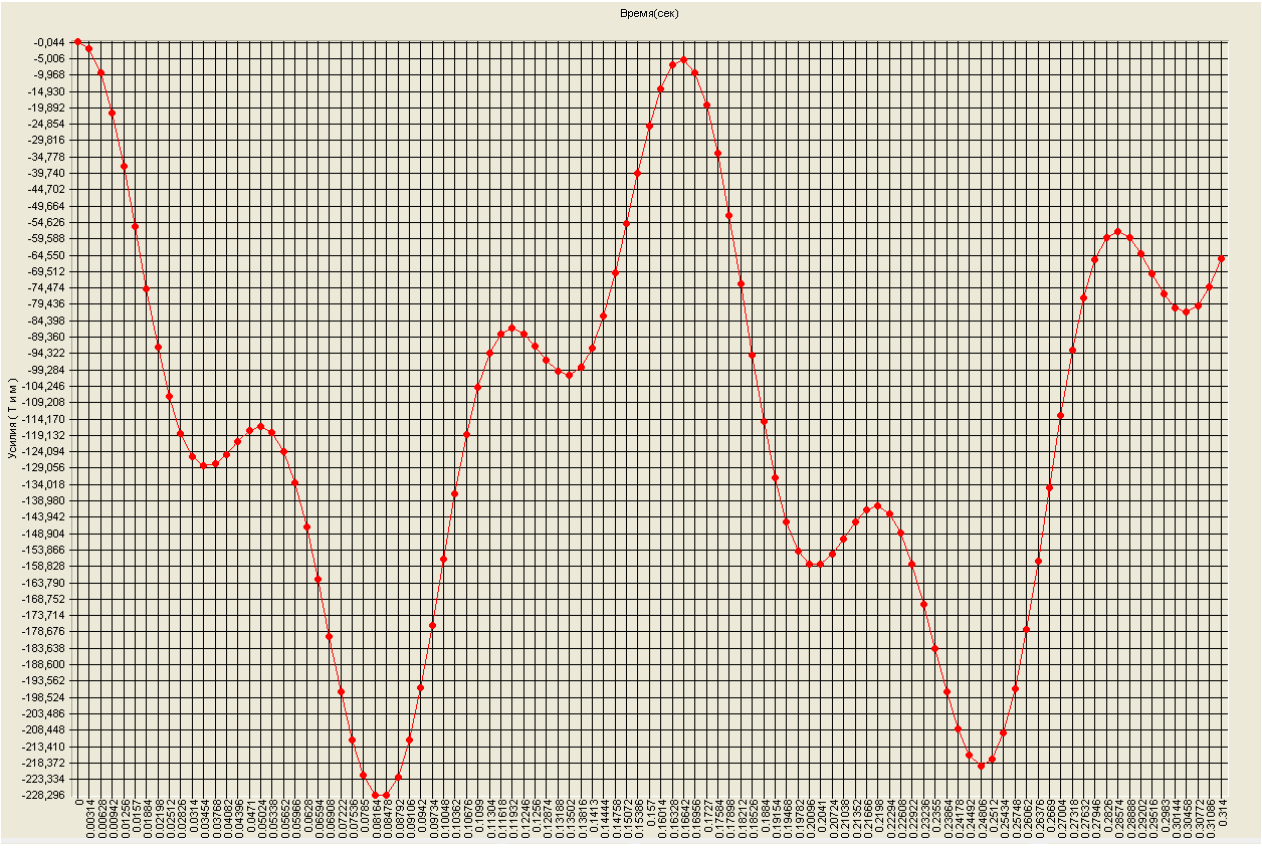


График изменения изгибающего момента M_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы, во времени (тм·м)

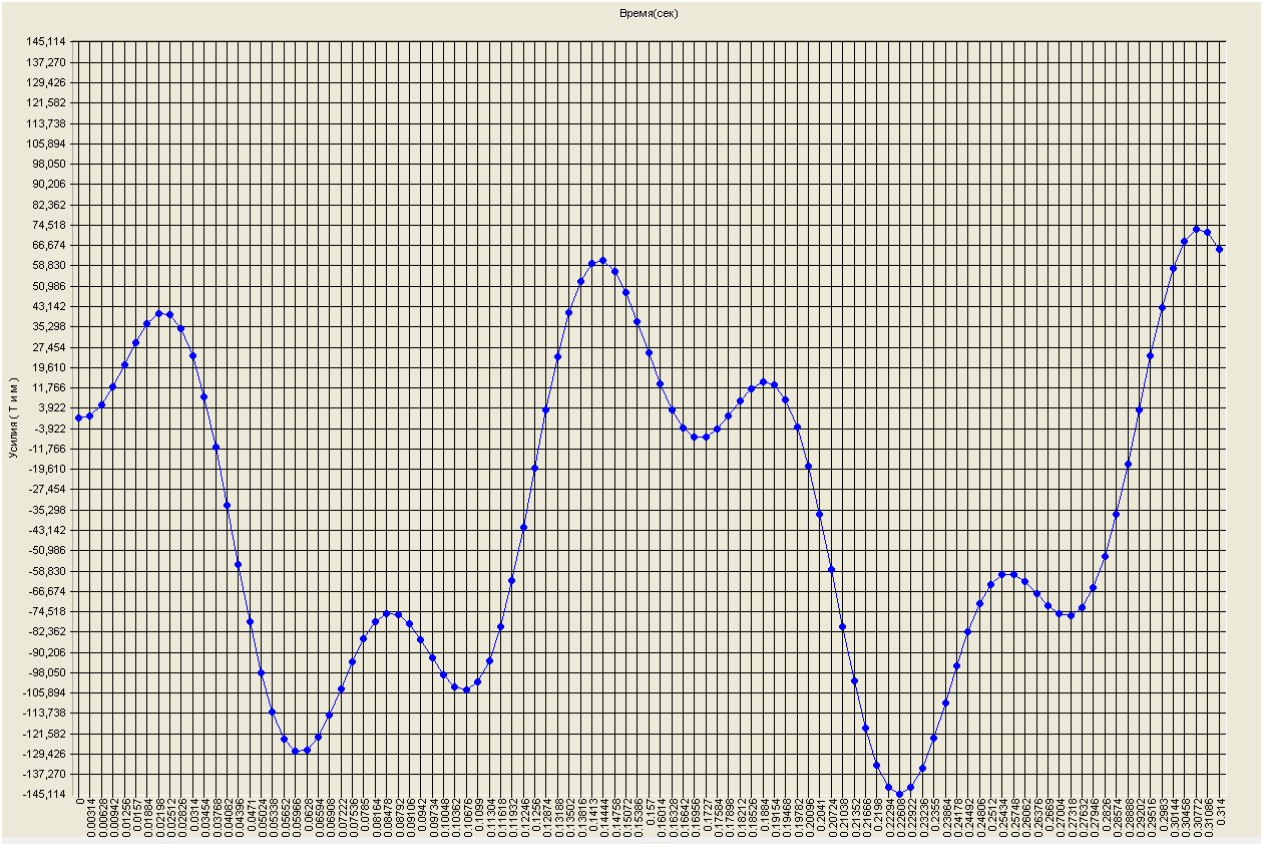
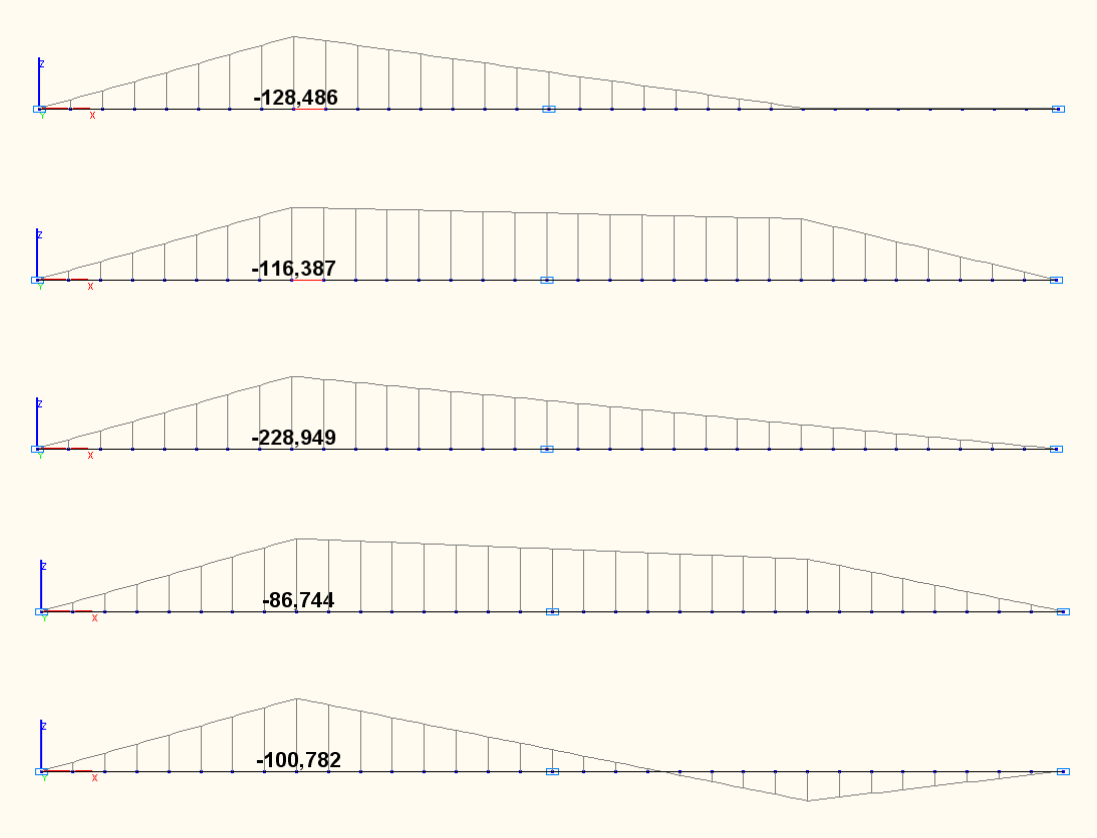
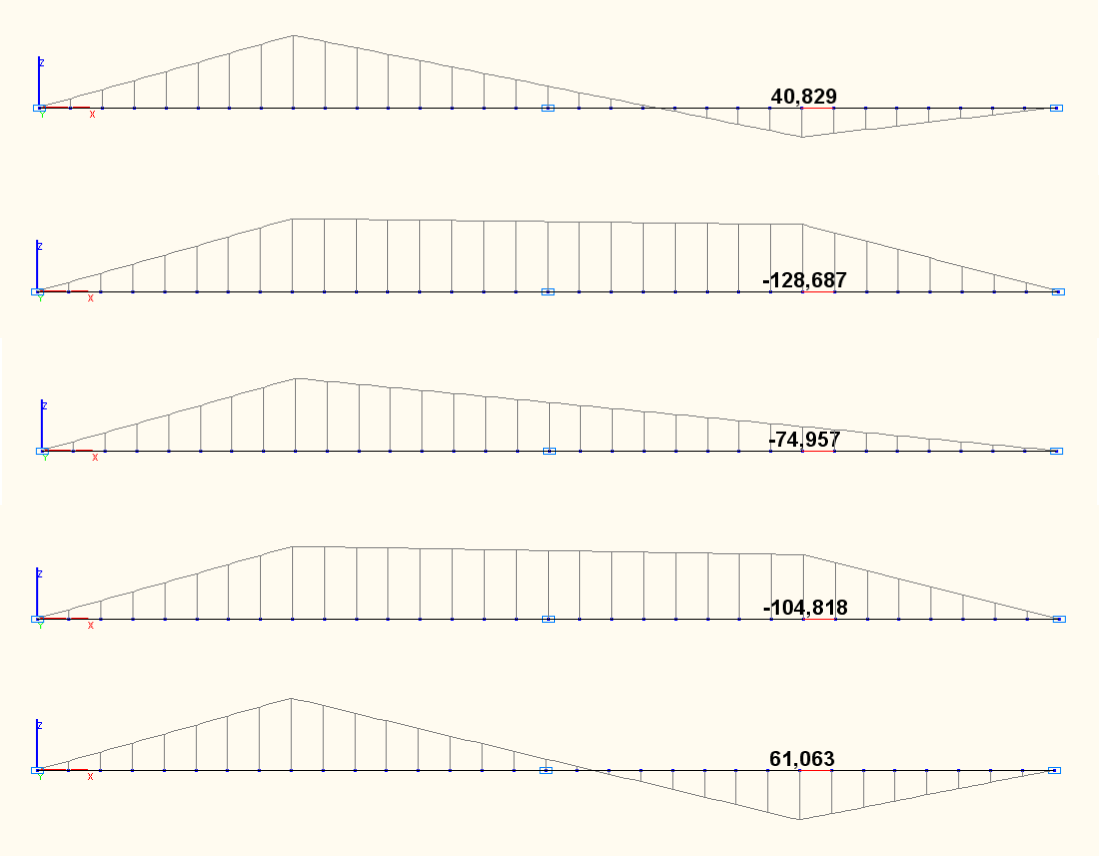


График изменения изгибающего момента M_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (тм·м)

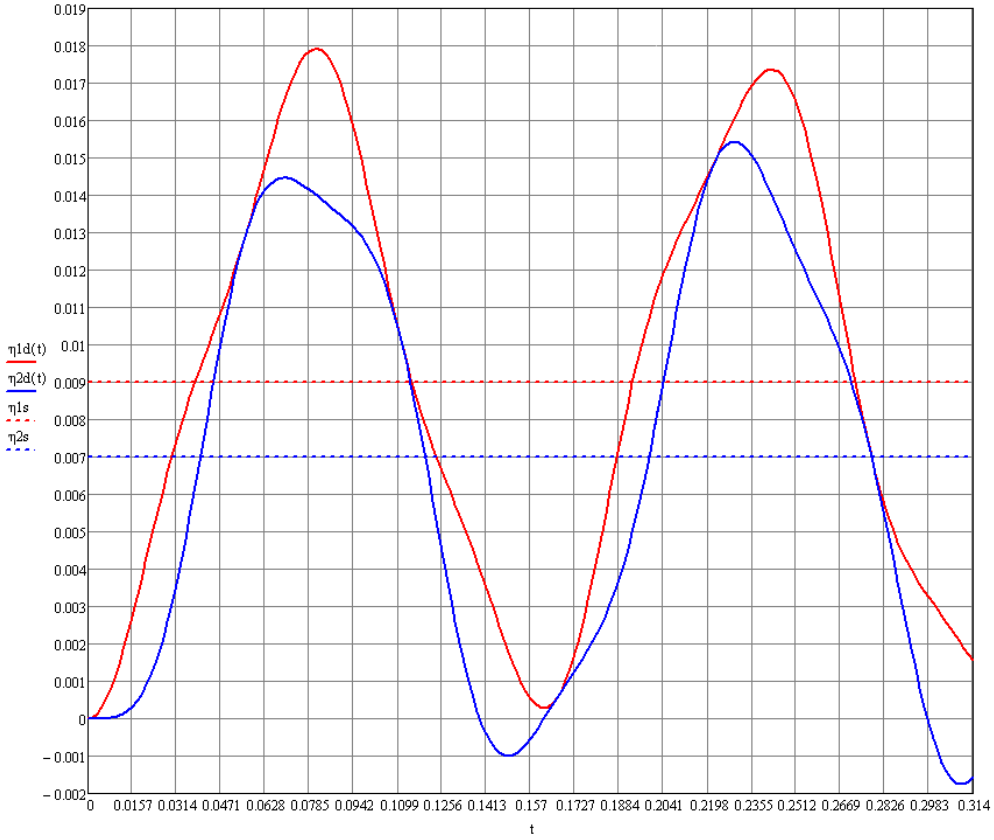


Амплитудные значения изгибающего момента M_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы (тм·м)



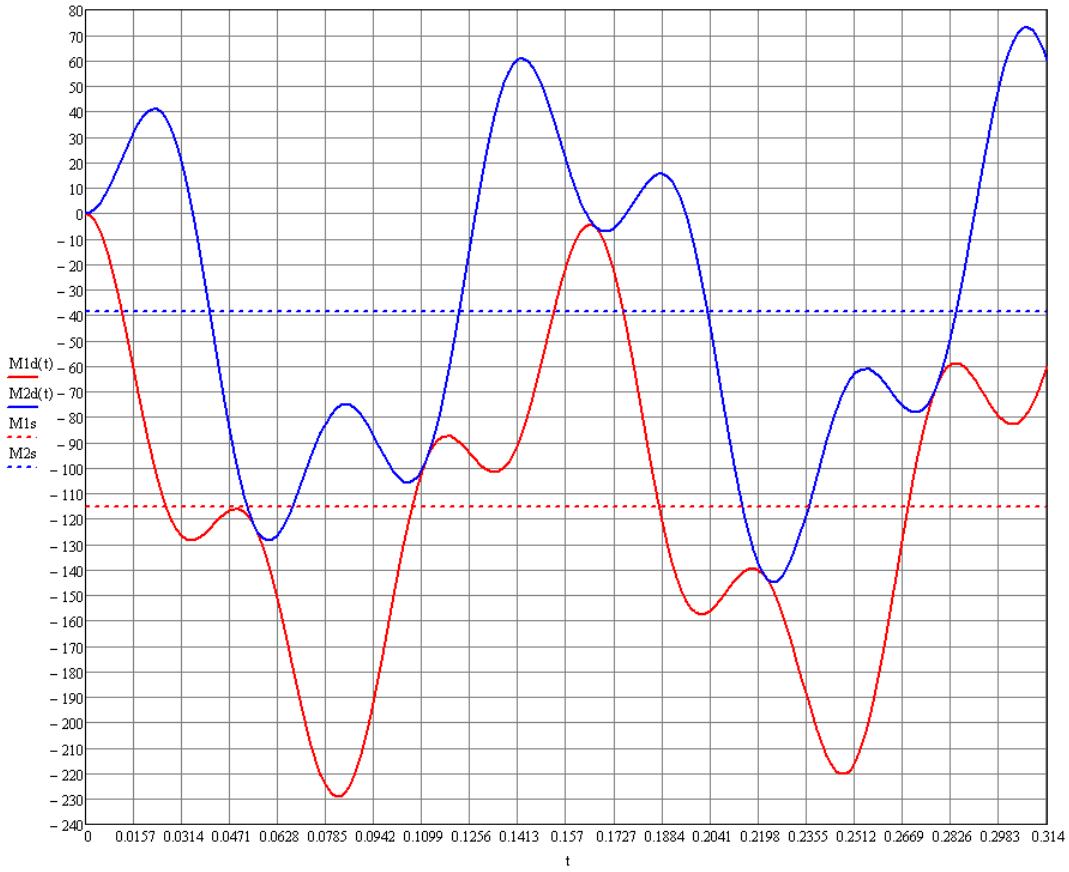
Амплитудные значения изгибающего момента M_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы (тм·м)

Сравнение решений:



Пунктиром показаны значения статических прогибов

Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)



Пунктиром показаны значения статических изгибающих моментов

Графики изменения изгибающих моментов M_1 и M_2 в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (тс·м)

Собственные частоты колебаний *p*, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	40.000	40.000	0.00
2	113.137	113.137	0.00

Амплитудное значение прогибов η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами, м

Узловая масса	**Теория**		**SCAD**		
	Время, с	**Прогиб, м**	**Время, с**	**Прогиб, м**	**Отклонения, %**
1	0.0809	0.017928	0.0817	0.017911	0.09
2	0.0695	0.014474	0.0707	0.014485	0.08

Амплитудное значение изгибающих моментов *M* в поперечных сечениях балки с присоединенными массами, тс·м

Узловая масса	**Теория**		**SCAD**		
	Время, с	**Изгибающий момент, тс·м**	**Время, с**	**Изгибающий момент, тс·м**	**Отклонения, %**
1	0.0346	-128.426	0.0361	-128.486	0.05
1	0.0493	-115.960	0.0503	-116.387	0.37
1	0.0824	-229.286	0.0833	-228.949	0.15
1	0.1180	-87.419	0.1194	-86.744	0.77
1	0.1334	-101.705	0.1351	-100.782	0.91
2	0.0226	+41.120	0.0236	+40.829	0.71
2	0.0599	-128.638	0.0613	-128.687	0.04

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	**Изгибающий момент, тс·м**	**Время, с**	**Изгибающий момент, тс·м**	**Отклонения, %**
2	0.0849	-74.952	0.0864	-74.957	0.01
2	0.1052	-105.748	0.1068	-104.818	0.88
2	0.1423	+60.864	0.1430	+61.063	0.33

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний *p* свободно опертой балки определяются по формулам:

$$p_1 = \sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}}; \qquad p_2 = \sqrt{\frac{384 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}}.$$

При аналитическом решении прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени определяются по формулам:

$$\eta_1(t) = \frac{P \cdot l^3}{768 \cdot E \cdot I} \cdot \left[8 \cdot \left(1 - cos\left(p_1 \cdot t\right)\right) + \left(1 - cos\left(p_2 \cdot t\right)\right)\right];$$

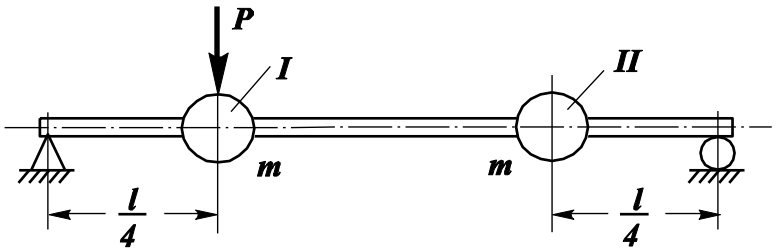
$$\eta_2(t) = \frac{P \cdot l^3}{768 \cdot E \cdot I} \cdot \left[8 \cdot \left(1 - cos\left(p_1 \cdot t\right)\right) - \left(1 - cos\left(p_2 \cdot t\right)\right)\right].$$

При аналитическом решении изгибающие моменты *M* в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени определяются по формулам:

$$M_1(t) = -\frac{P \cdot l}{16} \cdot \left[2 \cdot \left(1 - cos\left(p_1 \cdot t\right)\right) + \left(1 - cos\left(p_2 \cdot t\right)\right)\right];$$

$$M_2(t) = -\frac{P \cdot l}{16} \cdot \left[2 \cdot \left(1 - cos\left(p_1 \cdot t\right)\right) - \left(1 - cos\left(p_2 \cdot t\right)\right)\right].$$

Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы



Цель: Определение деформированного состояния свободно опертой невесомой балки с двумя сосредоточенными массами от воздействия на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы.

Файлы с исходными данными: **5.12_Harm_L.SPR**
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_1.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_2.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_3.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_4.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_5.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_6.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_7.txt

Формулировка задачи: К свободно опертой балке постоянного сечения присоединены два одинаковых груза массой m на расстоянии четверти пролета от каждой из опор. Собственная масса балки по сравнению с массами грузов пренебрегается. В начальный момент времени к одной из масс прикладывается сила P_0, в дальнейшем гармонически изменяющаяся с частотой ω. Определить собственные формы и частоты колебаний p свободно опертой балки, а также прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени.

Ссылки: С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев, Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть. Москва, Машгиз, 1952, стр. 153.

Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^6$ тс/м^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$b = 0.4$ м	- ширина прямоугольного поперечного сечения балки;
$h = 0.8$ м	- высота прямоугольного поперечного сечения балки;
$l = 8.0$ м	- длина пролета балки;
$m = 3.0$ тс·с^2/м	- значение сосредоточенных масс, присоединенных к балке;
$P_0 = 76.8$ тс	- амплитудное значение гармонической возмущающей силы, приложенной к одной из масс;
$g = 10.00$ м/с^2	- значение ускорения свободного падения;
$I = b \cdot h^3/12 = 0.017067$	- момент инерции поперечного сечения балки.

Рассматриваются следующие значения частот гармонической возмущающей силы ω_i в зависимости от значений частот собственных колебаний балки p_i:

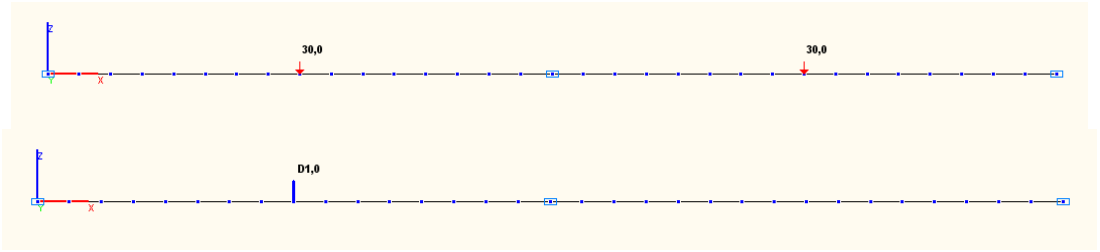
$\omega_j = 0.5 \cdot p_1;\ 0.95 \cdot p_1;\ 1.05 \cdot p_1;\ 0.5 \cdot (p_1 + p_2);\ 0.95 \cdot p_2;\ 1.05 \cdot p_2;\ 1.5 \cdot p_2$.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 32 стержневых элемента типа 2. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по

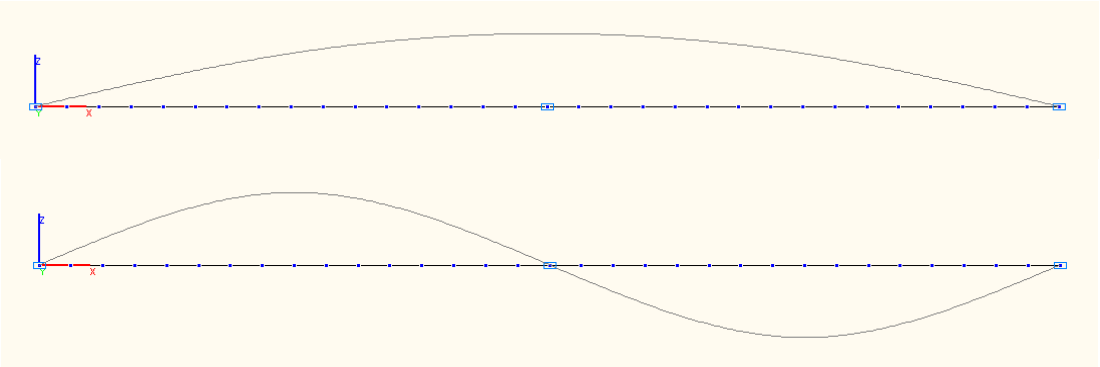
направлению степени свободы X. Сосредоточенные массы задаются преобразованием статических узловых нагрузок $m \cdot g$.

Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний p, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени. Воздействие поперечной гармонической возмущающей силы описывается графиком изменения нагрузки во времени и задается в виде узловой силы, действующей по оси Z общей системы координат с масштабным множителем 1.0 и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы между моментами времени графика изменения нагрузки равны $\Delta t_{int} = T_j/100$, где T_j – период воздействия гармонической возмущающей силы, и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика воздействие поперечной гармонической возмущающей силы принимается со значениями $P_n = P_0 \cdot \cos(\omega_j \cdot n \cdot \Delta t_{int})$ в моменты времени $n \cdot \Delta t_{int}$. Продолжительность процесса во времени равна $t = 2 \cdot T_j$. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с минимальным значением $\xi = 0.0001$. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я и 2-я собственные формы колебаний

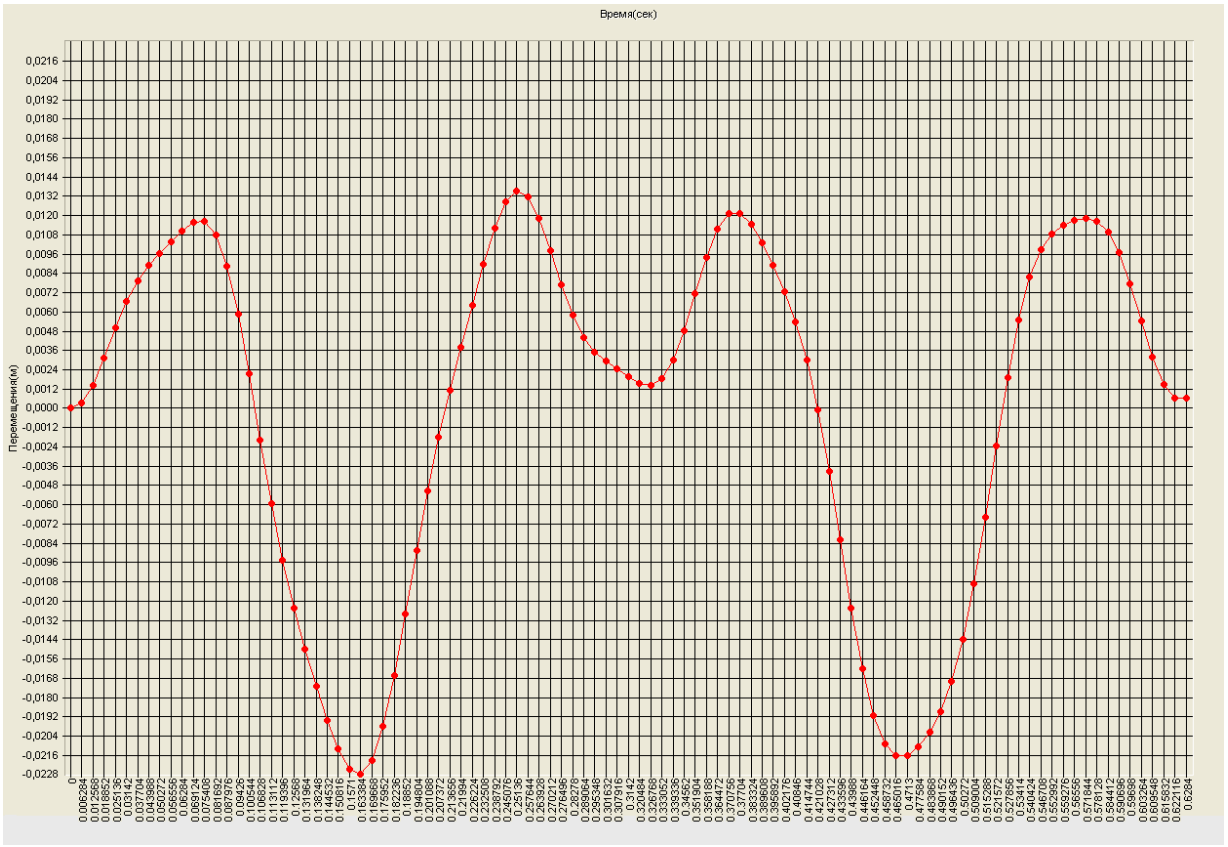


График изменения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$

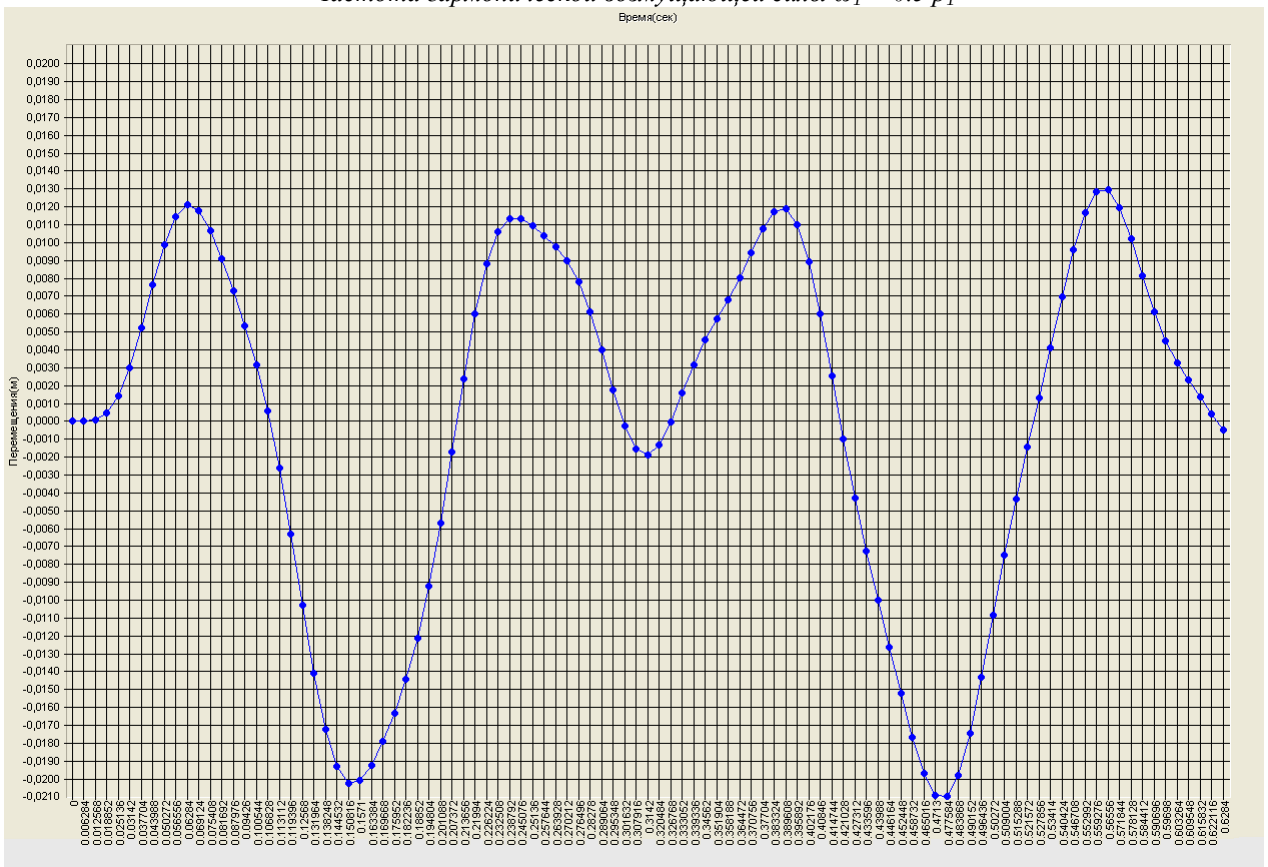
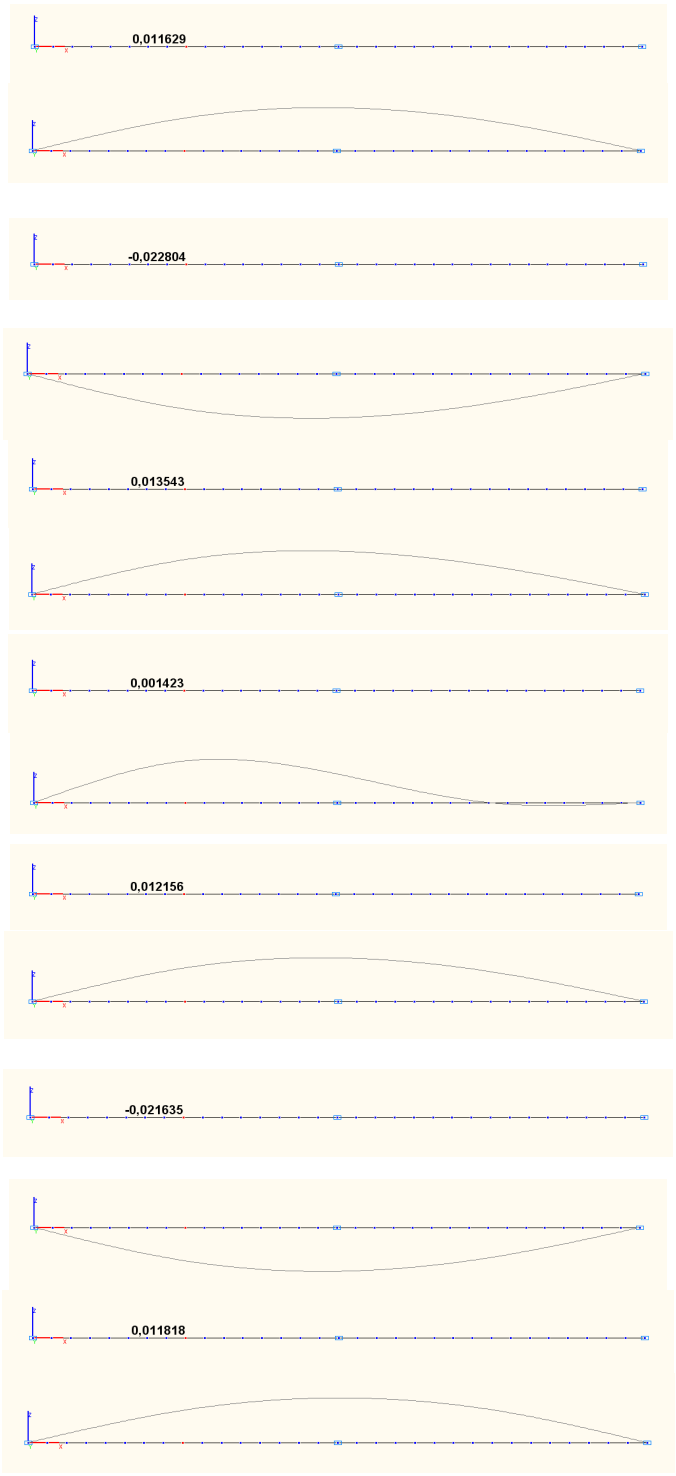
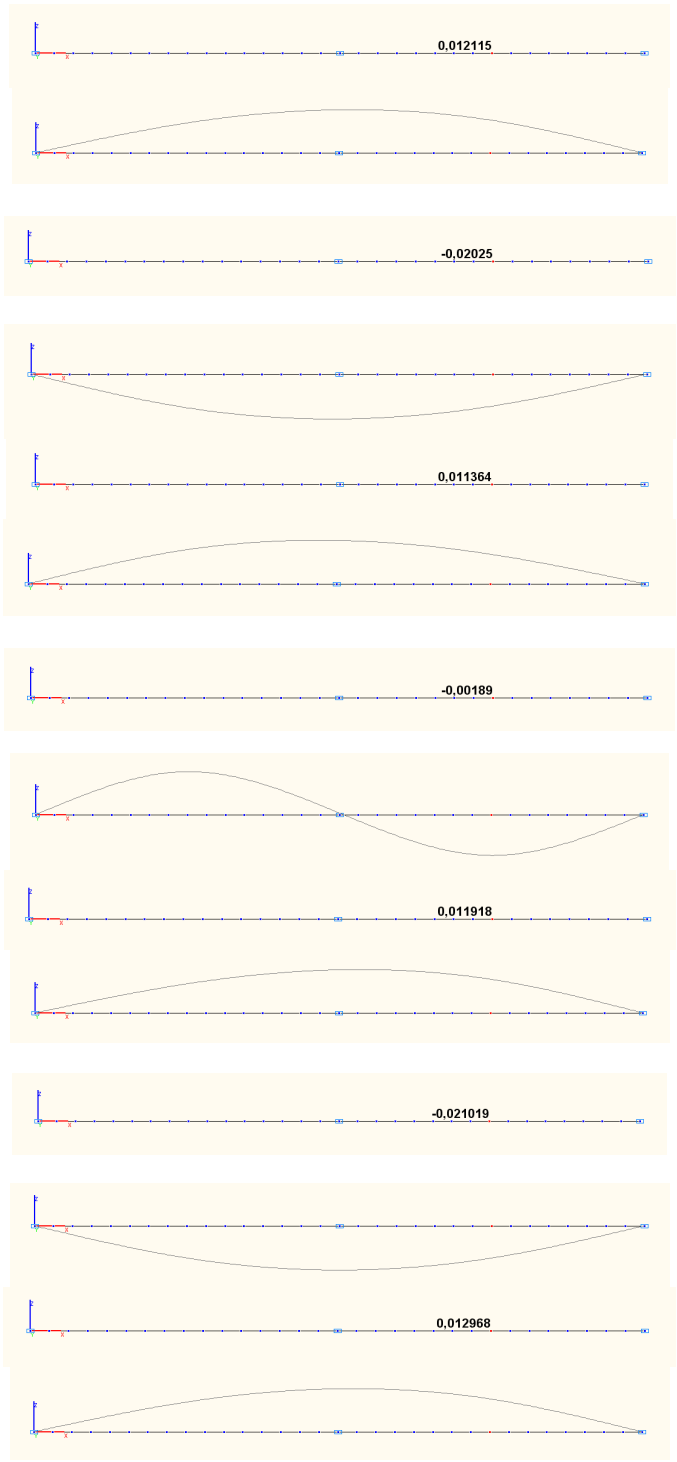


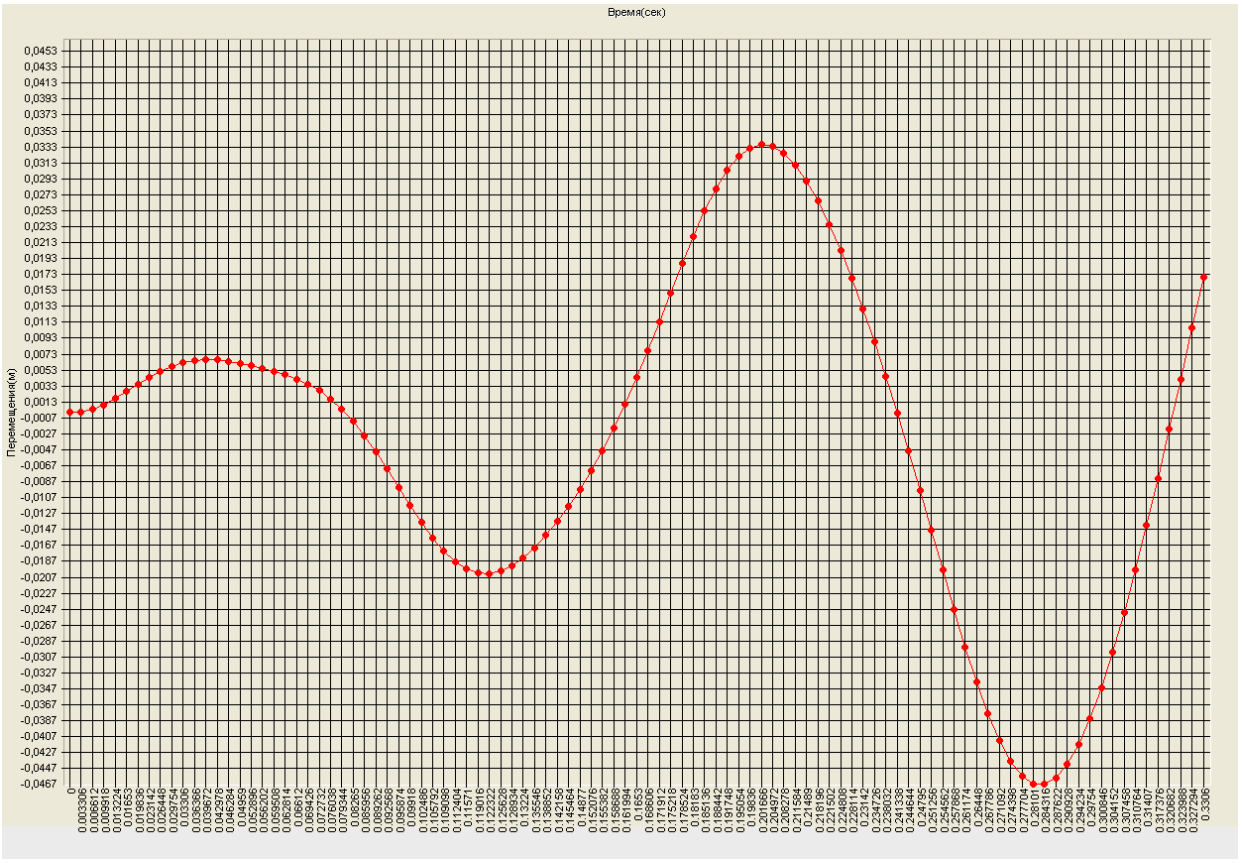
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$

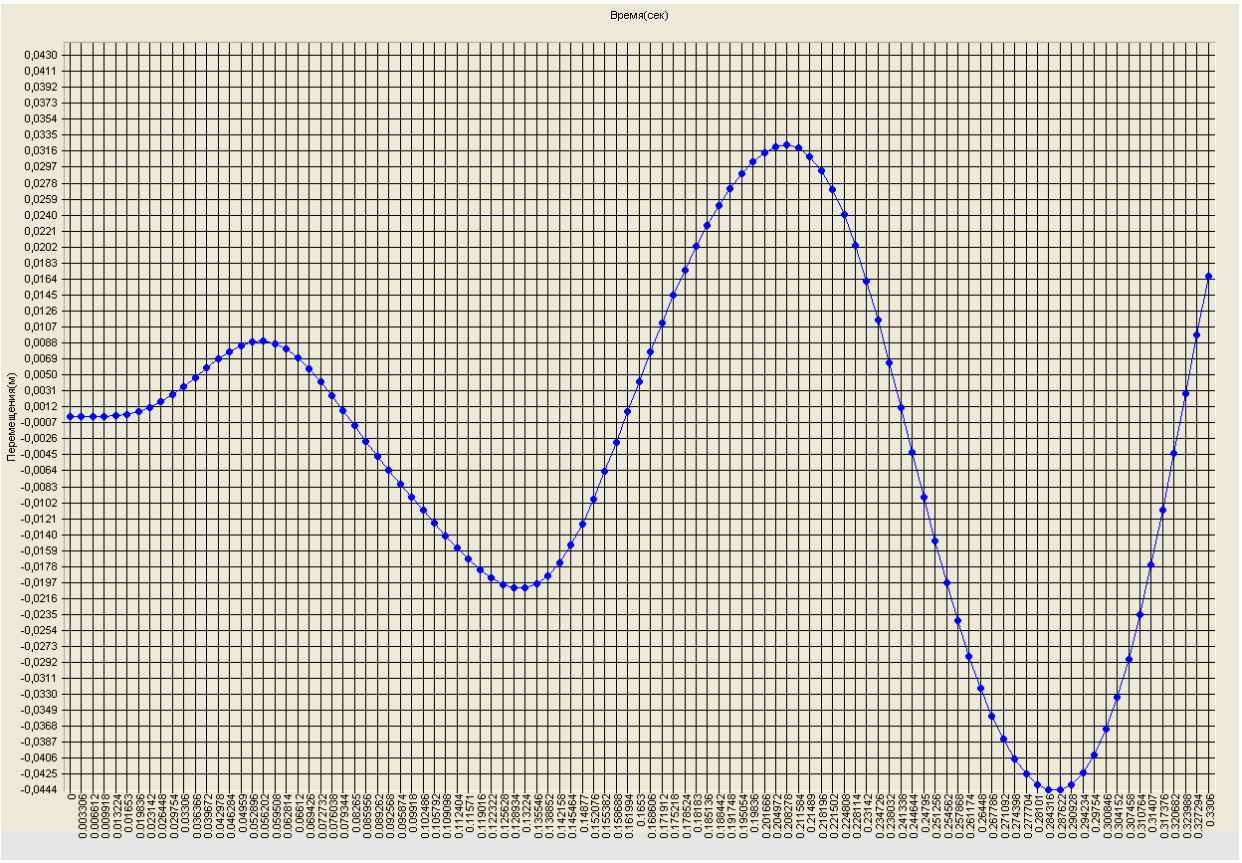
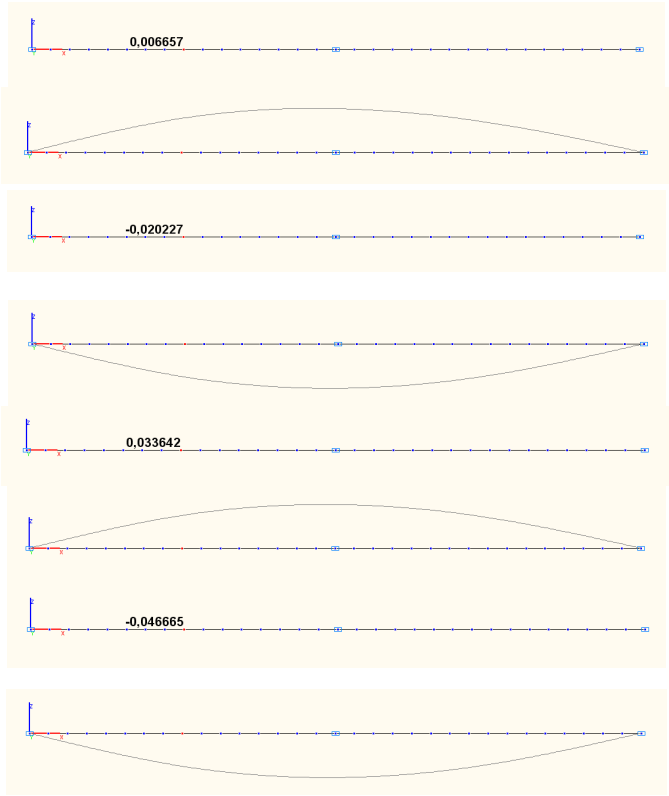
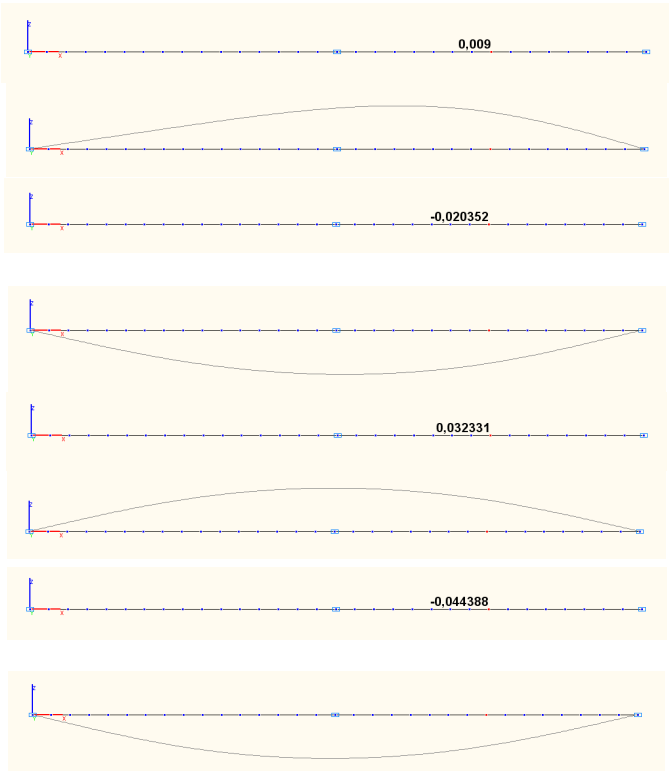


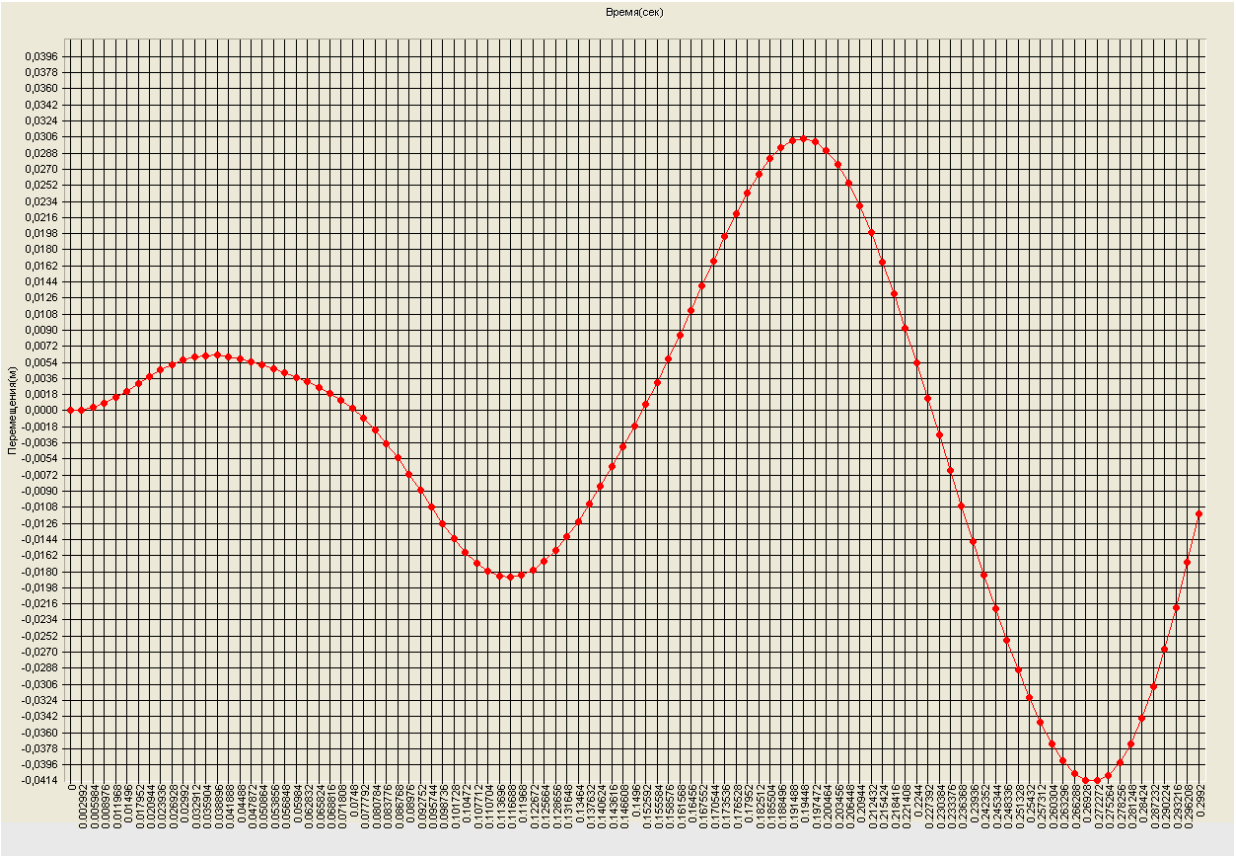
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$

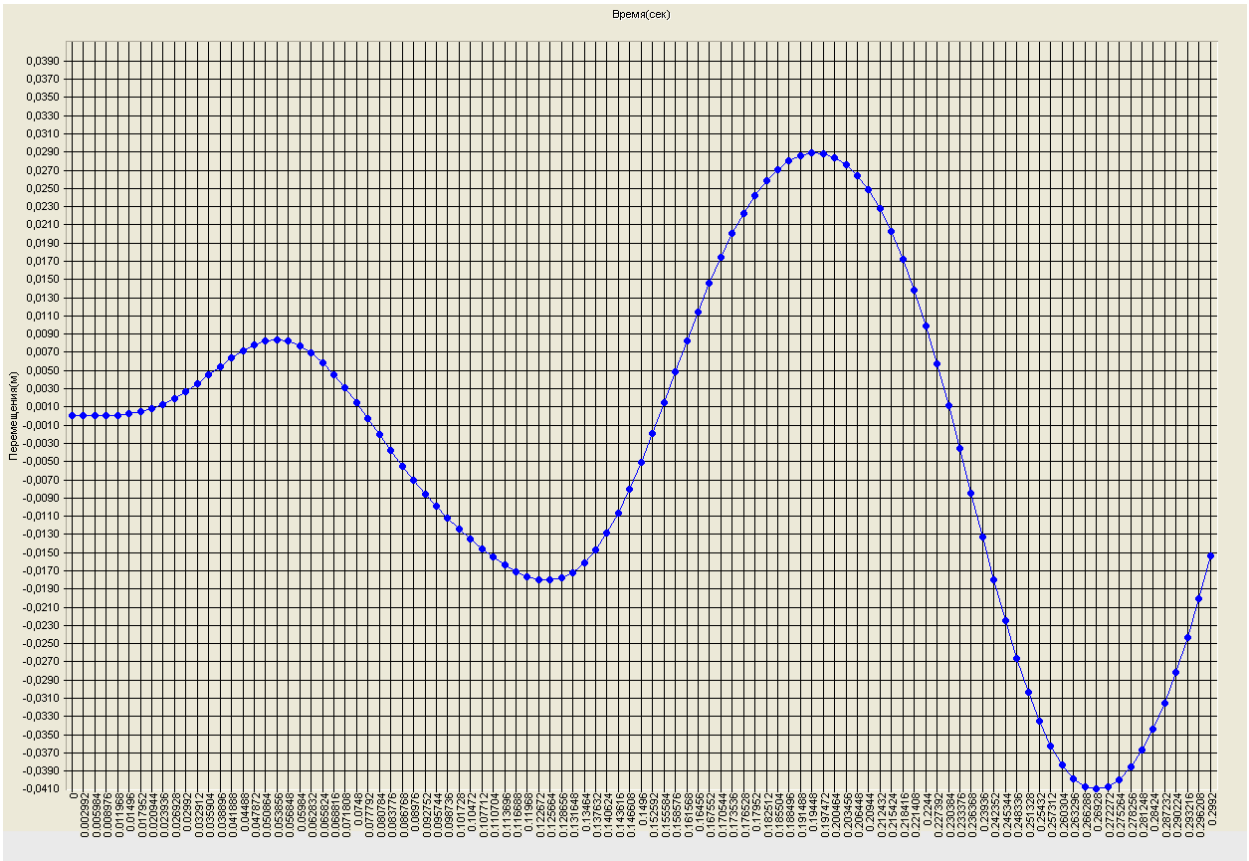
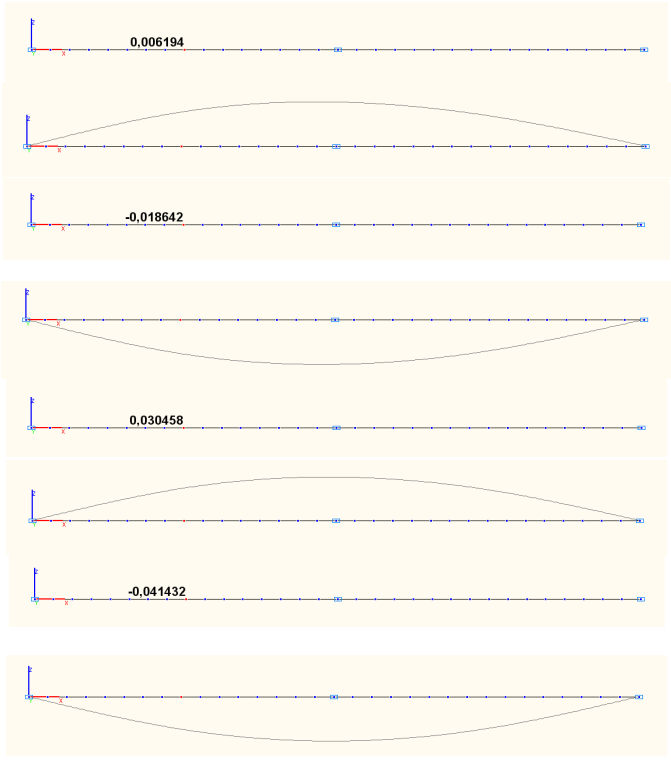
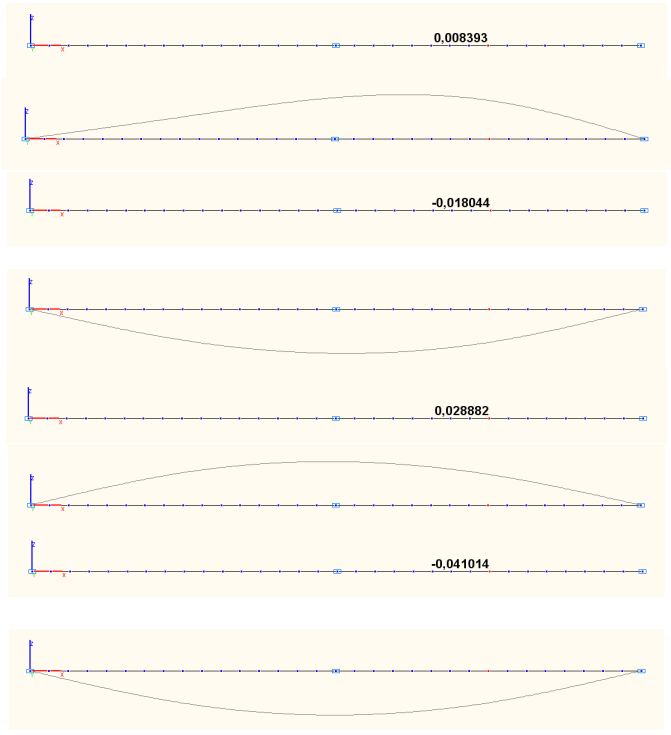


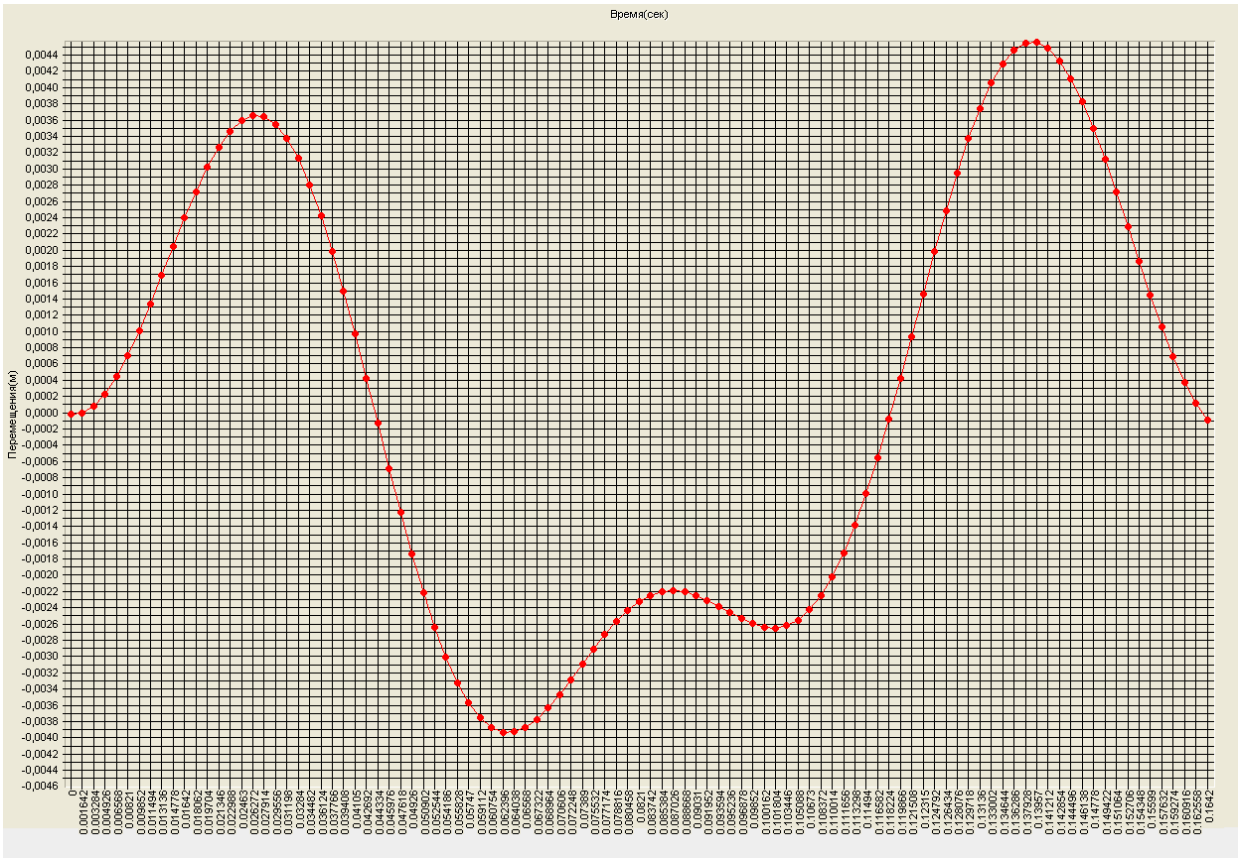
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5\cdot(p_1 + p_2)$

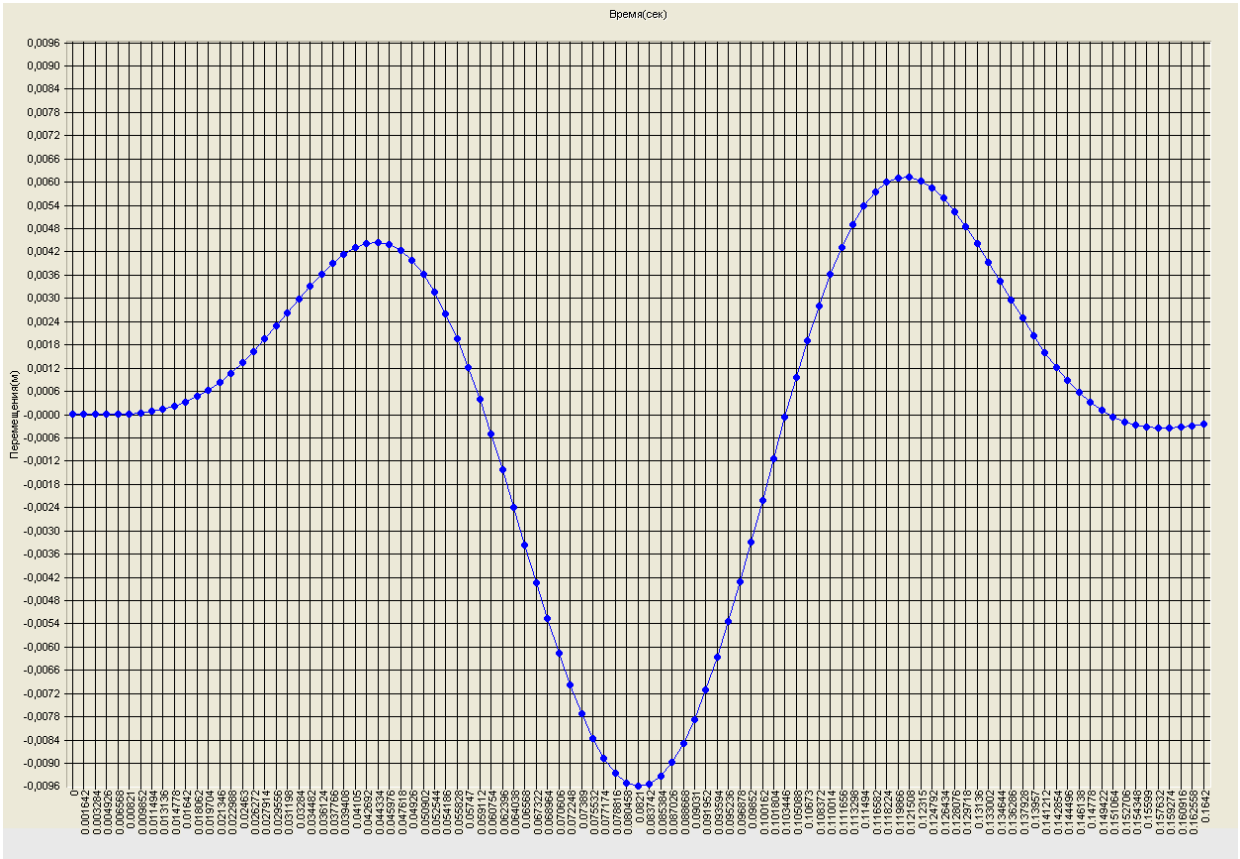
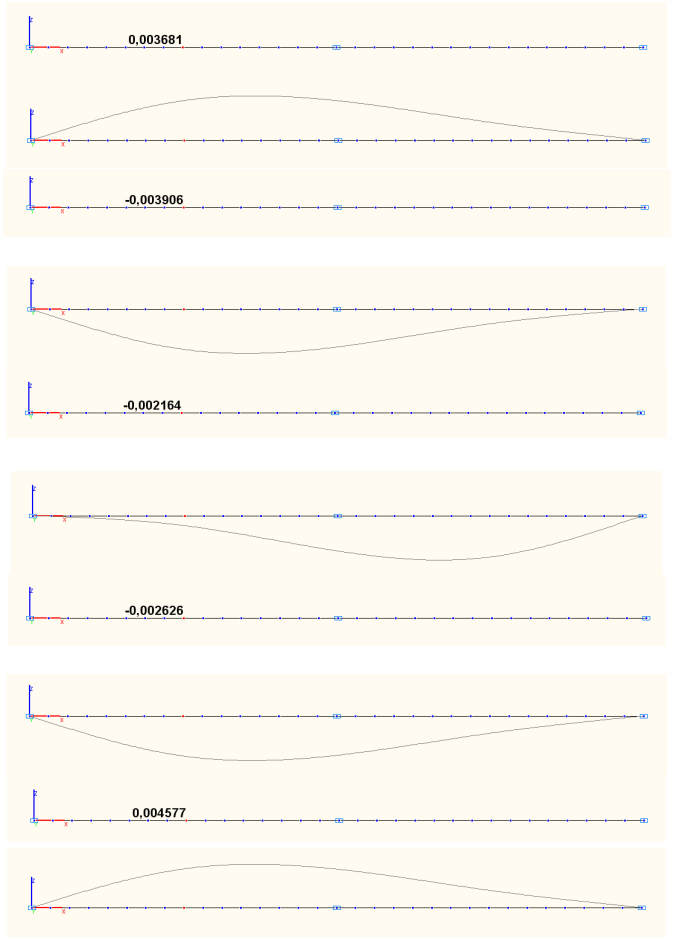
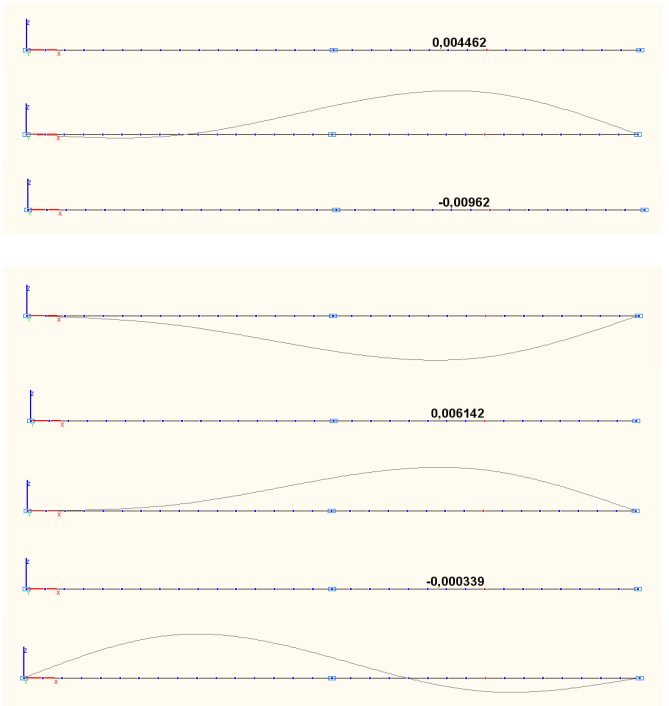


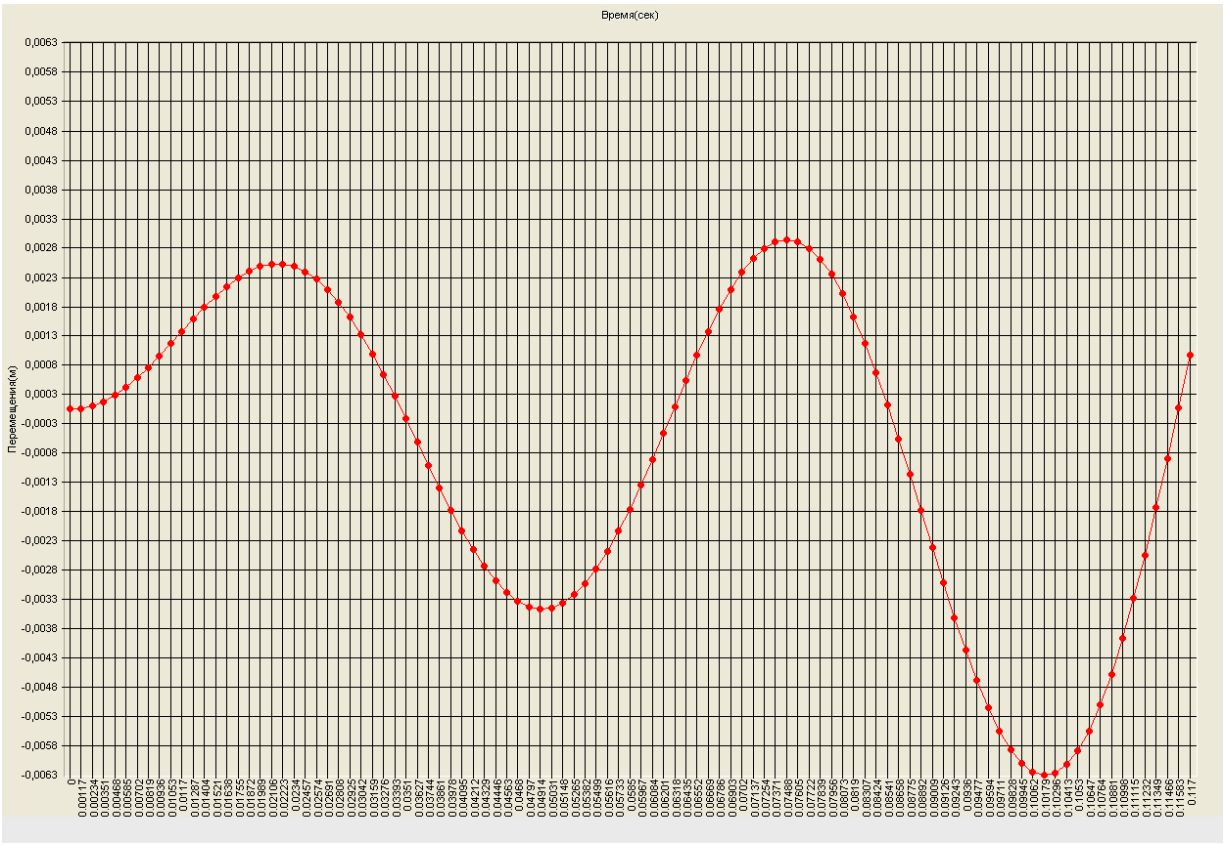
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5\cdot(p_1 + p_2)$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$

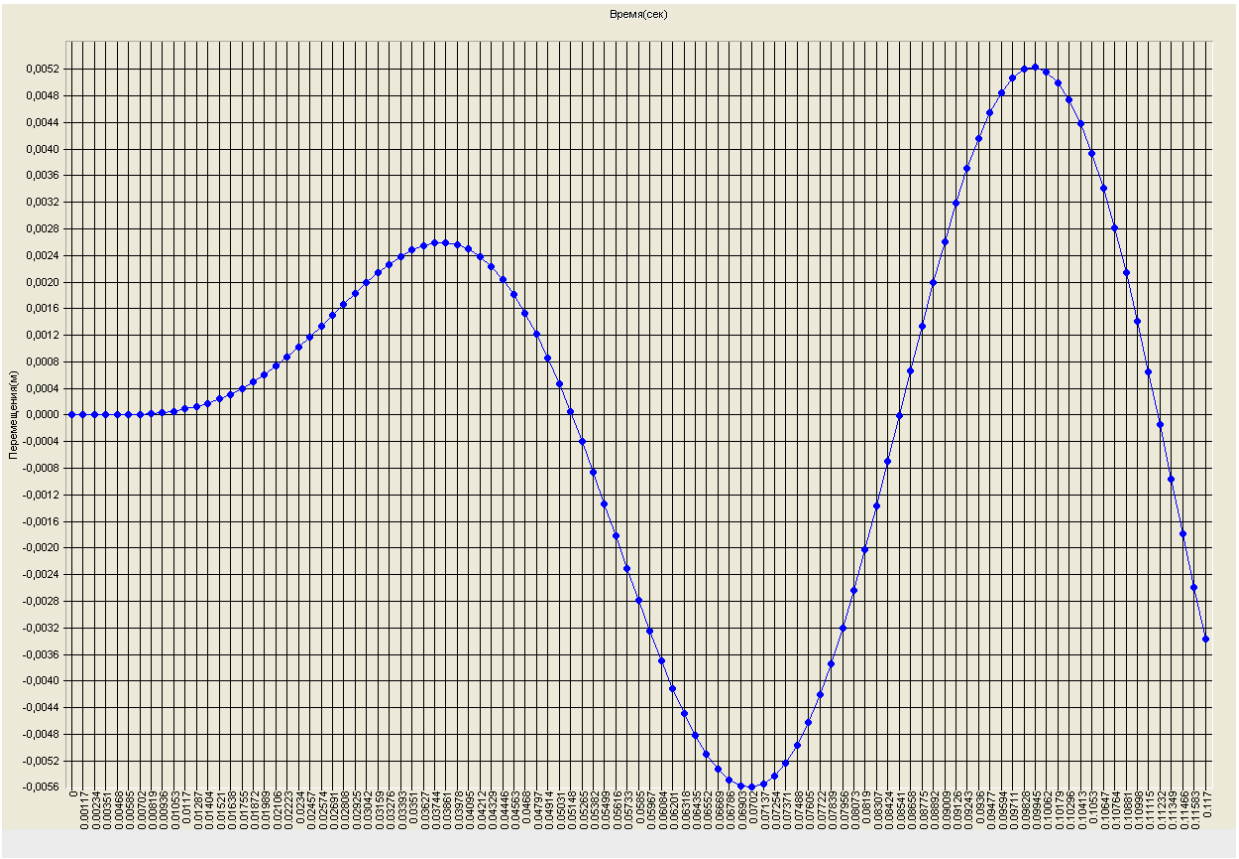
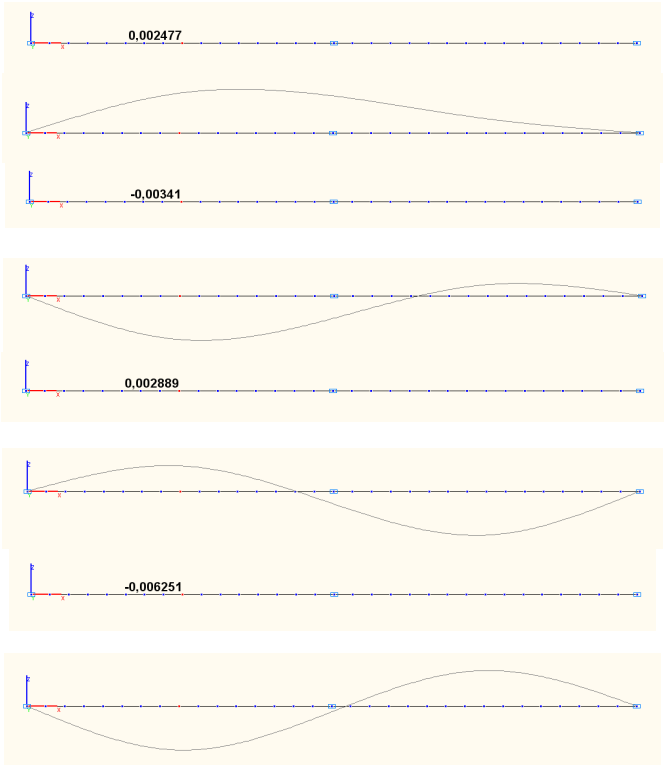
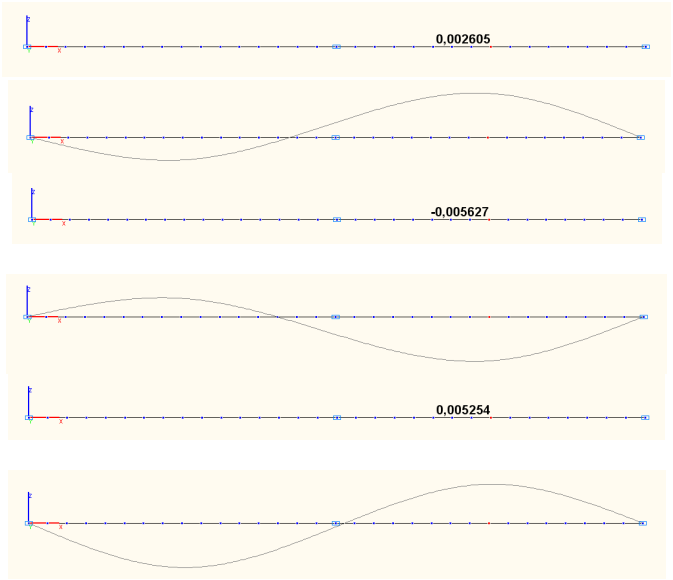


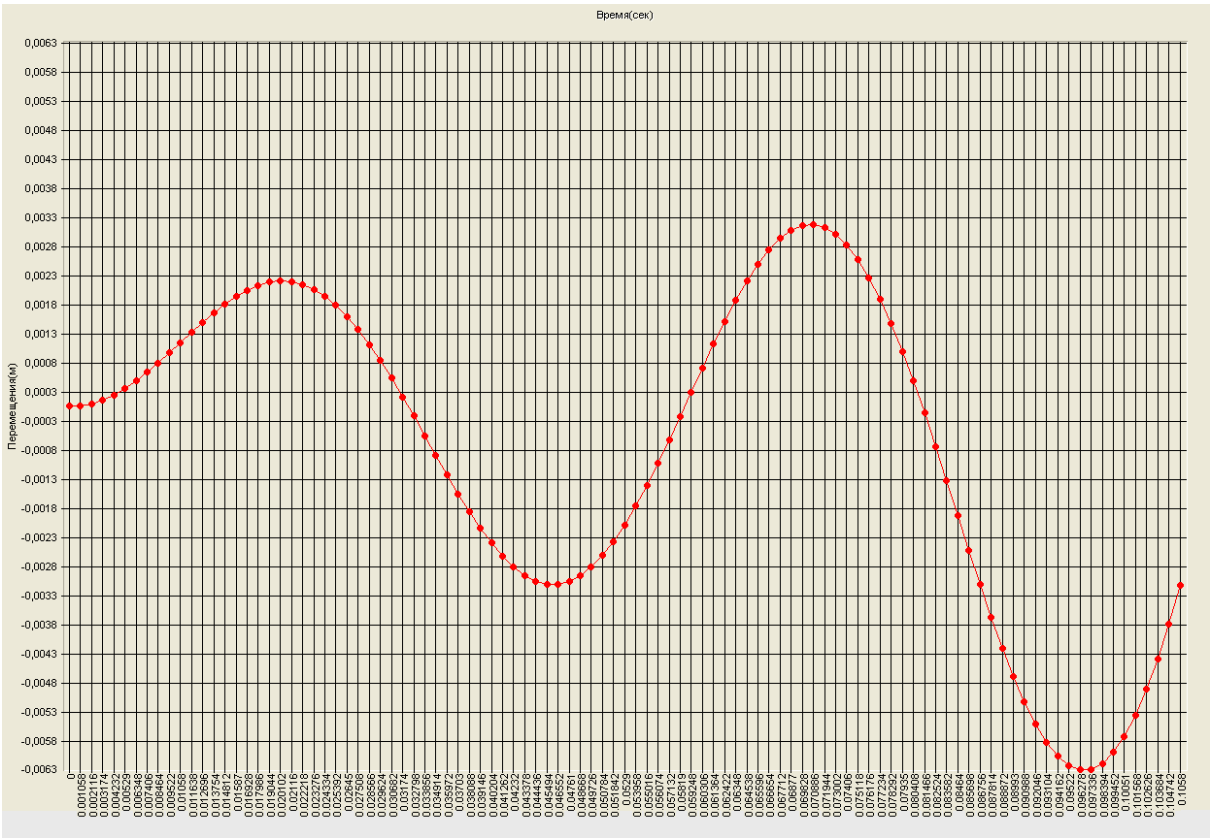
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$

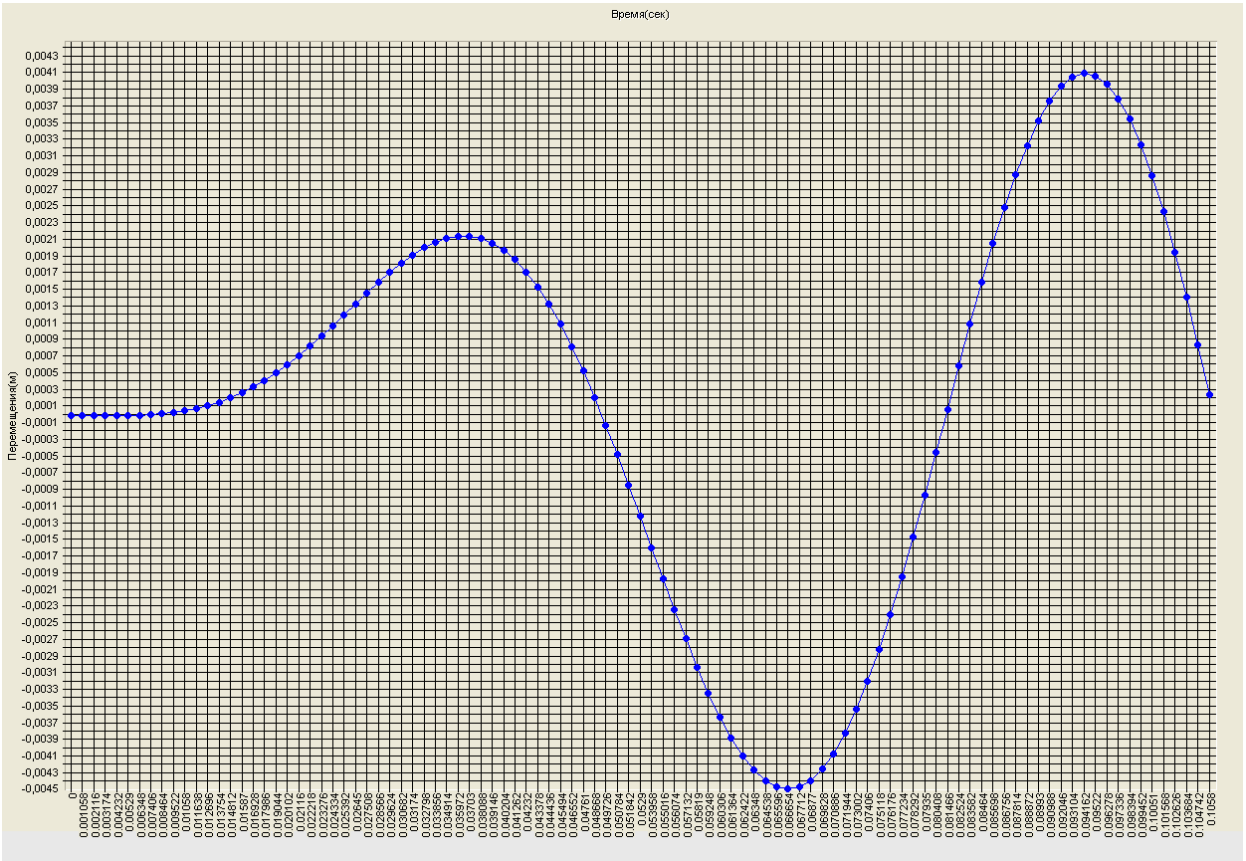
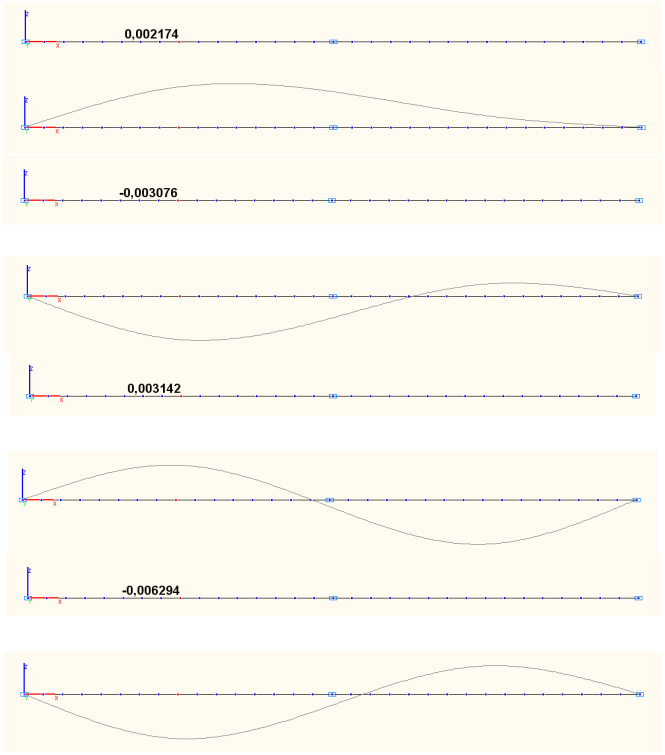
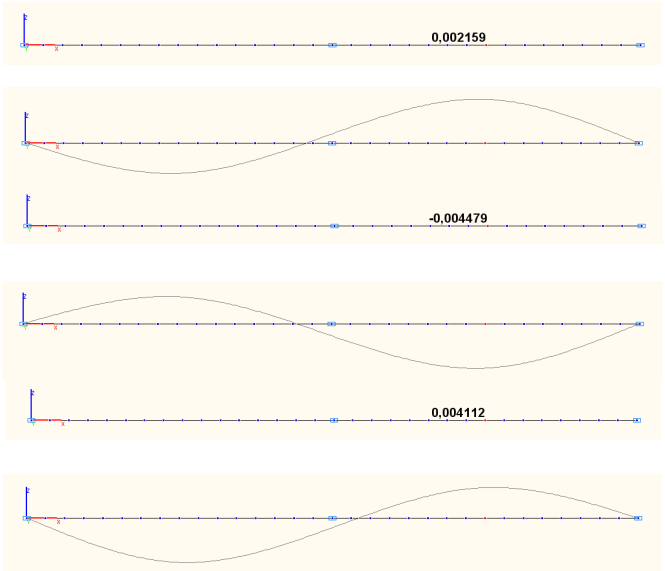


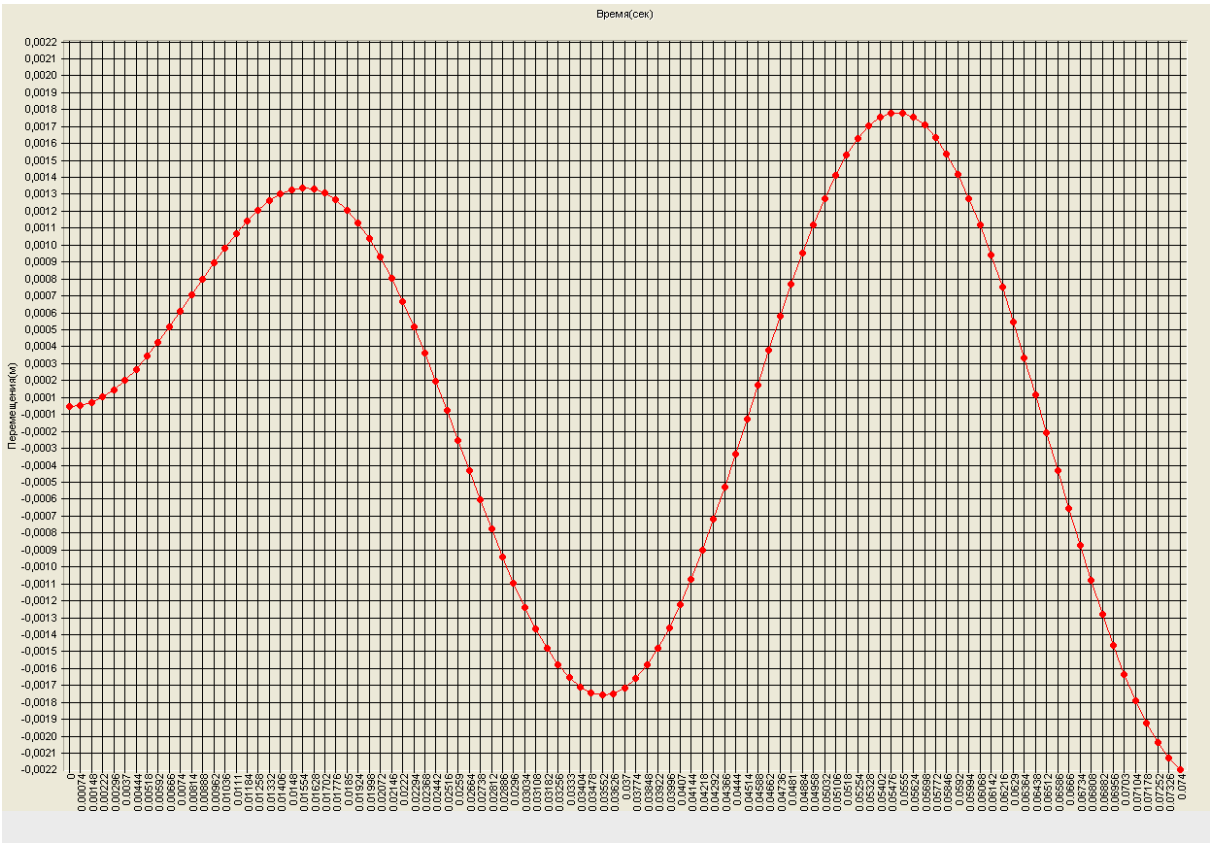
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

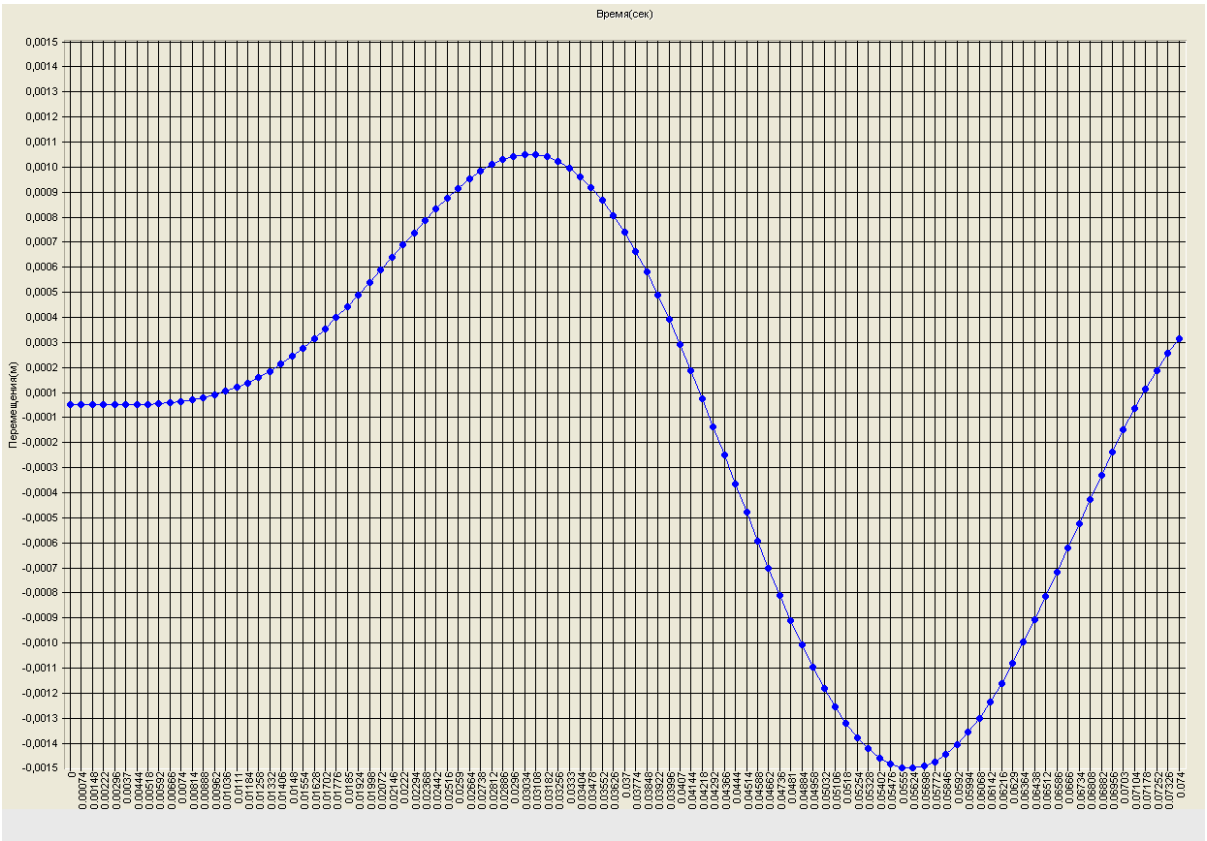
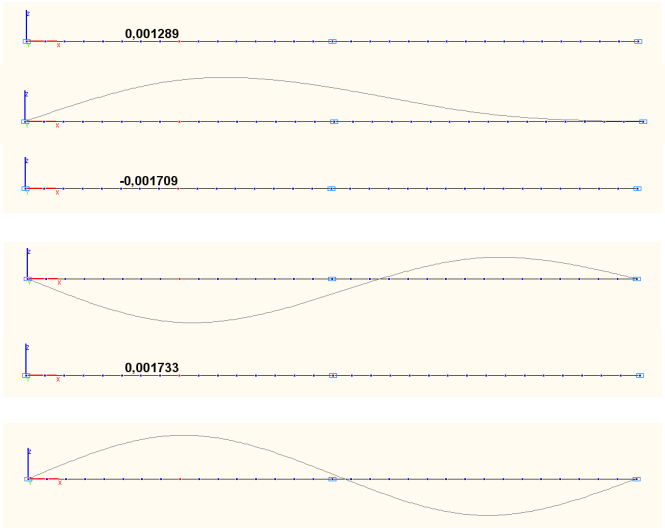
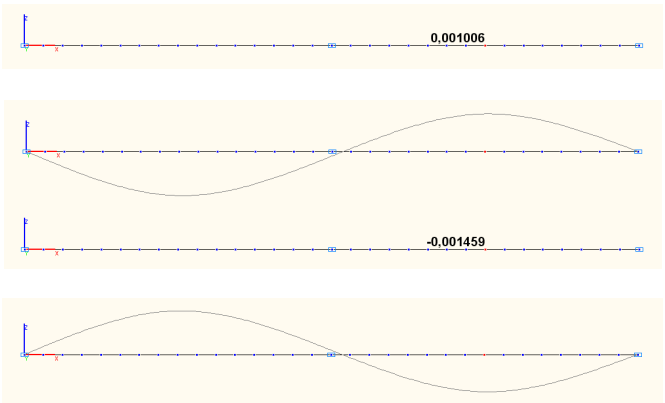


График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

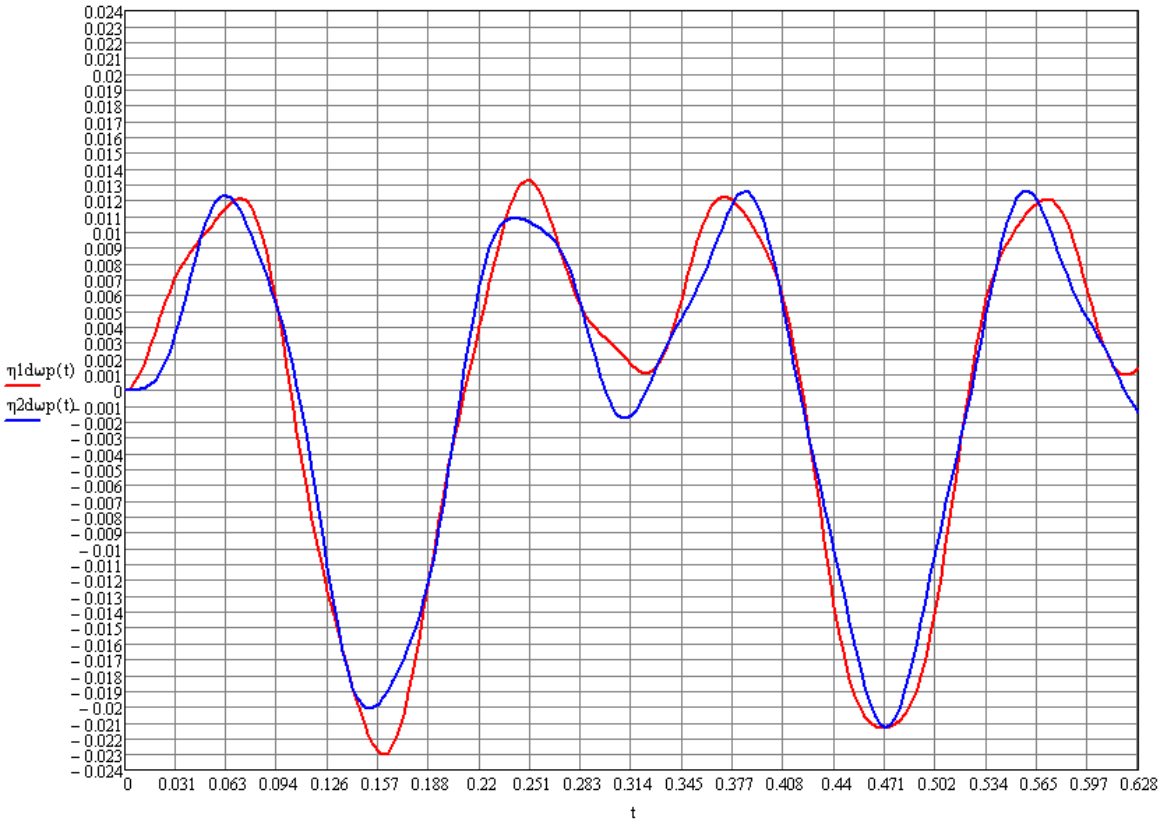


Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

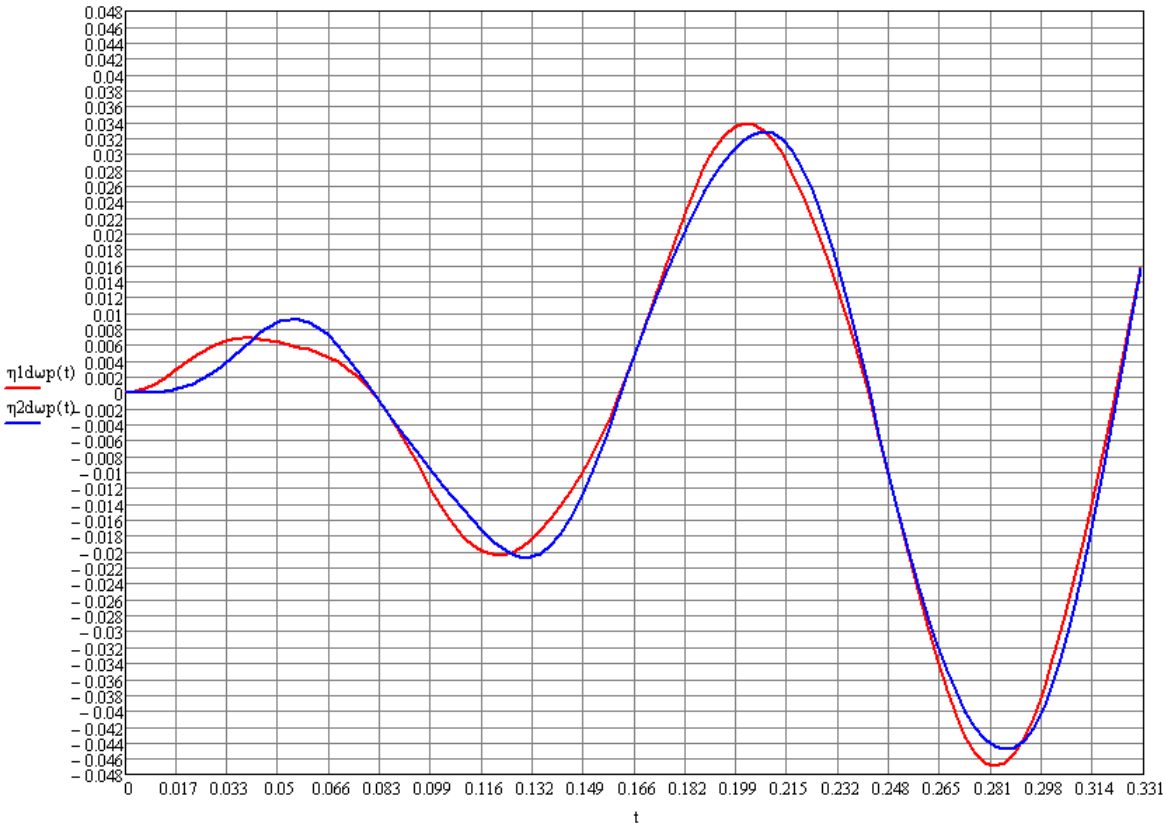


Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

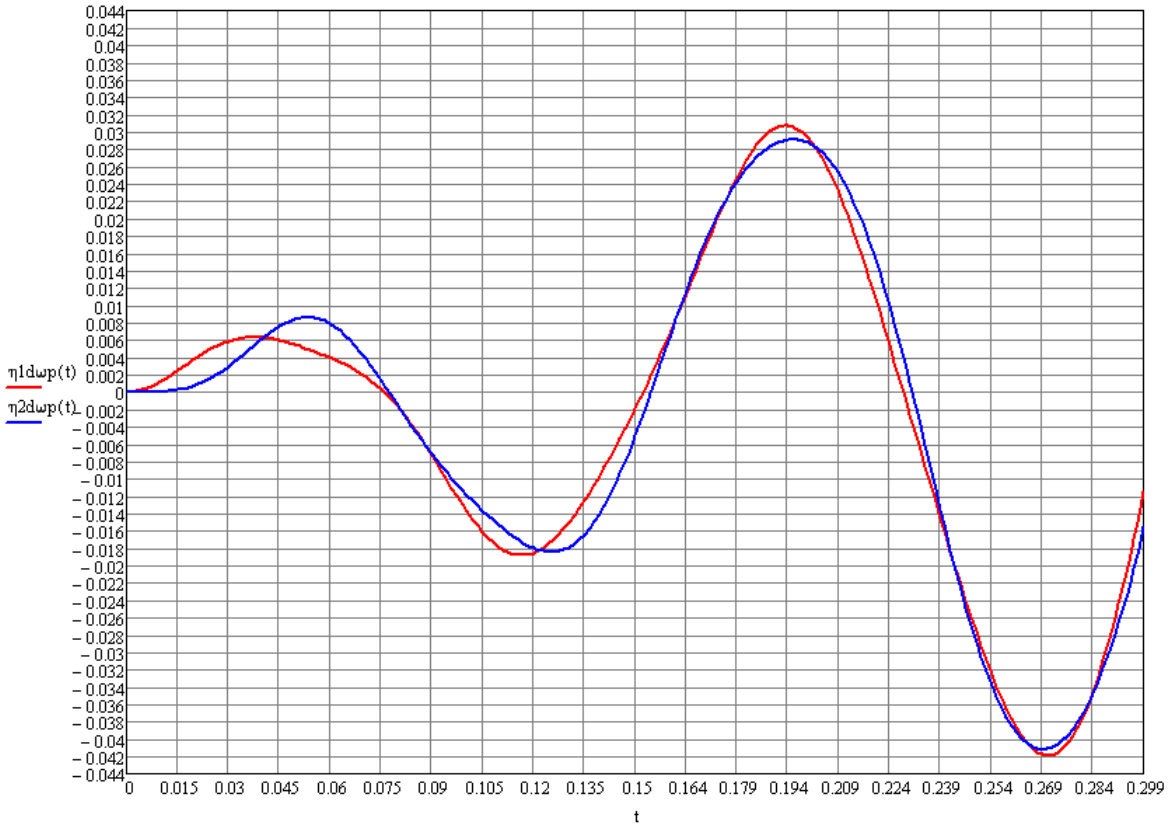
Сравнение решений:



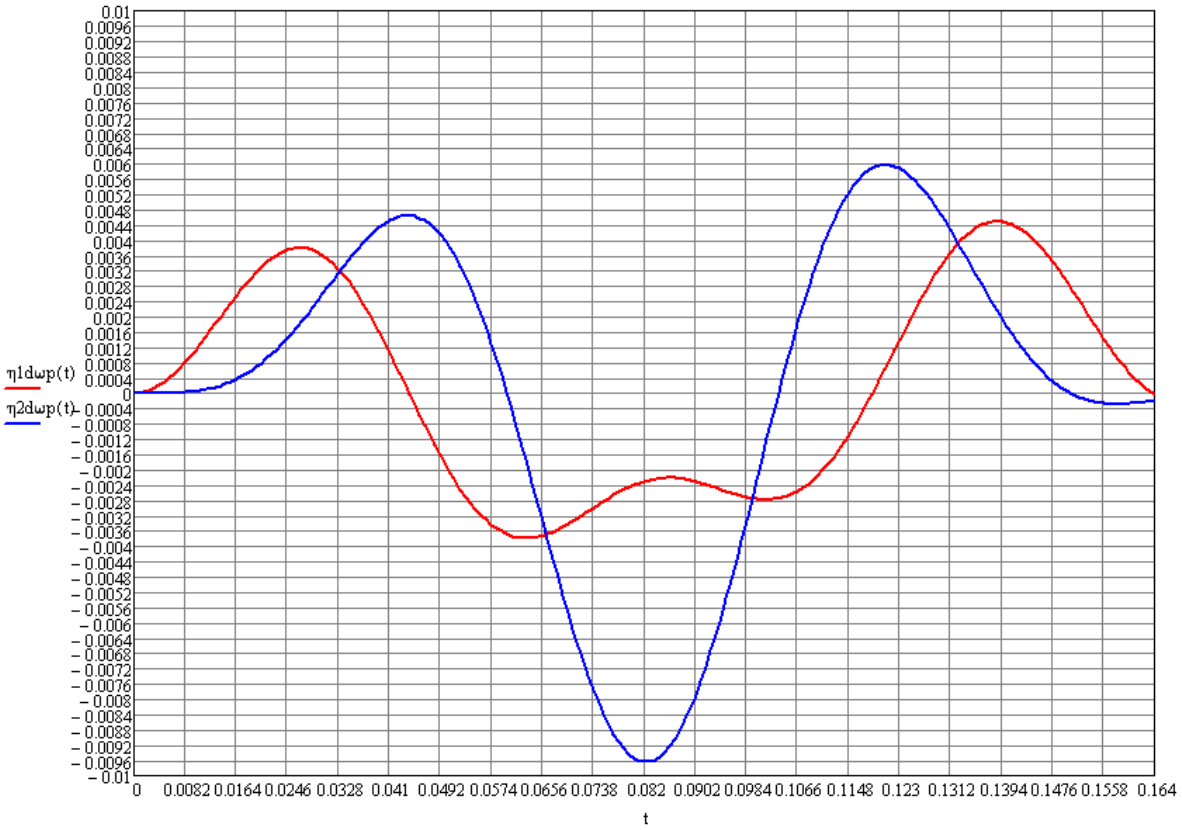
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



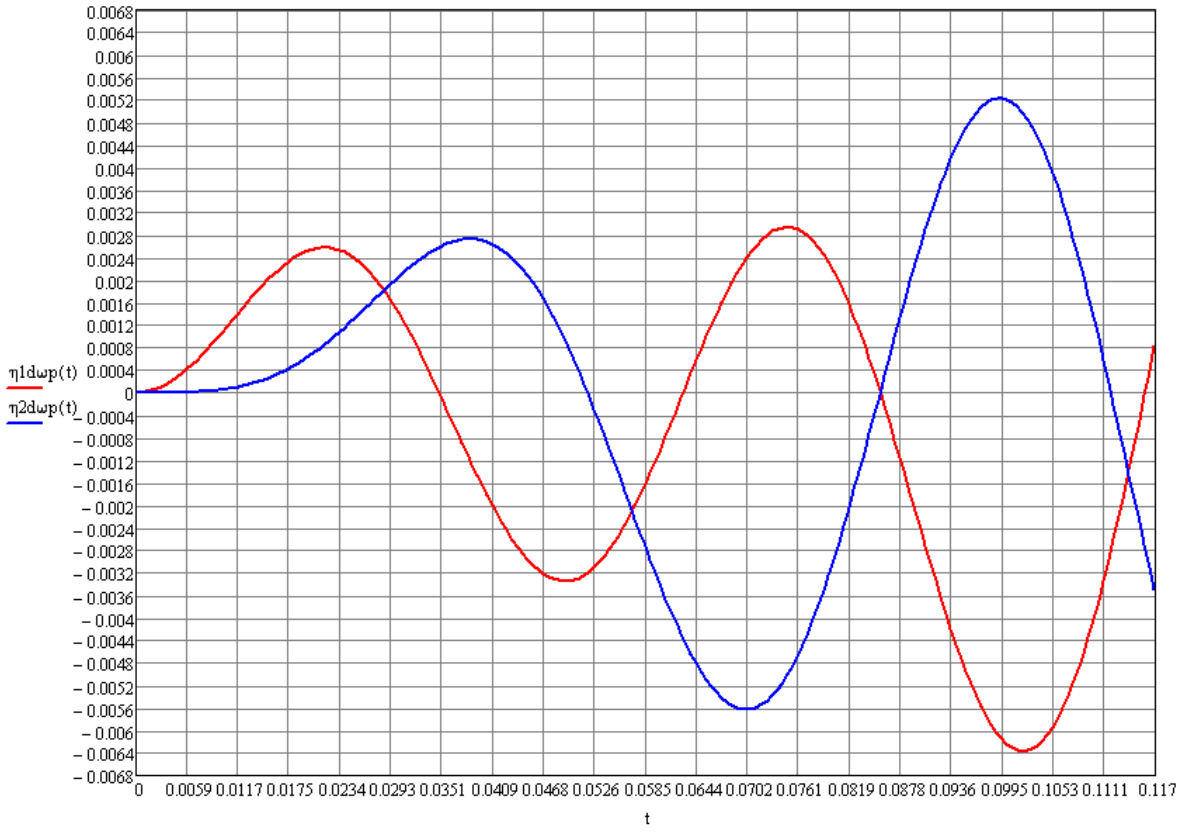
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



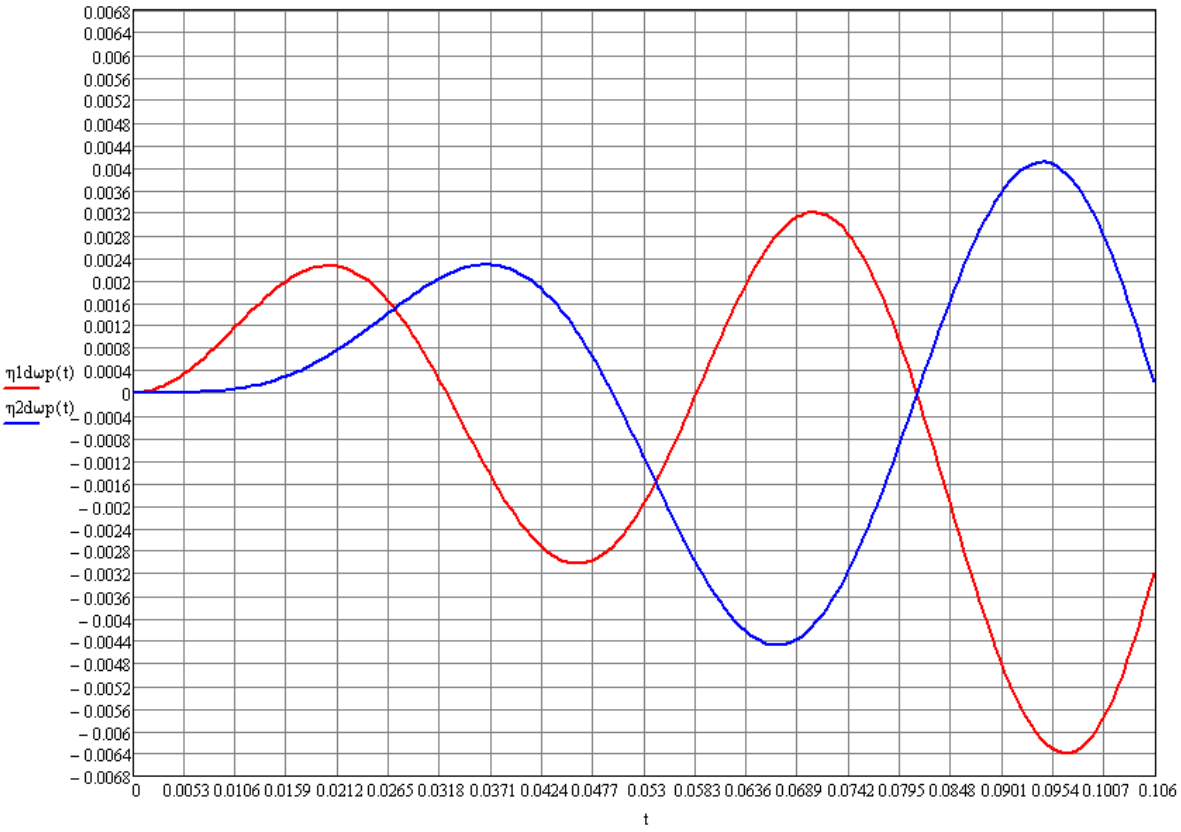
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



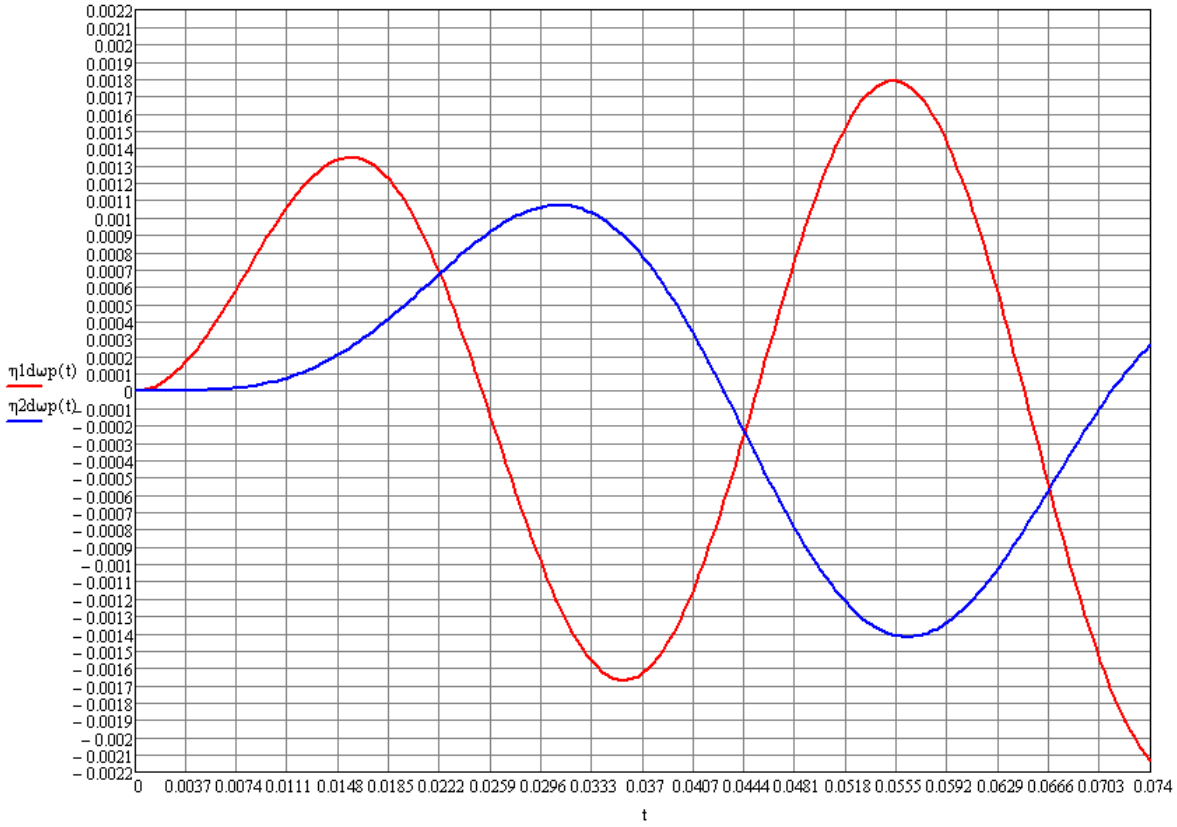
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$



Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

Собственные частоты колебаний p, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	40.000	40.000	0.00
2	113.137	113.137	0.00

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$

Узловая масса	**Теория**		**SCAD**		
	Время, с	**Прогиб, м**	**Время, с**	**Прогиб, м**	**Отклонения, %**
1	0.0715	0.012129	0.0754	0.011629	4.12
1	0.0161	-0.023034	0.1634	-0.022804	1.00
1	0.2497	0.013302	0.2514	0.013543	1.81
1	0.3230	0.001094	0.3268	0.001423	—
1	0.3714	0.012253	0.3770	0.012156	0.79
1	0.4700	-0.021344	0.4650	-0.021635	1.36
1	0.5714	0.012072	0.5718	0.011818	2.10
2	0.0621	0.012314	0.0628	0.012115	1.62
2	0.1515	-0.020119	0.1508	-0.020250	0.65
2	0.2412	0.010905	0.2451	0.011364	4.21
2	0.3099	-0.001817	0.3142	-0.001890	—
2	0.3845	0.012586	0.3896	0.011918	5.31
2	0.4716	-0.021331	0.4776	-0.021019	1.46
2	0.5586	0.012664	0.5656	0.012968	2.40

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0398	0.006829	0.0397	0.006657	2.52
1	0.1210	-0.020424	0.1223	-0.020227	0.96
1	0.2018	0.033848	0.2017	0.033642	0.61
1	0.2826	-0.046989	0.2843	-0.046665	0.69
2	0.0547	0.009260	0.0562	0.009000	2.81
2	0.1303	-0.020792	0.1289	-0.020352	2.12
2	0.2078	0.032790	0.2083	0.032331	1.40
2	0.2863	-0.044911	0.2876	-0.044388	1.16

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0374	0.006369	0.0389	0.006194	2.75
1	0.1161	-0.018850	0.1167	-0.018642	1.10
1	0.1938	0.030767	0.1945	0.030458	1.00
1	0.2710	-0.041915	0.2723	-0.041432	1.15
2	0.0534	0.008636	0.0539	0.008393	2.81
2	0.1249	-0.018428	0.1257	-0.018044	1.76
2	0.1959	0.029186	0.1945	0.028882	1.04
2	0.2695	-0.041172	0.2693	-0.041014	0.38

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0267	0.003807	0.0263	0.003681	3.31
1	0.0631	-0.003795	0.0624	-0.003906	2.92
1	0.0859	-0.002215	0.0870	-0.002164	2.30
1	0.1016	-0.002783	0.1018	-0.002626	5.64
1	0.1387	0.004497	0.1396	0.004577	1.78
2	0.0440	0.004643	0.0443	0.004462	3.90
2	0.0823	-0.009649	0.0821	-0.009620	0.30
2	0.1207	0.005968	0.1251	0.006142	2.92
2	0.1579	-0.000288	0.1576	-0.000339	–

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0216	0.002575	0.0222	0.002477	3.81
1	0.0492	-0.003347	0.0491	-0.003410	1.88
1	0.0747	0.002938	0.0749	0.002889	1.67

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.1018	-0.006366	0.1018	-0.006251	1.81
2	0.0383	0.002731	0.0386	0.002605	4.61
2	0.0700	-0.005629	0.0702	-0.005627	0.04
2	0.0991	0.005222	0.0995	0.005254	0.61

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0203	0.002260	0.0201	0.002174	3.81
1	0.0460	-0.003028	0.0466	-0.003076	1.59
1	0.0705	0.003206	0.0709	0.003142	2.00
1	0.0967	-0.006393	0.0963	-0.006294	1.55
2	0.0366	0.002273	0.0370	0.002159	5.02
2	0.0667	-0.004473	0.0667	-0.004479	0.13
2	0.0942	0.004097	0.0942	0.004112	0.37

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0157	0.001346	0.0155	0.001289	4.23
1	0.0356	-0.001671	0.0355	-0.001709	2.27
1	0.0552	0.001788	0.0555	0.001733	3.08
2	0.0308	0.001072	0.0303	0.001006	6.16
2	0.0563	-0.001420	0.0562	-0.001459	2.75

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний p свободно опертой балки определяются по формулам:

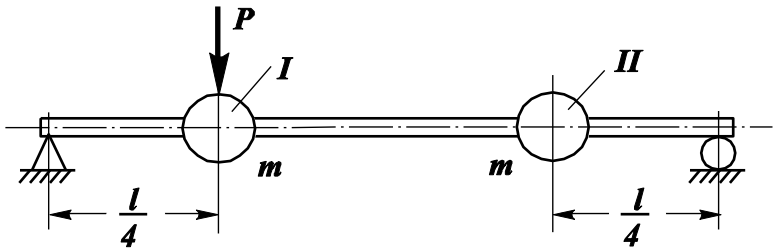
$$p_1 = \sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}}; \qquad p_2 = \sqrt{\frac{384 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}}.$$

При аналитическом решении прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени определяются по формулам:

$$\eta_1(t) = \frac{P_0 \cdot l^3}{768 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{8}{1 - \frac{\omega^2}{p_1^2}} + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p_2^2}} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \left(\frac{8}{1 - \frac{\omega^2}{p_1^2}} \cdot \cos(p_1 \cdot t) + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p_2^2}} \cdot \cos(p_2 \cdot t) \right) \right];$$

$$\eta_2(t) = \frac{P_0 \cdot l^3}{768 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{8}{1 - \frac{\omega^2}{p_1^2}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p_2^2}} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \left(\frac{8}{1 - \frac{\omega^2}{p_1^2}} \cdot \cos(p_1 \cdot t) - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p_2^2}} \cdot \cos(p_2 \cdot t) \right) \right].$$

Свободно опертая невесомая балка с двумя сосредоточенными массами под действием на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы при учете рассеивания энергии на внутреннее трение



Цель: Определение деформированного состояния свободно опертой невесомой балки с двумя сосредоточенными массами от воздействия на одну из них поперечной гармонической возмущающей силы при учете рассеивания энергии на внутреннее трение.

Файлы с исходными данными: **5.12_Harm_L_Damp.SPR**
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_1.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_2.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_3.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_4.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_5.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_6.txt
График_5.12_Harm_L_Forc_Freq_7.txt

Формулировка задачи: К свободно опертой балке постоянного сечения присоединены два одинаковых груза массой m на расстоянии четверти пролета от каждой из опор. Собственная масса балки по сравнению с массами грузов пренебрегается. В начальный момент времени к одной из масс прикладывается сила P_0, в дальнейшем гармонически изменяющаяся с частотой ω. Определить собственные формы и частоты колебаний p свободно опертой балки, а также прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени при учете рассеивания энергии на внутреннее трение.

Ссылки: С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев, Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть. Москва, Машгиз, 1952, стр. 153.

***Исходные данные*:**

$E = 3.0 \cdot 10^6$ тс/м^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
b = 0.4 м	- ширина прямоугольного поперечного сечения балки;
h = 0.8 м	- высота прямоугольного поперечного сечения балки;
l = 8.0 м	- длина пролета балки;
m = 3.0 тс·с^2/м	- значение сосредоточенных масс, присоединенных к балке;
P_0 = 76.8 тс	- амплитудное значение гармонической возмущающей силы, приложенной к одной из масс;
g = 10.00 м/с^2	- значение ускорения свободного падения;
$I = b \cdot h^3/12 = 0.017067$	- момент инерции поперечного сечения балки.

Рассматриваются следующие значения частот гармонической возмущающей силы ω_i в зависимости от значений частот собственных колебаний балки p_i:

$\omega_j = 0.5 \cdot p_1;\ 0.95 \cdot p_1;\ 1.05 \cdot p_1;\ 0.5 \cdot (p_1 + p_2);\ 0.95 \cdot p_2;\ 1.05 \cdot p_2;\ 1.5 \cdot p_2$.

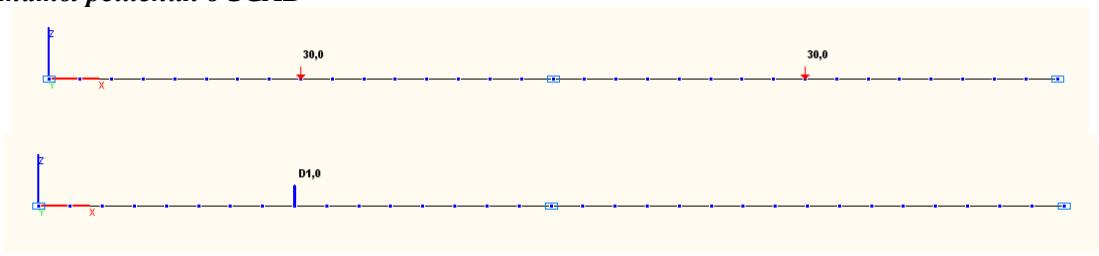
Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с максимальным значением:

$\xi_{1,2} = 0.9999$.

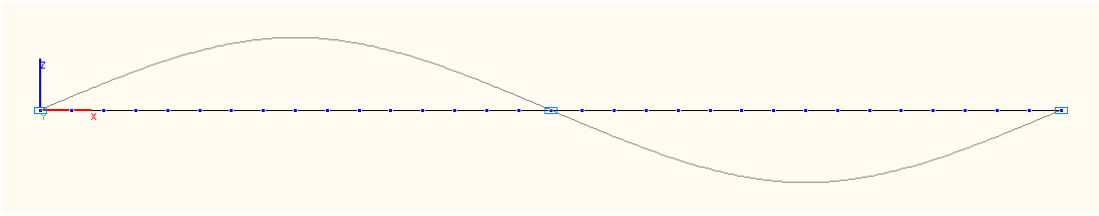
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 32 стержневых элемента типа 2. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы X. Сосредоточенные массы задаются преобразованием статических узловых нагрузок $m \cdot g$.

Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний p, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени. Воздействие поперечной гармонической возмущающей силы описывается графиком изменения нагрузки во времени и задается в виде узловой силы, действующей по оси Z общей системы координат с масштабным множителем 1.0 и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы между моментами времени графика изменения нагрузки равны $\Delta t_{int} = T_j/100$, где T_j – период воздействия гармонической возмущающей силы, и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика воздействие поперечной гармонической возмущающей силы принимается со значениями $P_n = P_0 \cdot \cos(\omega_j \cdot n \cdot \Delta t_{int})$ в моменты времени $n \cdot \Delta t_{int}$. Продолжительность процесса во времени равна $t = 2 \cdot T_j$. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я и 2-я собственные формы колебаний

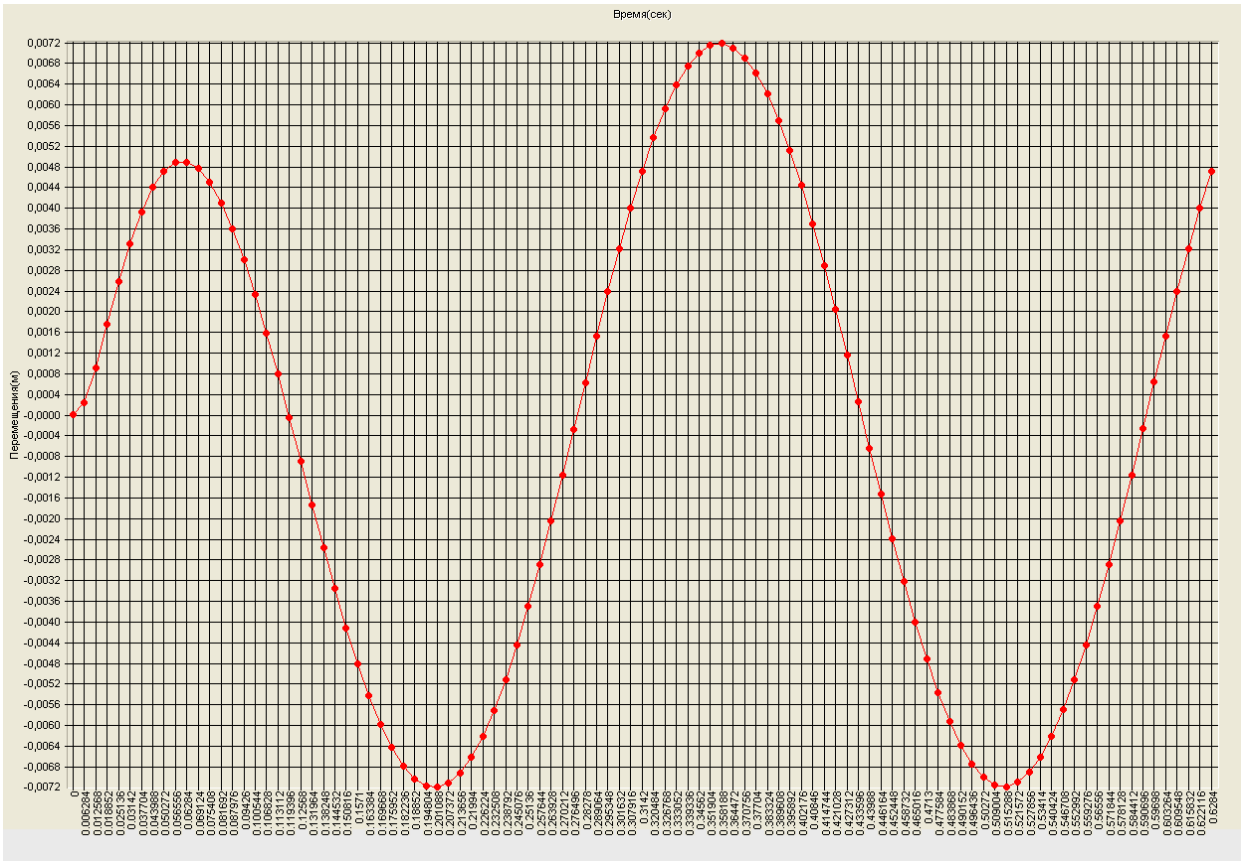


График изменения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$

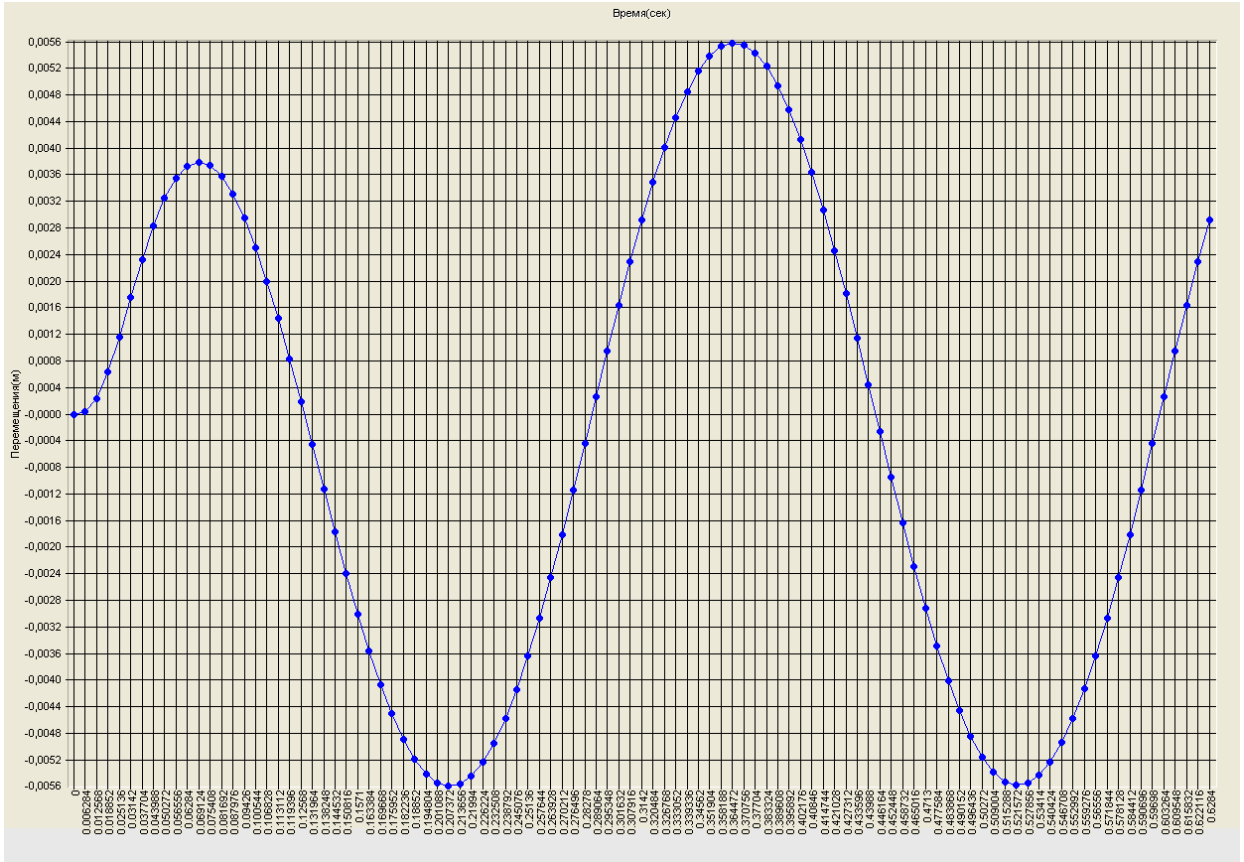
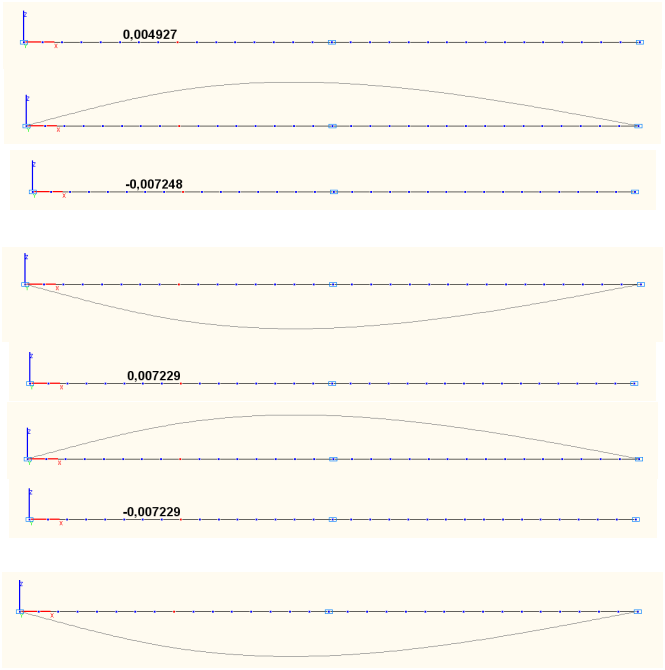
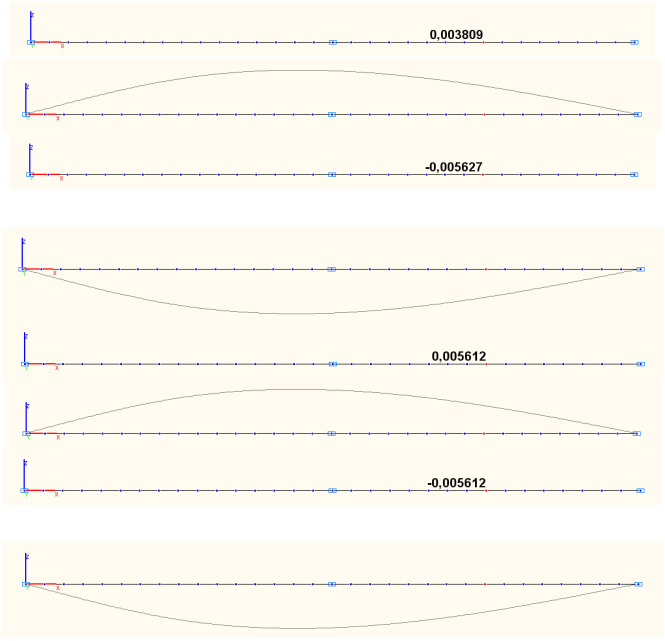


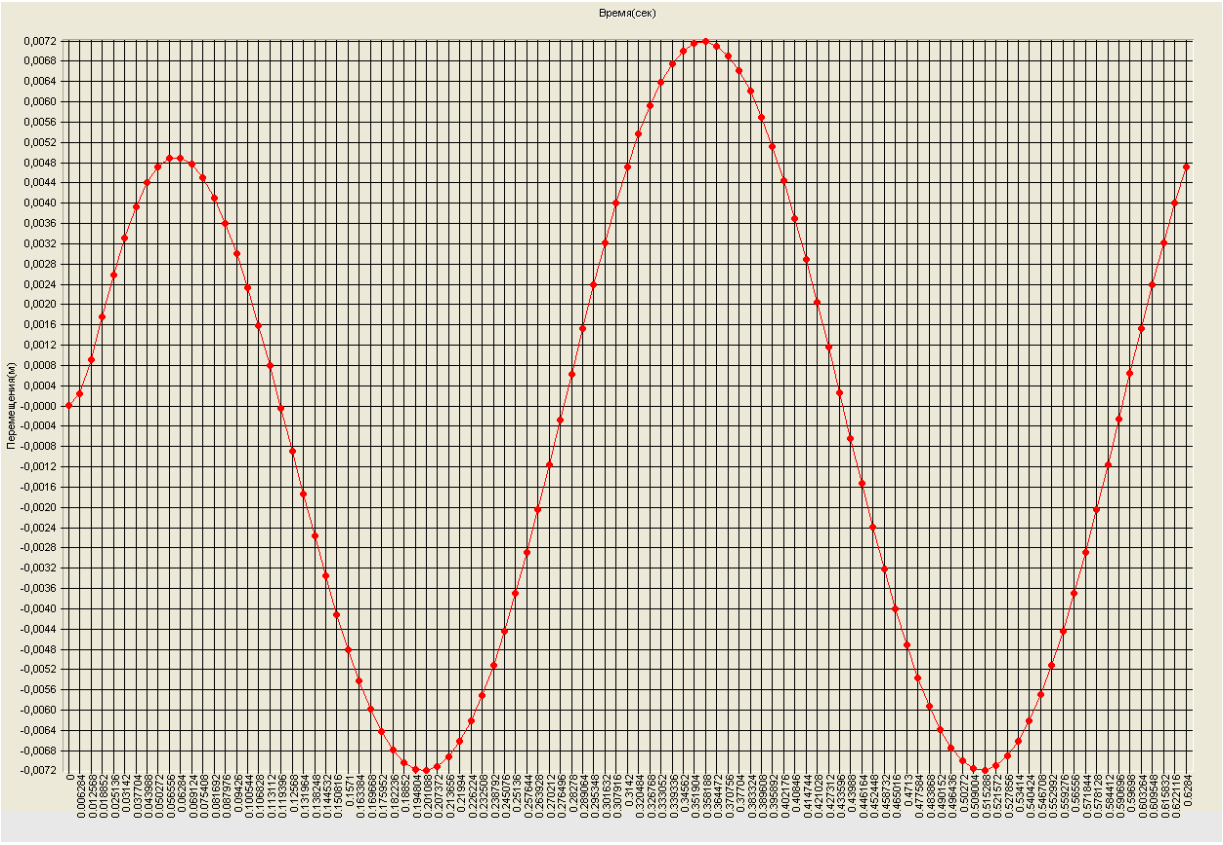
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$

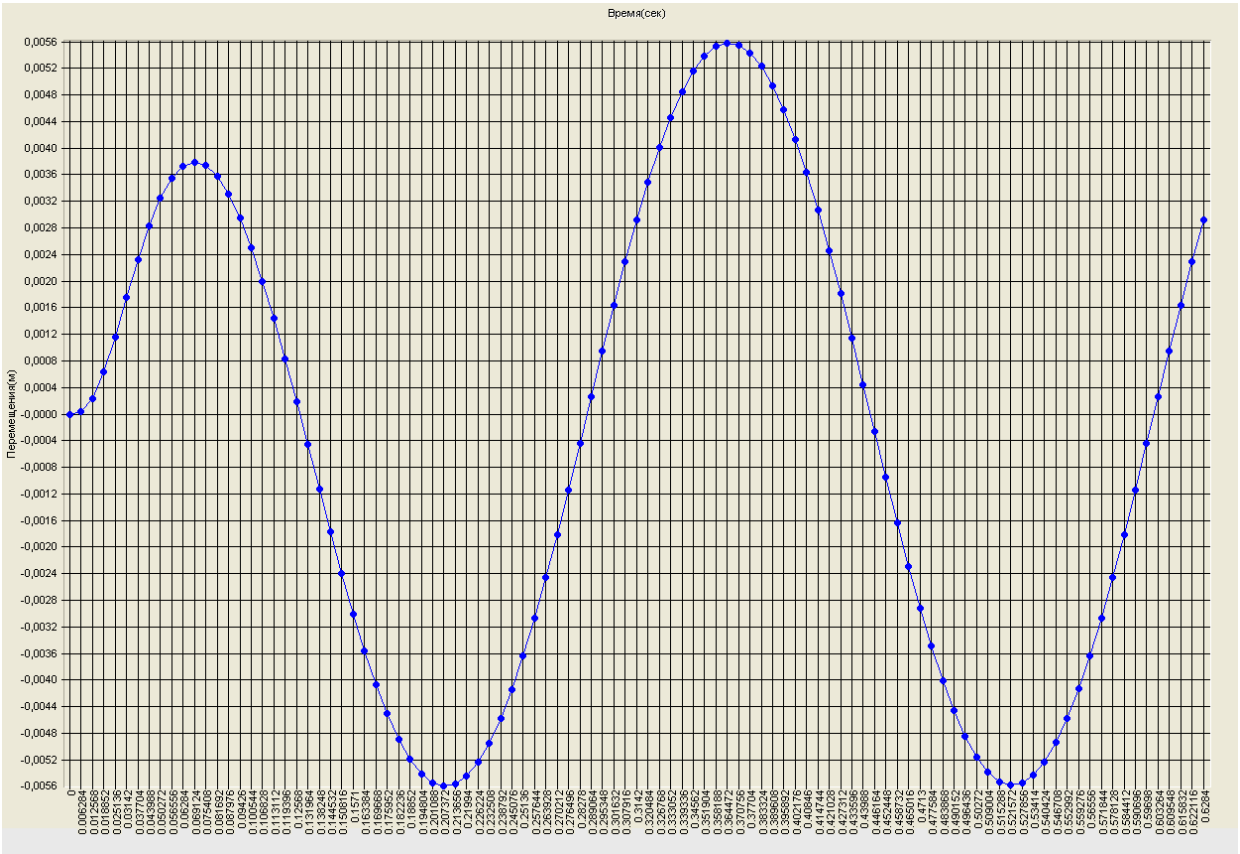
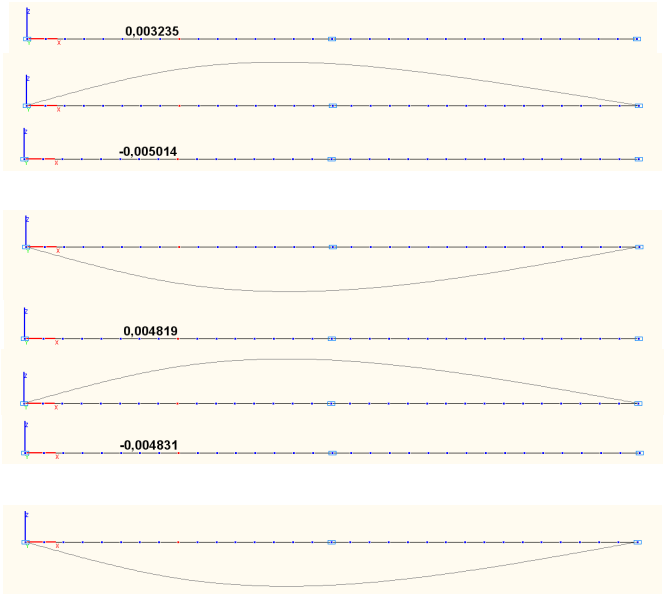
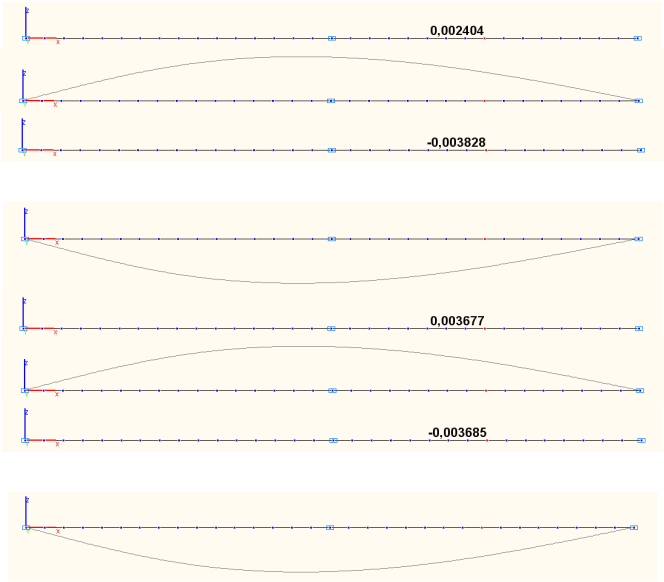


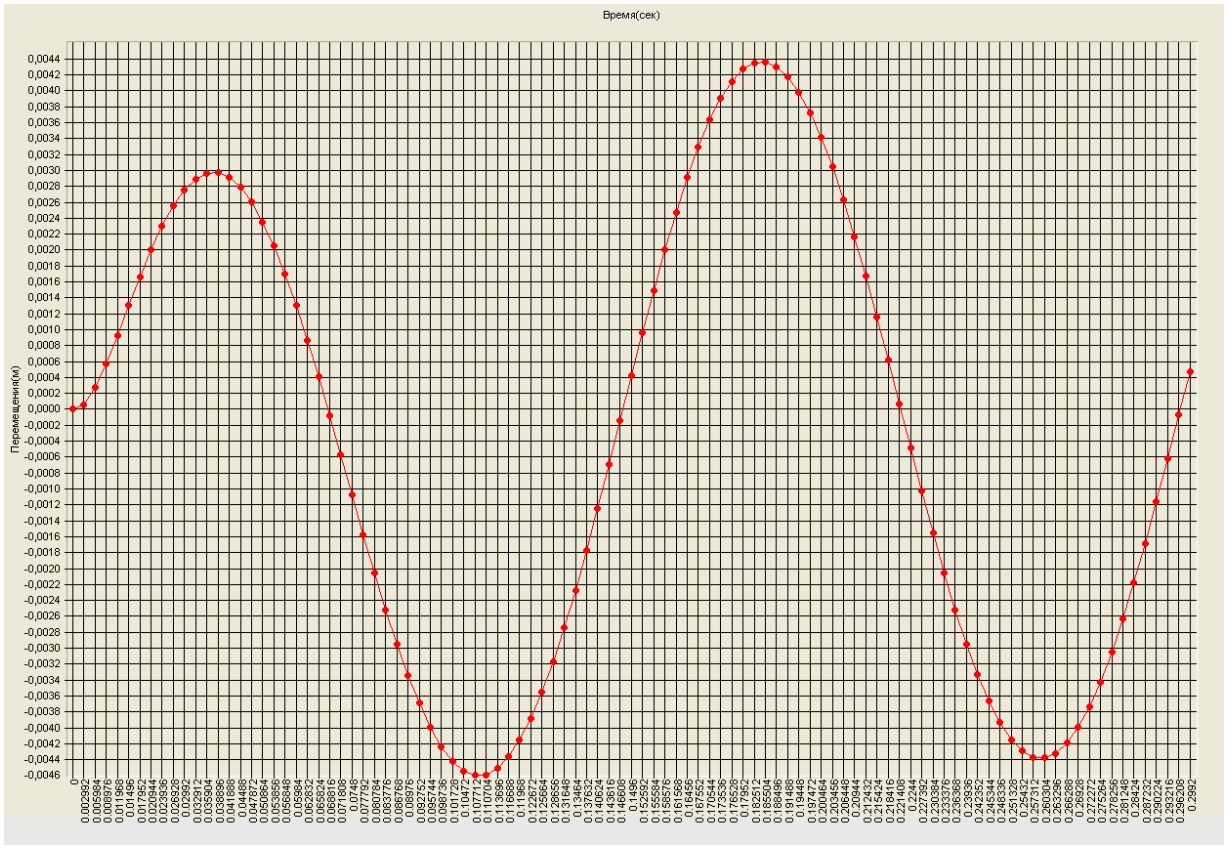
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$

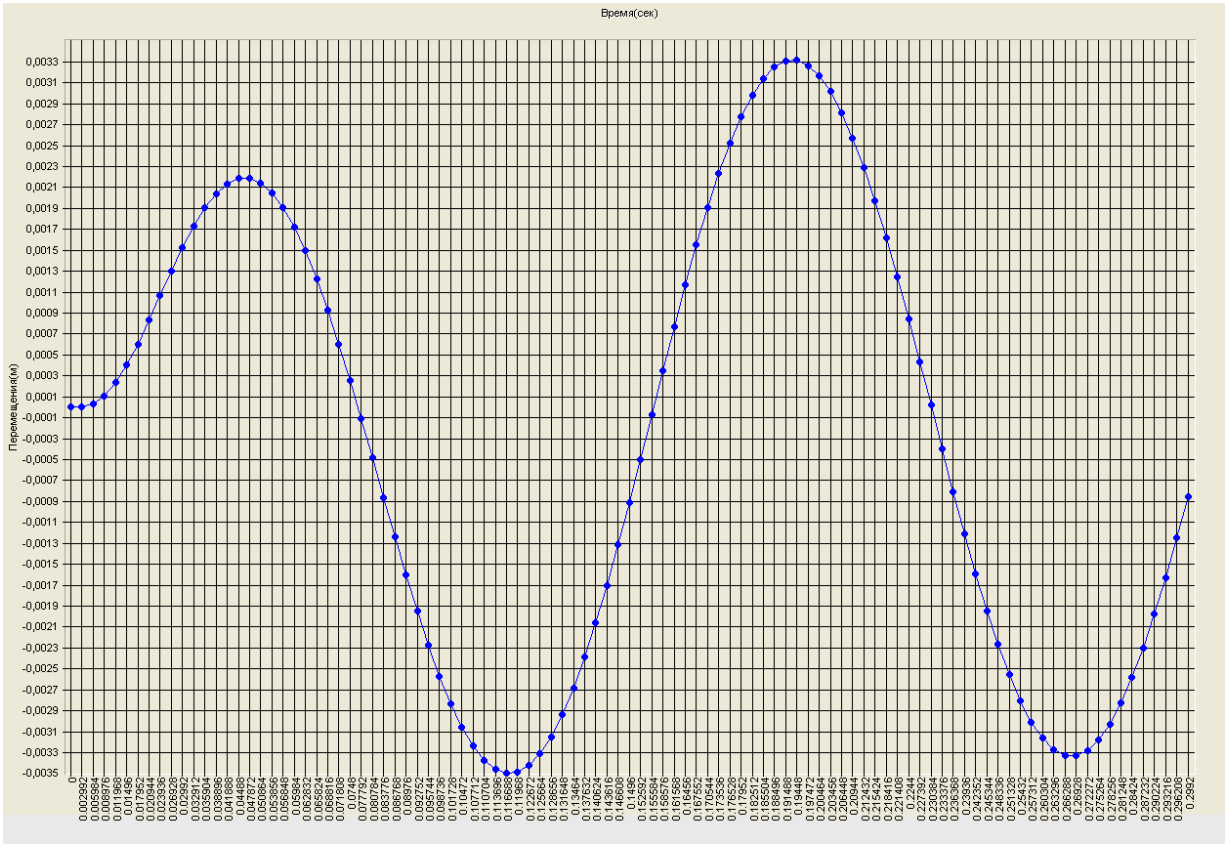
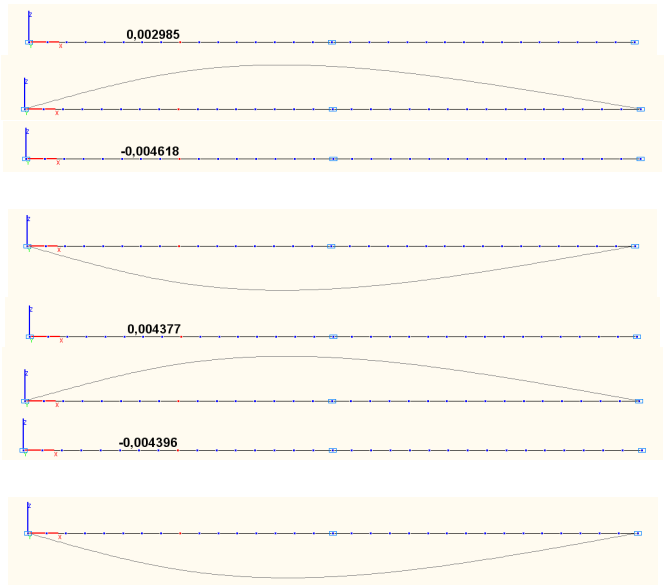
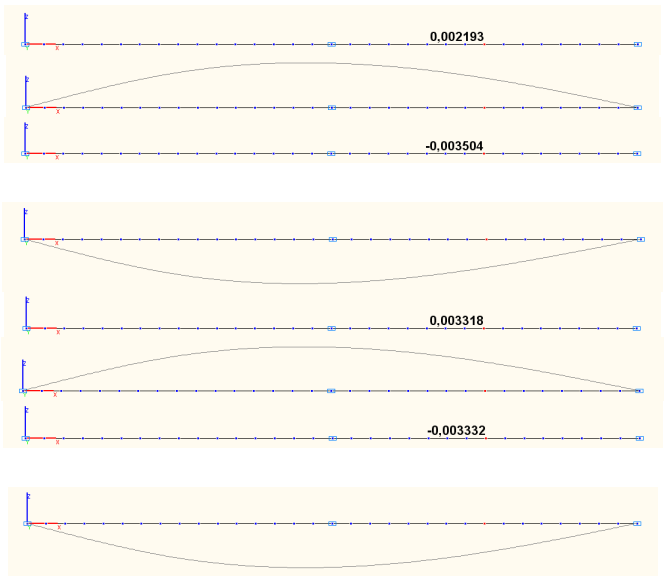


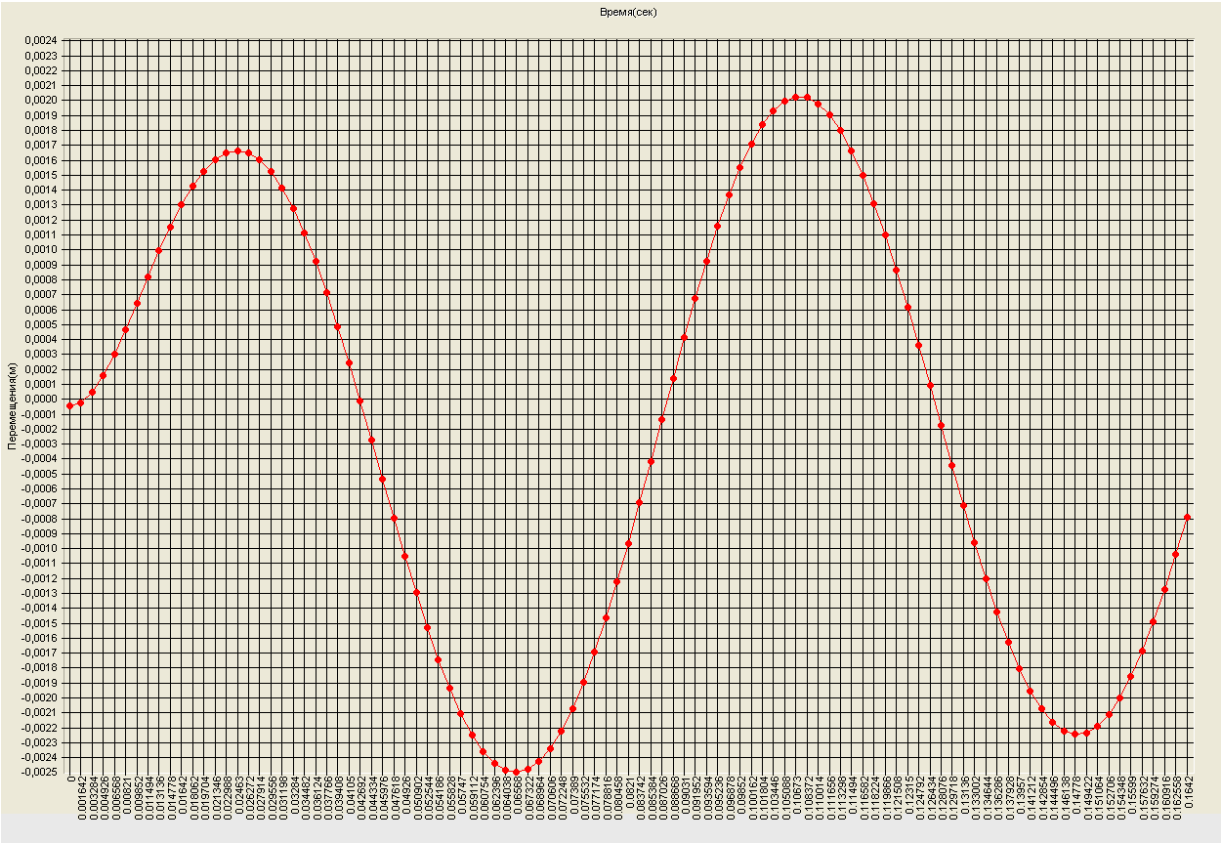
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5\cdot(p_1 + p_2)$

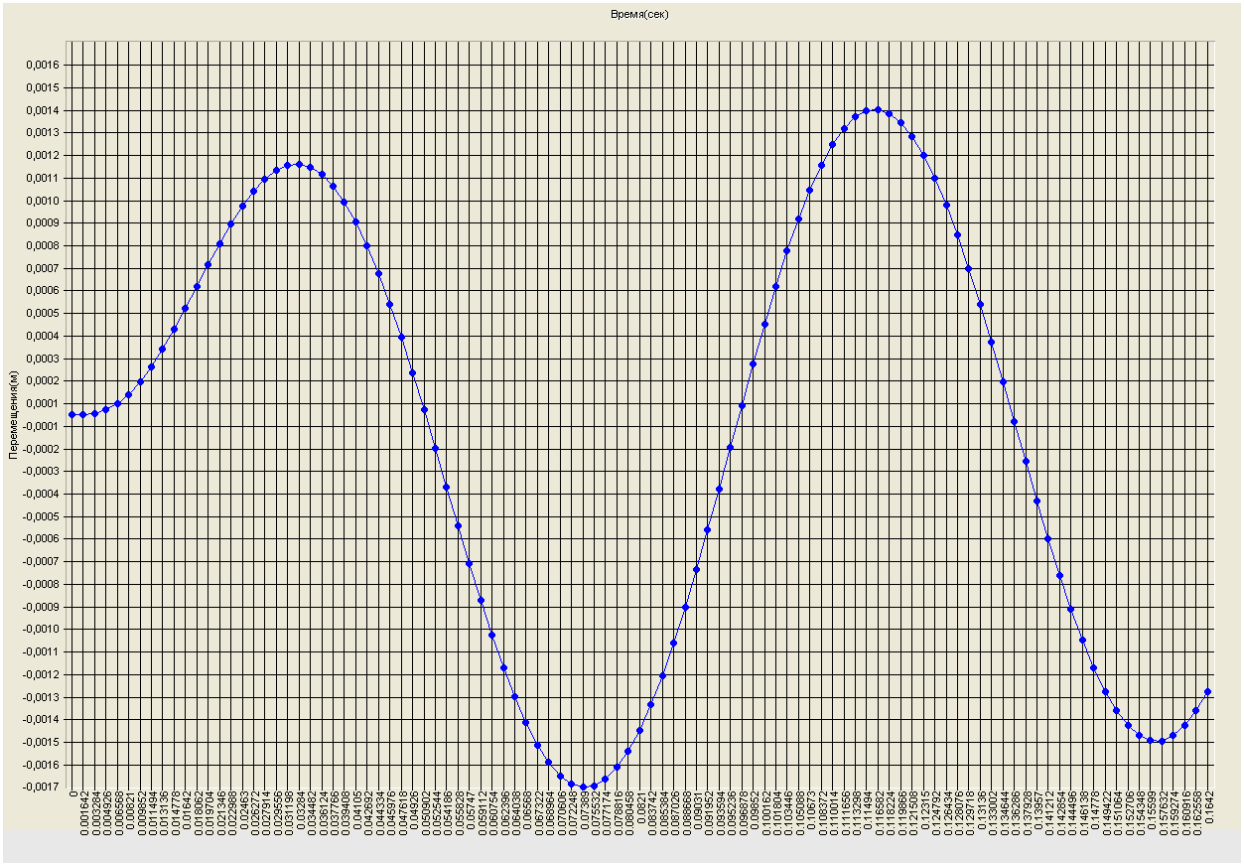
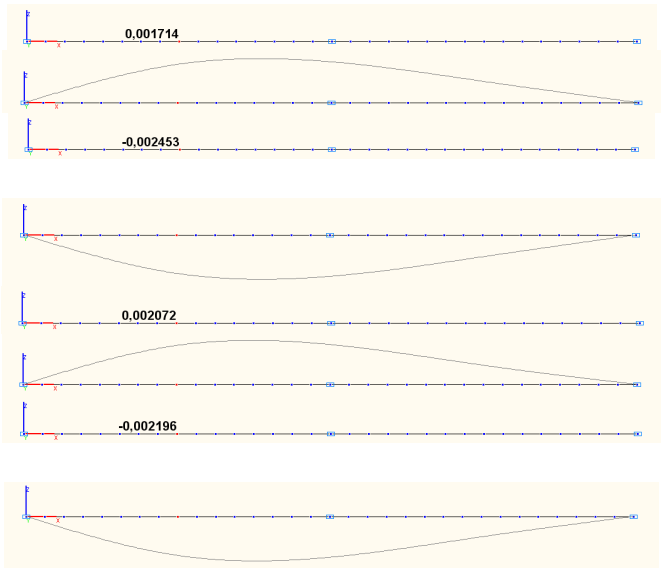
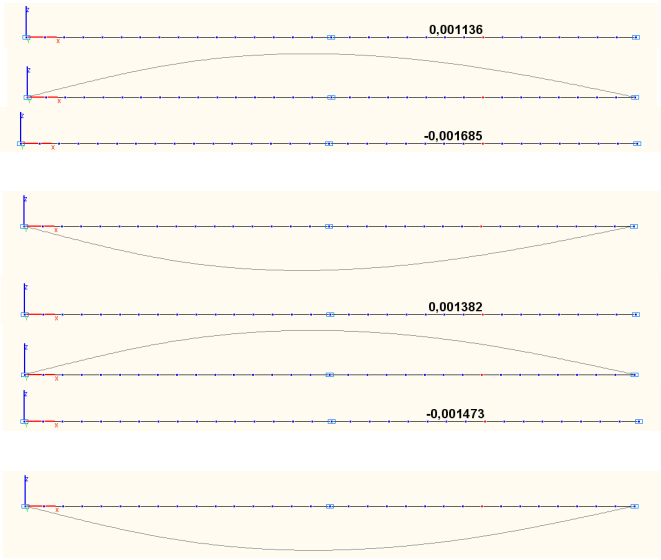


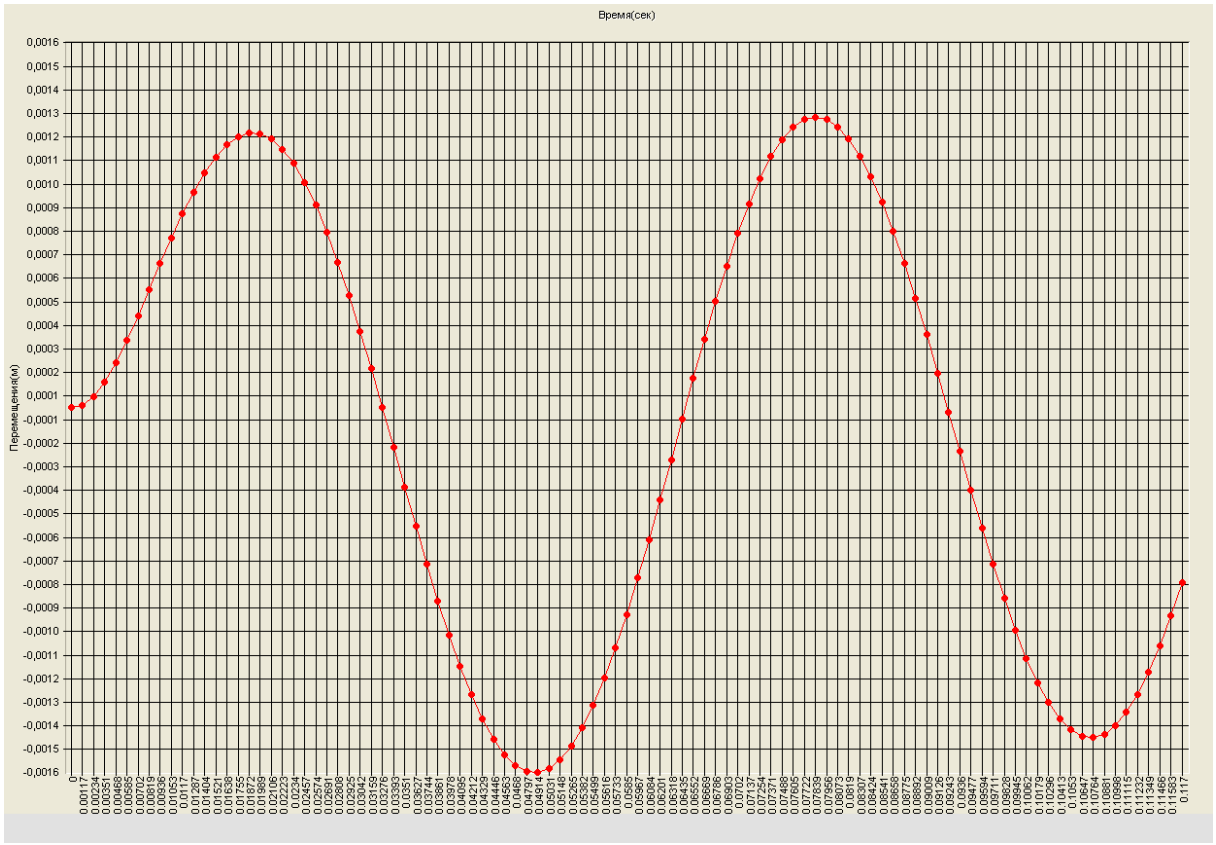
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5\cdot(p_1 + p_2)$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$

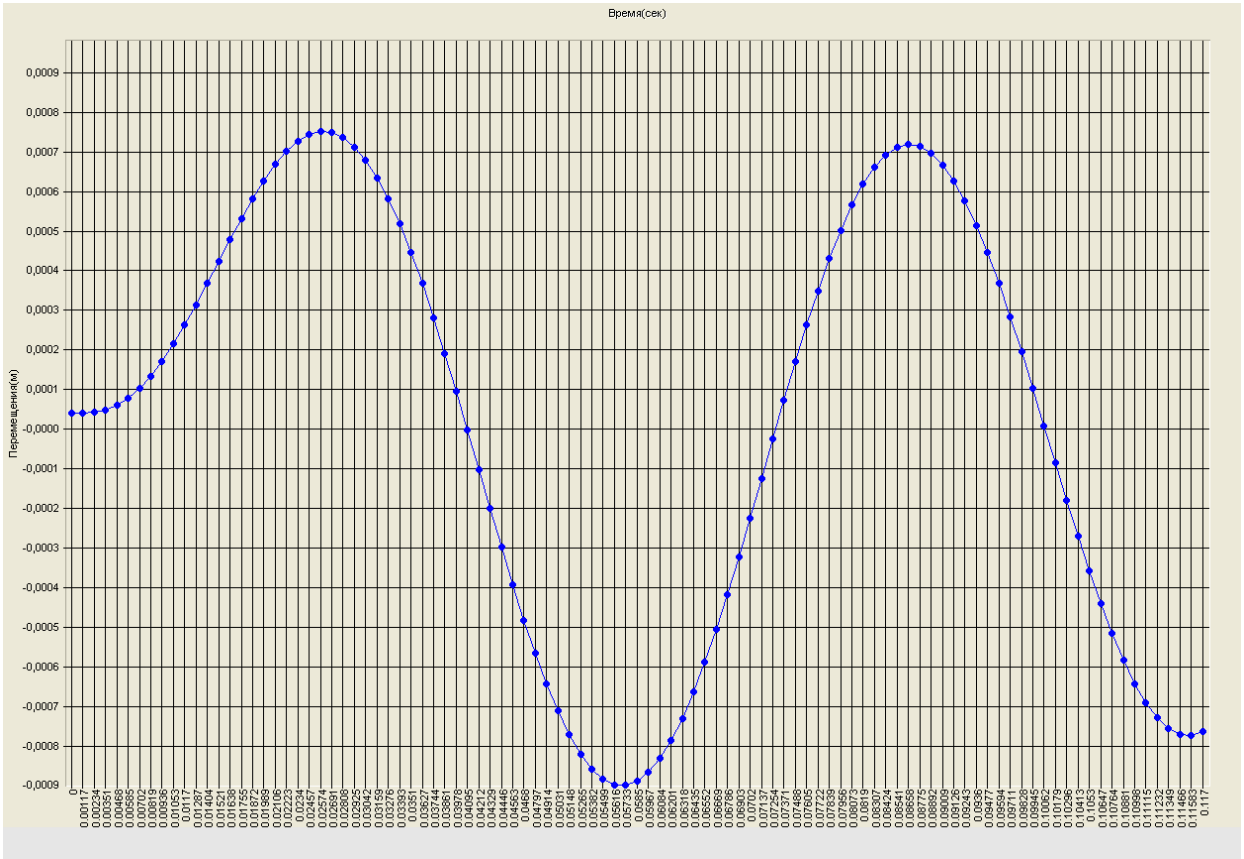
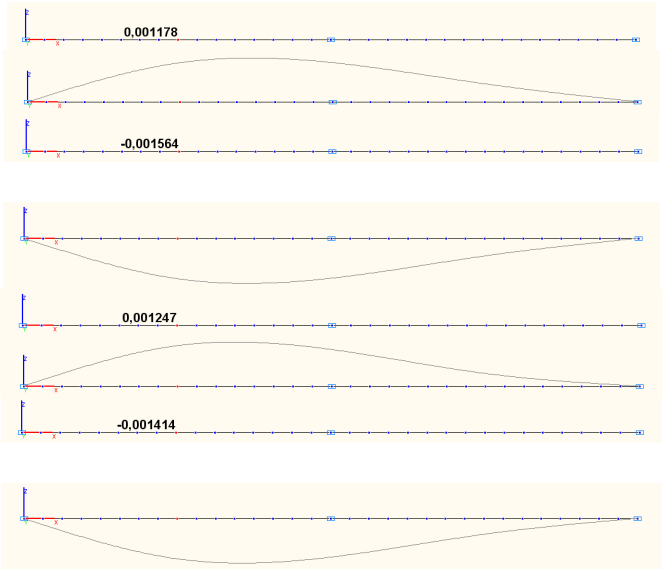
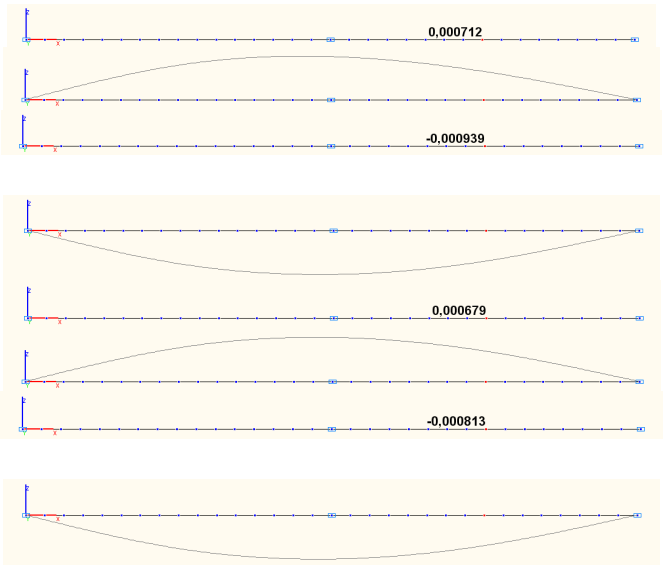


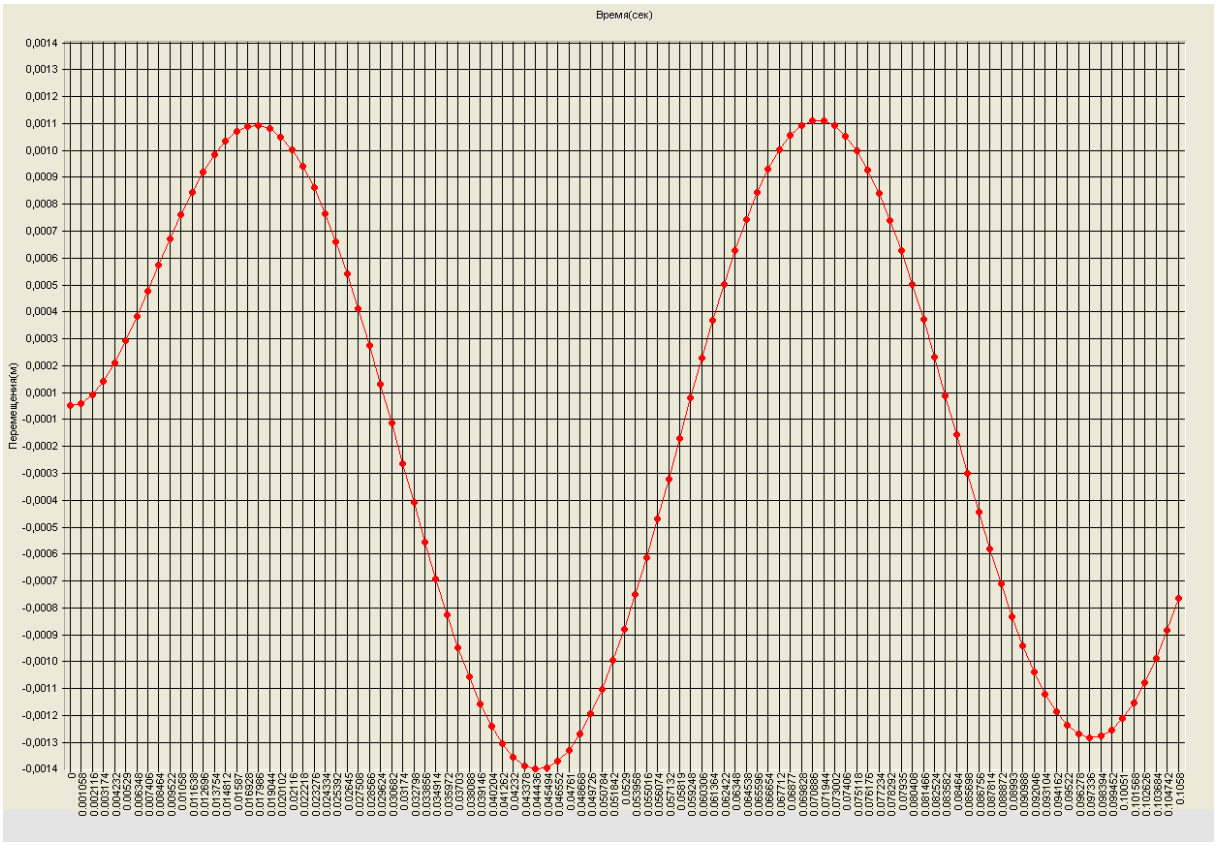
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированная схема в соответствующий момент (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$

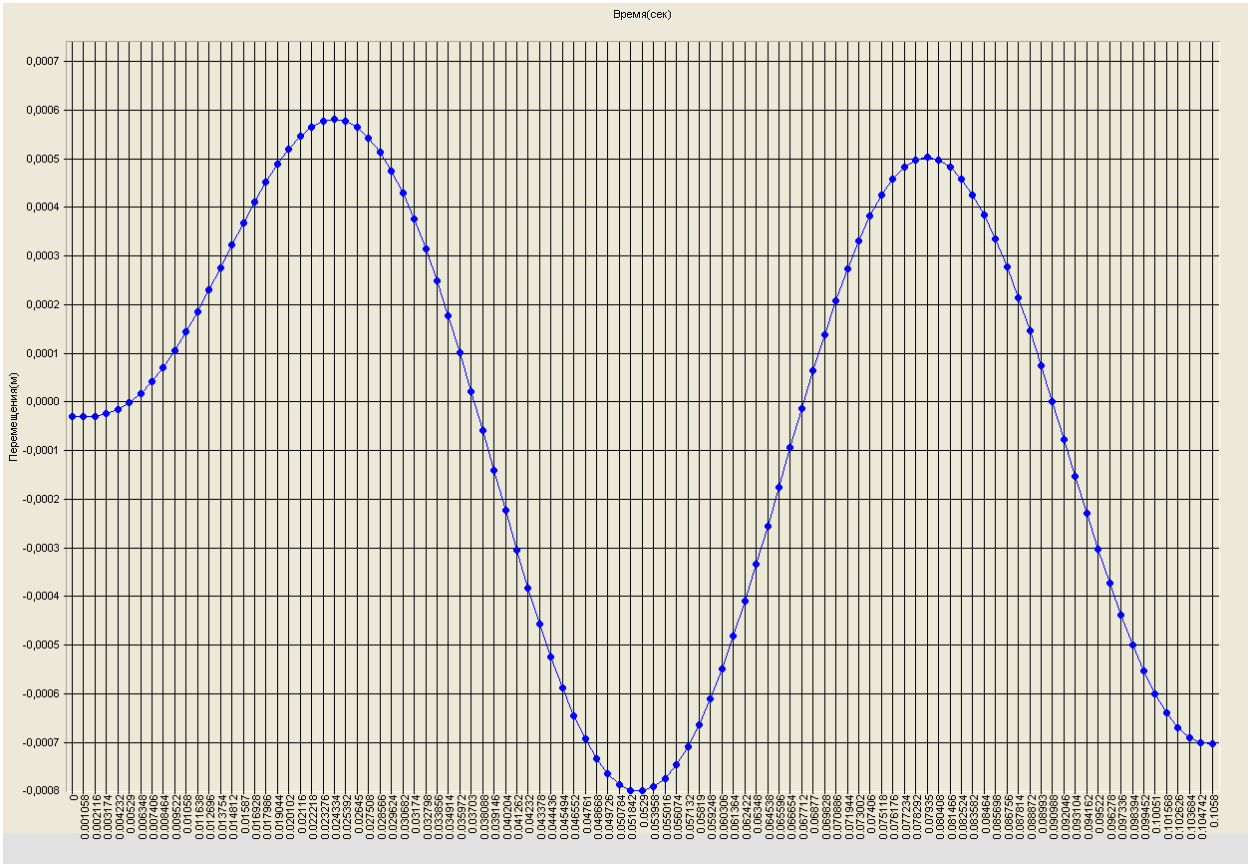
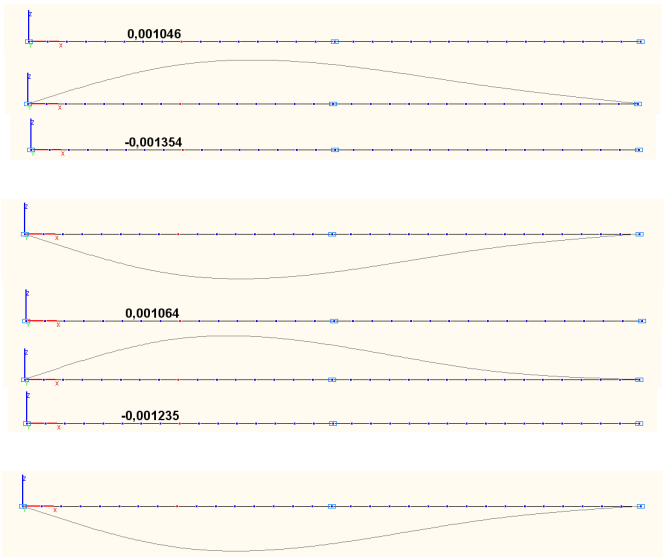
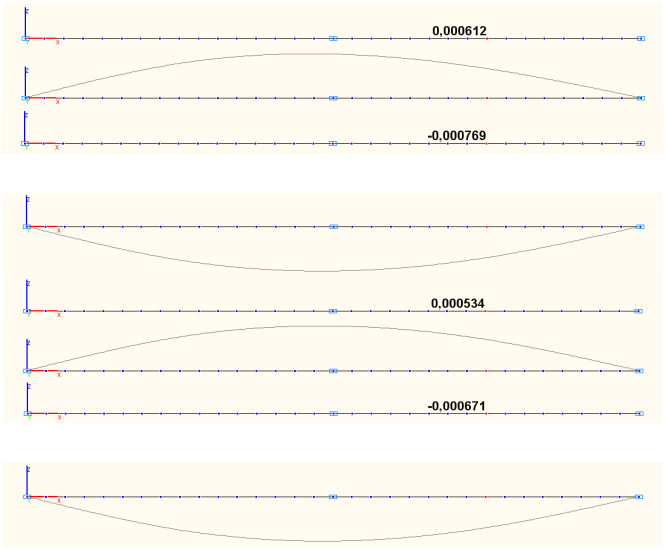


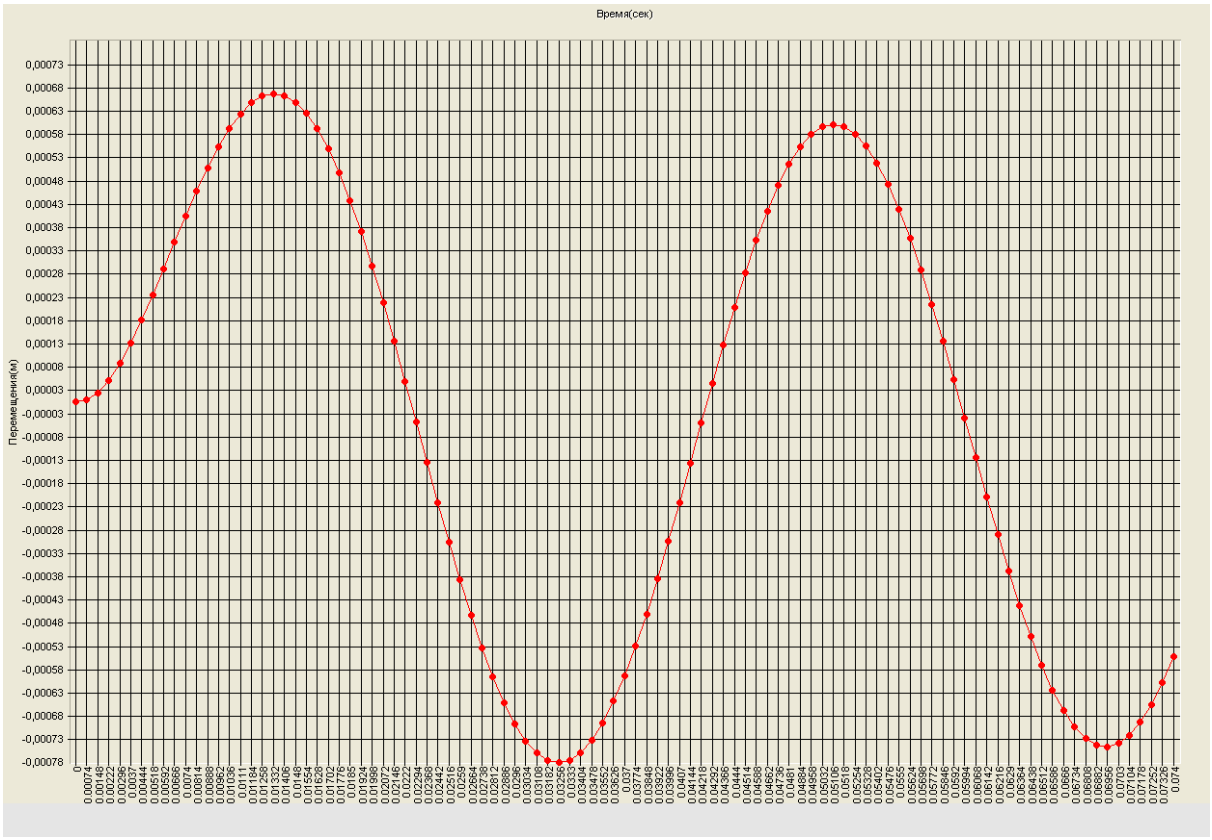
График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Амплитудное значение прогиба η_1 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы
и деформированная схема в соответствующий момент (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

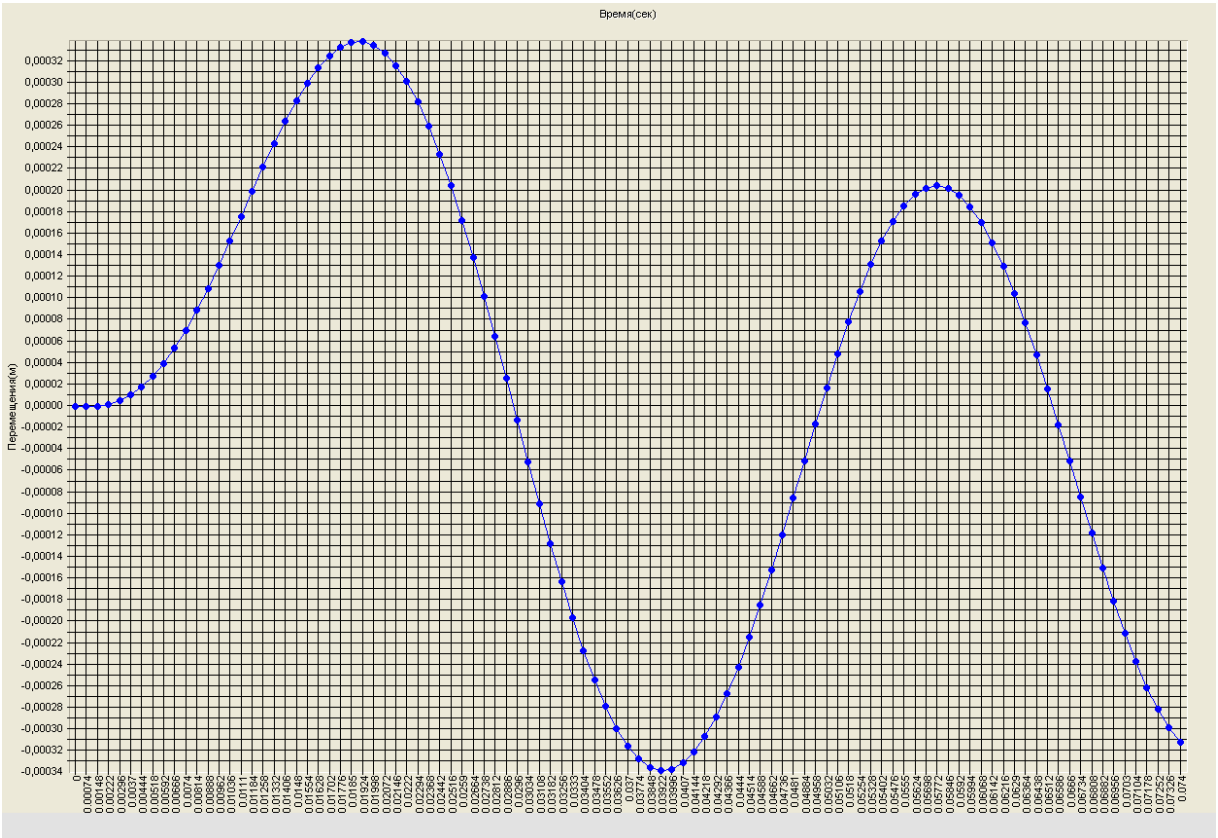
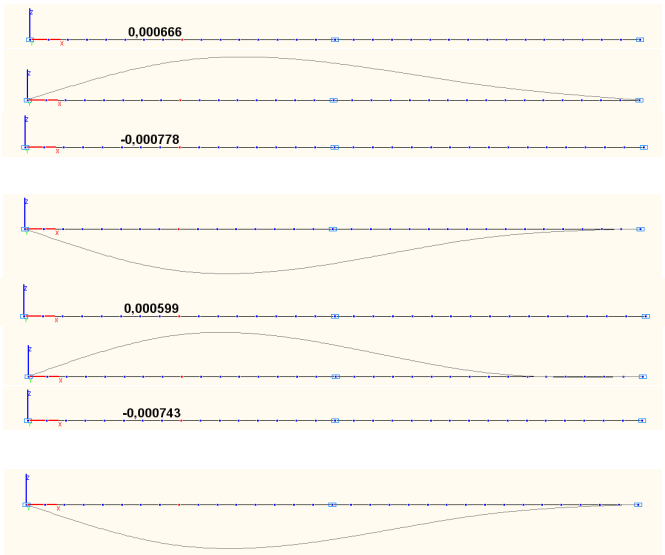
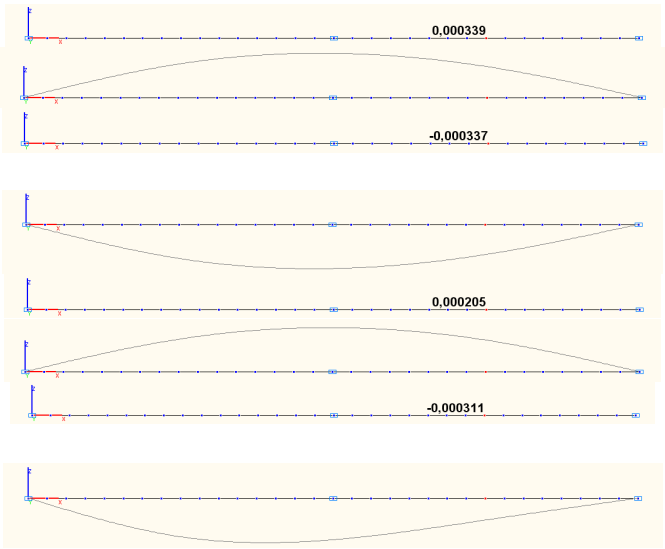


График изменения прогиба η_2 в поперечном сечении балки
с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы, во времени (м).
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

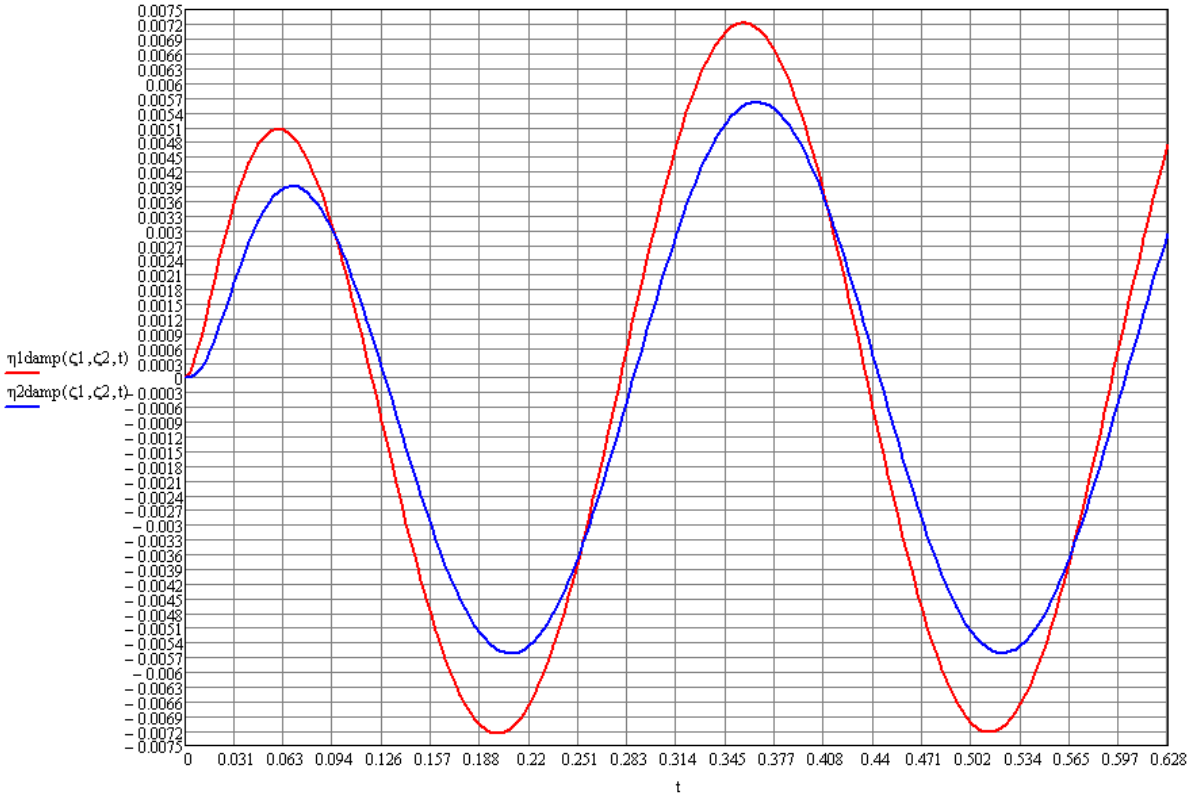


Амплитудные значения прогиба η_1 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, подверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

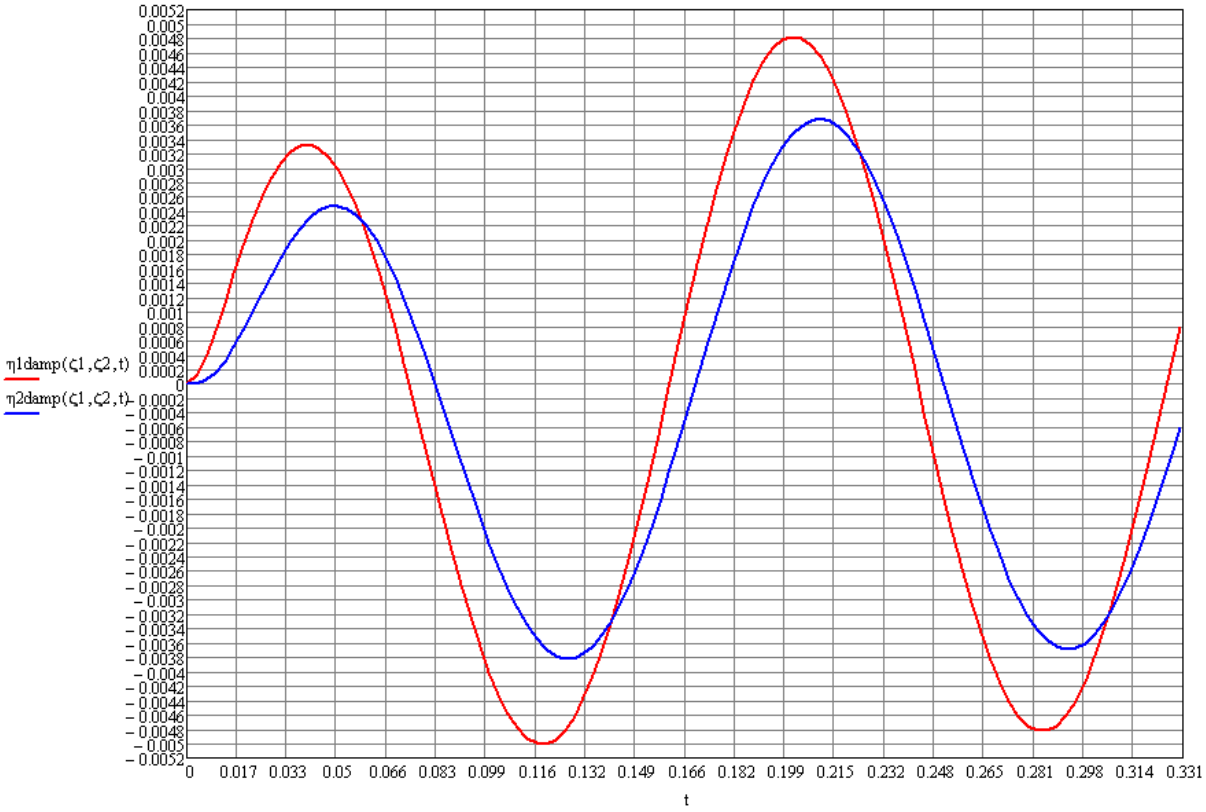


Амплитудные значения прогиба η_2 в поперечном сечении балки с присоединенной массой, неподверженной воздействию поперечной силы и деформированные схемы в соответствующие моменты (м). Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

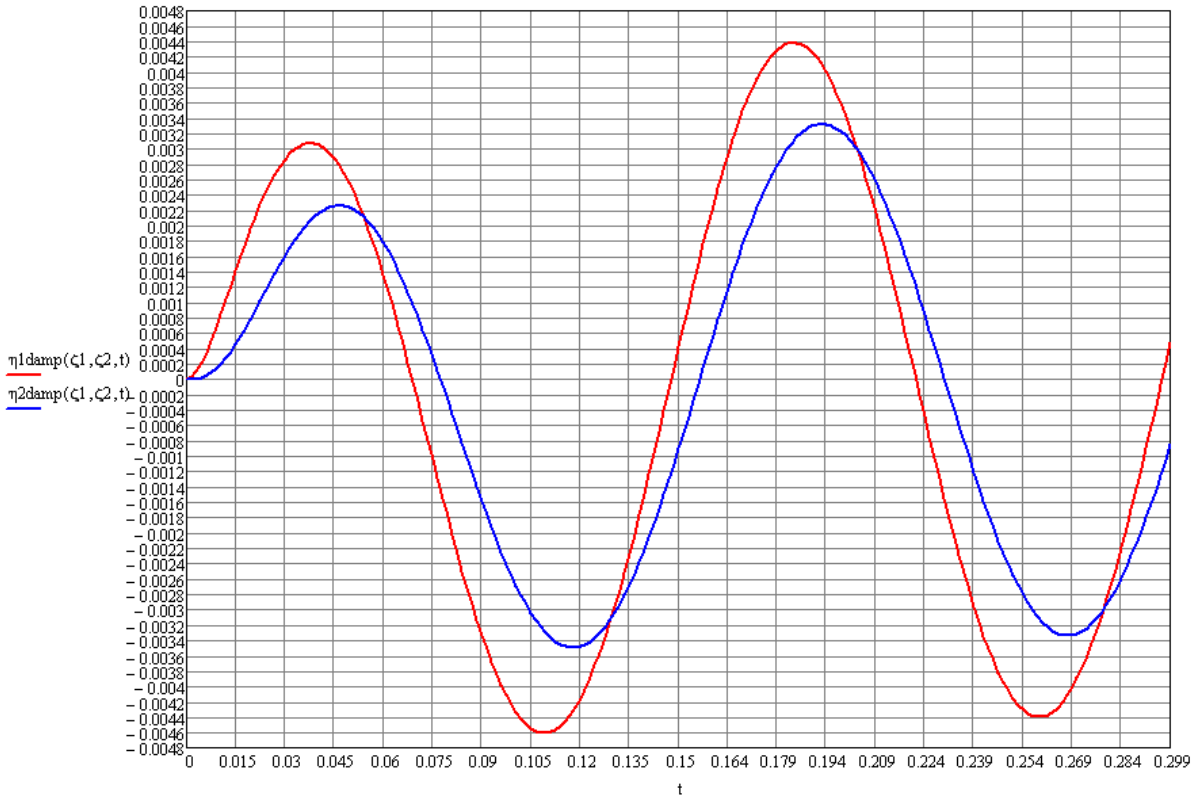
Сравнение решений:



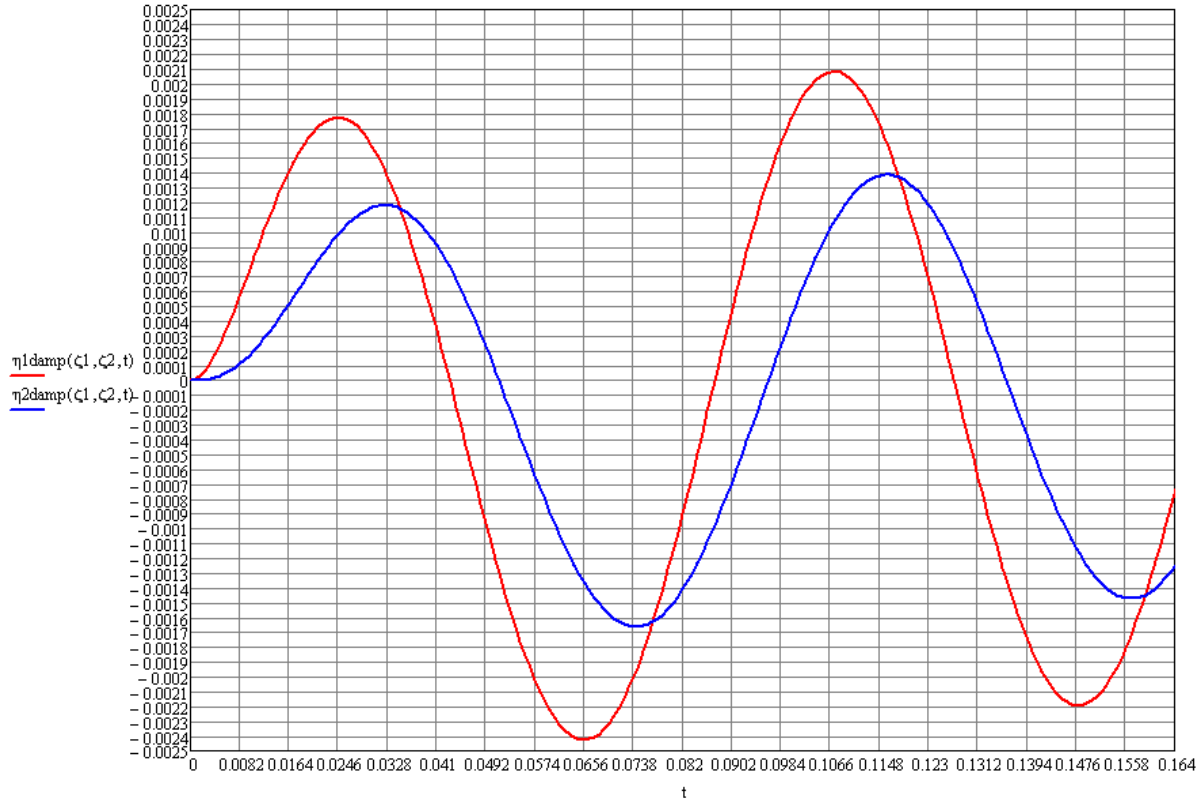
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$



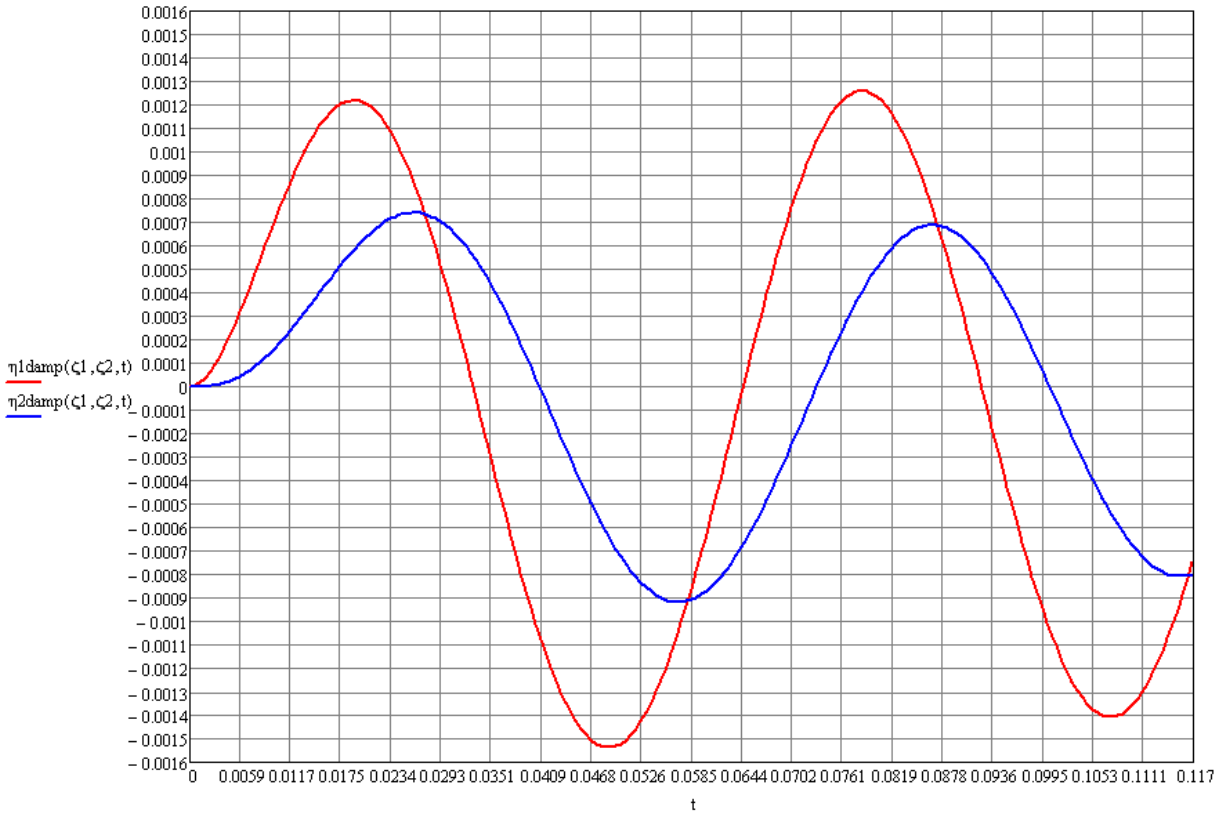
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$



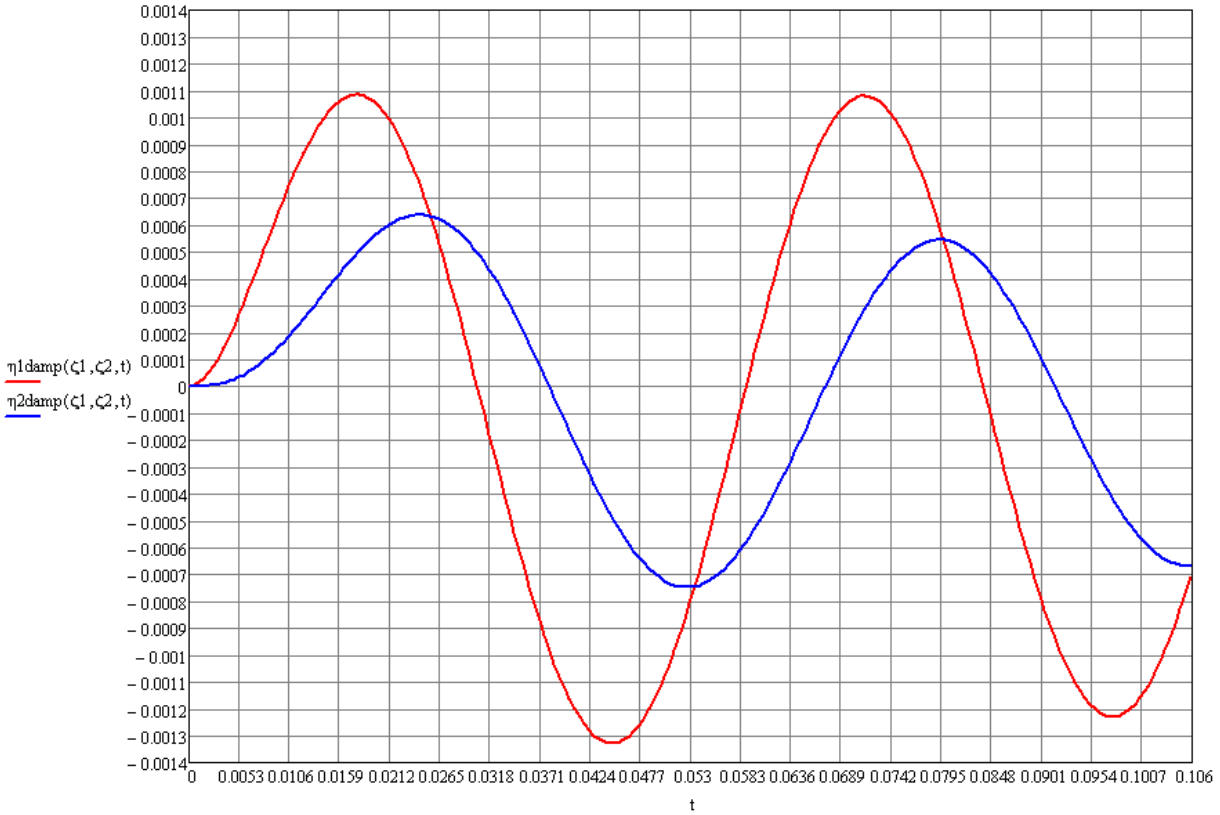
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$



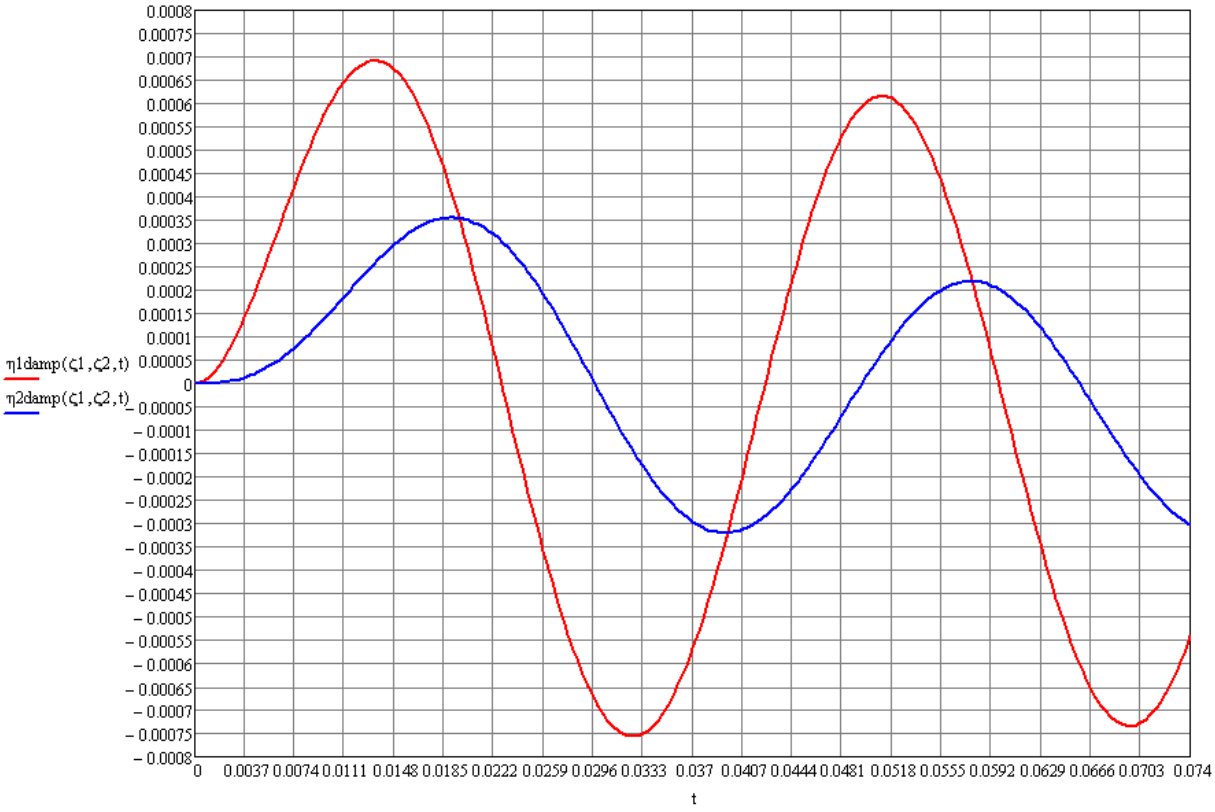
Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$



Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$



Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$



Графики изменения прогибов η_1 и η_2 в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами во времени по теоретическому решению (м)
Частота гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

Собственные частоты колебаний p, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	40.000	40.000	0.00
2	113.137	113.137	0.00

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_1 = 0.5 \cdot p_1$

Узловая масса	**Теория**		**SCAD**		
	Время, с	**Прогиб, м**	**Время, с**	**Прогиб, м**	**Отклонения, %**
1	0.0595	0.005054	0.0628	0.004927	2.51
1	0.1996	-0.007251	0.2011	-0.007248	0.04
1	0.3569	0.007232	0.3582	0.007229	0.04
1	0.5139	-0.007232	0.5153	-0.007229	0.04
2	0.0685	0.003899	0.0691	0.003809	2.31
2	0.2079	-0.005627	0.2074	-0.005627	0.00
2	0.3652	0.005613	0.3645	0.005612	0.02
2	0.5223	-0.005613	0.5216	-0.005612	0.02

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_2 = 0.95 \cdot p_1$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0401	0.003330	0.0397	0.003235	2.85
1	0.1181	-0.005009	0.1190	-0.005014	0.10
1	0.2016	0.004822	0.2017	0.004819	0.06
1	0.2842	-0.004834	0.2843	-0.004831	0.06
2	0.0490	0.002478	0.0496	0.002404	2.99
2	0.1268	-0.003825	0.1256	-0.003828	0.08
2	0.2103	0.003684	0.2116	0.003677	0.19
2	0.2929	-0.003692	0.2942	-0.003685	0.19

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_3 = 1.05 \cdot p_1$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0375	0.003077	0.0389	0.002985	2.99
1	0.1088	-0.004609	0.1077	-0.004618	0.19
1	0.1845	0.004383	0.1855	0.004377	0.14
1	0.2592	-0.004402	0.2603	-0.004396	0.14
2	0.0464	0.002267	0.0479	0.002193	3.26
2	0.1175	-0.003497	0.1167	-0.003504	0.20
2	0.1932	0.003325	0.1945	0.003318	0.21
2	0.2679	-0.003339	0.2693	-0.003332	0.21

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_4 = 0.5 \cdot (p_1 + p_2)$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0246	0.001770	0.0246	0.001714	3.16
1	0.0656	-0.002427	0.0657	-0.002453	1.07
1	0.1072	0.002082	0.1067	0.002072	0.48
1	0.1480	-0.002194	0.1478	-0.002196	0.09
2	0.0324	0.001179	0.0328	0.001136	3.65
2	0.0742	-0.001664	0.0739	-0.001685	1.26
2	0.1160	0.001388	0.1166	0.001382	0.43
2	0.1568	-0.001474	0.1576	-0.001473	0.07

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_5 = 0.95 \cdot p_2$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0191	0.001221	0.0187	0.001178	3.52
1	0.0488	-0.001538	0.0491	-0.001564	1.69
1	0.0783	0.001259	0.0784	0.001247	0.95
1	0.1073	-0.001408	0.1076	-0.001414	0.43
2	0.0260	0.000741	0.0257	0.000712	3.91
2	0.0569	-0.000918	0.0573	-0.000939	2.29
2	0.0866	0.000689	0.0866	0.000679	1.45
2	0.1154	-0.000809	0.1158	-0.000813	0.49

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_6 = 1.05 \cdot p_2$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0177	0.001085	0.0180	0.001046	3.59
1	0.0447	-0.001329	0.0444	-0.001354	1.88
1	0.0714	0.001080	0.0709	0.001064	1.48
1	0.0976	-0.001229	0.0973	-0.001235	0.49
2	0.0244	0.000638	0.0243	0.000612	4.08
2	0.0526	-0.000748	0.0529	-0.000769	2.81
2	0.0793	0.000545	0.0794	0.000534	2.02
2	0.1054	-0.000667	0.1058	-0.000671	0.60

Амплитудные значения прогибов η в поперечных сечениях балки
с присоединенными массами
при частоте гармонической возмущающей силы $\omega_7 = 1.5 \cdot p_2$

Узловая масса	Теория		SCAD		
	Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонения, %
1	0.0134	0.000692	0.0133	0.000666	3.76
1	0.0326	-0.000756	0.0326	-0.000778	2.91
1	0.0511	0.000616	0.0511	0.000599	2.76
1	0.0695	-0.000734	0.0696	-0.000743	1.23
2	0.0191	0.000355	0.0192	0.000339	4.51
2	0.0394	-0.000320	0.0392	-0.000337	5.31
2	0.0577	0.000219	0.0577	0.000205	6.39
2	0.0760	-0.000318	0.0740	-0.000311	2.20

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний p свободно опертой балки определяются по формулам:

$$p_1 = \sqrt{\frac{48 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}}\ ; \qquad p_2 = \sqrt{\frac{384 \cdot E \cdot I}{m \cdot l^3}}\ .$$

При аналитическом решении прогибы η в поперечных сечениях балки с присоединенными массами во времени с учетом рассеивания энергии на внутреннее трение определяются по формулам (гипотеза вязкого трения Фойгта):

$$\eta_1(\zeta_1,\zeta_2,t)=\frac{P_0\cdot l^3}{768\cdot E\cdot I}\cdot\frac{8}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}+4\cdot\xi_1^{\,2}\cdot\frac{\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}}\cdot\left(\cos(\omega\cdot t)-e^{(-\xi_1\cdot p_1\cdot t)}\cdot\cos\left(p_1\cdot\sqrt{1-\xi_1^{\,2}}\cdot t\right)+\frac{2\cdot\xi_1\cdot\frac{\omega}{p_1}}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}\cdot\sin(\omega\cdot t)-\right.$$

$$\left.\frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^{\,2}}}\cdot\frac{1+\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}\cdot e^{(-\xi_1\cdot p_1\cdot t)}\cdot\sin\left(p_1\cdot\sqrt{1-\xi_1^{\,2}}\cdot t\right)\right)+\frac{P_0\cdot l^3}{768\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}+4\cdot\xi_2^{\,2}\cdot\frac{\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}}\cdot \quad ;$$

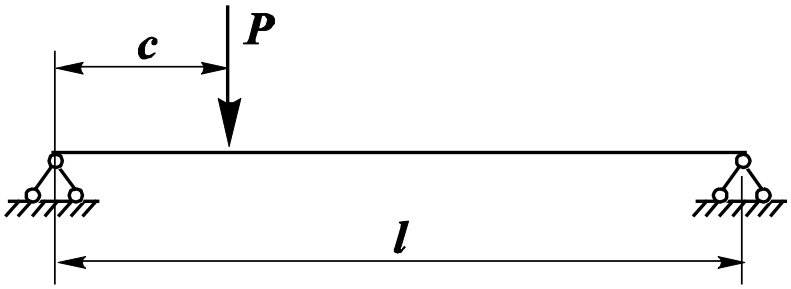
$$\left(\cos(\omega\cdot t)-e^{(-\xi_2\cdot p_2\cdot t)}\cdot\cos\left(p_2\cdot\sqrt{1-\xi_2^{\,2}}\cdot t\right)+\frac{2\cdot\xi_2\cdot\frac{\omega}{p_2}}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}\cdot\sin(\omega\cdot t)-\frac{\xi_2}{\sqrt{1-\xi_2^{\,2}}}\cdot\frac{1+\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}\cdot e^{(-\xi_2\cdot p_2\cdot t)}\cdot\sin\left(p_2\cdot\sqrt{1-\xi_2^{\,2}}\cdot t\right)\right)$$

$$\eta_1(\zeta_1,\zeta_2,t)=\frac{P_0\cdot l^3}{768\cdot E\cdot I}\cdot\frac{8}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}+4\cdot\xi_1^{\,2}\cdot\frac{\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}}\cdot\left(\cos(\omega\cdot t)-e^{(-\xi_1\cdot p_1\cdot t)}\cdot\cos\left(p_1\cdot\sqrt{1-\xi_1^{\,2}}\cdot t\right)+\frac{2\cdot\xi_1\cdot\frac{\omega}{p_1}}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}\cdot\sin(\omega\cdot t)-\right.$$

$$\left.\frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^{\,2}}}\cdot\frac{1+\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_1^{\,2}}}\cdot e^{(-\xi_1\cdot p_1\cdot t)}\cdot\sin\left(p_1\cdot\sqrt{1-\xi_1^{\,2}}\cdot t\right)\right)-\frac{P_0\cdot l^3}{768\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}+4\cdot\xi_2^{\,2}\cdot\frac{\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}}\cdot \quad .$$

$$\left(\cos(\omega\cdot t)-e^{(-\xi_2\cdot p_2\cdot t)}\cdot\cos\left(p_2\cdot\sqrt{1-\xi_2^{\,2}}\cdot t\right)+\frac{2\cdot\xi_2\cdot\frac{\omega}{p_2}}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}\cdot\sin(\omega\cdot t)-\frac{\xi_2}{\sqrt{1-\xi_2^{\,2}}}\cdot\frac{1+\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}{1-\frac{\omega^2}{p_2^{\,2}}}\cdot e^{(-\xi_2\cdot p_2\cdot t)}\cdot\sin\left(p_2\cdot\sqrt{1-\xi_2^{\,2}}\cdot t\right)\right)$$

Свободно опертая балка с распределенной массой под действием поперечной гармонической возмущающей силы, расположенной в середине пролета



***Цель*:** Определение деформированного состояния свободно опертой балки с распределенной массой от воздействия поперечной гармонической возмущающей силы, расположенной в середине пролета.

***Имя файла с исходными данными:*5.13.SPR**

Формулировка задачи: В середине пролета свободно опертой балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой μ в начальный момент времени прикладывается сила P_0, в дальнейшем гармонически изменяющаяся с частотой ω. Определить собственные формы и частоты колебаний p свободно опертой балки, а также прогиб η в поперечном сечении середины пролета балки во времени.

Ссылки: С.П. Тимошенко, Курс теории упругости, под редакцией Э.И. Григолюка, Киев, Наукова думка, 1972, стр. 343.

Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^6$ тс/м^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
b = 0.4 м	- ширина прямоугольного поперечного сечения балки;
h = 0.8 м	- высота прямоугольного поперечного сечения балки;
l = 8.0 м	- длина пролета балки;
$\gamma = 2.5$ тс/м^3	- объемный вес материала балки;
$P_0 = 76.8$ тс	- амплитудное значение гармонической возмущающей силы, расположенной в середине пролета;
g = 10.00 м/с^2	- значение ускорения свободного падения;

$\mu = 2.5 \cdot 0.4 \cdot 0.8/10.0 = 0.08$ тс·с^2/м^2 - значение равномерно распределенной массы балки;
$I = 0.4 \cdot (0.8)^3/12 = 0.017067$ м^4 - момент инерции поперечного сечения балки.

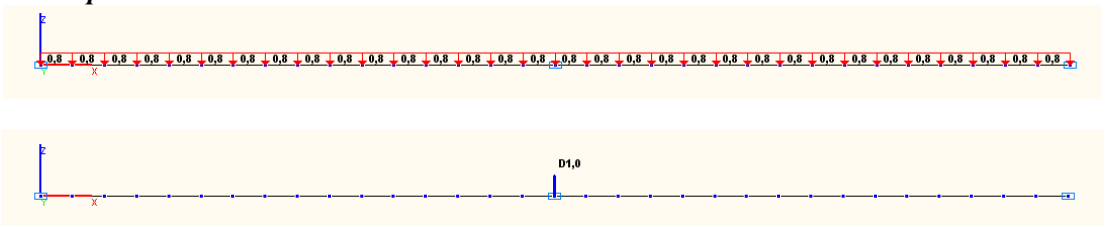
Частота гармонической возмущающей силы ω принимается в зависимости от значения частоты основного тона собственных колебаний балки p_1:

$\omega = 0.5 \cdot p_1$.

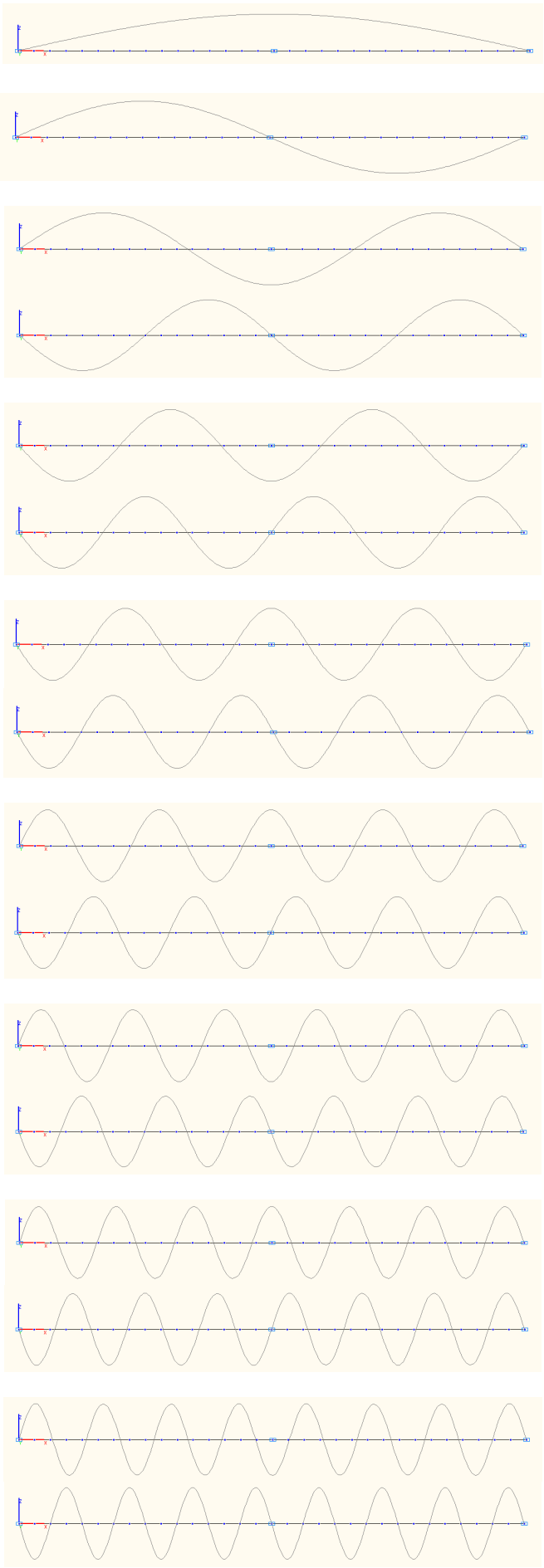
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 32 стержневых элемента типа 3. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы UX. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса балки μ·g.
Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний p, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются прогибы η в поперечном сечении середины пролета балки во времени. Воздействие поперечной гармонической возмущающей силы описывается графиком изменения нагрузки во времени и

задается в виде узловой силы, действующей по оси Z общей системы координат с масштабным множителем 1.0 и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы между моментами времени графика изменения нагрузки равны Δt_{int} = T/100, где T – период воздействия гармонической возмущающей силы, и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика воздействие поперечной гармонической возмущающей силы принимается со значениями $P_n = P_0 \cdot \cos(\omega \cdot n \cdot \Delta t_{int})$ в моменты времени $n \cdot \Delta t_{int}$. Продолжительность процесса во времени равна t = 2·T. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с минимальным значением ξ = 0.0001. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я -- 16-я собственные формы колебаний

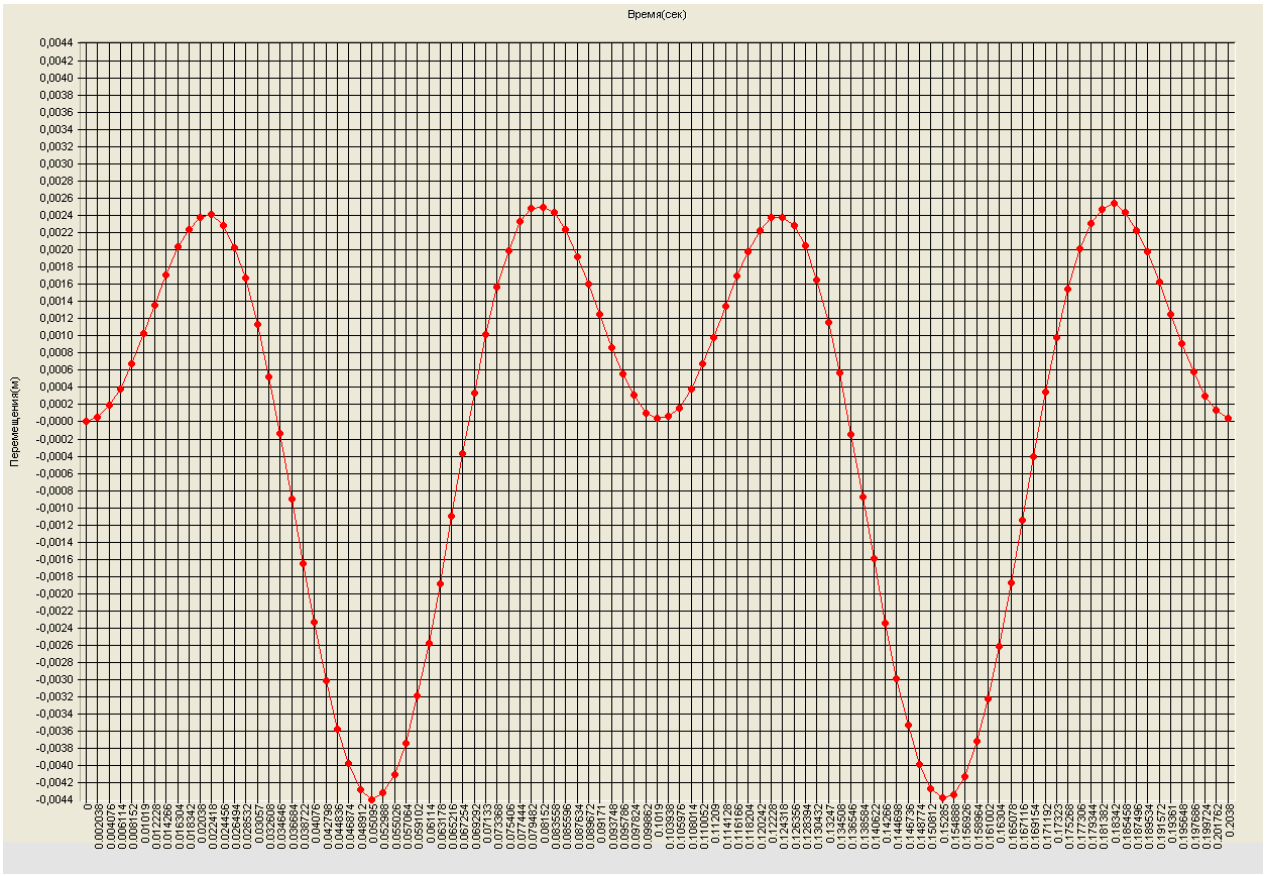
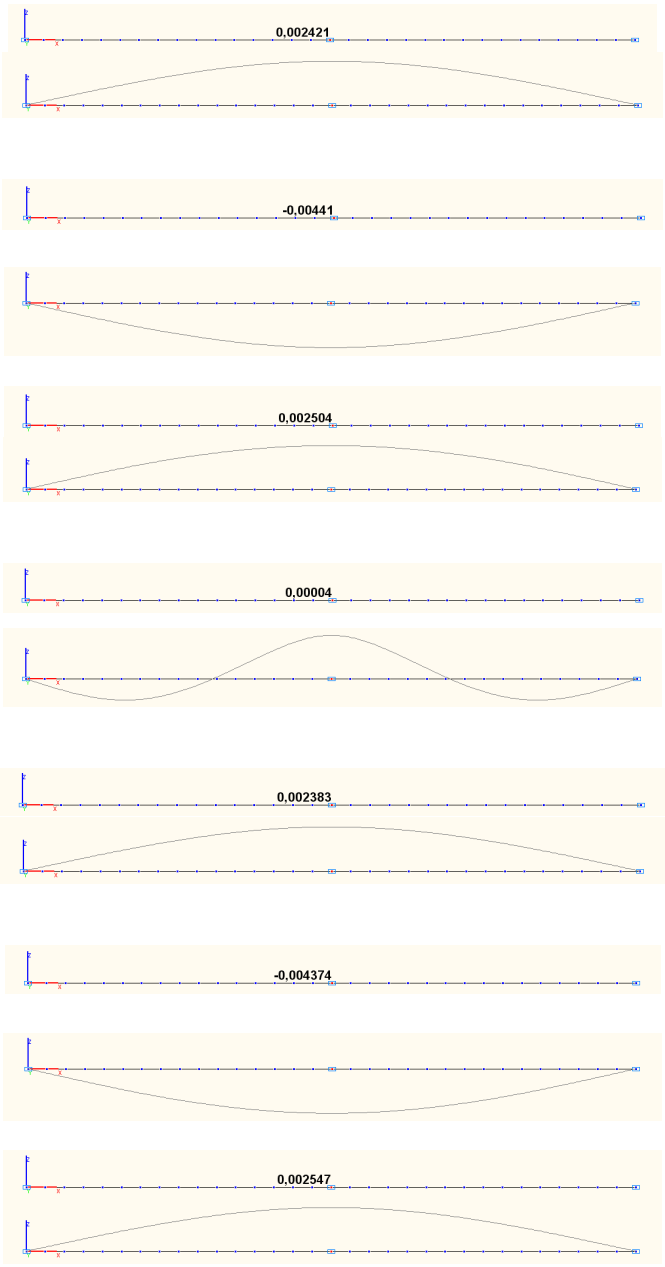


График изменения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки во времени (м).



Амплитудные значения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки и деформированные схемы в соответствующие моменты (м).

Сравнение решений:

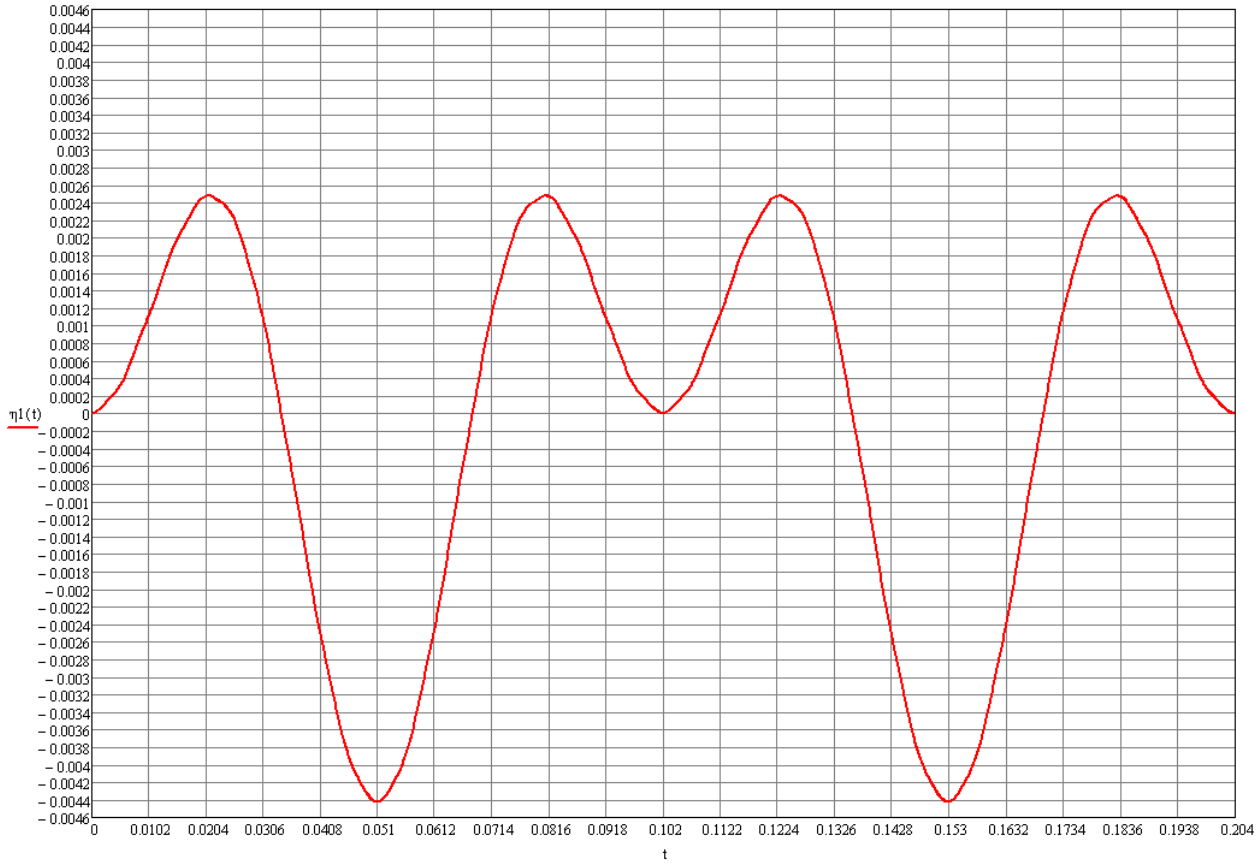


График изменения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки во времени по теоретическому решению (м)

Собственные частоты колебаний *p*, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	123.370	123.370	0.00
2	493.480	493.480	0.00
3	1110.330	1110.325	0.00
4	1973.921	1973.887	0.00
5	3084.251	3084.120	0.00
6	4441.322	4440.919	0.01
7	6045.133	6044.087	0.02
8	7895.684	7893.275	0.03
9	9992.974	9987.907	0.05
10	12337.005	12327.069	0.08
11	14927.777	14909.367	0.12
12	17765.288	17732.721	0.18
13	20849.539	20794.097	0.27
14	24180.531	24089.155	0.38
15	27758.262	27611.778	0.53
16	31582.734	31353.470	0.73

Амплитудные значения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки при частоте гармонической возмущающей силы $\omega = 0.5 \cdot p_1$

Теория		**SCAD**		
Время, с	**Прогиб, м**	**Время, с**	**Прогиб, м**	**Отклонения, %**
0.0210	0.002474	0.0224	0.002421	2.14
0.0510	-0.004428	0.0510	-0.004410	0.41
0.0809	0.002474	0.0815	0.002504	1.21
0.1017	0.000002	0.1019	0.000040	–
0.1228	0.002474	0.1223	0.002383	3.68
0.1528	-0.004428	0.1529	-0.004374	1.22
0.1828	0.002474	0.1834	0.002547	2.95

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний *p* свободно опертой балки определяются по формуле:

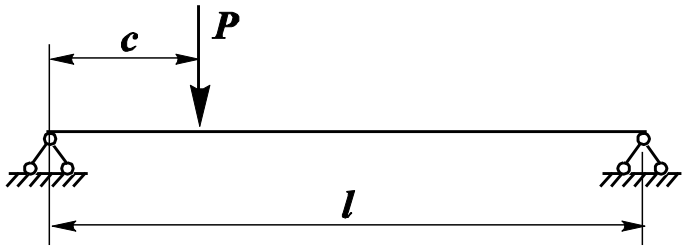
$$\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}},$$

где n = 1, 2, 3, 4, … – номер формы собственных колебаний.

При аналитическом решении прогибы η в поперечном сечении середины пролета балки во времени определяются по формуле:

$$\eta(t) = \frac{2 \cdot P_0 \cdot l^3}{\pi^4 \cdot E \cdot I} \cdot \sum_{n=1} \left[\frac{\left(sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right)^2}{n^4 \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot l^4 \cdot \omega^2}{n^4 \cdot \pi^4 \cdot E \cdot I} \right)} \cdot \left(cos(\omega \cdot t) - cos\left(\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \cdot t \right) \right) \right];$$

Свободно опертая балка с распределенной массой под действием постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки с постоянной скоростью



Цель: Определение деформированного состояния свободно опертой балки с распределенной массой от воздействия постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки с постоянной скоростью.

Файлы с исходными данными:

Название файла	Описание файла
DIN_B_ML1.SPR **График_DIN_B_ML1.txt**	Воздействие постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки, задается в виде сил, приложенных во всех узлах расчетной схемы по следующему варианту: Время запаздывания для каждой из узловых сил различно. График, описывающий изменение нагрузки во времени, является единым для всех узловых сил.
DIN_B_ML2.SPR **График_DIN_B_ML2_2.txt** **График_DIN_B_ML2_3.txt** **График_DIN_B_ML2_4.txt** **График_DIN_B_ML2_5.txt** **График_DIN_B_ML2_6.txt** **График_DIN_B_ML2_7.txt** **График_DIN_B_ML2_8.txt** **График_DIN_B_ML2_9.txt** **График_DIN_B_ML2_10.txt** **График_DIN_B_ML2_11.txt** **График_DIN_B_ML2_12.txt** **График_DIN_B_ML2_13.txt** **График_DIN_B_ML2_14.txt** **График_DIN_B_ML2_15.txt** **График_DIN_B_ML2_16.txt** **График_DIN_B_ML2_17.txt** **График_DIN_B_ML2_18.txt** **График_DIN_B_ML2_19.txt** **График_DIN_B_ML2_20.txt** **График_DIN_B_ML2_21.txt** **График_DIN_B_ML2_22.txt** **График_DIN_B_ML2_23.txt** **График_DIN_B_ML2_24.txt** **График_DIN_B_ML2_25.txt** **График_DIN_B_ML2_26.txt** **График_DIN_B_ML2_27.txt** **График_DIN_B_ML2_28.txt** **График_DIN_B_ML2_29.txt** **График_DIN_B_ML2_30.txt** **График_DIN_B_ML2_31.txt** **График_DIN_B_ML2_32.txt**	Воздействие постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки, задается в виде сил, приложенных во всех узлах расчетной схемы по следующему варианту: Время запаздывания для всех узловых сил является единым. Каждой узловой силе соответствует свой график, описывающий изменение нагрузки во времени.

Формулировка задачи: Вдоль пролета свободно опертой балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой μ перемещается с постоянной скоростью v постоянная

поперечная сила *P*. Определить собственные формы и частоты колебаний *p* свободно опертой балки, а также прогиб η в поперечном сечении середины пролета балки во времени.

Ссылки: С.П. Тимошенко, Курс теории упругости, под редакцией Э.И. Григолюка, Киев, Наукова думка, 1972, стр. 345.

Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^6$ тс/м^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
b = 0.4 м	- ширина прямоугольного поперечного сечения балки;
h = 0.8 м	- высота прямоугольного поперечного сечения балки;
l = 8.0 м	- длина пролета балки;
$\gamma = 2.5$ тс/м^3	- объемный вес материала балки;
P = 76.8 тс	- значение постоянной силы, перемещающейся вдоль пролета балки;
g = 10.00 м/с^2	- значение ускорения свободного падения;

$\mu = 2.5 \cdot 0.4 \cdot 0.8 / 10.0 = 0.08$ тс·с^2/м^2	- значение равномерно распределенной массы балки;
$I = 0.4 \cdot (0.8)^3 / 12 = 0.017067$ м^4	- момент инерции поперечного сечения балки.

Скорость перемещения постоянной силы v принимается в зависимости от значений длины пролета балки и периода основного тона собственных колебаний балки T_1:

$v = l / T_1$.

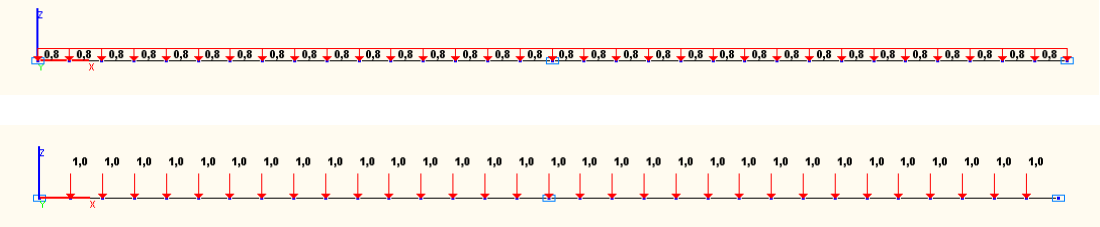
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 32 стержневых элемента типа 3. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы UX. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса балки μ·g.
Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний p, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются прогибы η в поперечном сечении середины пролета балки во времени.
Воздействие постоянной поперечной силы, перемещающейся вдоль пролета балки, задается в виде сил, приложенных во всех узлах расчетной схемы по оси Z общей системы координат с масштабным множителем 1.0 по двум вариантам:

- Время запаздывания для каждой из узловых сил различно и определяется как $t_0 = 2 \cdot (m-1) \cdot \Delta t_{int}$, где m – количество конечных элементов, отсчитываемое от опорного узла балки до рассматриваемого по ходу движения нагрузки. График, описывающий изменение нагрузки во времени, является единым для всех узловых сил. При построении графика узловая сила принимается с последовательными значениями: 0; $0.5 \cdot P$; P; $0.5 \cdot P$; 0 в моменты времени: 0; Δt_{int}; $2 \cdot \Delta t_{int}$; $3 \cdot \Delta t_{int}$; $4 \cdot \Delta t_{int}$; $5 \cdot \Delta t_{int}$, отсчитываемые от времени запаздывания t_0, в дальнейшие моменты времени узловая сила равна 0.
- Время запаздывания для всех узловых сил является единым и равно $t_0 = 0$. Каждой узловой силе соответствует свой график, описывающий изменение нагрузки во времени. При построении графика узловая сила в моменты времени от 0 до $2 \cdot (m-1) \cdot \Delta t_{int}$ равна 0, в моменты времени от $2 \cdot (m-1) \cdot \Delta t_{int}$ до $2 \cdot (m+1) \cdot \Delta t_{int}$ включительно принимается с последовательными значениями: 0; $0.5 \cdot P$; P; $0.5 \cdot P$; 0, в дальнейшие моменты времени узловая сила равна 0, где m – количество конечных элементов, отсчитываемое от опорного узла балки до рассматриваемого по ходу движения нагрузки.

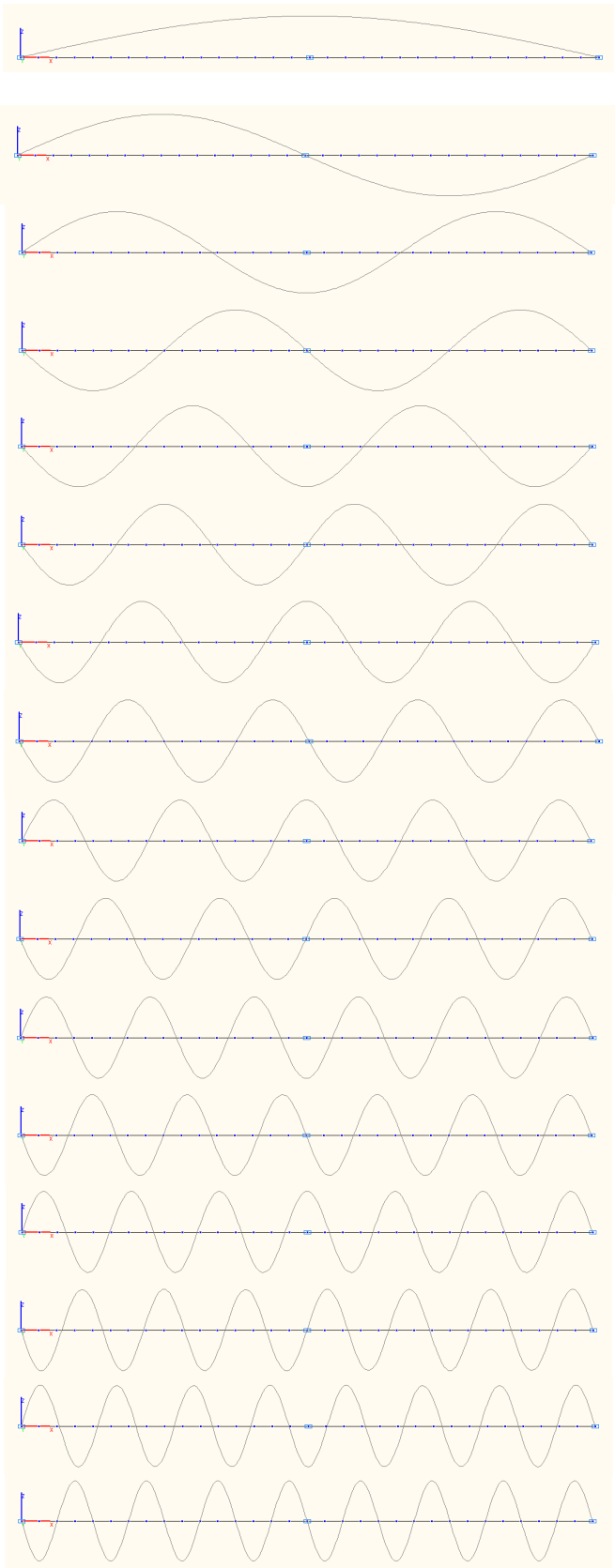
Для обоих вариантов задания воздействия подвижной нагрузки интервалы между моментами времени графиков изменения нагрузки равны времени прохождения половины расстояния между смежными узлами расчетной схемы со скоростью v: $\Delta t_{int} = L / (2 \cdot n \cdot v) = T_1 / (2 \cdot n)$ и соответствуют шагу интегрирования, где n – количество конечных элементов в расчетной схеме. Продолжительность процесса равна времени прохождения подвижной нагрузки по пролету балки l со скоростью v: $t = l/v = T_1$. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с минимальным значением $\xi = 0.0001$. Коэффициент пересчета для

присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я -- 16-я собственные формы колебаний

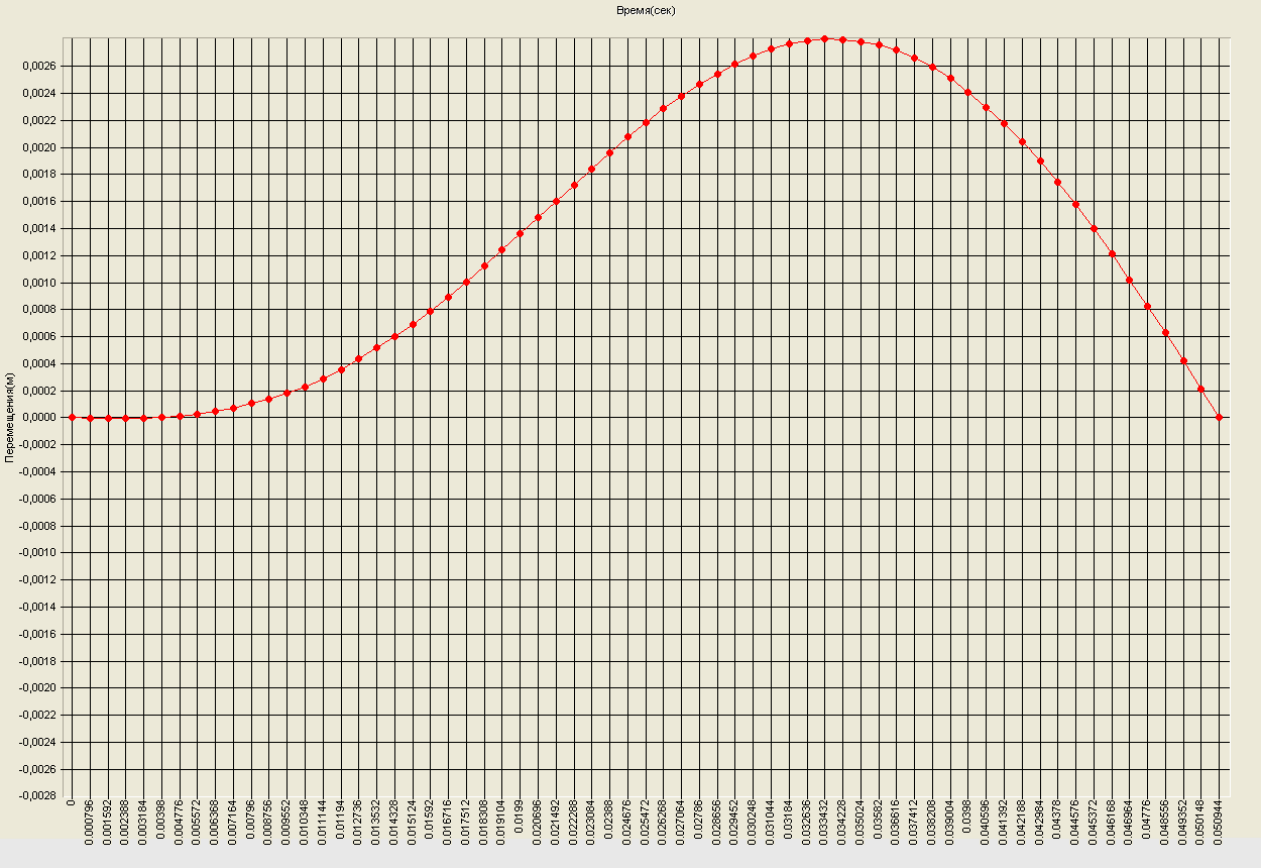
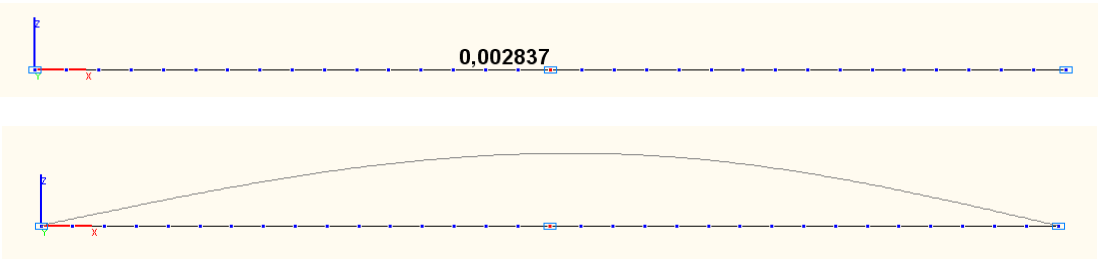


График изменения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки во времени (м)



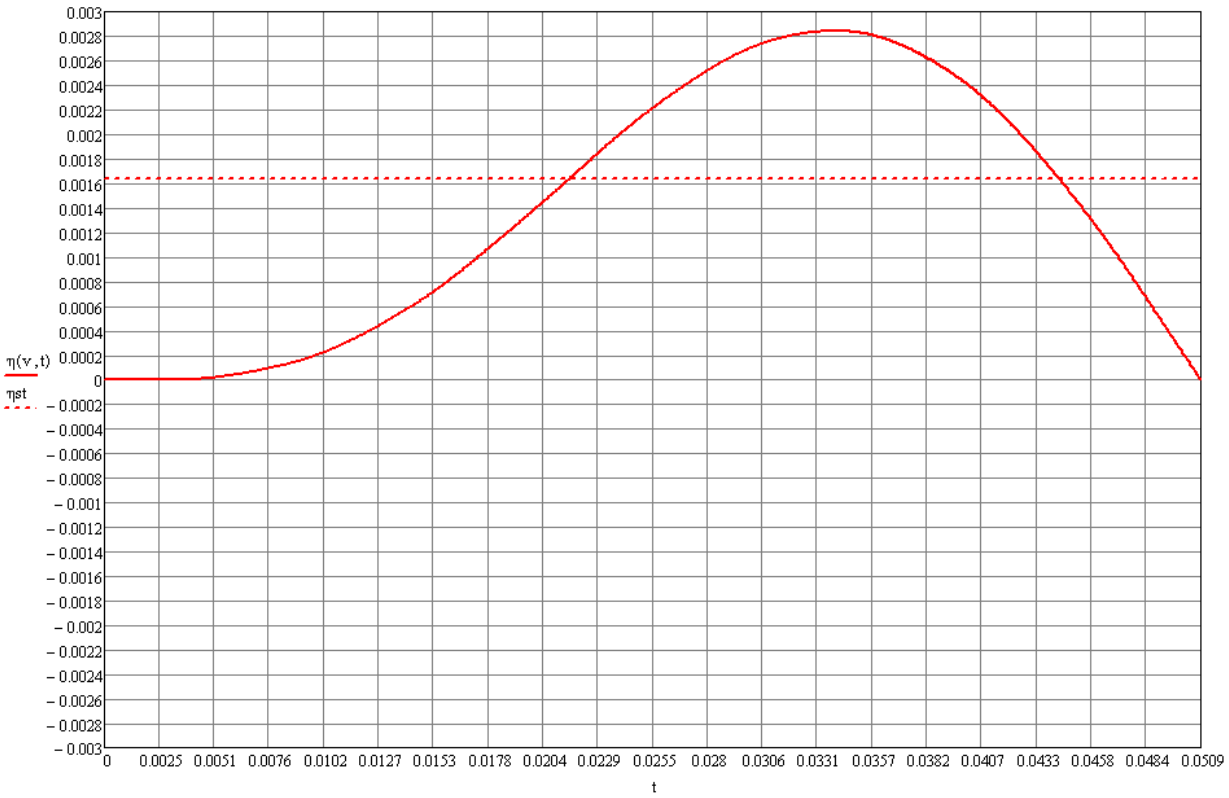
Амплитудное значение прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки и деформированные схемы в соответствующий момент времени (м)

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний *p*, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	123.370	123.370	0.00
2	493.480	493.480	0.00
3	1110.330	1110.325	0.00
4	1973.921	1973.887	0.00
5	3084.251	3084.120	0.00
6	4441.322	4440.919	0.01
7	6045.133	6044.087	0.02
8	7895.684	7893.275	0.03
9	9992.974	9987.907	0.05
10	12337.005	12327.069	0.08
11	14927.777	14909.367	0.12
12	17765.288	17732.721	0.18
13	20849.539	20794.097	0.27

Форма колебаний	Теория	SCAD	Отклонения, %
14	24180.531	24089.155	0.38
15	27758.262	27611.778	0.53
16	31582.734	31353.470	0.73



Пунктиром показано значение статического прогиба

График изменения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки во времени по теоретическому решению (м)

Амплитудное значение прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки, м

Теория		SCAD		
Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонение, %
0.0339	0.002842	0.0334	0.002837	0.18

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний *p* свободно опертой балки определяются по формуле:

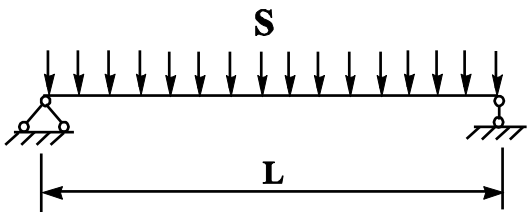
$$\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}},$$

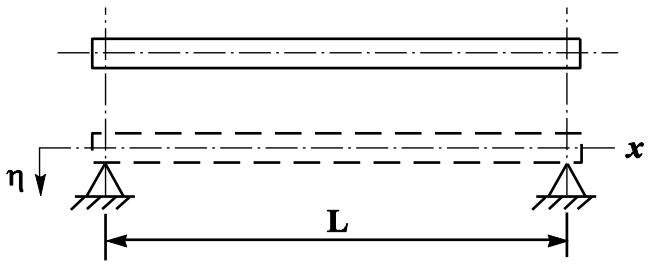
где *n* = 1, 2, 3, 4, … – номер формы собственных колебаний.

При аналитическом решении прогибы η в поперечном сечении середины пролета балки во времени определяются по формуле:

$$\eta(t) = \frac{2 \cdot P \cdot l^3}{\pi^4 \cdot E \cdot I} \cdot \sum_{n=1} \left[\frac{\sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{n^4 \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot l^2 \cdot v^2}{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}\right)} \cdot \left(\sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot v}{l} \cdot t\right) - \frac{l \cdot v}{n \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{E \cdot I}} \cdot \sin\left(\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \cdot t\right) \right) \right];$$

Свободно опертая балка с распределенной массой под действием равномерно распределенного мгновенного импульса (удар балки о неподвижные опоры)





Цель: Определение напряженно-деформированного состояния свободно опертой балки с распределенной массой от воздействия равномерно распределенного мгновенного импульса.

Имя файла с исходными данными: **DIN_B_IL.SPR, График_DIN_B_IL.txt**

Формулировка задачи: Свободно опертая балка постоянного сечения с равномерно распределенной массой μ нагружается равномерно распределенным мгновенным поперечным импульсом S на всей длине пролета *L* (ударяется о неподвижные опоры со скоростью $v_0 = S / \mu$). Определить собственные формы и частоты колебаний *p* свободно опертой балки, а также прогиб η и изгибающий момент *M* в поперечном сечении середины пролета балки во времени.

Ссылки: И.М. Рабинович, А.П. Синицын, О.В. Лужин, В.М. Теренин, Расчет сооружений на импульсные воздействия, Москва, Стройиздат, 1970, стр. 83.
С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев, Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть. Москва, Машгиз, 1952, стр. 364.

Исходные данные:

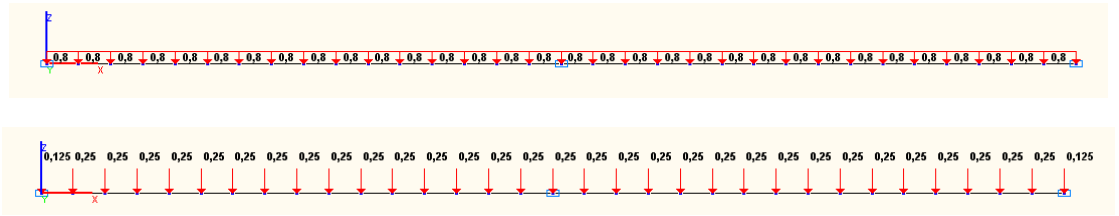
$E = 3.0 \cdot 10^6$ тс/м^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
b = 0.4 м	- ширина прямоугольного поперечного сечения балки;
h = 0.8 м	- высота прямоугольного поперечного сечения балки;
L = 8.0 м	- длина пролета балки;
$\gamma = 2.5$ тс/м^3	- объемный вес материала балки;
S = 0.8· тс·с/м	- значение равномерно распределенного мгновенного импульса;
g = 10.00 м/с^2	- значение ускорения свободного падения;

$\mu = 2.5 \cdot 0.4 \cdot 0.8 / 10.0 = 0.08$ тс·с^2/м^2 - значение равномерно распределенной массы балки;
$I = 0.4 \cdot (0.8)^3 / 12 = 0.017067$ м^4 - момент инерции поперечного сечения балки.

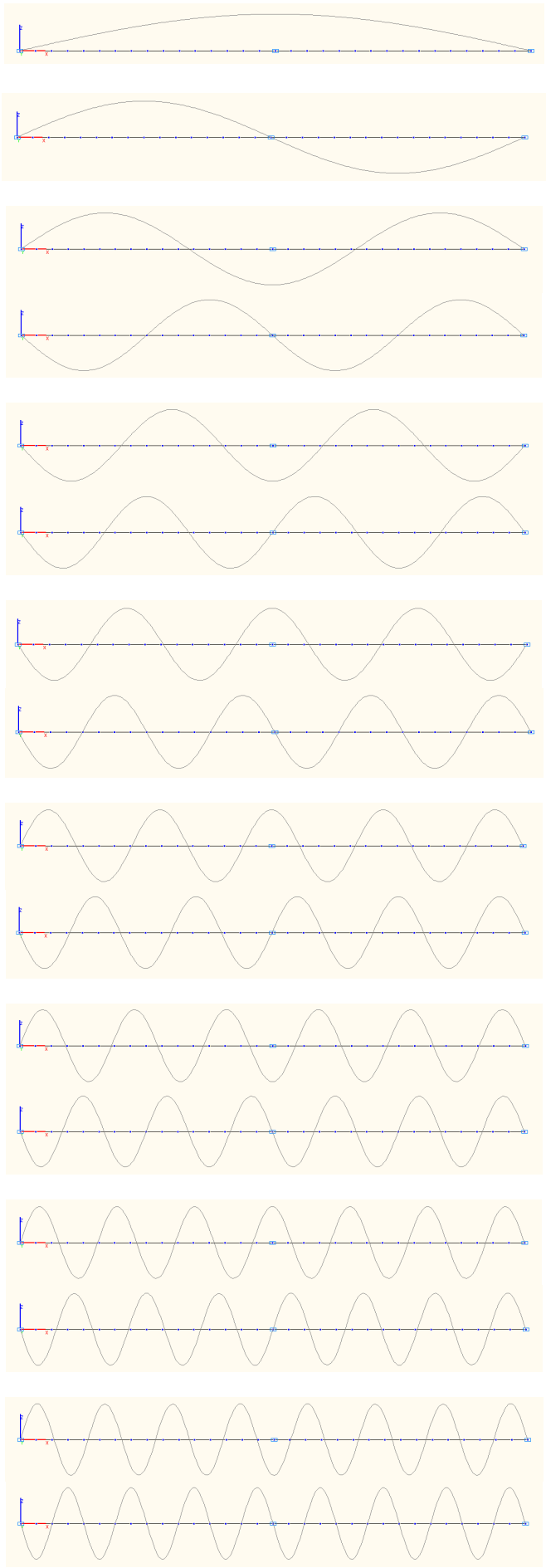
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 32 стержневых элемента типа 3. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы UX. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса балки μ·g.
Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяются собственные формы и частоты колебаний p, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяются прогибы η в поперечном сечении середины пролета балки во времени. Воздействие равномерно распределенного мгновенного поперечного импульса описывается графиком изменения нагрузки во времени и задается в виде узловых сил, действующих по оси Z общей системы координат с масштабным множителем, равным длине стержневого конечного элемента l / n = 0.25 м (n – количество конечных элементов в расчетной схеме), и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы

между моментами времени графика изменения нагрузки равны Δt_{int} = 0.00001 с и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика импульсное воздействие принимается с прямоугольной функцией формы, значением силы P = S· Δt_{int} = 80000 тс и продолжительностью во времени Δt_{int} = 0.00001 с. Продолжительность процесса во времени равна t = 0.05094 с, что соответствует величине периода колебаний основного тона T_1. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с минимальным значением ξ = 0.0001. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я ─ 16-я собственные формы колебаний

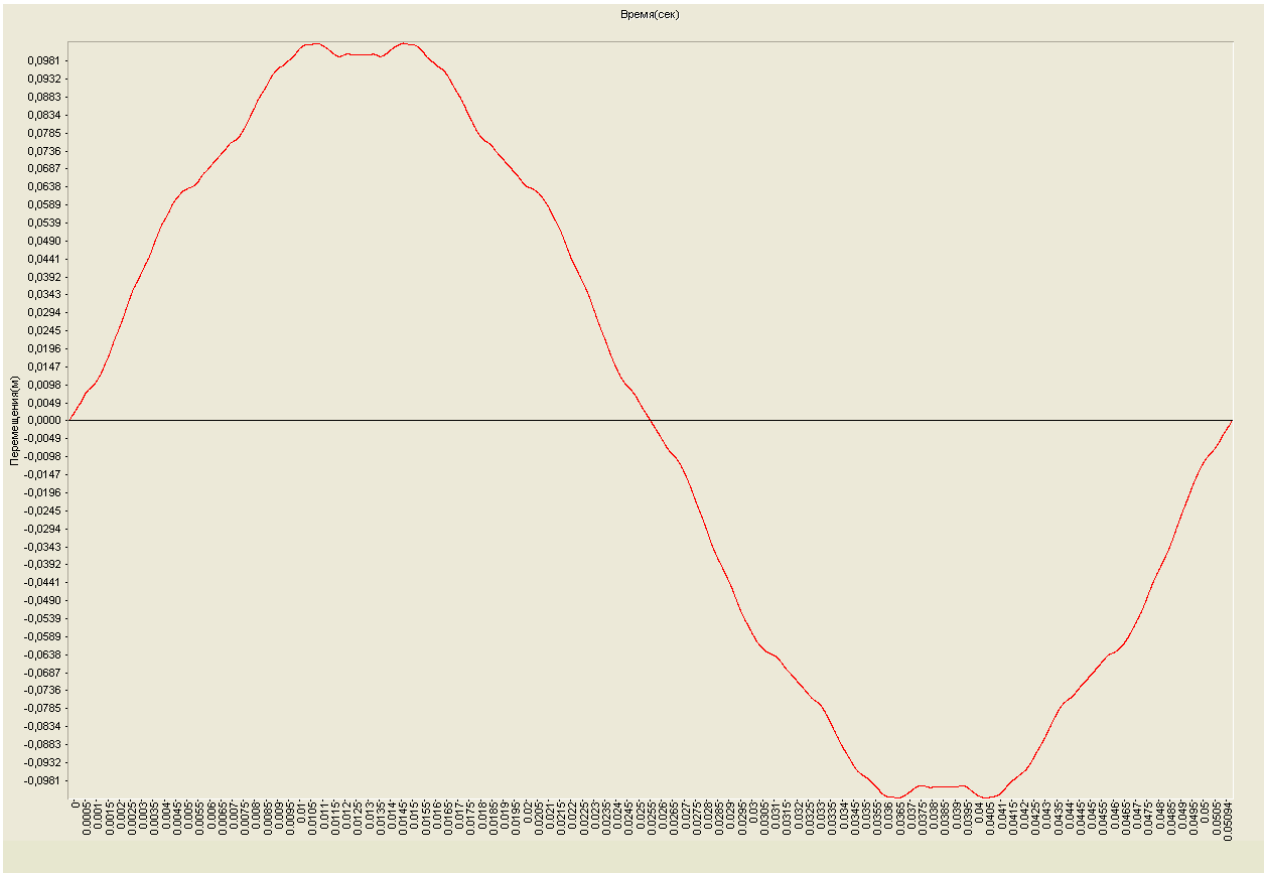
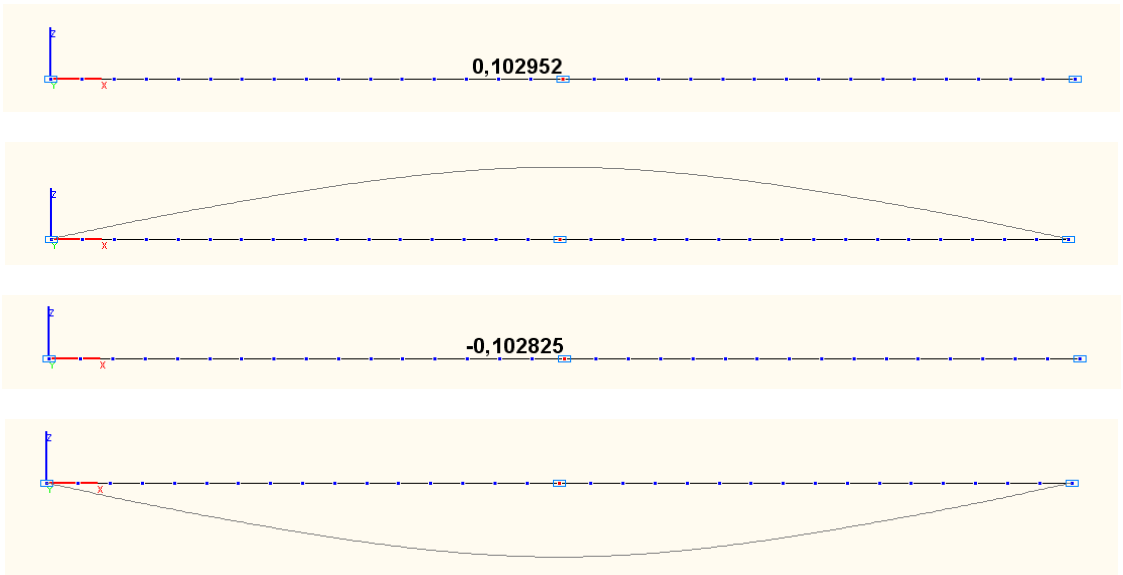


График изменения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки во времени (м)



Амплитудные значения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки и деформированные схемы в соответствующие моменты времени (м)

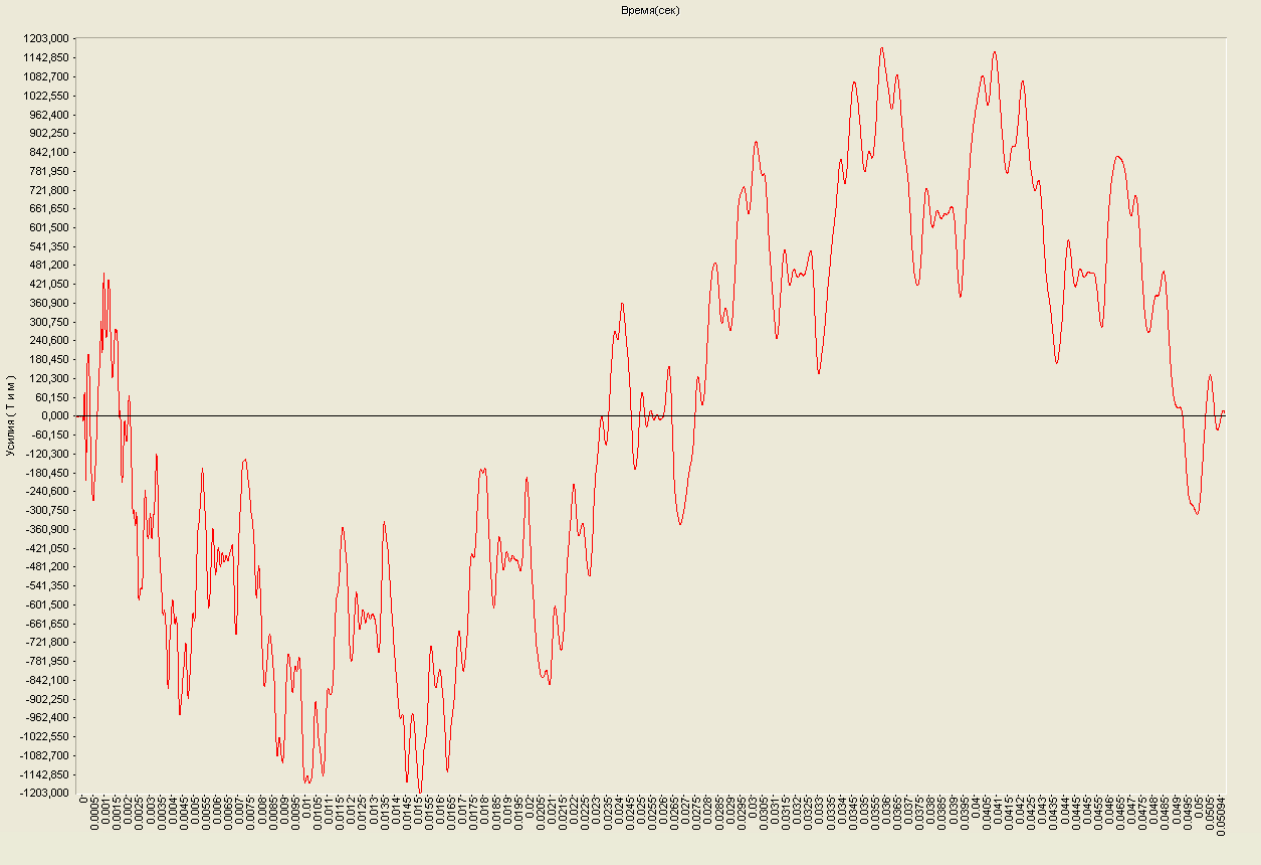
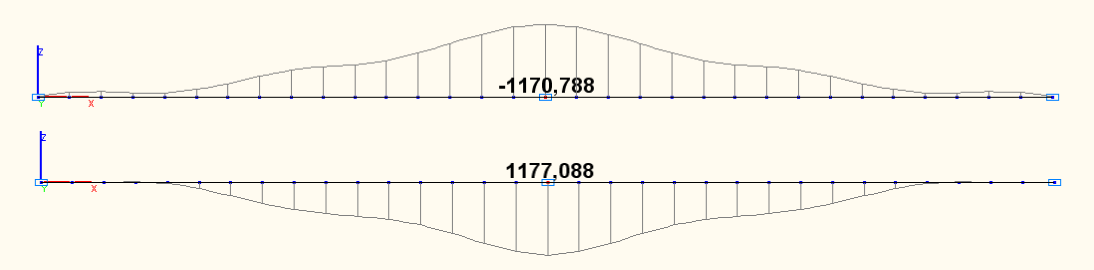


График изменения изгибающего момента M
в поперечном сечении середины пролета балки во времени (тм·м)



Амплитудные значения изгибающего момента M
в поперечном сечении середины пролета балки (тм·м)

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний *p*, рад/с

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	123.370	123.370	0.00
2	493.480	493.480	0.00
3	1110.330	1110.325	0.00
4	1973.921	1973.887	0.00
5	3084.251	3084.120	0.00
6	4441.322	4440.919	0.01
7	6045.133	6044.087	0.02
8	7895.684	7893.275	0.03
9	9992.974	9987.907	0.05
10	12337.005	12327.069	0.08
11	14927.777	14909.367	0.12
12	17765.288	17732.721	0.18
13	20849.539	20794.097	0.27

Форма колебаний	Теория	SCAD	Отклонения, %
14	24180.531	24089.155	0.38
15	27758.262	27611.778	0.53
16	31582.734	31353.470	0.73

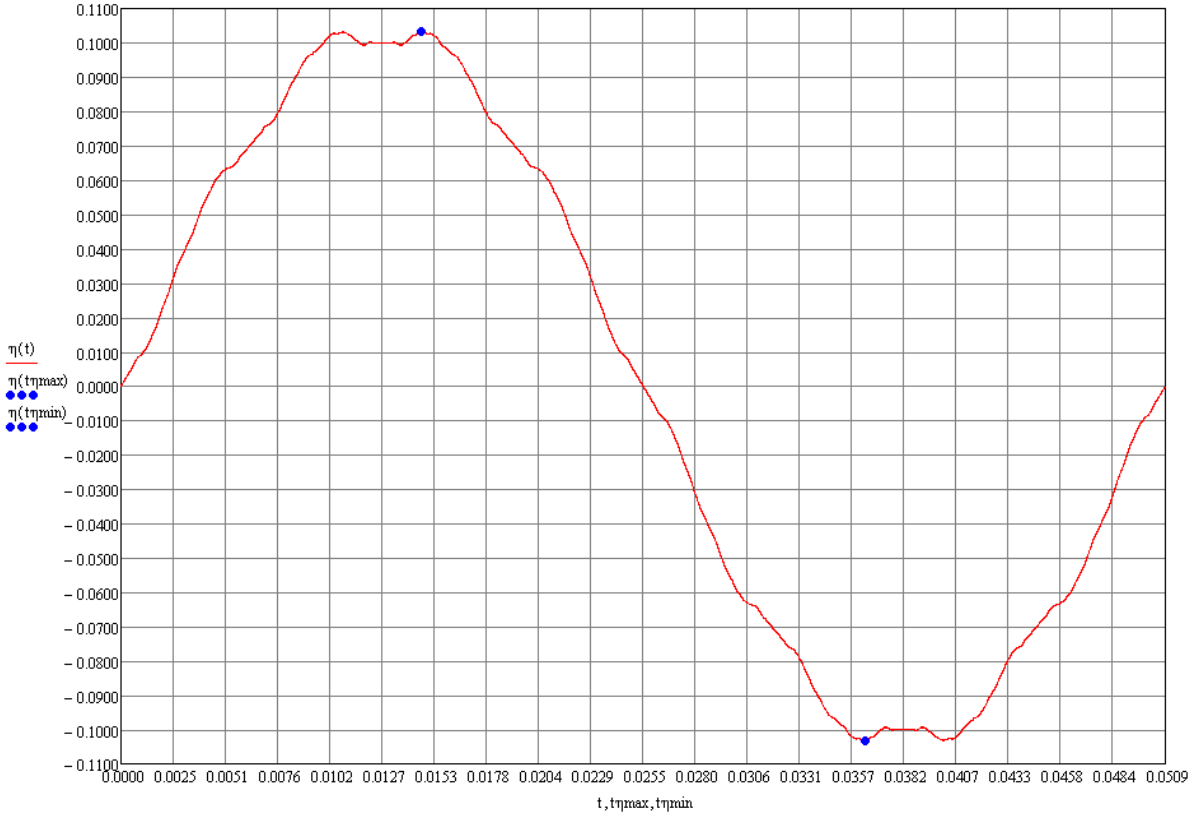


График изменения прогиба η в поперечном сечении середины пролета балки во времени по теоретическому решению (м)

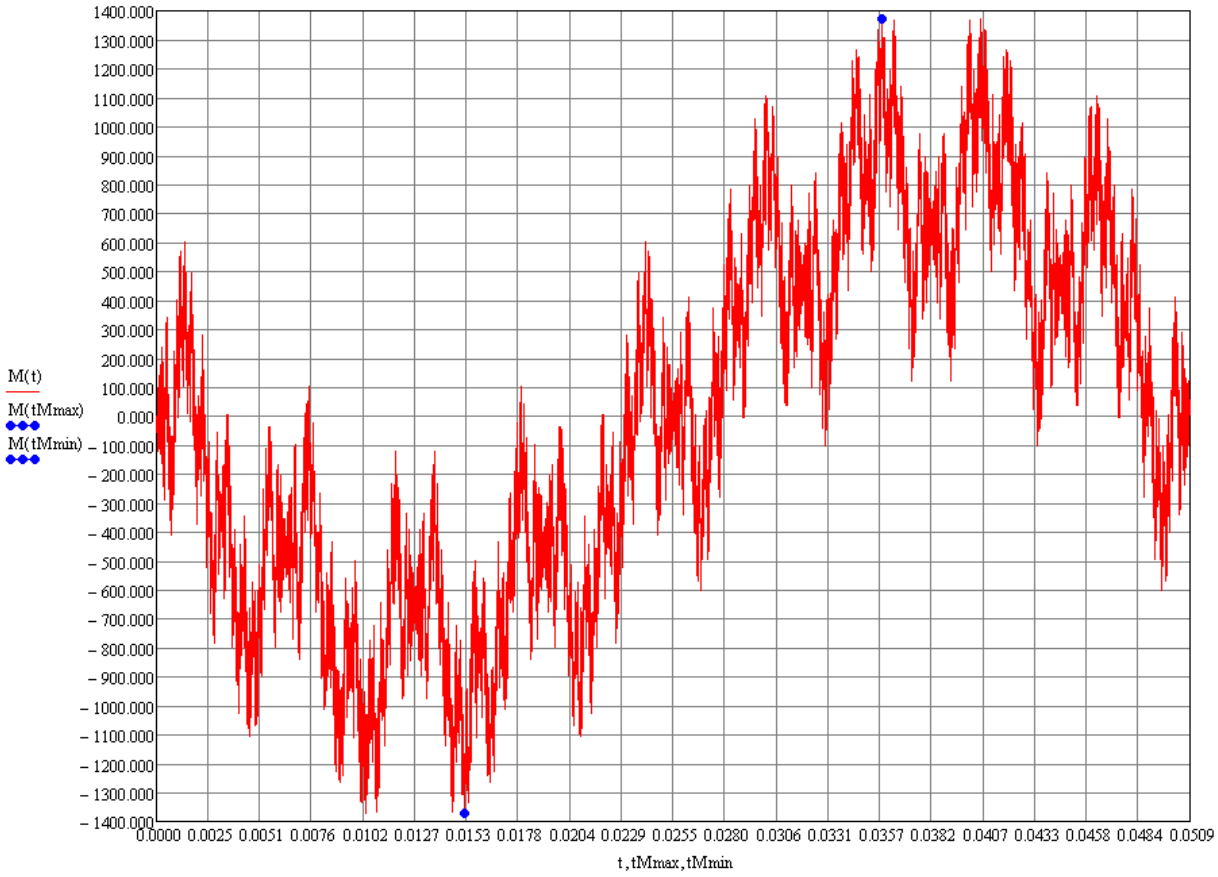


График изменения изгибающего момента M
в поперечном сечении середины пролета балки во времени
по теоретическому решению (тм·м)

Амплитудные значения прогиба η
в поперечном сечении середины пролета балки, м

Теория		**SCAD**		
Время, с	**Прогиб, м**	**Время, с**	**Прогиб, м**	**Отклонения, %**
0.014617	0.103196	0.014660	0.102998	0.19
0.036313	-0.103196	0.036330	-0.102825	0.36

Амплитудное значение изгибающего момента *M*
в поперечном сечении середины пролета балки, тс·м

Теория		**SCAD**		
Время, с	**Изгибающий момент, тс·м**	**Время, с**	**Изгибающий момент, тс·м**	**Отклонения, %**
0.015162	-1369.739	0.015240	-1203.795	12.12
0.035768	1369.739	0.035710	1177.088	14.06

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний *p* свободно опертой балки определяются по формуле:

$$\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}},$$

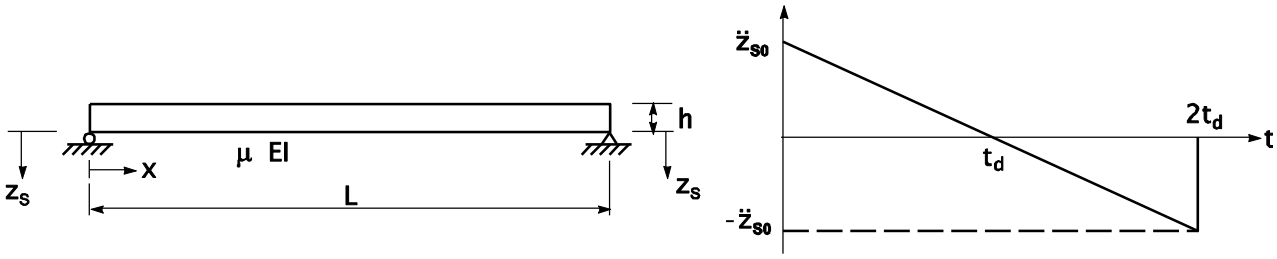
где *n* = 1, 2, 3, 4, … – номер формы собственных колебаний.

При аналитическом решении прогиб η и изгибающий момент *M* в поперечном сечении середины пролета балки во времени определяются по формуле:

$$\eta(t)=\frac{4\cdot S\cdot l^2}{\pi^3\cdot\sqrt{\mu\cdot E\cdot I}}\cdot\sum_{n=1}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n^2\cdot\pi^2}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{\mu}}\cdot t\right)}{n^3}\right];$$

$$M(t)=\frac{4\cdot S}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{\mu}}\cdot\sum_{n=1}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n^2\cdot\pi^2}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{\mu}}\cdot t\right)}{n}\right].$$

Свободно опертая балка с распределенной массой под действием кинематического возмущения опор (сейсмическое воздействие)



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния свободно опертой балки с распределенной массой от воздействия кинематического возмущения опор.

Имя файла с исходными данными: **DIN_B_SL.SPR, DIN_B_SL.SPC**

Формулировка задачи: Свободно опертая балка постоянного сечения с равномерно распределенной массой μ подвергается воздействию кинематического возмущения опор по заданной акселерограмме:

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}_{s0} \cdot \left(1 - \frac{t}{t_d}\right).$$

Определить собственную форму и частоту колебаний основного тона *f* свободно опертой балки, а также максимальные амплитудные значения прогиба *z* и изгибающего момента *M* в поперечном сечении середины пролета балки по времени *t*.

Ссылки: John M. Biggs, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Book Companies, New York, 1964, p.262.

Исходные данные:

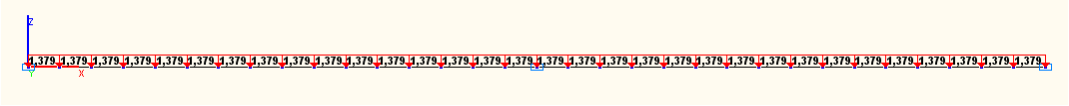
$E = 3.0 \cdot 10^7$ psi $= 2.1092 \cdot 10^7$ тс/м^2	- модуль упругости;
$I = 333.333$ in^4 $= 138.7448 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения балки.
h = 14 in = 0.3556 м	- высота поперечного сечения балки;
L = 240 in = 6.0960 м	- длина пролета балки;
$\mu = 0.2$ lb·sec^2/in^2 $= 0.1406$ тс·с^2/м^2	- значение равномерно распределенной массы балки;
$\ddot{z}_{s0} = \pm 386.2200$ in/sec^2 $= \pm 9.81$ м/с^2	- амплитудные значения ускорения опор по акселерограмме ;
$t_d = 0.10$ sec $= 0.10$ с	- полуинтервал воздействия кинематического возмущения опор;
g = 386.2200 in/sec^2 =9.81 м/с^2	- значение ускорения свободного падения.

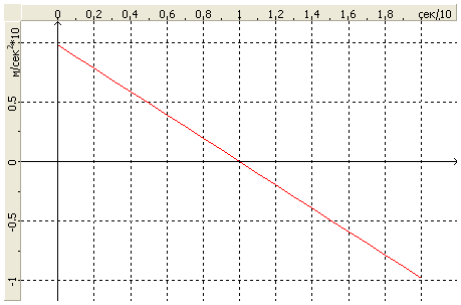
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 32 стержневых элемента типа 3. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы UX. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса балки μ·g.

Кинематическое возмущение опор описывается графиком изменения ускорения во времени (акселерограммой) и задается в виде воздействия по оси Z общей системы координат (направляющие косинусы к осям X, Y, Z: 0.00, 0.00, 1.00) с масштабным множителем к значениям акселерограммы, равным 1.00. Высота конструкции балки на схеме сориентирована по оси Z общей системы координат. Коэффициент диссипации (коэффициент поглощения энергии колебаний) принят с минимальным значением ξ = 0.000001. Интервалы между моментами времени графика ускорения во времени равны Δt = 0.01 с. При построении графика ускорение принимается со значениями $z(t) = \ddot{z}_{s0} \cdot \left(1 - n \cdot \Delta t / t_d\right)$ в моменты времени n·Δt. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен *k* = 1.000 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. При решении используется метод модального интегрирования. Определение

собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

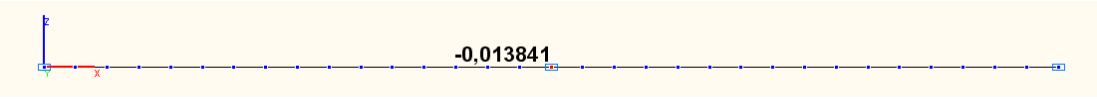
Результаты решения в SCAD

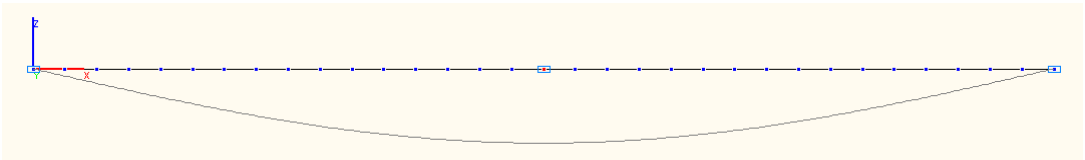




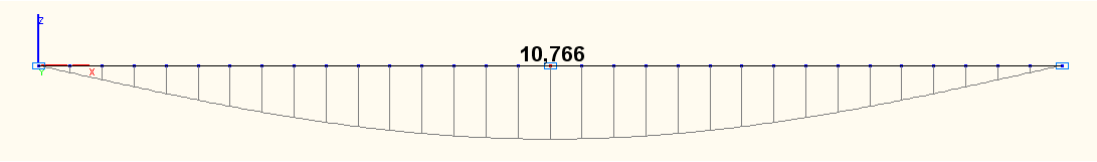
Расчетная схема и заданная акселерограмма

1-я собственная форма колебаний





Амплитудное значение прогиба z в поперечном сечении середины пролета балки и деформированная схема в соответствующий момент времени (м)



Амплитудное значение изгибающего момента M
в поперечном сечении середины пролета балки (тм·м)

Сравнение решений:

Собственная частота колебаний основного тона *f*, Гц

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	6.098	6.101	0.05

Максимальное амплитудное значение прогиба *z*
в поперечном сечении середины пролета балки, м

Теория		**SCAD**	
Время, с	**Прогиб, м**	**Прогиб, м**	**Отклонения, %**
0.0163982	-0.013951	-0.013841	0.80

Максимальное амплитудное значение изгибающего момента *M*
в поперечном сечении середины пролета балки, тс·м

Теория		**SCAD**	
Время, с	**Изгибающий момент, тс·м**	**Изгибающий момент, тс·м**	**Отклонения, %**
0.0163982	10.843	10.766	0.73

Замечания: При аналитическом решении собственная частота колебаний основного тона *f* свободно опертой балки определяется по формуле:

$$f = \frac{\pi}{2 \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \, .$$

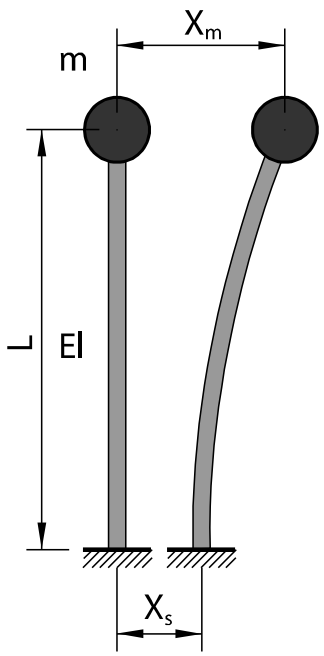
При аналитическом решении прогиб *z* и изгибающий момент *M* в поперечном сечении середины пролета балки во времени определяются по формуле:

$$z(t) = \frac{4 \cdot z_{s0} \cdot L^4 \cdot \mu}{\pi^5 \cdot E \cdot I} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \cdot t \right) + \frac{L^2}{\pi^2 \cdot t_d} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{E \cdot I}} \cdot \sin\left(\frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \cdot t \right) - \frac{1}{t_d} \cdot t \right] \quad \text{при} \quad t \le 2 \cdot t_d ;$$

$$M(t) = \frac{4 \cdot z_{s0} \cdot L^2 \cdot \mu}{\pi^3} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \cdot t \right) + \frac{L^2}{\pi^2 \cdot t_d} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{E \cdot I}} \cdot \sin\left(\frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}} \cdot t \right) - \frac{1}{t_d} \cdot t \right]$$

при $t \le 2 \cdot t_d$.

консольная невесомая стойка с сосредоточенной массой на свободном торце под действием горизонтального кинематического смещения опоры (расчет по сейсмограмме)



Цель: Определение деформированного состояния консольной невесомой стойки с сосредоточенной массой на свободном торце от горизонтального кинематического воздействия на опору.

Имя файла с исходными данными: 5.14.SPR
Файл с сейсмограммой: 5.14_chart.txt

Формулировка задачи: К свободному торцу консольной невесомой стойки квадратного поперечного сечения присоединена масса m. В начальный момент времени к опоре стойки прикладывается горизонтальное кинематическое воздействие, изменяющееся по гармоническому закону $X_s = \Delta \cdot \sin(\theta \cdot t)$. Определить собственную форму и частоту колебаний ω консольной стойки, а также прогиб X_m свободного торца стойки с присоединенной массой во времени.

Ссылки: В.А. Киселев, Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. Москва, Стройиздат, 1980, стр. 65.

Исходные данные:

$E = 2.0 \cdot 10^8$ кН/м^2	- модуль упругости материала стойки;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$b = 0.04$ м	- ширина прямоугольного поперечного сечения стойки;
$h = 0.04$ м	- высота прямоугольного поперечного сечения стойки;
$L = 1.0$ м	- длина стойки;
$m = 0.08$ кН·с^2/м	- значение сосредоточенной массы, присоединенной к свободному торцу стойки;
$\Delta = 0.1$ м	- амплитудное значение кинематического гармонического возмущения, горизонтально приложенного к опоре стойки;
$g = 10.00$ м/с^2	- значение ускорения свободного падения;
$I = b \cdot h^3/12 = 2.133333 \cdot 10^{-7}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения стойки.

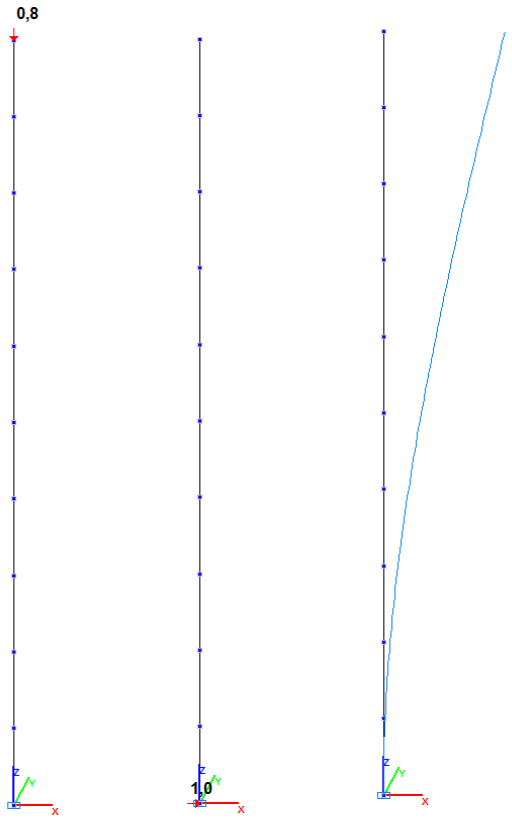
Рассматривается следующее значение частоты кинематического гармонического возмущения θ в зависимости от значения частоты собственных колебаний стойки ω: $\theta = 0.5 \cdot \omega$.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 10 стержневых элементов типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узел защемленного торца стойки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ.

Сосредоточенная масса задается преобразованием статической узловой нагрузки на свободном торце стойки m·g.

Расчет производится в два этапа: сначала модальным анализом определяется собственные форма и частота колебаний ω, затем методом прямого интегрирования уравнений движения определяется прогиб X_m свободного торца стойки с присоединенной массой во времени. Воздействие кинематического гармонического возмущения описывается графиком изменения горизонтального смещения опоры во времени и задается в виде заданного перемещения через смещение связи по оси X общей системы координат с масштабным множителем 1.0 и временем запаздывания 0.0 с. Интервалы между моментами времени графика изменения смещения равны $\Delta t_{int} = T_\theta/100$, где T_θ – период кинематического гармонического возмущения, и соответствуют шагу интегрирования. При построении графика воздействие заданного перемещения через смещение связи принимается со значениями $X_s = \Delta \cdot \sin(\theta \cdot n \cdot \Delta t_{int})$ в моменты времени $n \cdot \Delta t_{int}$. Продолжительность процесса во времени равна $t = 2 \cdot T_\theta$. Коэффициенты критического демпфирования по 1-й и 2-й собственным частотам приняты с минимальным значением ξ = 0.0001. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 0.981 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 11. При решении используется метод модального интегрирования. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема и 1-я форма колебаний

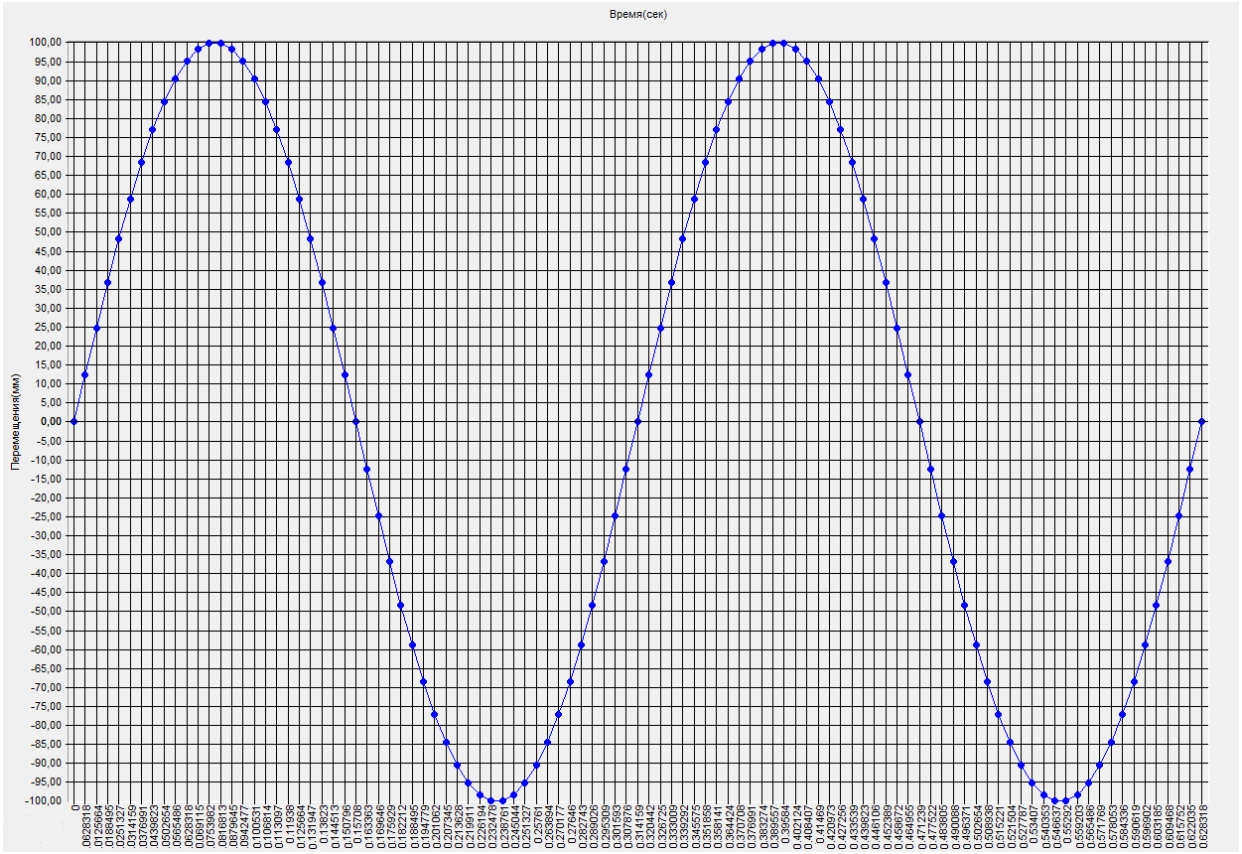


График изменения горизонтального смещение связи X_s во времени (мм).

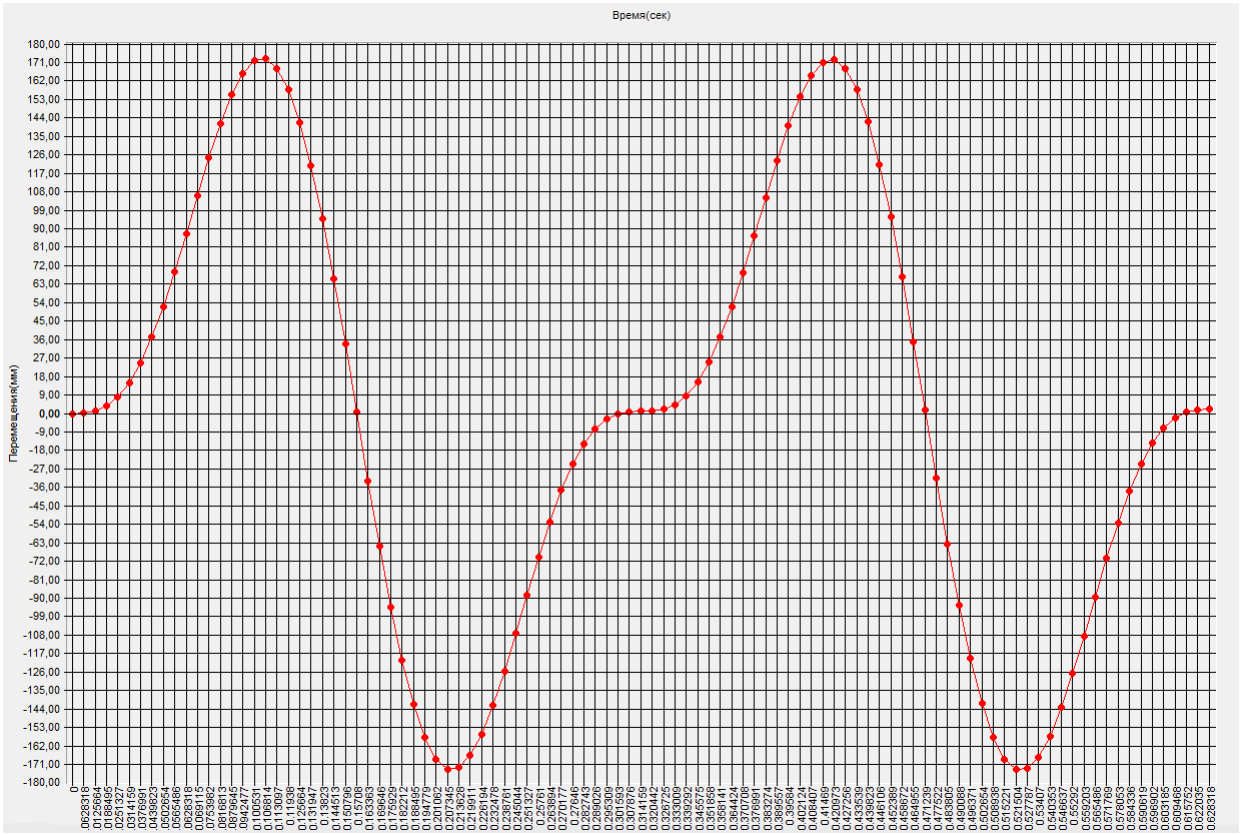
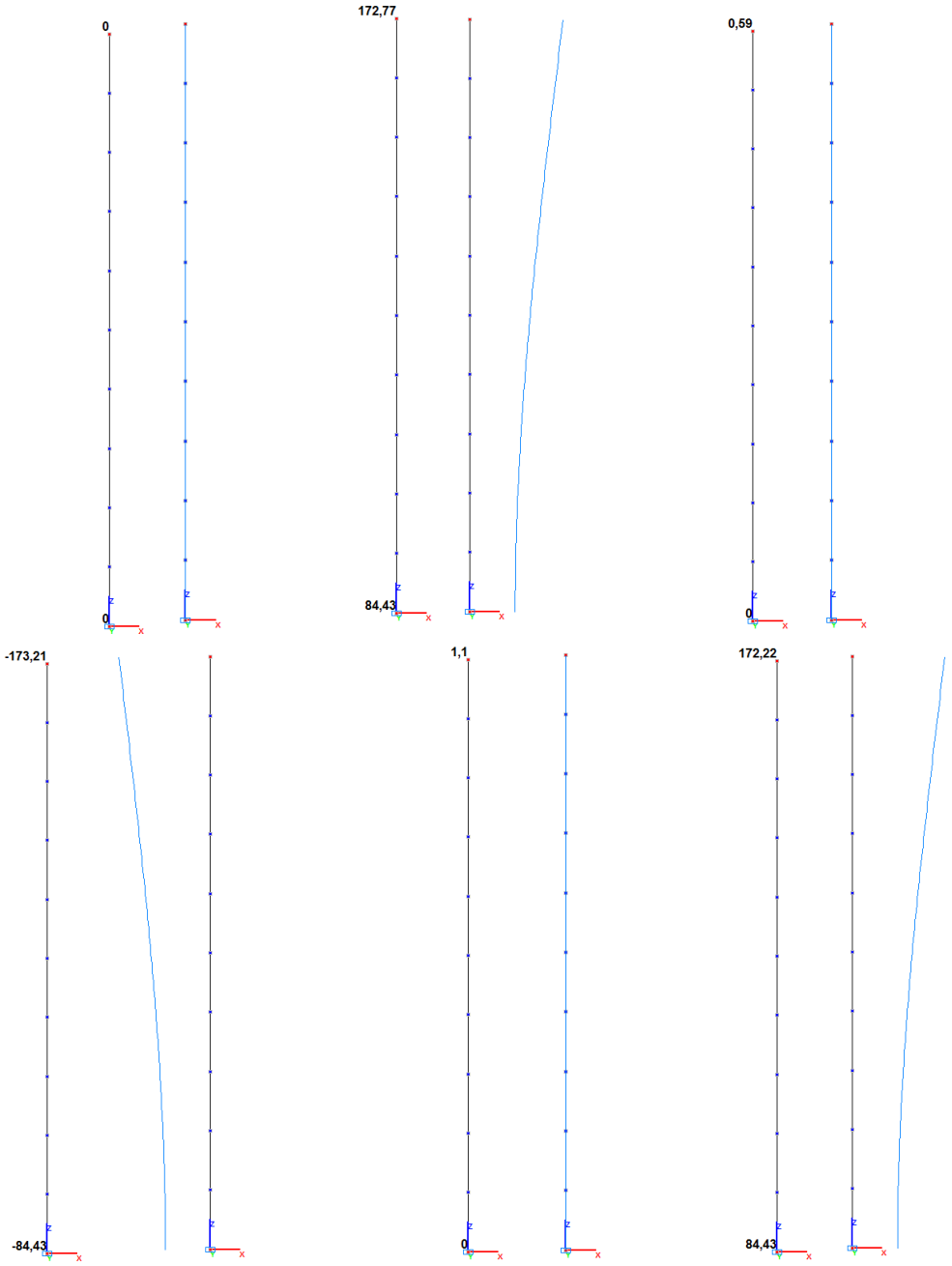
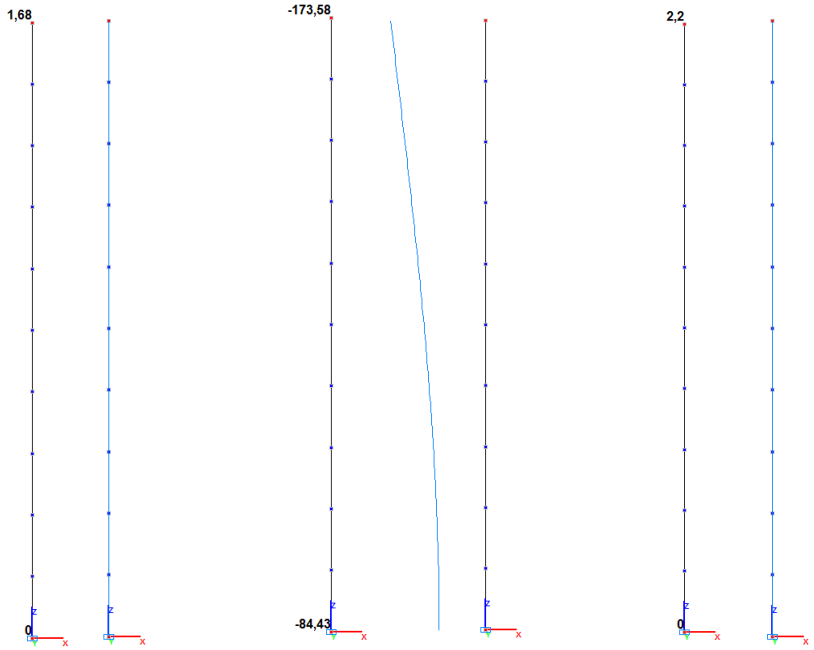


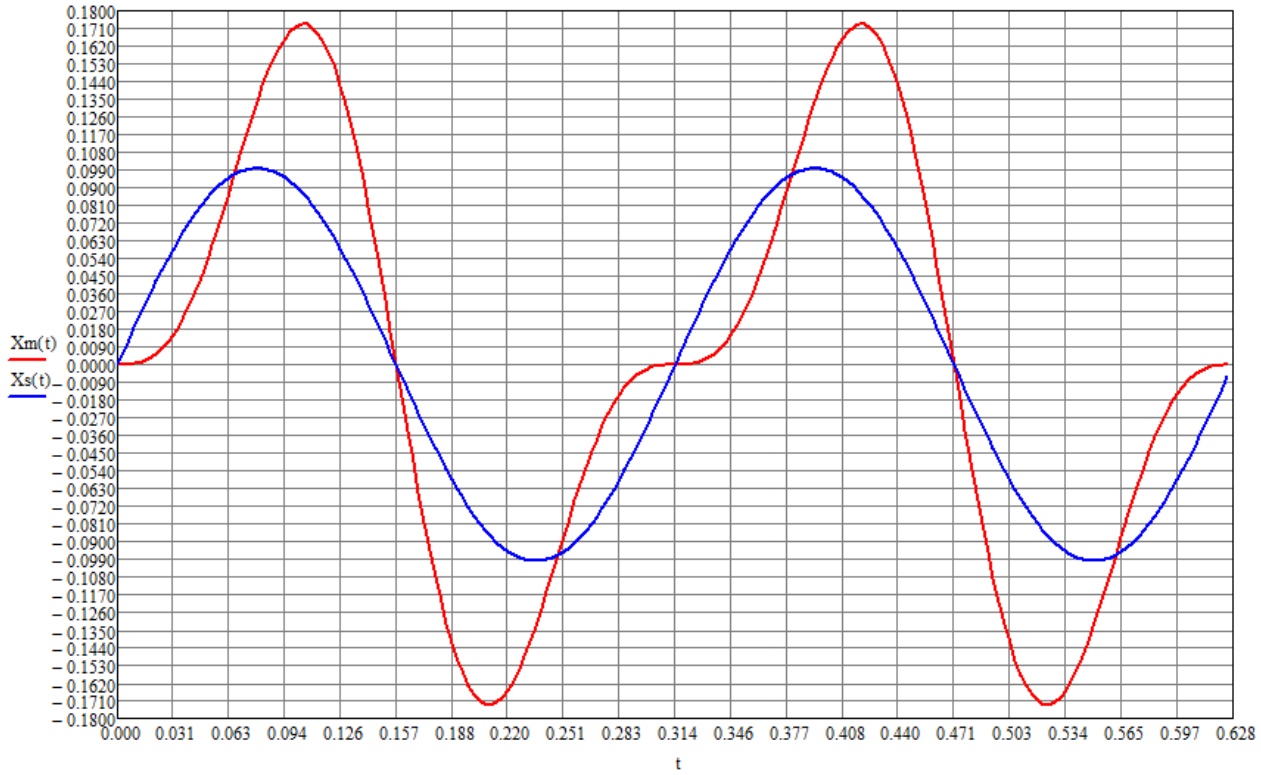
График изменения прогиба X_m свободного торца стойки с присоединенной массой во времени (мм)


0
0
172,77
84,43
0,59
0
-173,21
-84,43
1,1
0
172,22
84,43



Амплитудные значения прогиба X_m свободного торца стойки с присоединенной массой и деформированные схемы в соответствующие моменты (мм).

***Сравнение решений*:**



Графики изменения горизонтального смещение связи X_s и прогиба X_m свободного торца стойки с присоединенной массой во времени (м)
Частота кинематического гармонического возмущения θ = 0.5·ω

Собственная частота колебаний ω, рад/с

Форма колебаний	Теория	SCAD	Отклонения, %
1	40.000	40.000	0.00

Амплитудные значения прогиба X_m свободного торца стойки с присоединенной массой при частоте кинематического гармонического возмущения $\theta = 0.5 \cdot \omega$, мм

Теория		SCAD		
Время, с	Прогиб, м	Время, с	Прогиб, м	Отклонение, %
0.000000	0.00	0.000000	0.00	—
0.106814	172.90	0.106814	172.77	0.08
0.157080	0.00	0.157080	0.59	—
0.207345	-172.90	0.207345	-173.21	0.18
0.314159	0.00	0.314159	1.10	—
0.420973	172.90	0.420973	172.22	0.39
0.471239	0.00	0.471239	1.68	—
0.521504	-172.90	0.521504	-173.58	0.39
0.628318	0.00	0.628318	2.20	—

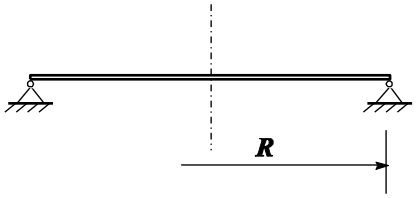
Замечания: При аналитическом решении собственная частота колебаний ω консольной стойки с сосредоточенной массой на свободном торце определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot I}{m \cdot L^3}} .$$

При аналитическом решении прогиб X_m свободного торца стойки с присоединенной массой во времени определяется по формуле:

$$X_m(t) = \frac{\Delta}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} \cdot \left(sin(\theta \cdot t) - \frac{\theta}{\omega} \cdot sin(\omega \cdot t) \right).$$

Свободные колебания круговой шарнирно опертой по контуру пластины



Цель: Модальный анализ круговой шарнирно опертой по контуру пластины.

Имя файла с исходными данными: **5.7.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω круговой шарнирно опертой по контуру пластины с плотностью материала ρ.

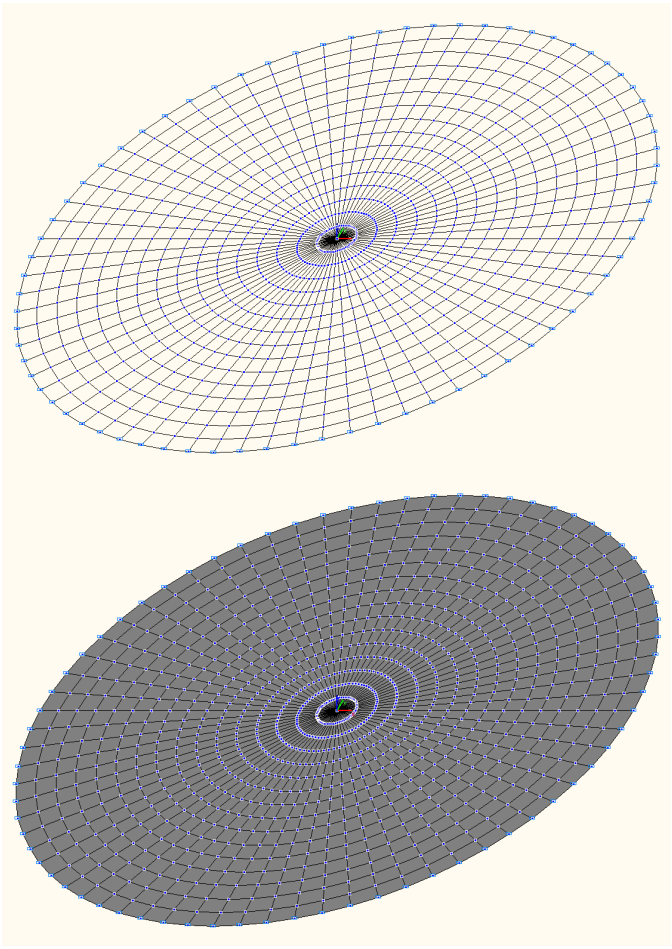
Ссылки: В.Н. Челомей, Вибрации в технике, Справочник в шести томах: В.В. Болотин, Том 1, Колебания линейных систем, Москва, Машиностроение, 1978, стр. 207.

Исходные данные:

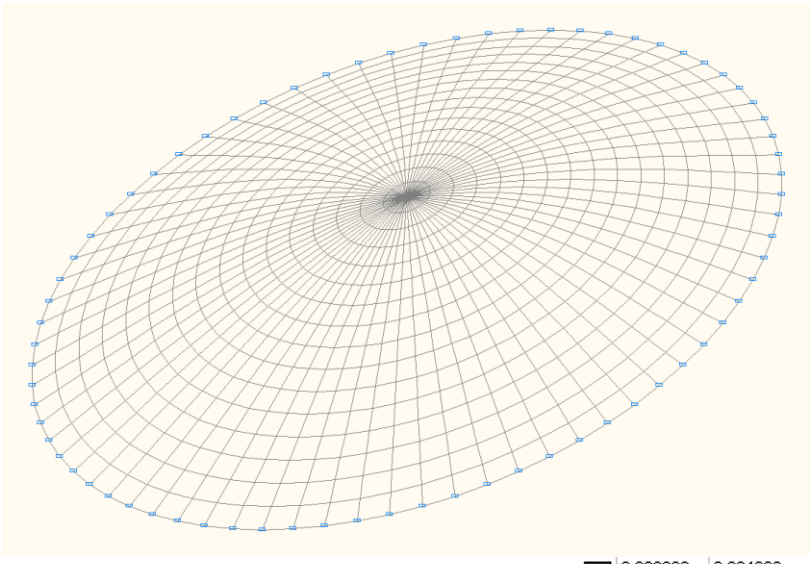
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.85$ т/м^3	- плотность материала;
$h = 0.01$ м	- толщина пластины;
$R = 0.5$ м	- наружный радиус пластины.

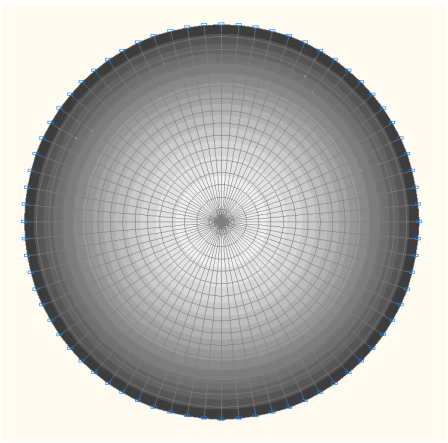
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 1080 четырехузловых элементов плиты типа 20 и 72 трехузловых элемента плиты типа 15. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.03125 м в радиальном направлении и с шагом 5.0º в тангенциальном направлении. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z по наружному контуру пластины. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса пластины $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.01$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 1153. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



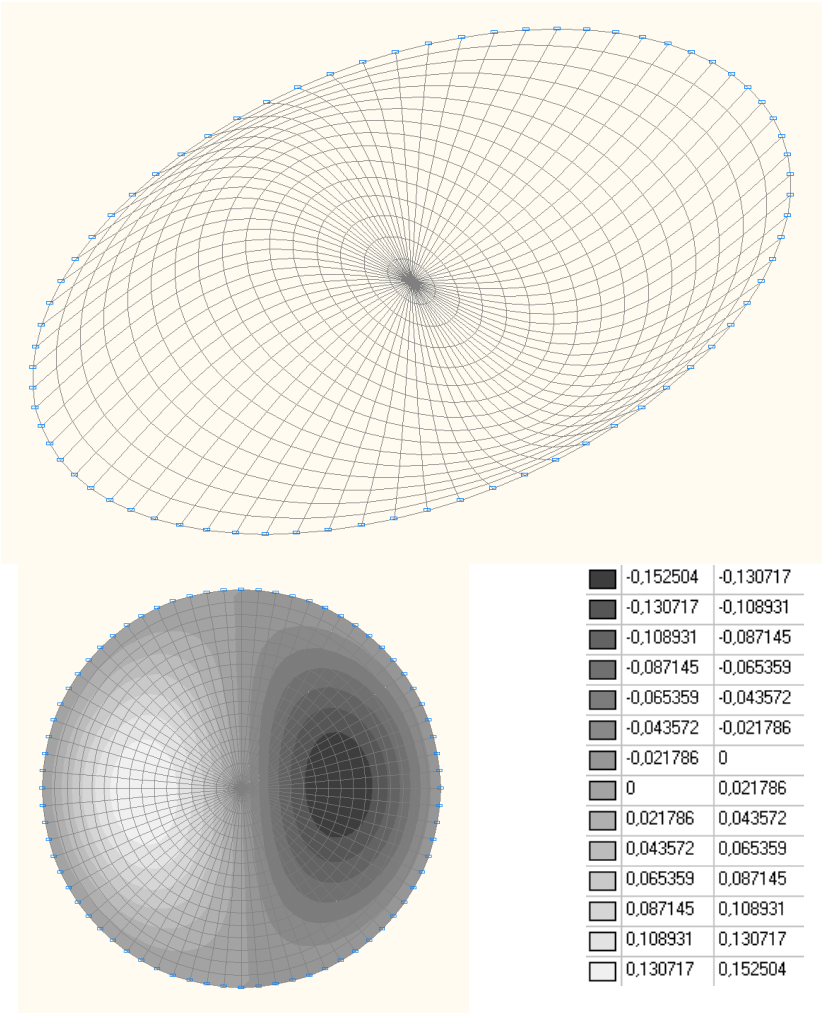
Расчетная схема



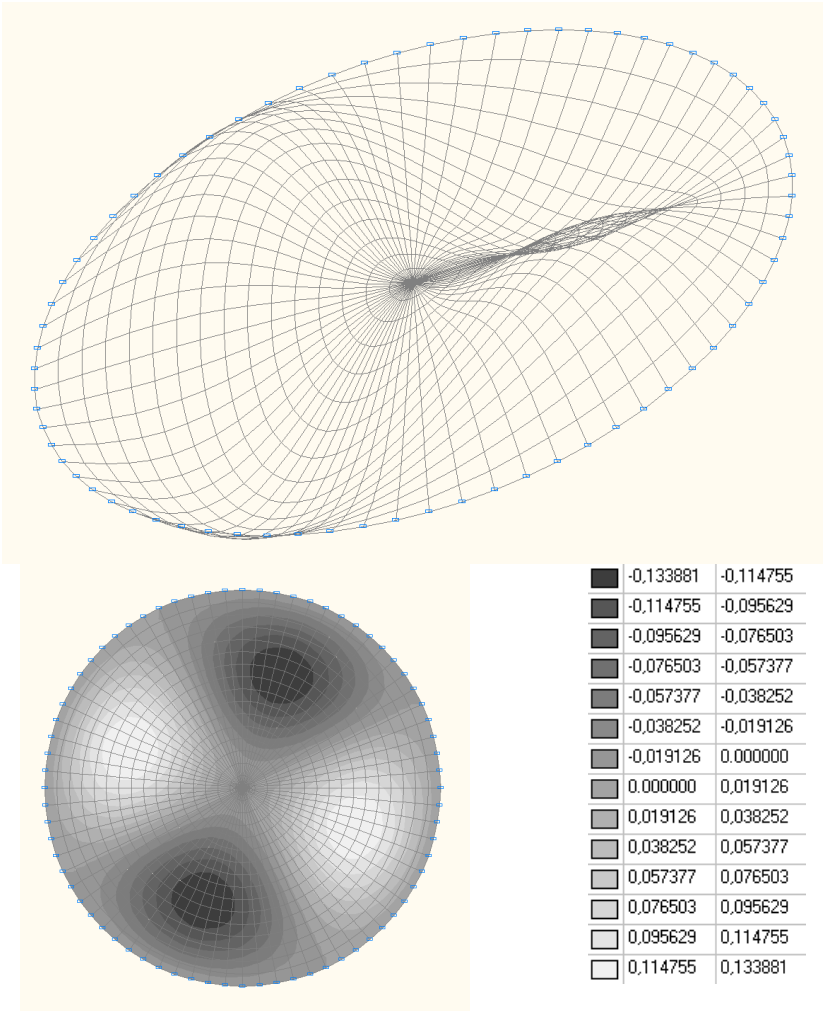


	0,000000	0,024362
	0,024362	0,048724
	0,048724	0,073087
	0,073087	0,097449
	0,097449	0,121811
	0,121811	0,146173
	0,146173	0,170535
	0,170535	0,194898
	0,194898	0,21926
	0,21926	0,243622
	0,243622	0,267984
	0,267984	0,292347
	0,292347	0,316709
	0,316709	0,341071

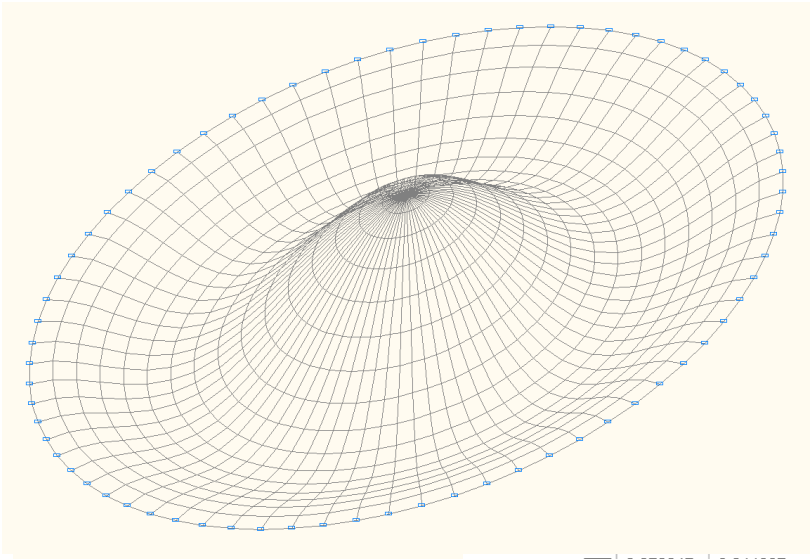
1-я собственная форма колебаний

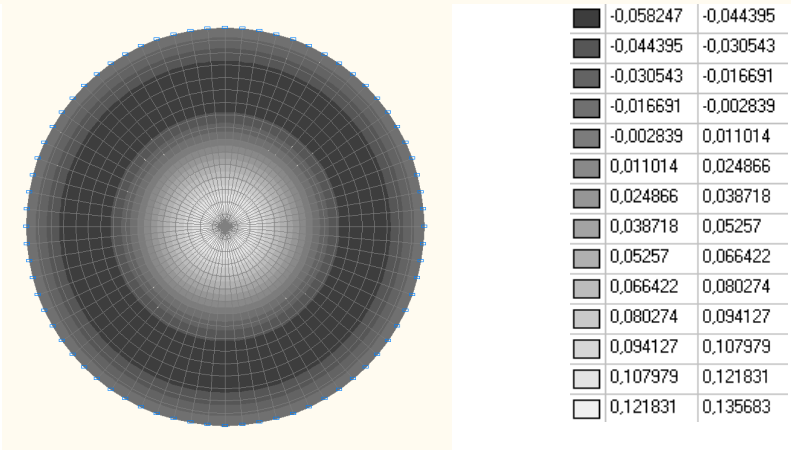


2-я собственная форма колебаний

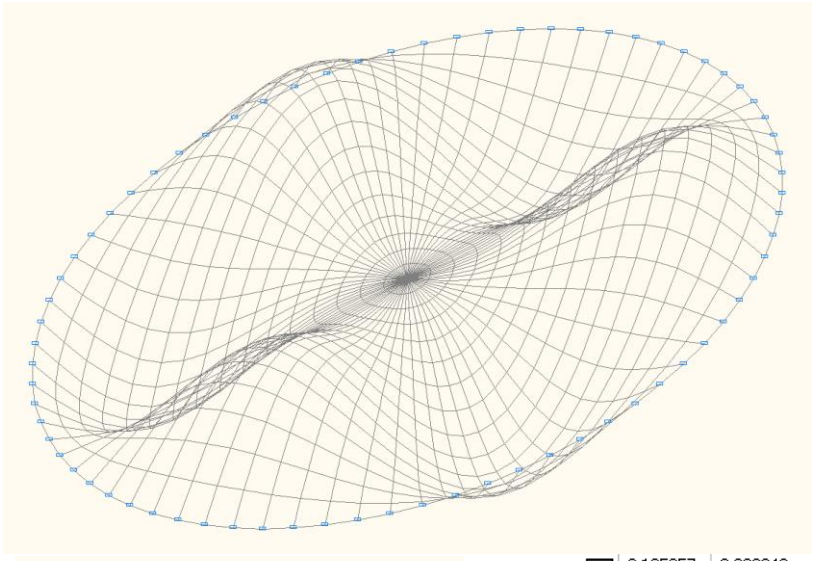


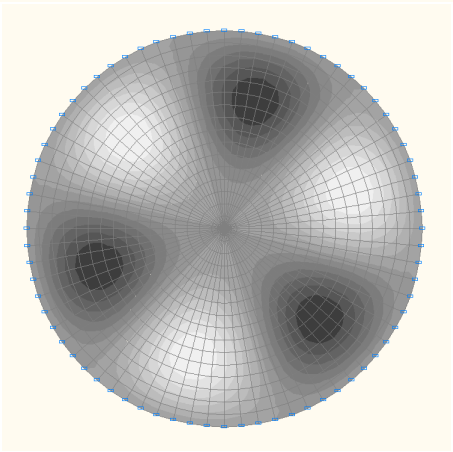
4-я собственная форма колебаний





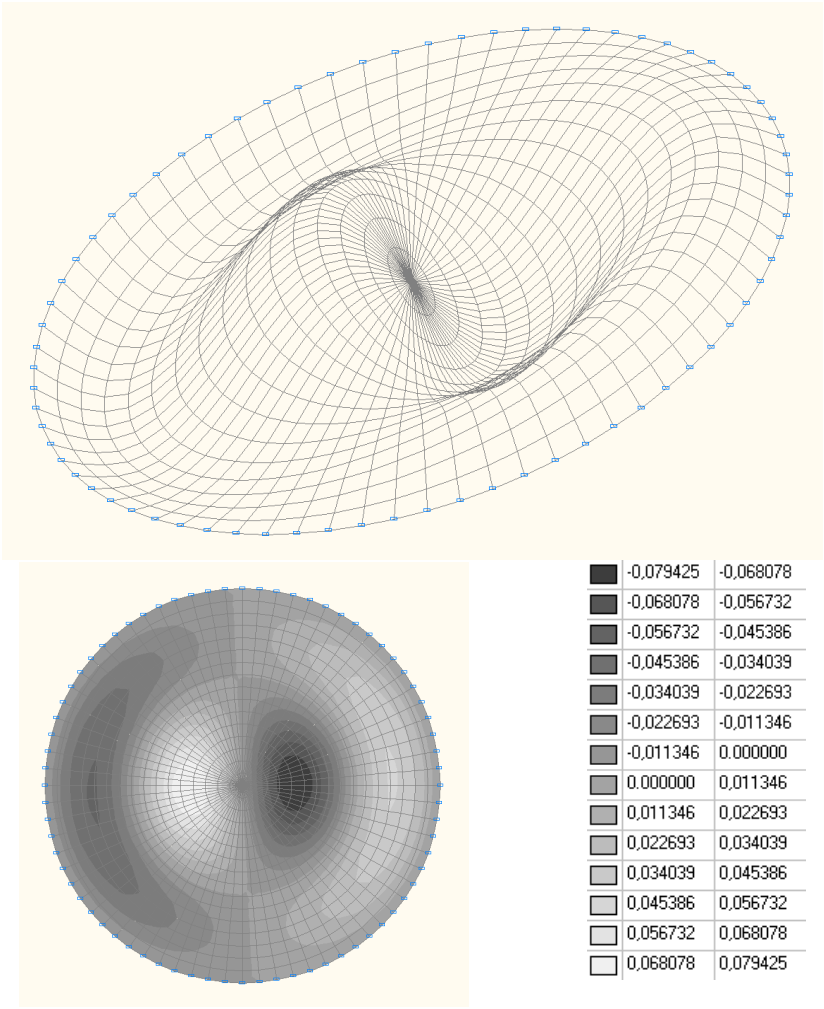
6-я собственная форма колебаний



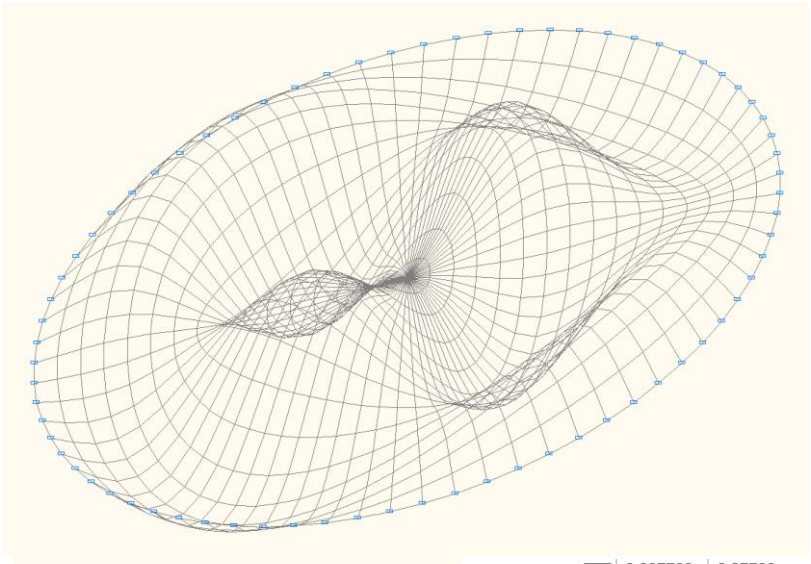


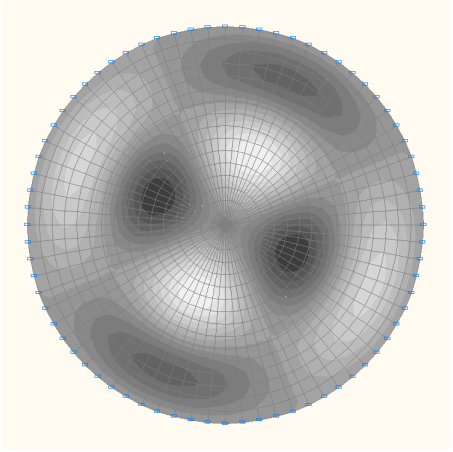
	-0,105057	-0,090049
	-0,090049	-0,075041
	-0,075041	-0,060033
	-0,060033	-0,045025
	-0,045025	-0,030016
	-0,030016	-0,015008
	-0,015008	0,000000
	0,000000	0,015008
	0,015008	0,030016
	0,030016	0,045025
	0,045025	0,060033
	0,060033	0,075041
	0,075041	0,090049
	0,090049	0,105057

7-я собственная форма колебаний



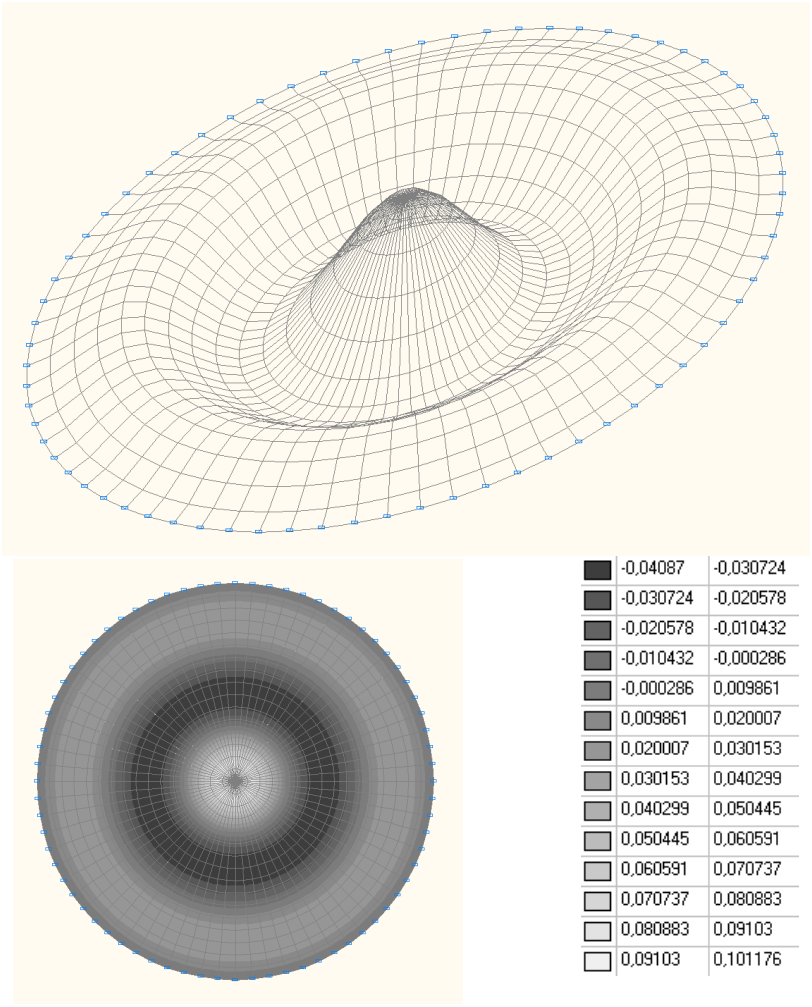
9-я собственная форма колебаний



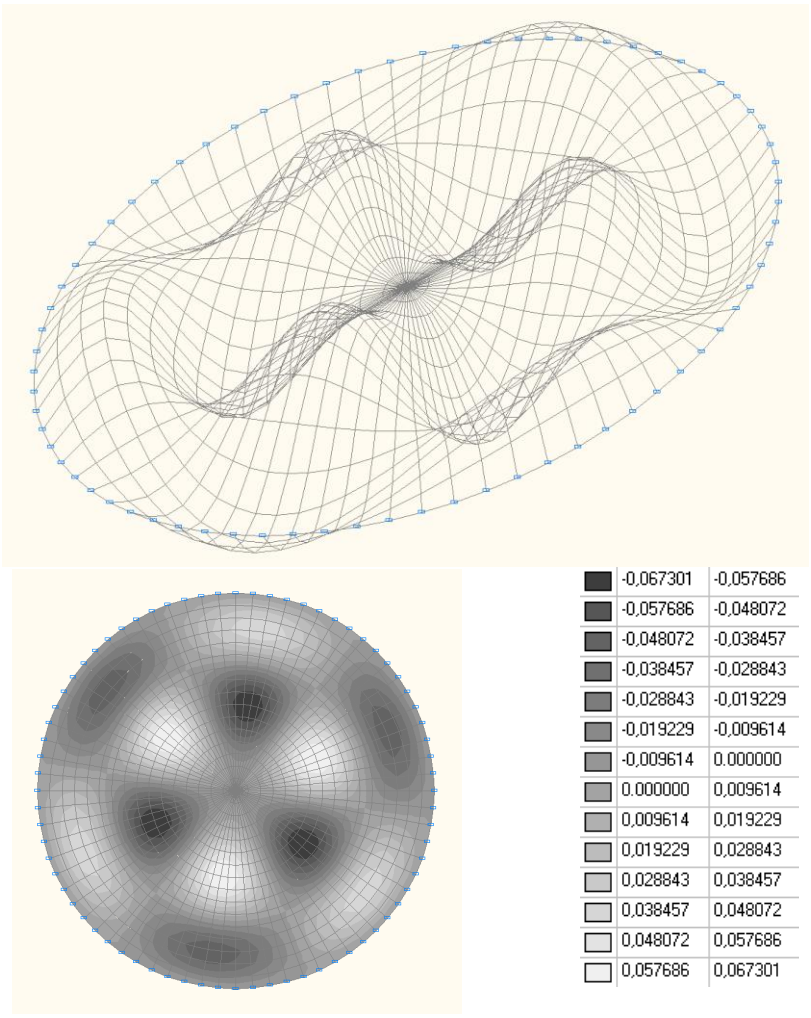


-0,087569	-0,07506
-0,07506	-0,06255
-0,06255	-0,05004
-0,05004	-0,03753
-0,03753	-0,02502
-0,02502	-0,01251
-0,01251	0,000000
0,000000	0,01251
0,01251	0,02502
0,02502	0,03753
0,03753	0,05004
0,05004	0,06255
0,06255	0,07506
0,07506	0,087569

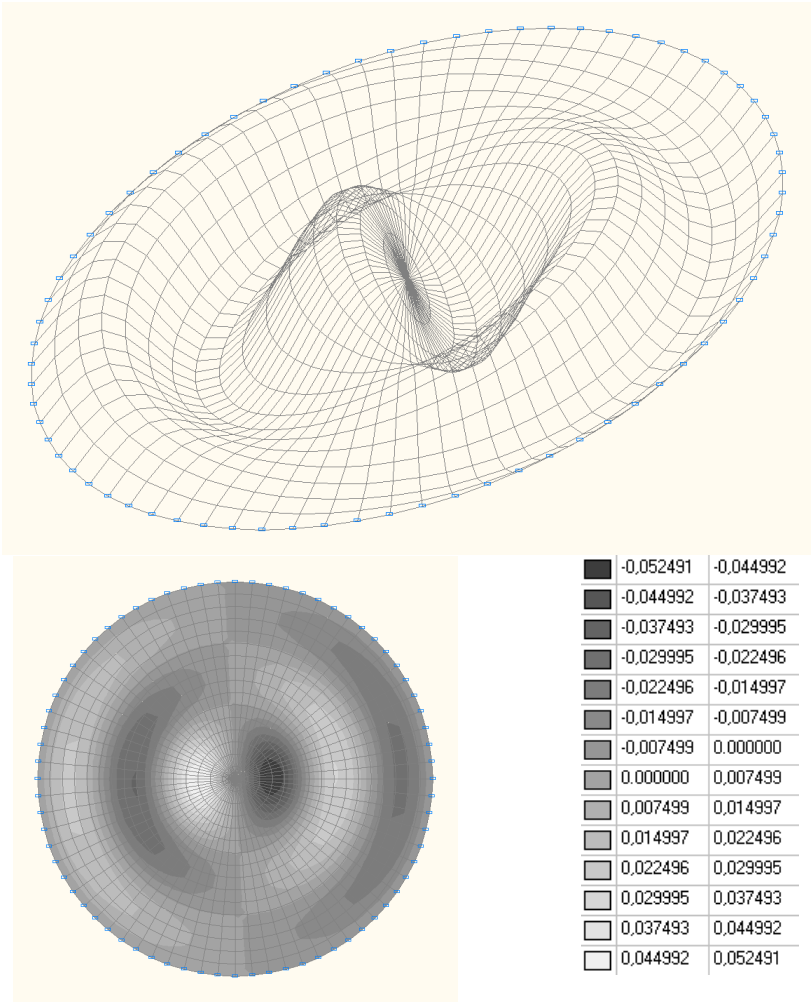
13-я собственная форма колебаний



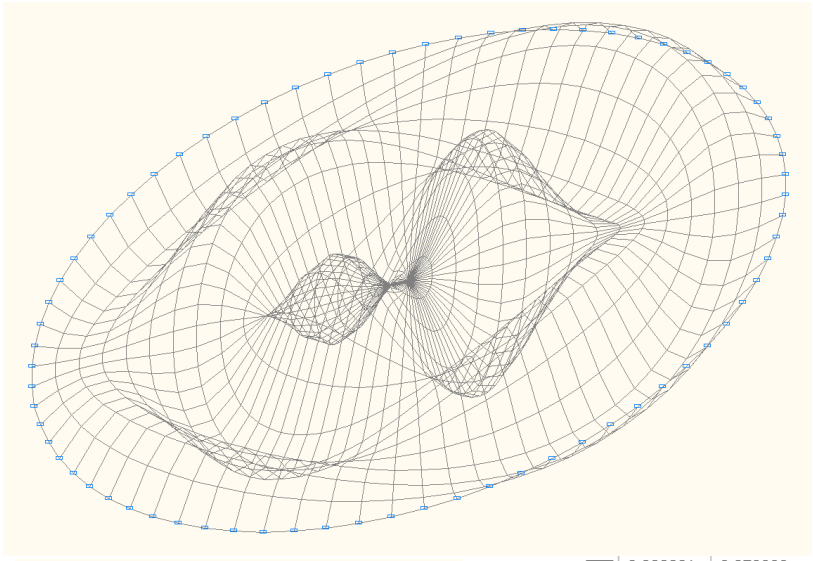
15-я собственная форма колебаний

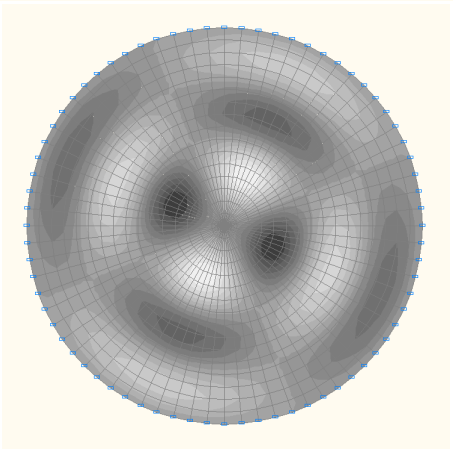


18-я собственная форма колебаний



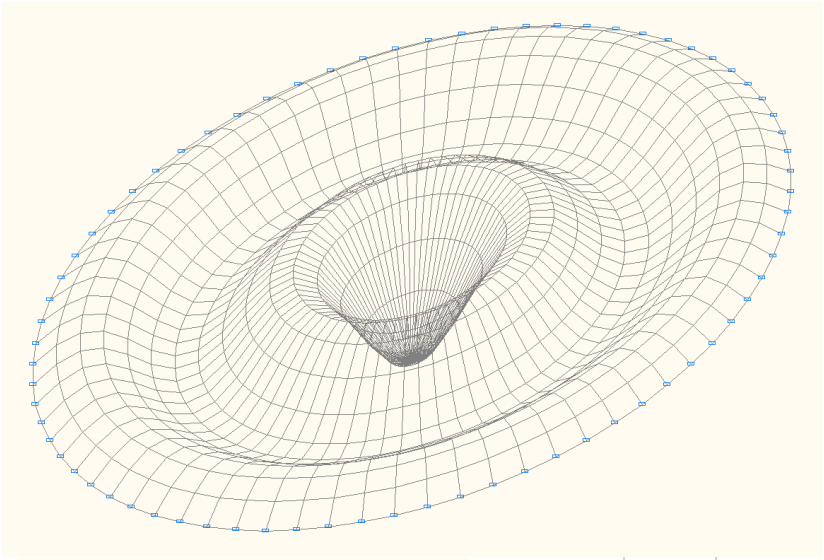
22-я собственная форма колебаний

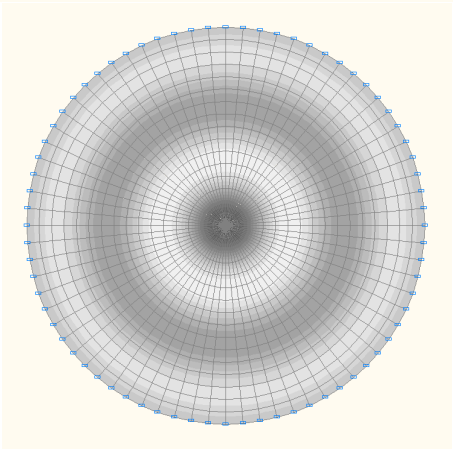




	-0,062891	-0,053906
	-0,053906	-0,044922
	-0,044922	-0,035937
	-0,035937	-0,026953
	-0,026953	-0,017969
	-0,017969	-0,008984
	-0,008984	0
	0	0,008984
	0,008984	0,017969
	0,017969	0,026953
	0,026953	0,035937
	0,035937	0,044922
	0,044922	0,053906
	0,053906	0,062891

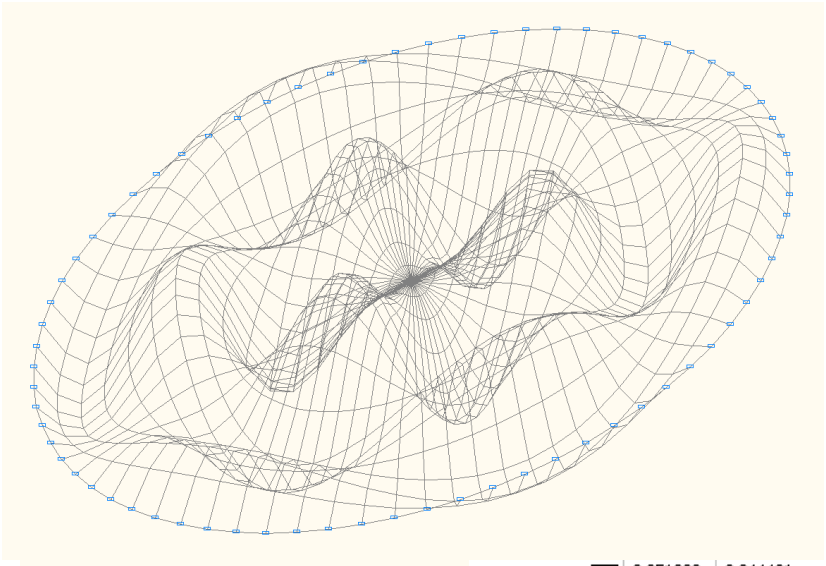
28-я собственная форма колебаний

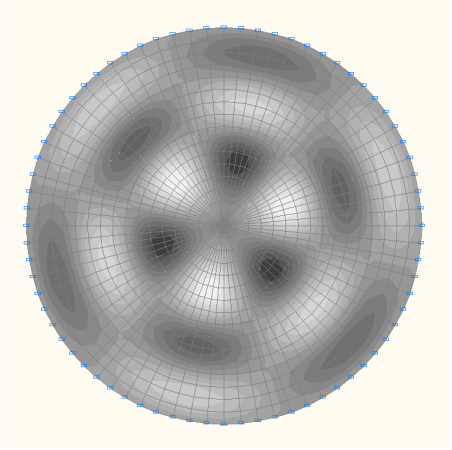




	-0,075803	-0,068208
	-0,068208	-0,060612
	-0,060612	-0,053017
	-0,053017	-0,045422
	-0,045422	-0,037827
	-0,037827	-0,030232
	-0,030232	-0,022637
	-0,022637	-0,015042
	-0,015042	-0,007447
	-0,007447	0,000148
	0,000148	0,007743
	0,007743	0,015338
	0,015338	0,022933
	0,022933	0,030528

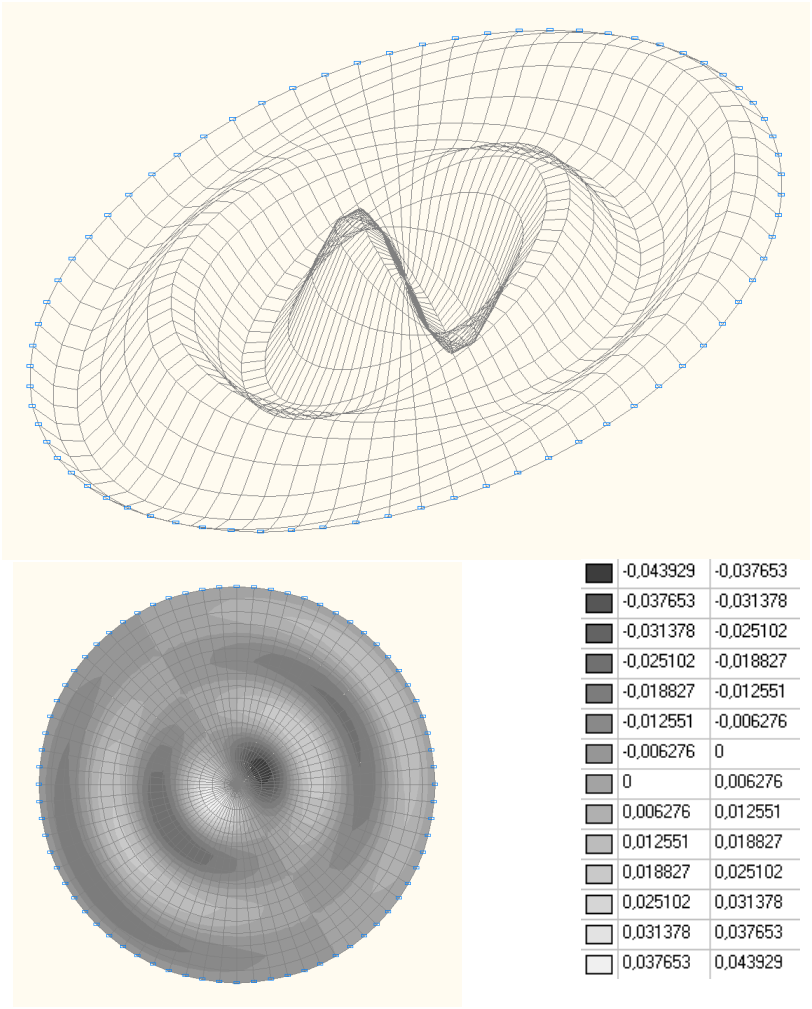
30-я собственная форма колебаний



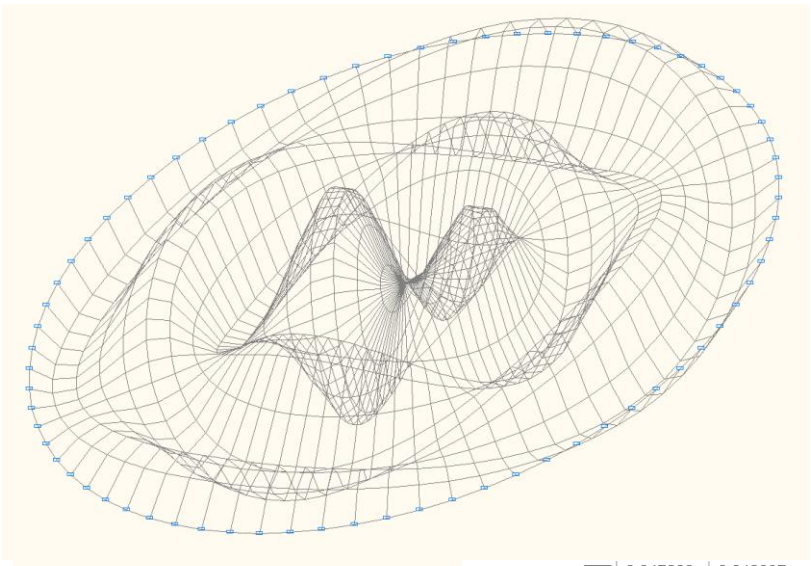


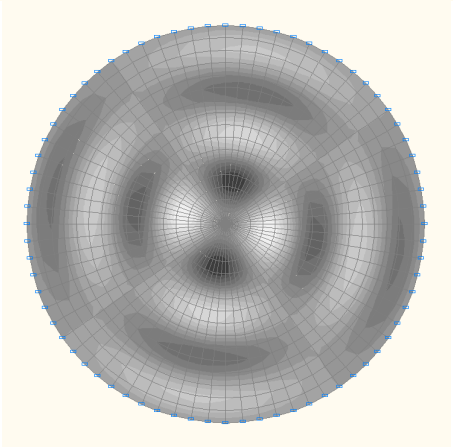
	-0,051906	-0,044491
	-0,044491	-0,037076
	-0,037076	-0,029661
	-0,029661	-0,022245
	-0,022245	-0,01483
	-0,01483	-0,007415
	-0,007415	0
	0	0,007415
	0,007415	0,01483
	0,01483	0,022245
	0,022245	0,029661
	0,029661	0,037076
	0,037076	0,044491
	0,044491	0,051906

35-я собственная форма колебаний



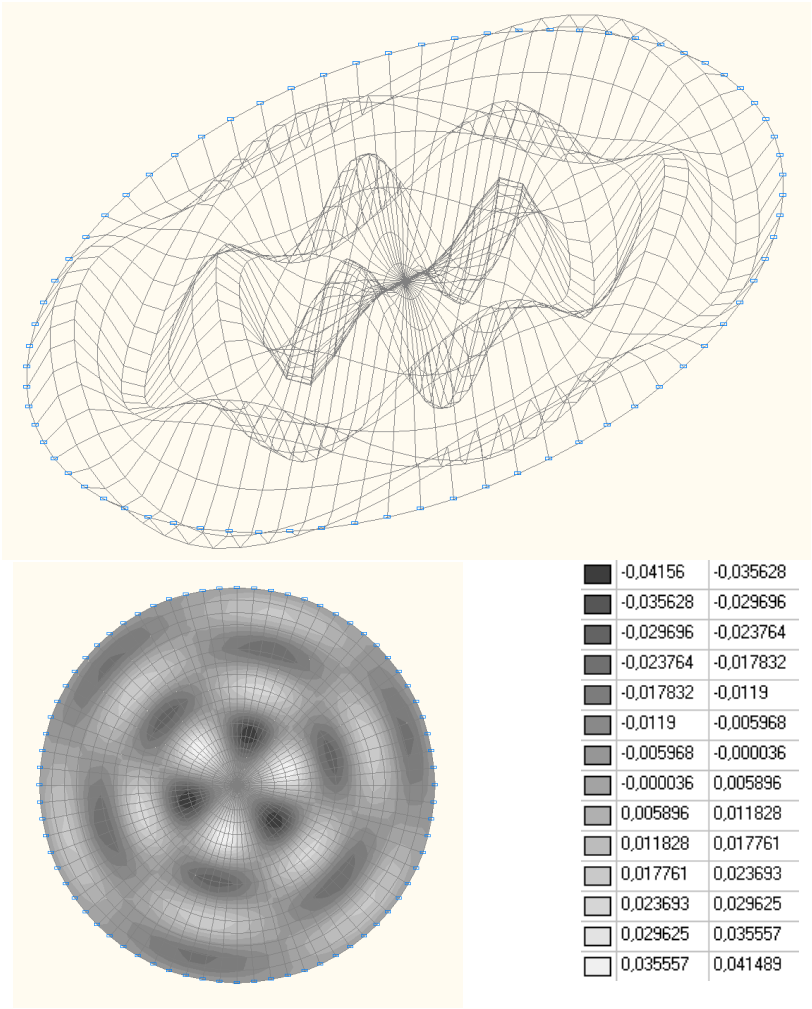
37-я собственная форма колебаний





	-0,047093	-0,040365
	-0,040365	-0,033638
	-0,033638	-0,02691
	-0,02691	-0,020183
	-0,020183	-0,013455
	-0,013455	-0,006728
	-0,006728	0
	0	0,006727
	0,006727	0,013455
	0,013455	0,020182
	0,020182	0,026909
	0,026909	0,033637
	0,033637	0,040364
	0,040364	0,047092

50-я (47-я теоретическая) собственная форма колебаний



58-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, рад / с

Форма колебаний	**Число узловых окружностей m и диаметров n**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	0, 0	306.0	305.8	0.07
2, 3	0, 1	861.8	862.4	0.07
4, 5	0, 2	1588.2	1590.5	0.14
6	1, 0	1842.9	1839.3	0.20
7, 8	0, 3	2477.7	2483.2	0.22
9, 10	1, 1	3006.1	3011.2	0.17
11, 12	0, 4	3524.6	3532.7	0.23
13, 14	1, 2	4347.8	4366.4	0.43
15	2, 0	4598.3	4582.6	0.34
16, 17	0, 5	4725.2	4738.1	0.27
18, 19	1, 3	5862.8	5890.3	0.47
20, 21	0, 6	6076.4	6097.0	0.34
22, 23	2, 1	6372.8	6390.0	0.27
24, 25	0, 7	7546.5	7581.9	0.47
26, 27	1, 4	7576.1	7607.4	0.41
28, 29	2, 2	8327.5	8402.9	0.91
30	3, 0	8576.8	8534.9	0.49
31, 32	0, 8	9222.3	9267.5	0.49
33, 34	1, 5	9395.3	9441.9	0.50
35, 36	2, 3	10459.2	10539.6	0.77
37, 38	0, 9	10963.1	11004.7	0.38
39, 40	3, 1	11013.5	11076.0	0.57

Форма колебаний	Число узловых окружностей m и диаметров n	Теория	SCAD	Отклонения, %
41, 42	1, 6	11406.2	11471.2	0.57
43, 44	2, 4	12764.4	12865.5	0.79
45, 46	0, 10	12948.4	13031.2	0.64
47, 48	3, 2	13530.3	13742.7	1.57
49, 50	1, 7	13576.7	13667.2	0.67
51	4, 0	13779.1	13690.3	0.64
52, 53	0, 11	15025.9	15131.7	0.70
54, 55	2, 5	15240.2	15359.6	0.78
56, 57	1, 8	15904.6	16028.2	0.78
58, 59	3, 3	16276.1	16457.3	1.11
60, 61	4, 1	16777.2	16859.0	0.49

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний ω круговой шарнирно опертой по контуру пластины с плотностью материала ρ могут быть определены из следующего уравнения, полученного на основе метода факторизации:

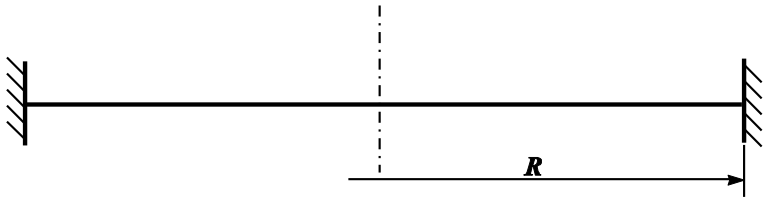
$$\frac{J_{n+1}(\beta \cdot R)}{J_n(\beta \cdot R)} + \frac{I_{n+1}(\beta \cdot R)}{I_n(\beta \cdot R)} = \frac{2 \cdot \beta \cdot R}{1-\nu}, \text{ где:}$$

$$\beta = \left(\frac{\rho \cdot h \cdot \omega^2}{D} \right)^{\frac{1}{4}}, \qquad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1-\nu^2\right)}, n = 0,1,2,3\ldots \text{ - число узловых диаметров,}$$

$J_n(\beta \cdot R)$, $J_{n+1}(\beta \cdot R)$ - значения функции Бесселя первого рода *n*-го порядка,

$I_n(\beta \cdot R)$, $I_{n+1}(\beta \cdot R)$ - значения модифицированной функции Бесселя первого рода *n*-го порядка.

Свободные колебания круговой жестко защемленной по контуру пластины



Цель: Модальный анализ круговой жестко защемленной по контуру пластины.

Имя файла с исходными данными: **5.6.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω круговой жестко защемленной по контуру пластины с плотностью материала ρ.

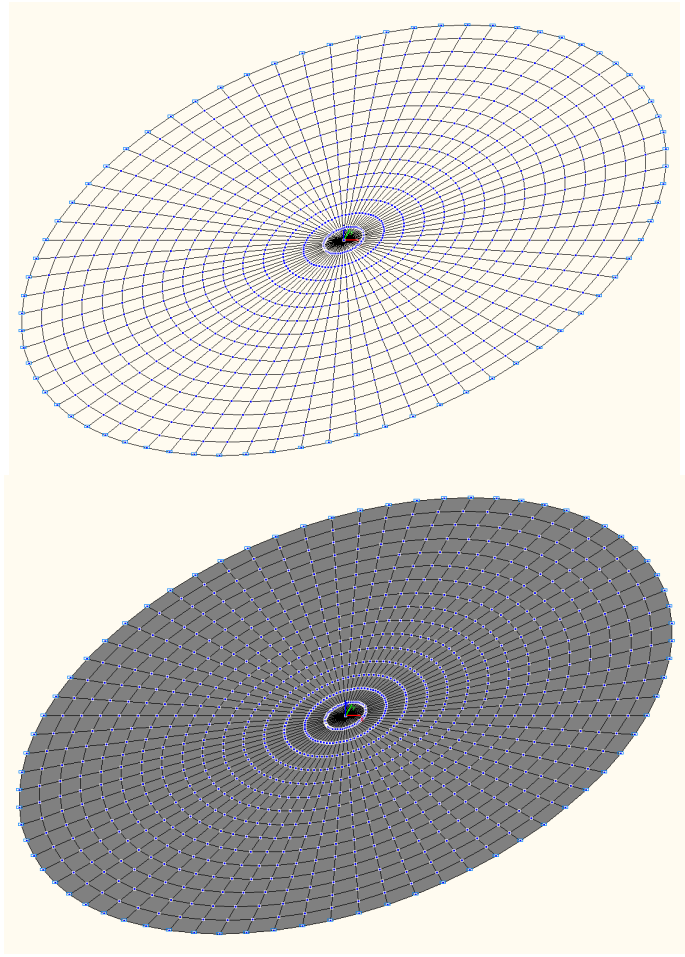
Ссылки: В.Н. Челомей, Вибрации в технике, Справочник в шести томах: В.В. Болотин, Том 1, Колебания линейных систем, Москва, Машиностроение, 1978, стр. 207.

Исходные данные:

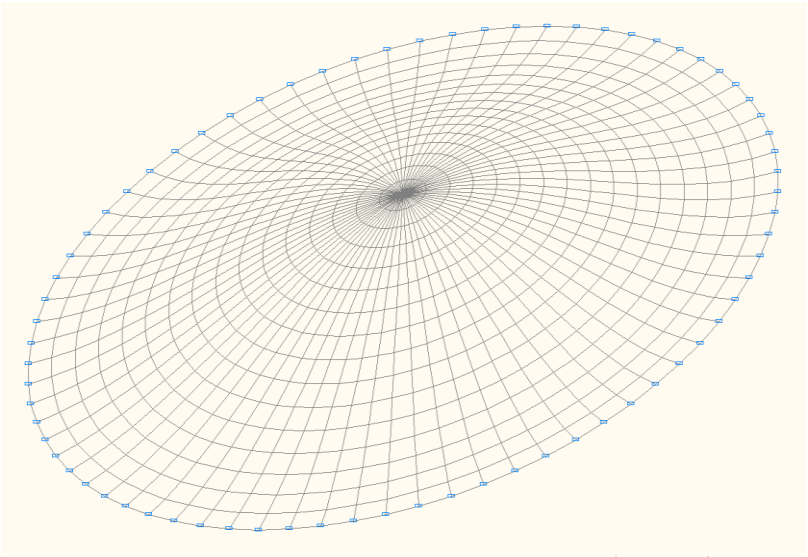
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.85$ т/м^3	- плотность материала;
$h = 0.01$ м	- толщина пластины;
$R = 0.5$ м	- наружный радиус пластины.

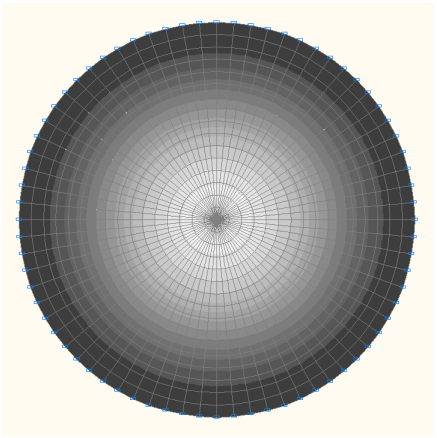
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 1080 четырехузловых элементов плиты типа 20 и 72 трехузловых элемента плиты типа 15. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.03125 м в радиальном направлении и с шагом 5.0º в тангенциальном направлении. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы Z, UX, UY по наружному контуру пластины. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса пластины $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.01$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 1153. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD



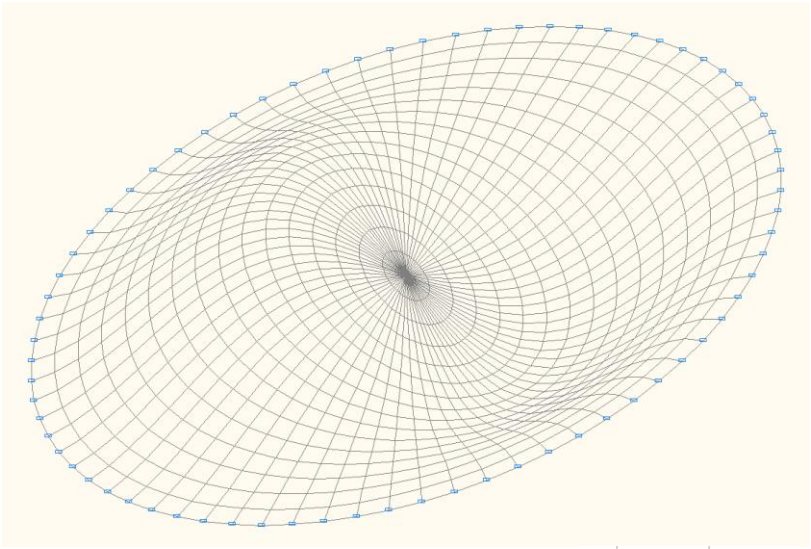
Расчетная схема

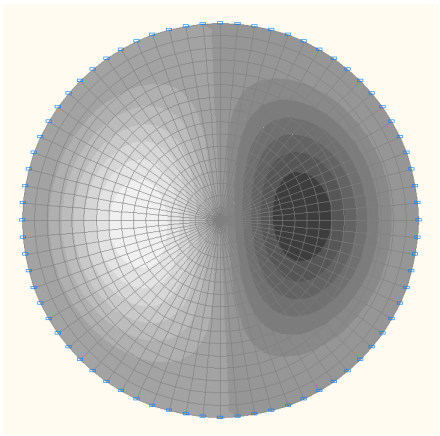




	0,000000	0,023138
	0,023138	0,046275
	0,046275	0,069413
	0,069413	0,09255
	0,09255	0,115688
	0,115688	0,138825
	0,138825	0,161963
	0,161963	0,1851
	0,1851	0,208238
	0,208238	0,231375
	0,231375	0,254513
	0,254513	0,27765
	0,27765	0,300788
	0,300788	0,323925

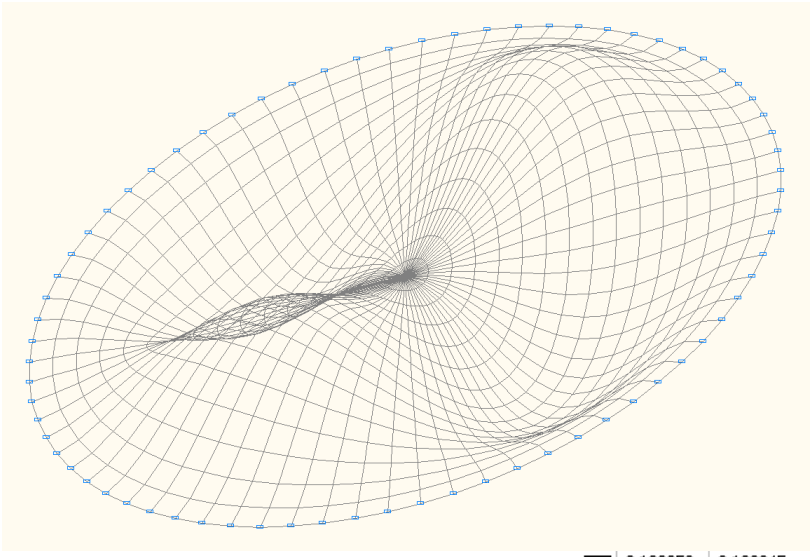
1-я собственная форма колебаний

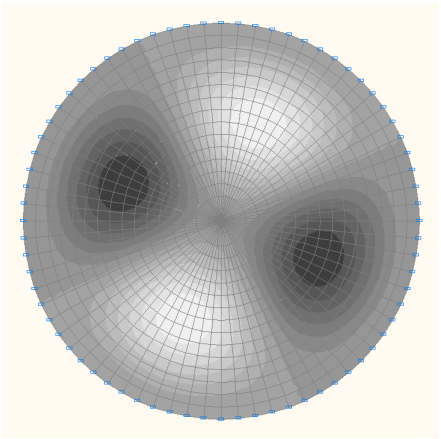




	-0,125385	-0,107473
	-0,107473	-0,089561
	-0,089561	-0,071649
	-0,071649	-0,053736
	-0,053736	-0,035824
	-0,035824	-0,017912
	-0,017912	0
	0	0,017912
	0,017912	0,035824
	0,035824	0,053736
	0,053736	0,071649
	0,071649	0,089561
	0,089561	0,107473
	0,107473	0,125385

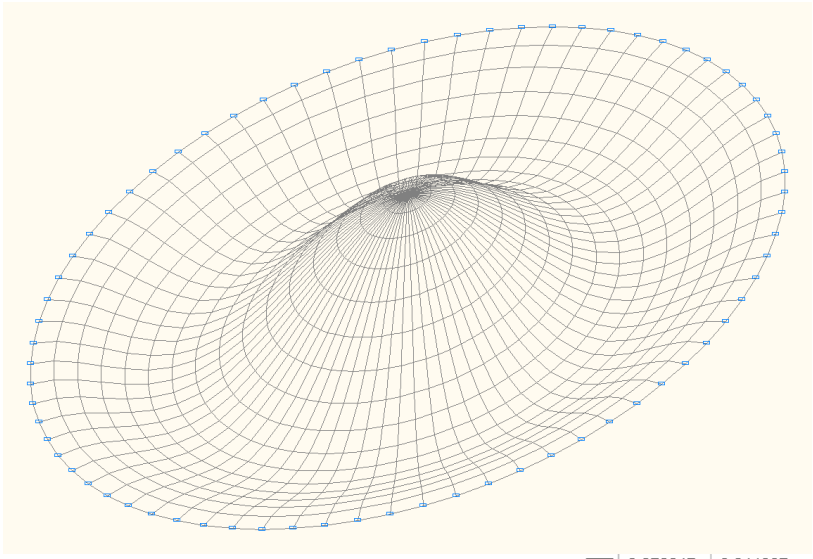
2-я собственная форма колебаний

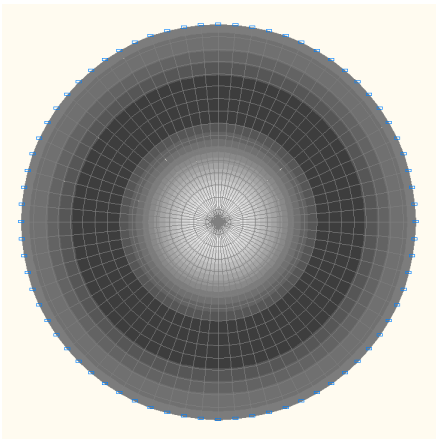




-0,126053	-0,108045
-0,108045	-0,090038
-0,090038	-0,07203
-0,07203	-0,054023
-0,054023	-0,036015
-0,036015	-0,018008
-0,018008	0.000000
0.000000	0,018008
0,018008	0,036015
0,036015	0,054023
0,054023	0,07203
0,07203	0,090038
0,090038	0,108045
0,108045	0,126053

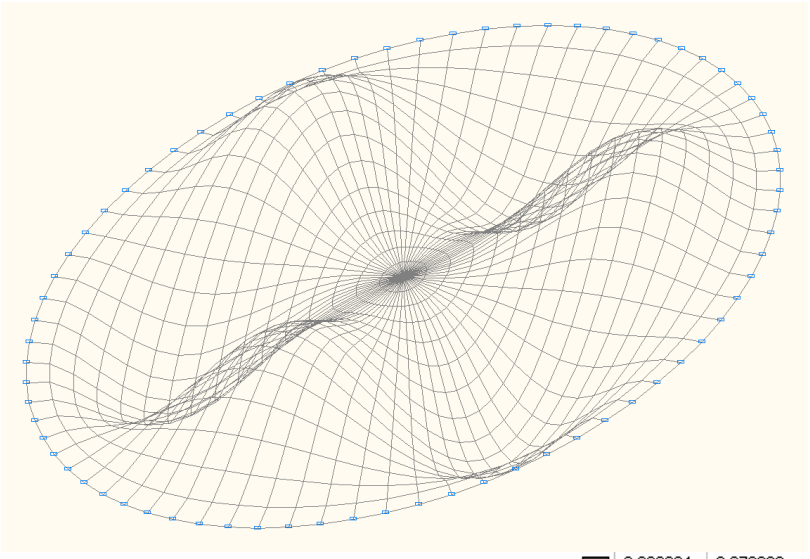
4-я собственная форма колебаний

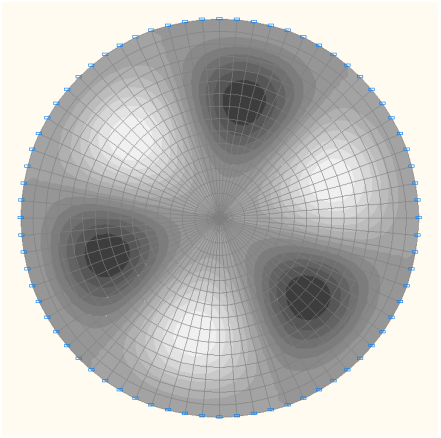




-0,058247	-0,044395
-0,044395	-0,030543
-0,030543	-0,016691
-0,016691	-0,002839
-0,002839	0,011014
0,011014	0,024866
0,024866	0,038718
0,038718	0,05257
0,05257	0,066422
0,066422	0,080274
0,080274	0,094127
0,094127	0,107979
0,107979	0,121831
0,121831	0,135683

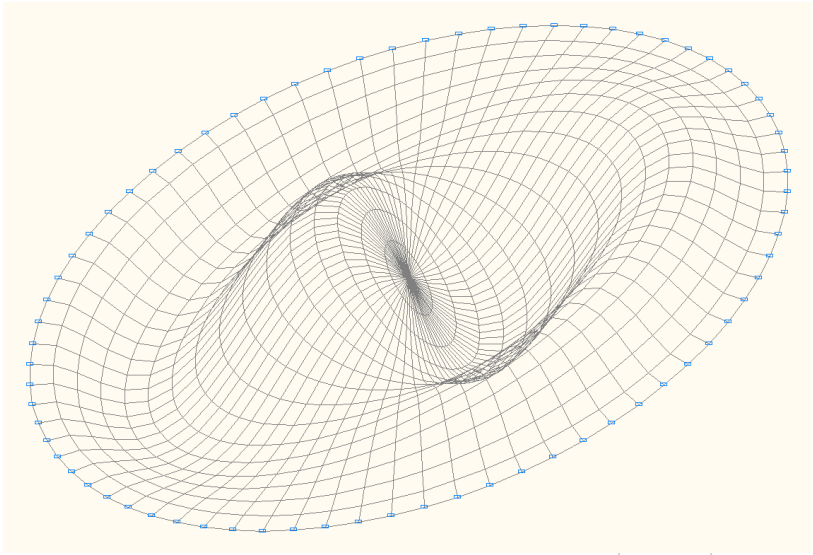
6-я собственная форма колебаний

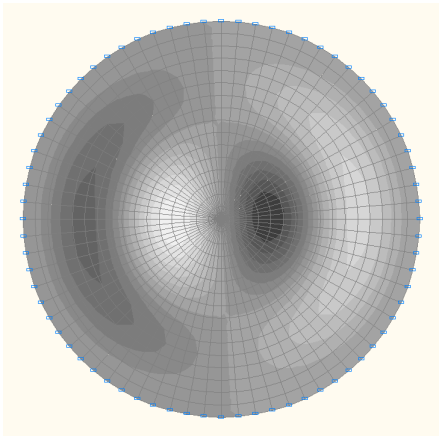




-0,092904	-0,079632
-0,079632	-0,06636
-0,06636	-0,053088
-0,053088	-0,039816
-0,039816	-0,026544
-0,026544	-0,013272
-0,013272	0.000000
0.000000	0,013272
0,013272	0,026544
0,026544	0,039816
0,039816	0,053088
0,053088	0,06636
0,06636	0,079632
0,079632	0,092904

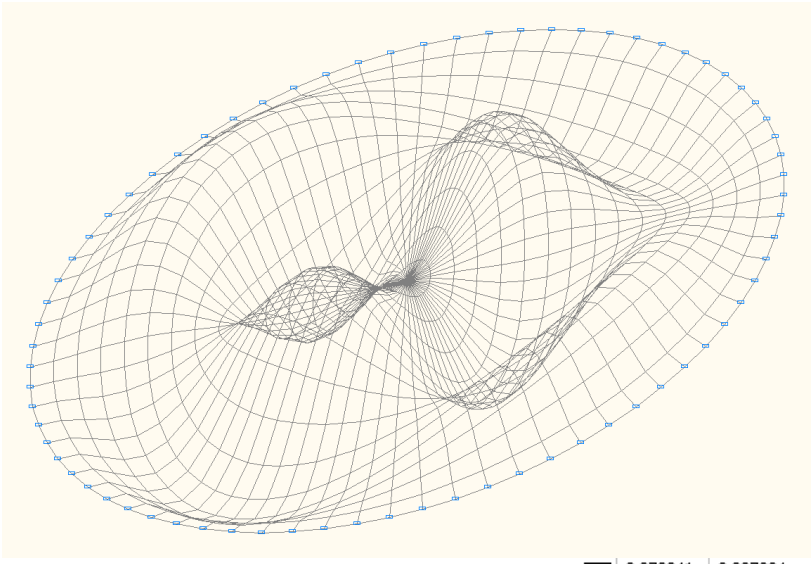
7-я собственная форма колебаний

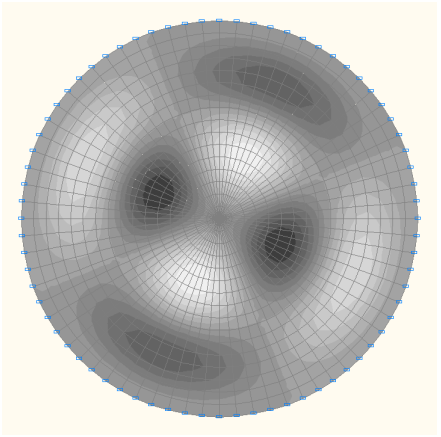




-0,070034	-0,060029
-0,060029	-0,050024
-0,050024	-0,040019
-0,040019	-0,030014
-0,030014	-0,02001
-0,02001	-0,010005
-0,010005	0,000000
0,000000	0,010005
0,010005	0,02001
0,02001	0,030014
0,030014	0,040019
0,040019	0,050024
0,050024	0,060029
0,060029	0,070034

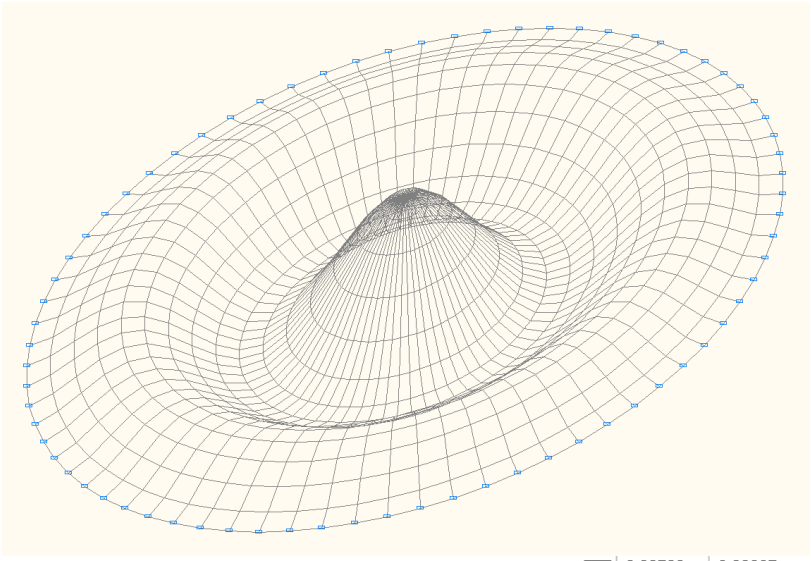
9-я собственная форма колебаний

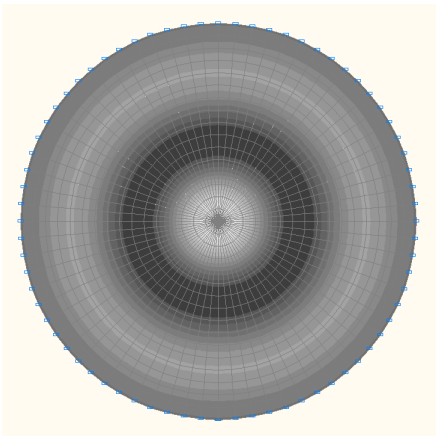




	-0,078241	-0,067064
	-0,067064	-0,055886
	-0,055886	-0,044709
	-0,044709	-0,033532
	-0,033532	-0,022355
	-0,022355	-0,011177
	-0,011177	0,000000
	0,000000	0,011177
	0,011177	0,022355
	0,022355	0,033532
	0,033532	0,044709
	0,044709	0,055886
	0,055886	0,067064
	0,067064	0,078241

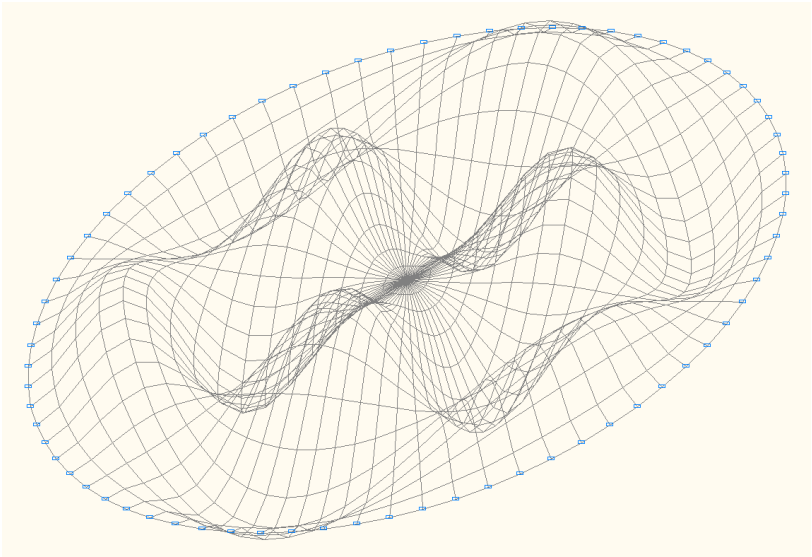
13-я собственная форма колебаний

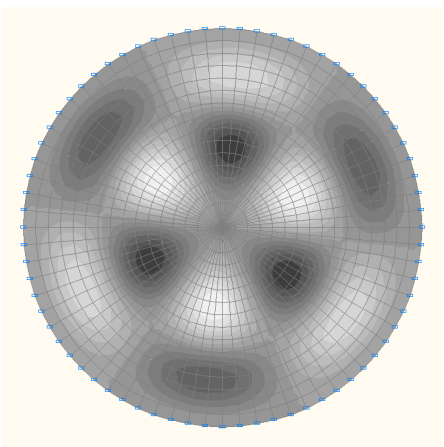




-0,03528	-0,02627
-0,02627	-0,017261
-0,017261	-0,008252
-0,008252	0,000758
0,000758	0,009767
0,009767	0,018777
0,018777	0,027786
0,027786	0,036795
0,036795	0,045805
0,045805	0,054814
0,054814	0,063823
0,063823	0,072833
0,072833	0,081842
0,081842	0,090852

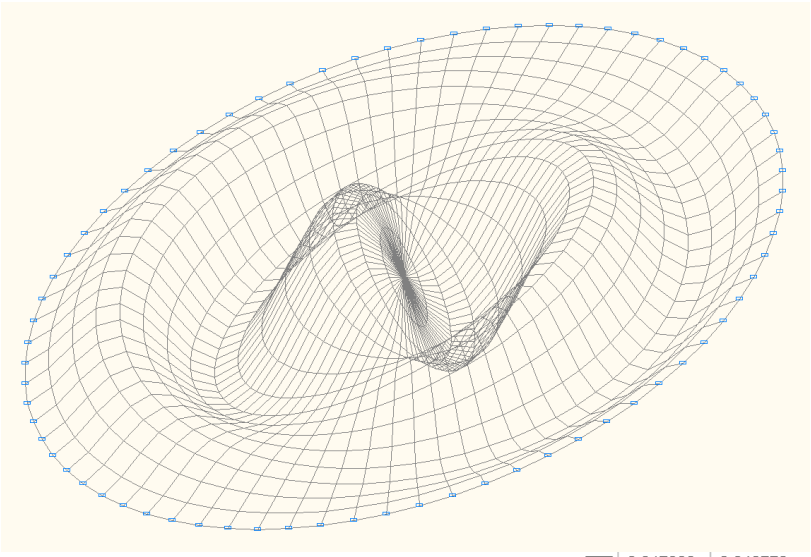
15-я собственная форма колебаний

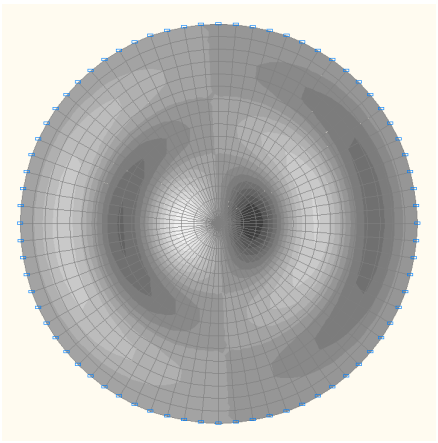




	-0,061924	-0,053077
	-0,053077	-0,044231
	-0,044231	-0,035385
	-0,035385	-0,026539
	-0,026539	-0,017692
	-0,017692	-0,008846
	-0,008846	0,000000
	0,000000	0,008846
	0,008846	0,017692
	0,017692	0,026539
	0,026539	0,035385
	0,035385	0,044231
	0,044231	0,053077
	0,053077	0,061924

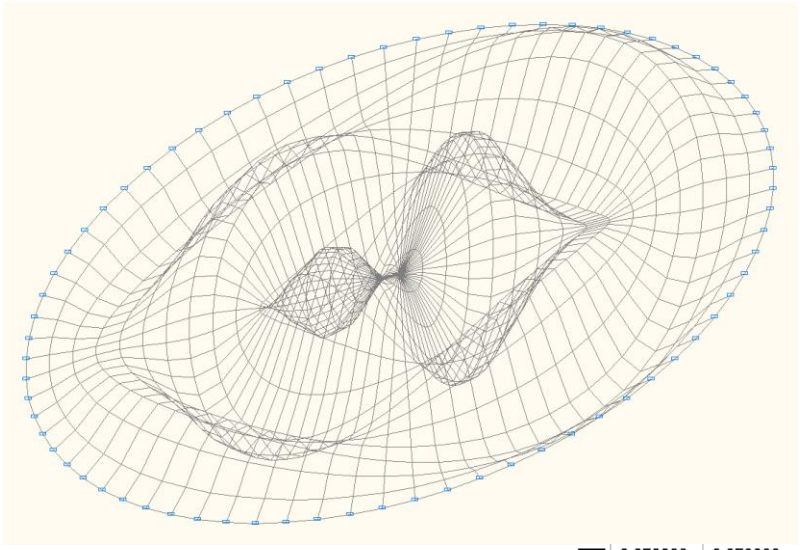
18-я собственная форма колебаний

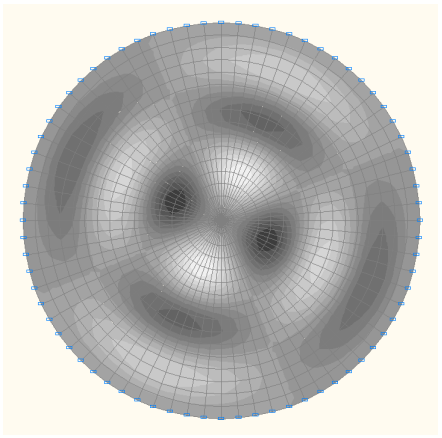




-0,047339	-0,040576
-0,040576	-0,033813
-0,033813	-0,027051
-0,027051	-0,020288
-0,020288	-0,013525
-0,013525	-0,006763
-0,006763	0.000000
0.000000	0,006763
0,006763	0,013525
0,013525	0,020288
0,020288	0,027051
0,027051	0,033813
0,033813	0,040576
0,040576	0,047339

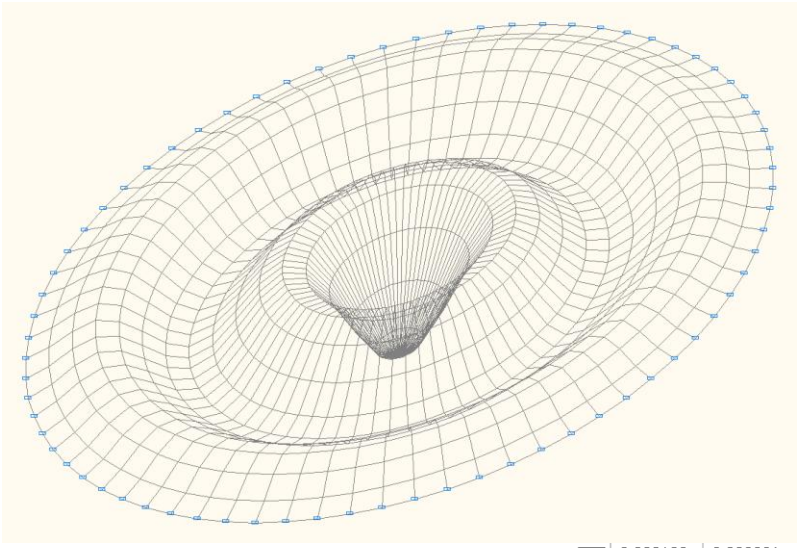
22-я собственная форма колебаний

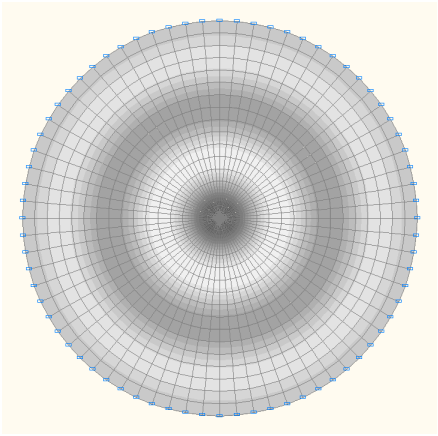




-0,059363	-0,050883
-0,050883	-0,042402
-0,042402	-0,033922
-0,033922	-0,025441
-0,025441	-0,016961
-0,016961	-0,00848
-0,00848	0,000000
0,000000	0,00848
0,00848	0,016961
0,016961	0,025441
0,025441	0,033922
0,033922	0,042402
0,042402	0,050883
0,050883	0,059363

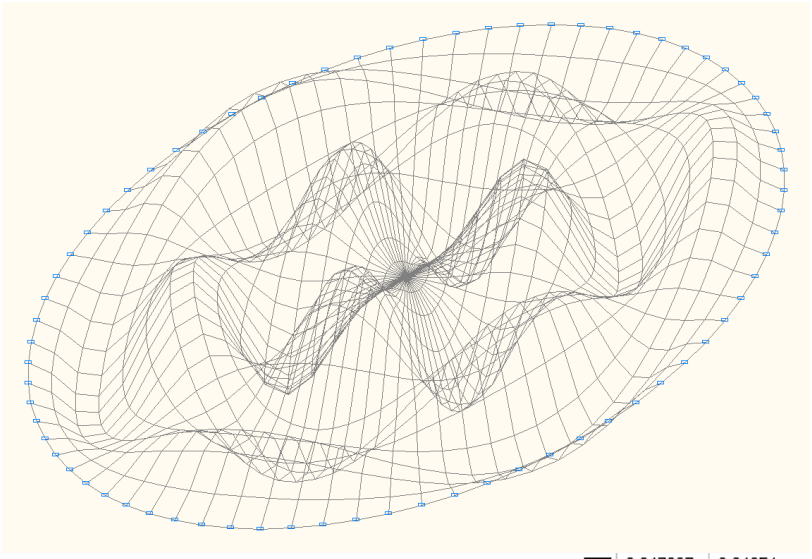
28-я собственная форма колебаний

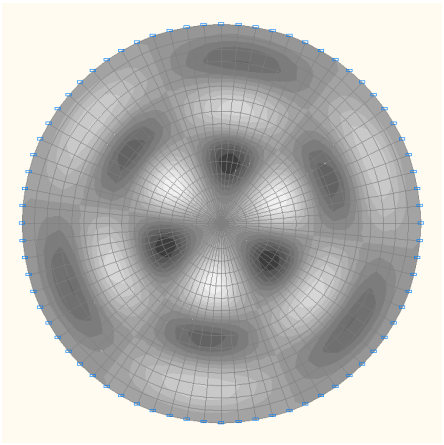




	-0,069199	-0,062261
	-0,062261	-0,055323
	-0,055323	-0,048384
	-0,048384	-0,041446
	-0,041446	-0,034508
	-0,034508	-0,02757
	-0,02757	-0,020631
	-0,020631	-0,013693
	-0,013693	-0,006755
	-0,006755	0,000183
	0,000183	0,007121
	0,007121	0,01406
	0,01406	0,020998
	0,020998	0,027936

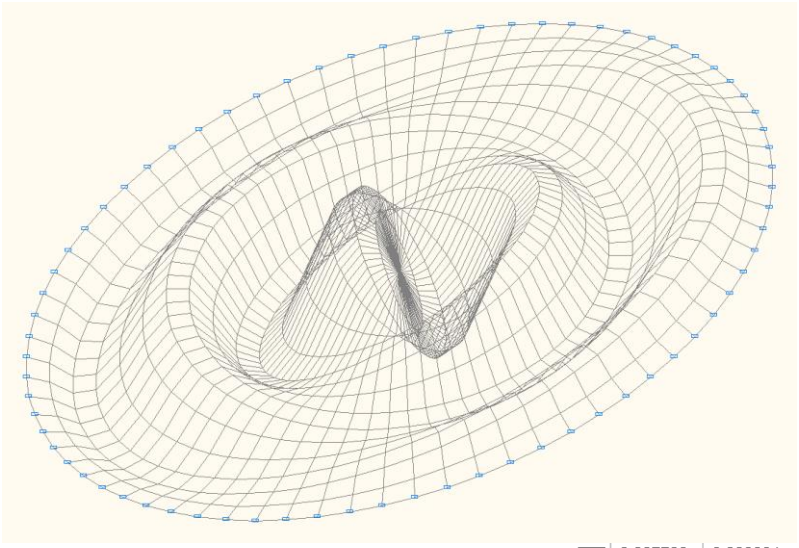
30-я собственная форма колебаний

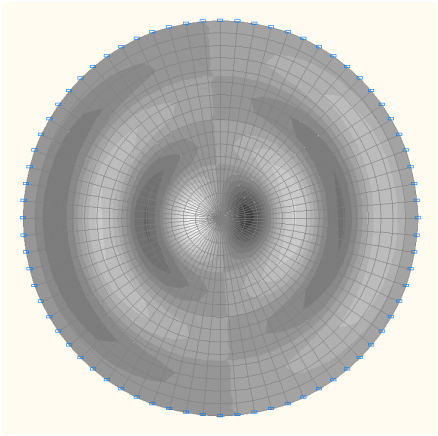




-0,047297	-0,04054
-0,04054	-0,033783
-0,033783	-0,027027
-0,027027	-0,02027
-0,02027	-0,013513
-0,013513	-0,006757
-0,006757	0
0	0,006757
0,006757	0,013513
0,013513	0,02027
0,02027	0,027027
0,027027	0,033783
0,033783	0,04054
0,04054	0,047297

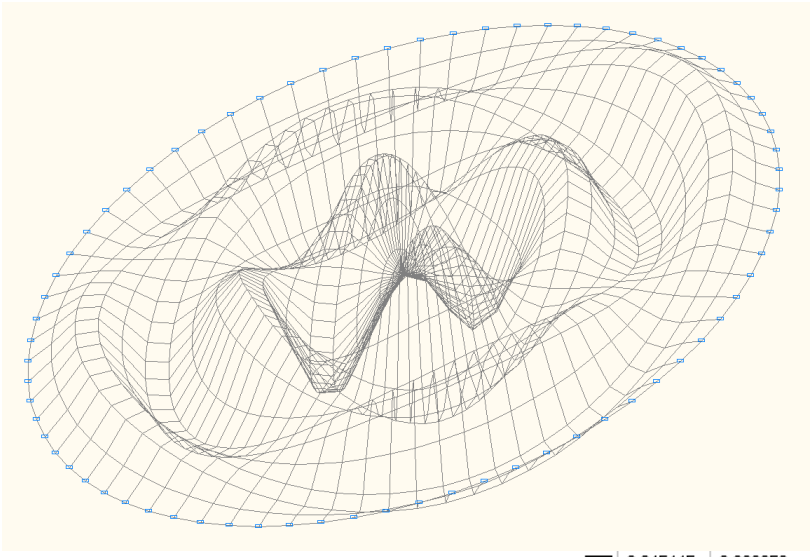
35-я собственная форма колебаний

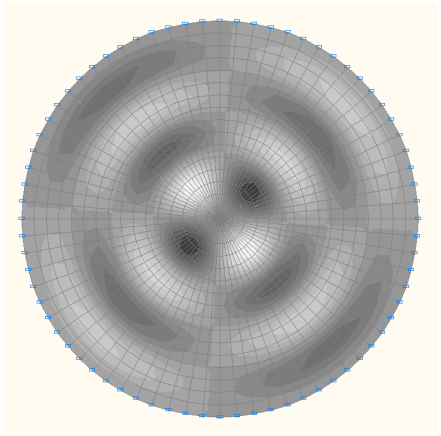




	-0,035728	-0,030624
	-0,030624	-0,02552
	-0,02552	-0,020416
	-0,020416	-0,015312
	-0,015312	-0,010208
	-0,010208	-0,005104
	-0,005104	0
	0	0,005104
	0,005104	0,010208
	0,010208	0,015312
	0,015312	0,020416
	0,020416	0,02552
	0,02552	0,030624
	0,030624	0,035728

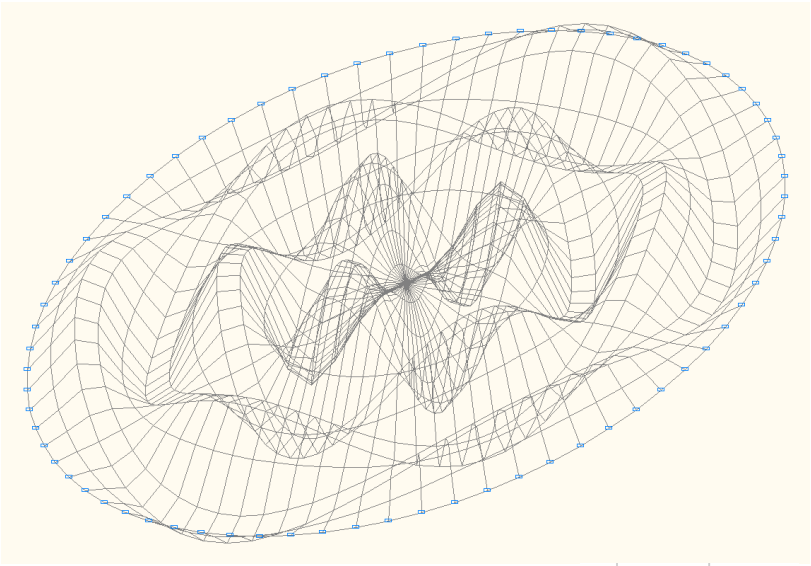
37-я собственная форма колебаний

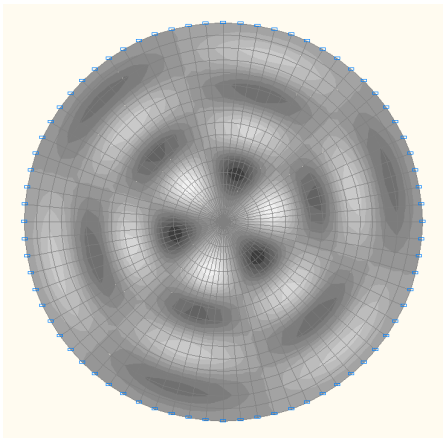


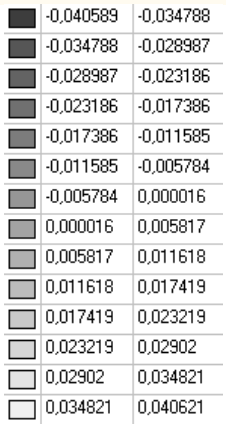


	-0,045445	-0,038953
	-0,038953	-0,032461
	-0,032461	-0,025969
	-0,025969	-0,019477
	-0,019477	-0,012985
	-0,012985	-0,006493
	-0,006493	0
	0	0,006492
	0,006492	0,012984
	0,012984	0,019476
	0,019476	0,025968
	0,025968	0,03246
	0,03246	0,038952
	0,038952	0,045444

50-я (47-я теоретическая) собственная форма колебаний







58-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, рад / с

Форма колебаний	**Число узловых окружностей m и диаметров n**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	0, 0	633.5	633.8	0.05
2, 3	0, 1	1318.3	1321.7	0.26
4, 5	0, 2	2162.7	2170.6	0.37
6	1, 0	2466.1	2463.8	0.09
7, 8	0, 3	3164.3	3178.9	0.46
9, 10	1, 1	3771.9	3784.3	0.33
11, 12	0, 4	4319.8	4340.1	0.47
13, 14	1, 2	5244.8	5280.1	0.67
15	2, 0	5525.2	5511.5	0.25
16, 17	0, 5	5626.5	5655.5	0.52
18, 19	1, 3	6884.2	6931.9	0.69
20, 21	0, 6	7082.1	7123.6	0.59
22, 23	2, 1	7445.9	7477.9	0.43
24, 25	0, 7	8684.6	8742.7	0.67
26, 27	1, 4	8687.8	8748.6	0.70
28, 29	2, 2	9537.8	9652.0	1.20
30	3, 0	9808.7	9769.4	0.40
31, 32	0, 8	10432.5	10511.5	0.76
33, 34	1, 5	10653.2	10730.3	0.72
35, 36	2, 3	11800.3	11917.6	0.99
37, 38	0, 9	12324.5	12429.0	0.85
39, 40	3, 1	12342.9	12408.9	0.53

Форма колебаний	Число узловых окружностей m и диаметров n	Теория	SCAD	Отклонения, %
41, 42	1, 6	12778.0	12880.4	0.80
43, 44	2, 4	14232.0	14378.8	1.03
45, 46	0, 10	14359.4	14494.1	0.94
47, 48	3, 2	15050.6	15335.5	1.89
49, 50	1, 7	15060.4	15196.7	0.91
51	4, 0	15316.4	15229.9	0.56
52, 53	0, 11	16536.2	16705.2	1.02
54, 55	2, 5	16830.7	17001.7	1.02
56, 57	1, 8	17498.5	17677.4	1.02
58, 59	3, 3	17931.5	18171.2	1.34
60, 61	4, 1	18463.5	18580.3	0.63

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний ω круговой жестко защемленной по контуру пластины с плотностью материала ρ могут быть определены из следующего уравнения, полученного на основе метода факторизации:

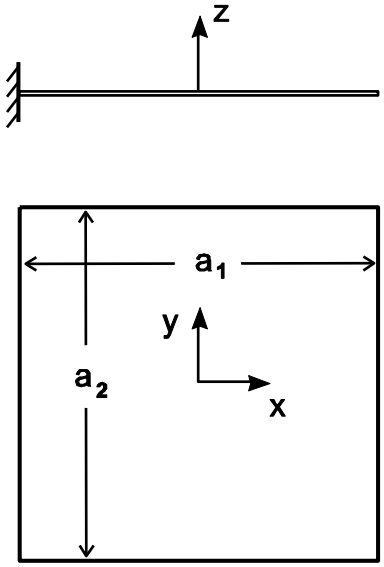
$$\frac{J_{n+1}(\beta \cdot R)}{J_n(\beta \cdot R)} + \frac{I_{n+1}(\beta \cdot R)}{I_n(\beta \cdot R)} = 0 \text{, где:}$$

$\beta = \left(\frac{\rho \cdot h \cdot \omega^2}{D} \right)^{\frac{1}{4}}$, $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$, $n = 0,1,2,3\ldots$ - число узловых диаметров,

$J_n(\beta \cdot R)$, $J_{n+1}(\beta \cdot R)$ - значения функции Бесселя первого рода n-го порядка,

$I_n(\beta \cdot R)$, $I_{n+1}(\beta \cdot R)$ - значения модифицированной функции Бесселя первого рода n-го порядка.

Свободные колебания квадратной консольной пластины



Цель: Модальный анализ квадратной консольной пластины.

Имя файла с исходными данными: **5.5.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω квадратной консольной пластины с плотностью материала ρ.

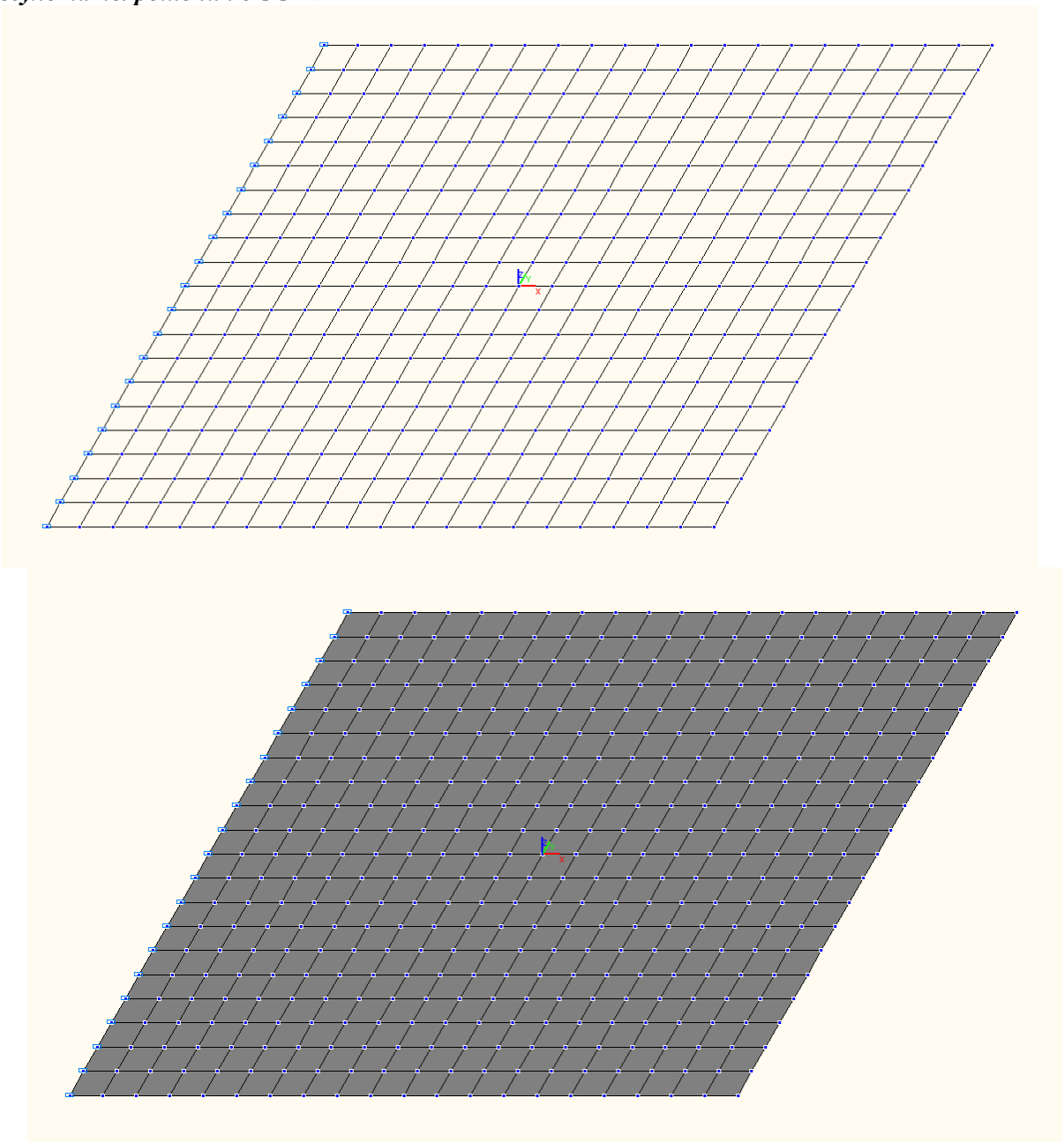
Ссылки: И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 382.

Исходные данные:

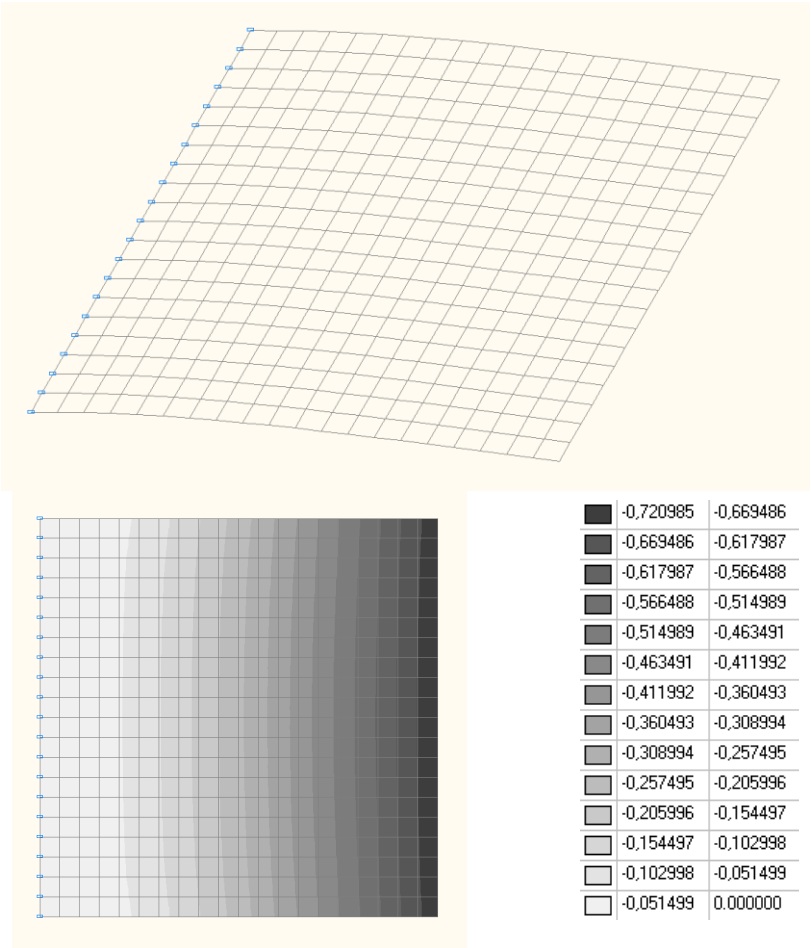
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.85$ т/м^3	- плотность материала;
$h = 0.01$ м	- толщина пластины;
$a_1 = 1.0$ м	- размер длинной стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
$a_2 = 1.0$ м	- размер короткой стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 400 элементов плиты типа 20. Сетка конечных элементов разбита по длинам сторон пластины (вдоль осей X, Y общей системы координат) с шагом 0.05 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степеней свободы Z, UX, UY для одной из кромок, расположенных вдоль оси Y общей системы координат. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса пластины $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.01$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 441. Определение собственных форм и частот выполнено методом Ланцоша. При расчете используется согласованная матрица масс.

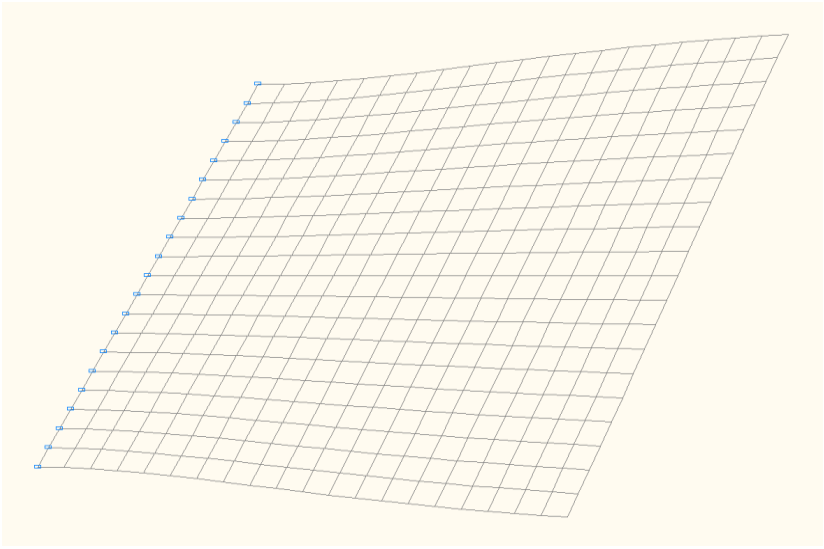
Результаты решения в SCAD

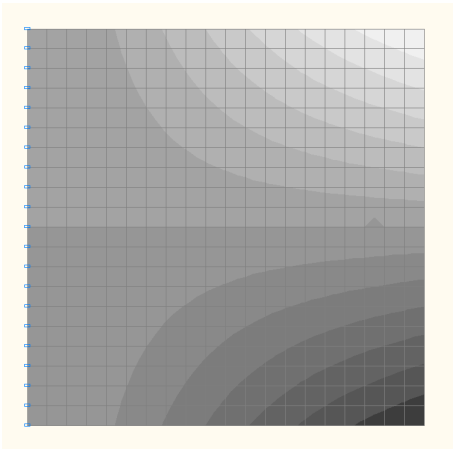


Расчетная схема



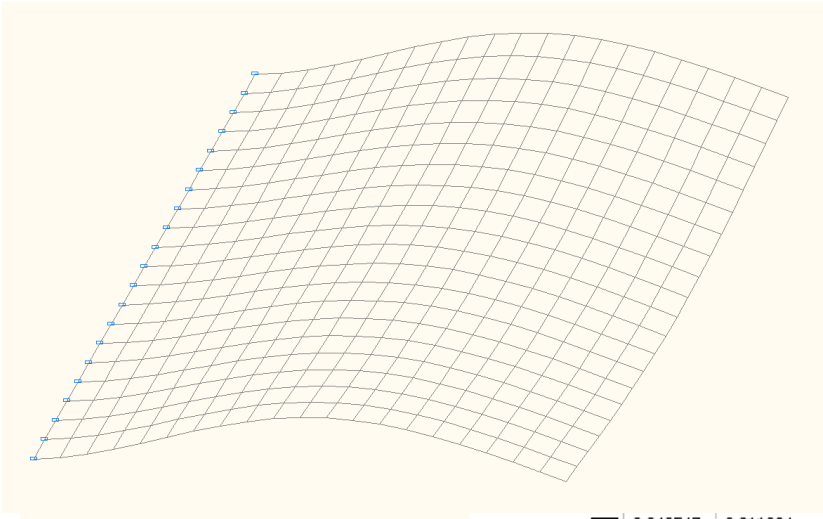
1-я собственная форма колебаний

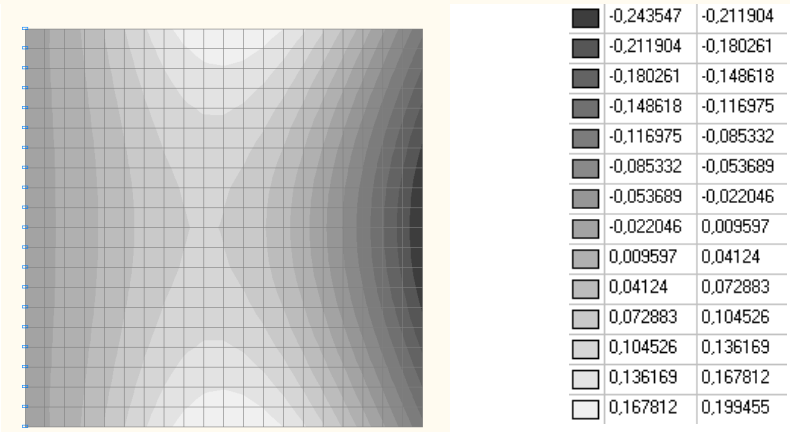




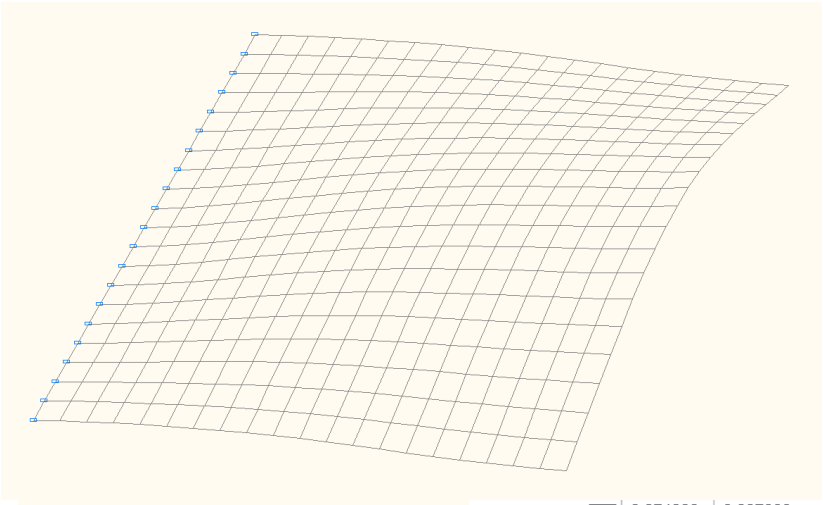
-0,45923	-0,393626
-0,393626	-0,328021
-0,328021	-0,262417
-0,262417	-0,196813
-0,196813	-0,131209
-0,131209	-0,065604
-0,065604	0
0	0,065604
0,065604	0,131209
0,131209	0,196813
0,196813	0,262417
0,262417	0,328021
0,328021	0,393626
0,393626	0,45923

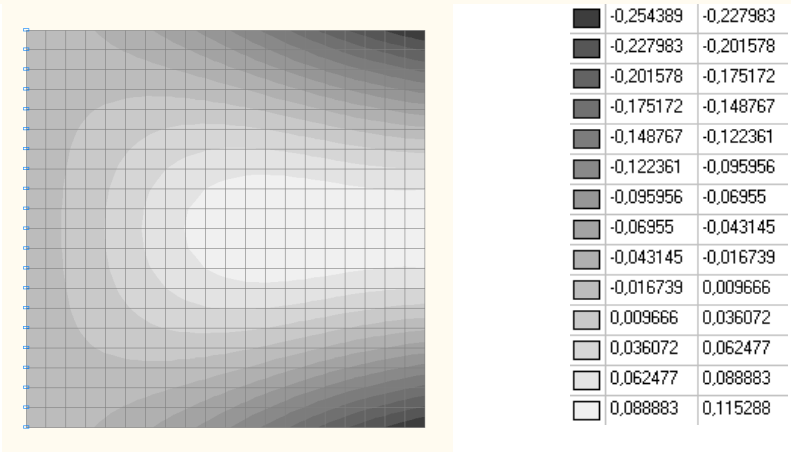
2-я собственная форма колебаний



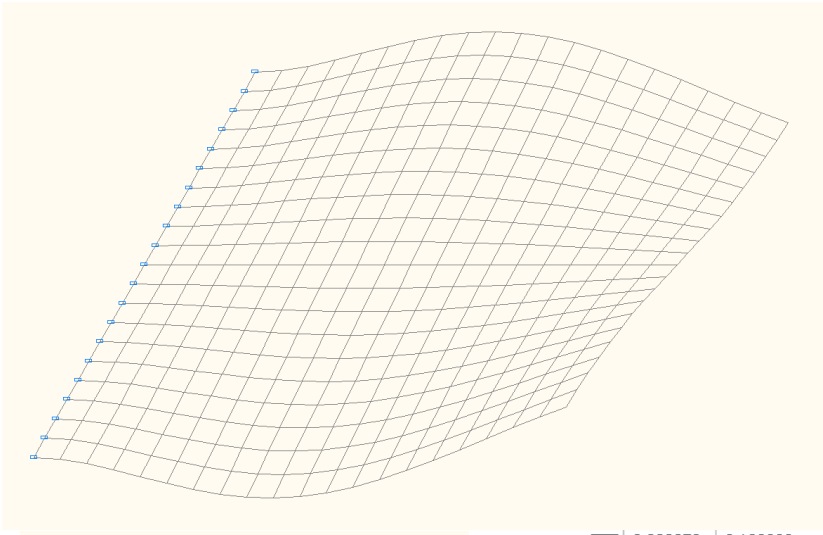


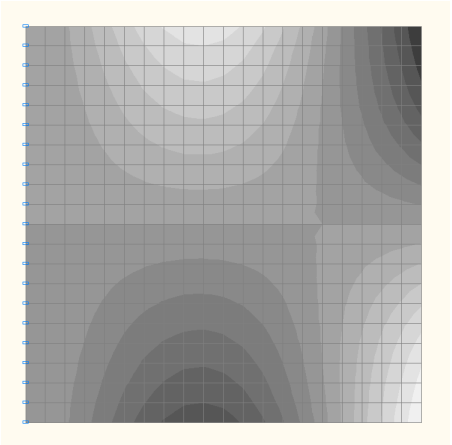
3-я собственная форма колебаний





4-я собственная форма колебаний



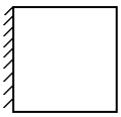
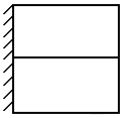
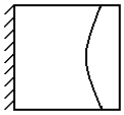
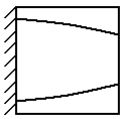
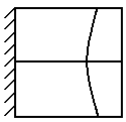


-0,229376	-0,196608
-0,196608	-0,16384
-0,16384	-0,131072
-0,131072	-0,098304
-0,098304	-0,065536
-0,065536	-0,032768
-0,032768	0,000000
0,000000	0,032768
0,032768	0,065536
0,065536	0,098304
0,098304	0,131072
0,131072	0,16384
0,16384	0,196608
0,196608	0,229376

5-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, рад / с

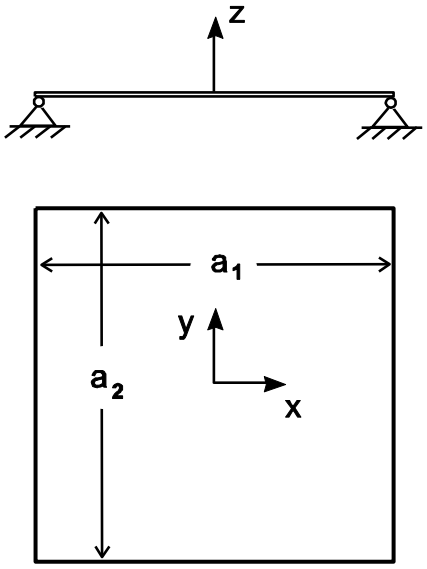
Форма колебаний	**Узловые линии**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1		54.2	53,8	0,71
2		132.5	131,9	0,43
3		332.4	330,0	0,72
4		425.7	421,8	0,91
5		483.2	480,3	0,61

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний ω квадратной консольной пластины с плотностью материала ρ могут быть вычислены по следующей формуле, полученной на основе решения по методу Рэлея-Ритца:

$$\omega = \frac{\omega_m^*}{a_1^{\,2}} \cdot \left(\frac{D}{\rho \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где при } \frac{a_2}{a_1} = 1:$$

$$\omega_1^* = 3.494, \qquad \omega_2^* = 8.547, \qquad \omega_3^* = 21.44, \qquad \omega_2^* = 27.46, \qquad \omega_2^* = 31.17, \qquad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}.$$

Свободные колебания квадратной шарнирно опертой по периметру пластины



Цель: Модальный анализ квадратной шарнирно опертой по периметру пластины.

***Имя файла с исходными данными*: 5.2.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω квадратной шарнирно опертой по периметру пластины с плотностью материала ρ.

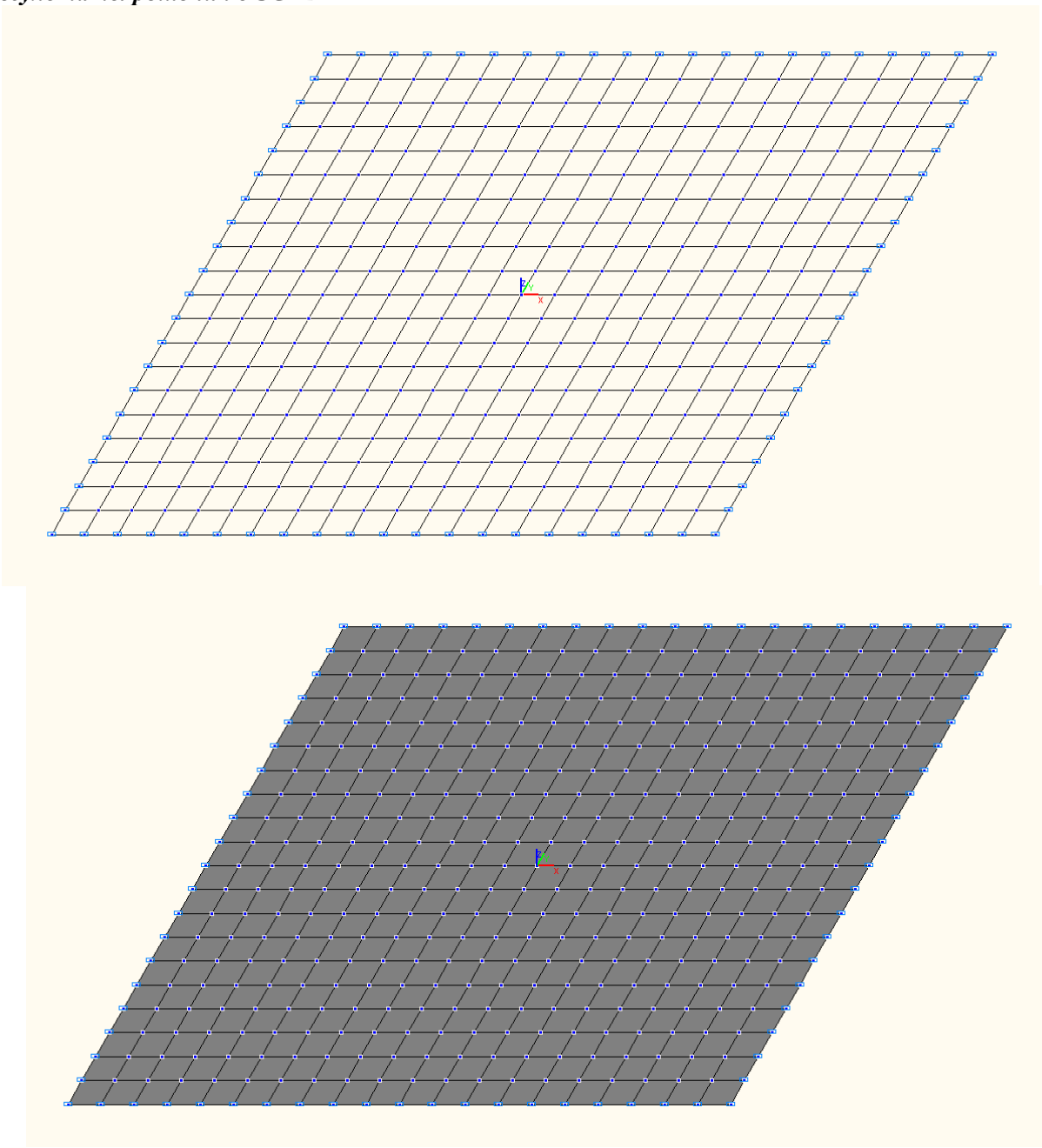
Ссылки: И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 375.

Исходные данные:

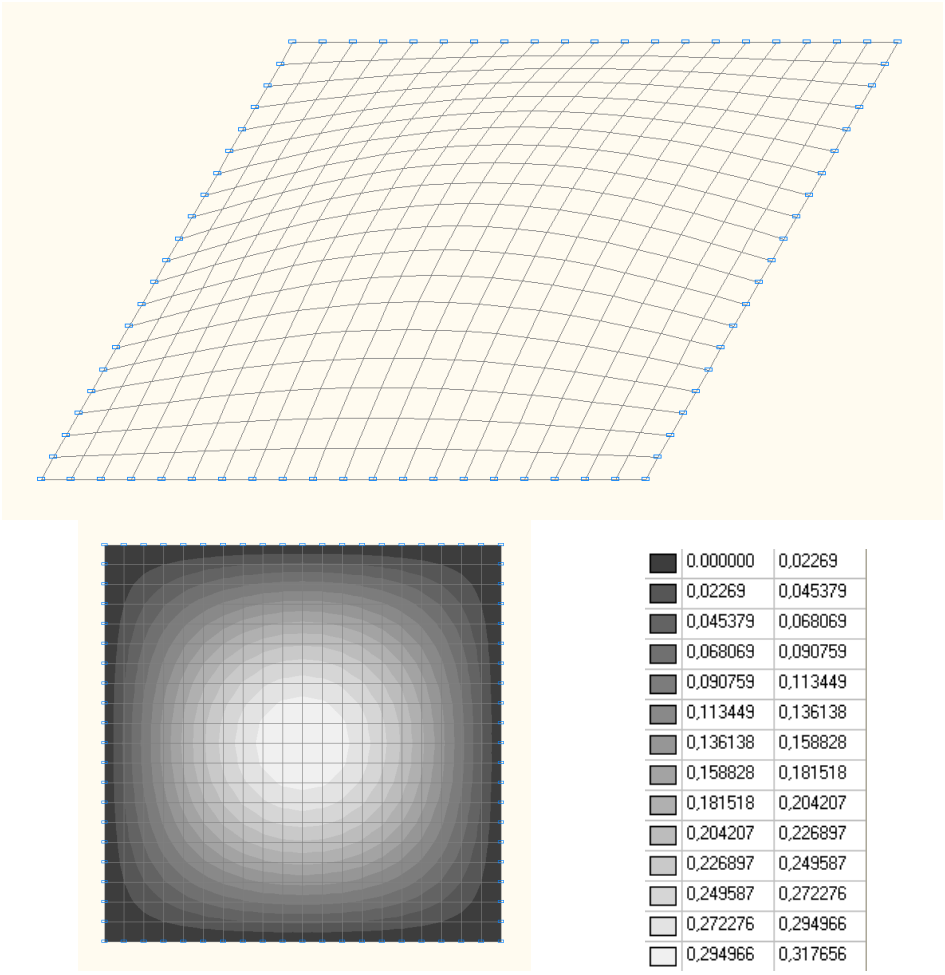
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.85$ т/м^3 - плотность материала;
$h = 0.01$ м - толщина пластины;
$a_1 = 1.0$ м - размер длинной стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
$a_2 = 1.0$ м - размер короткой стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 400 элементов плиты типа 20. Сетка конечных элементов разбита по длинам сторон пластины (вдоль осей X, Y общей системы координат) с шагом 0.05 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z для кромок, расположенных вдоль осей X и Y общей системы координат. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса пластины $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.01$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 441. Определение собственных форм и частот выполнено методом Ланцоша. При расчете используется согласованная матрица масс.

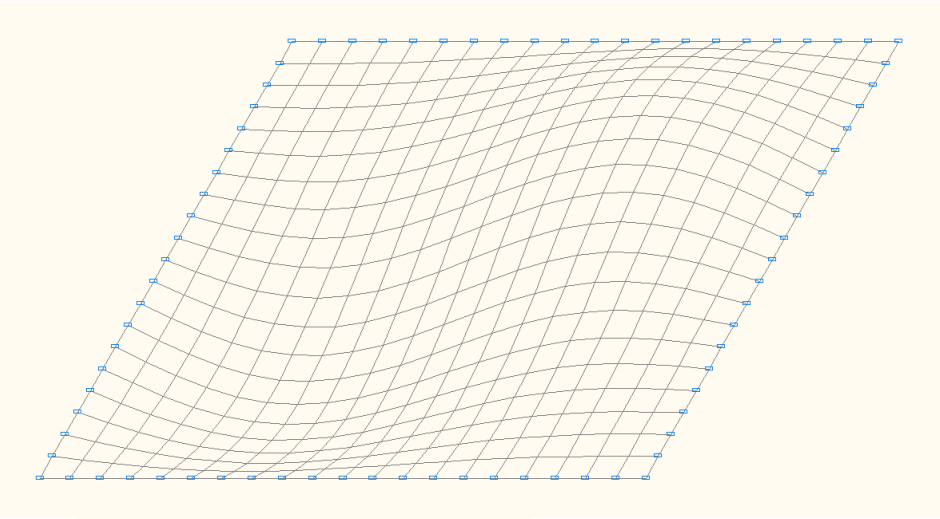
Результаты решения в SCAD

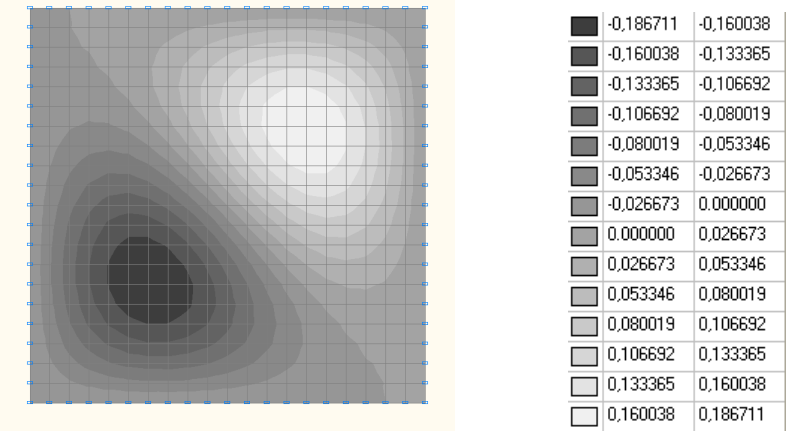


Расчетная схема

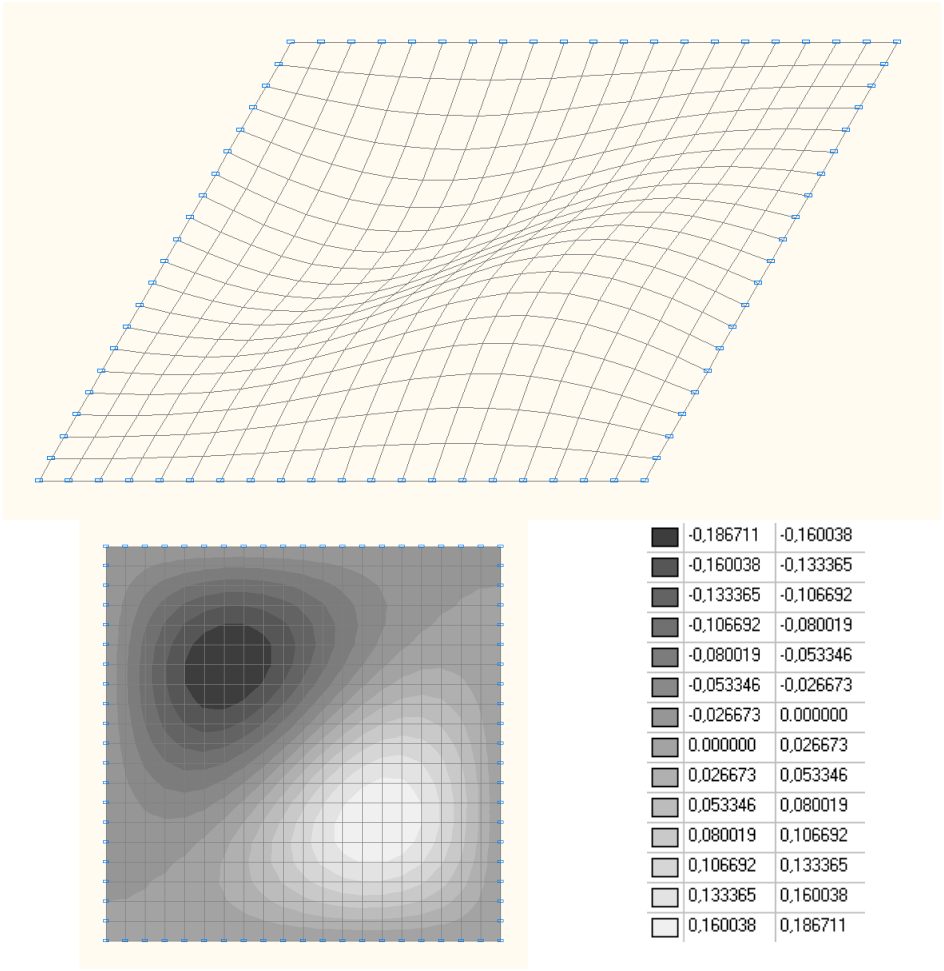


1-я собственная форма колебаний

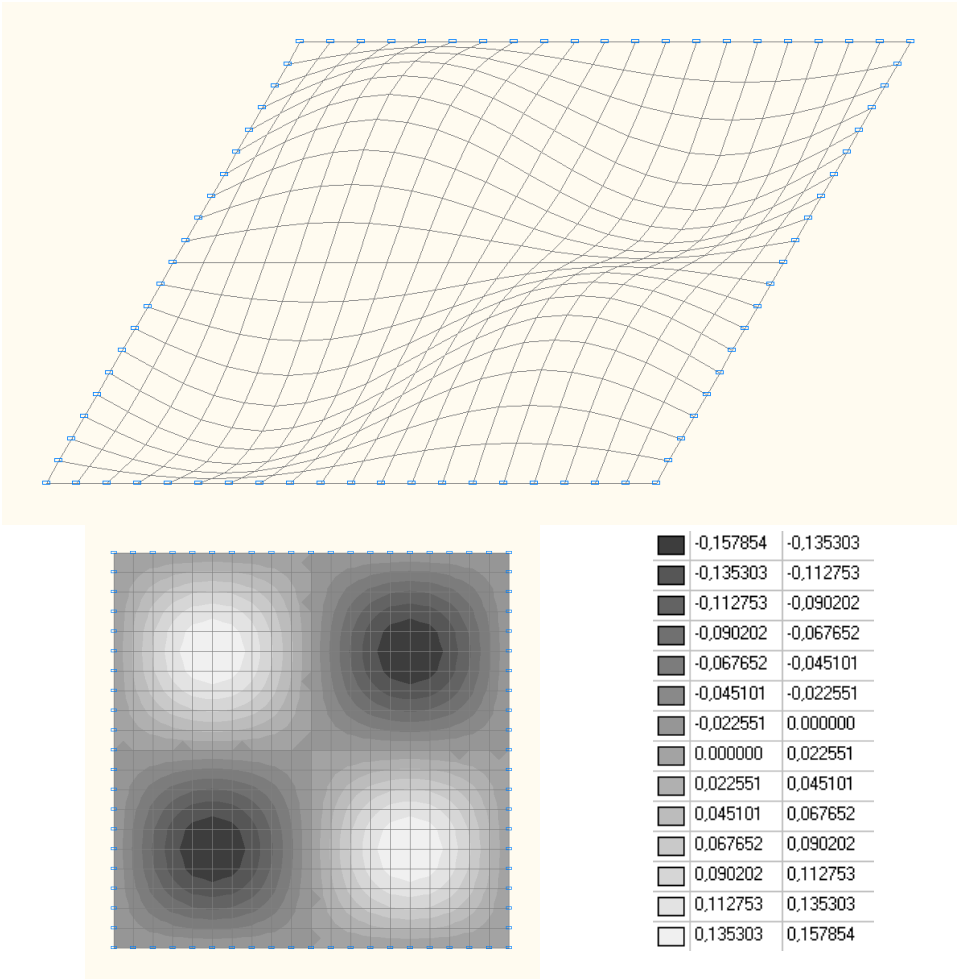




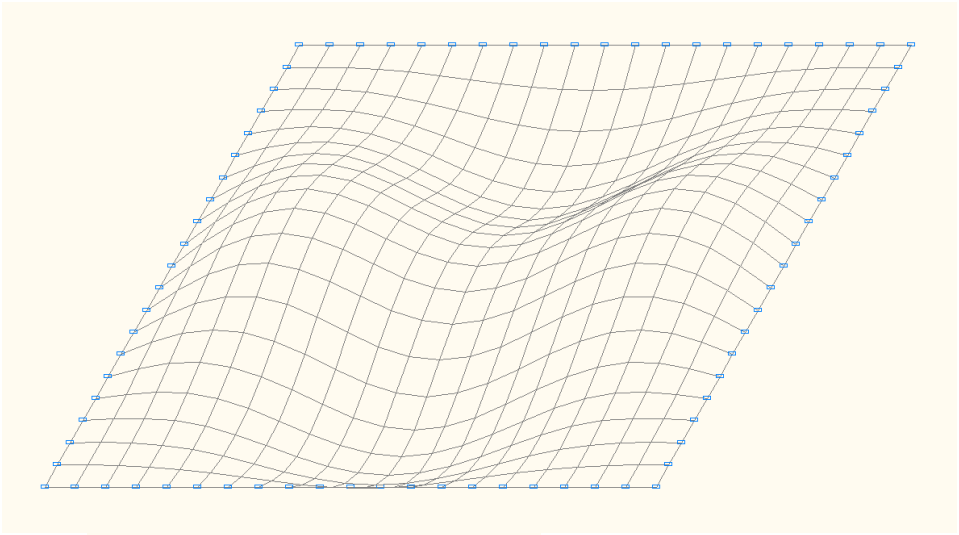
2-я собственная форма колебаний

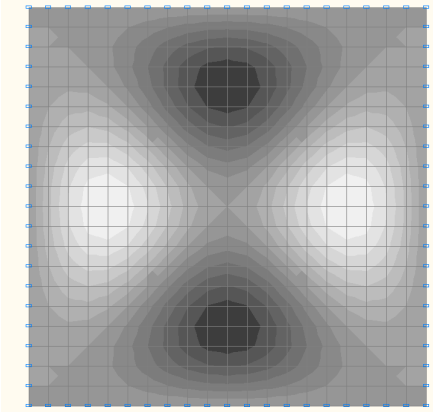


3-я собственная форма колебаний



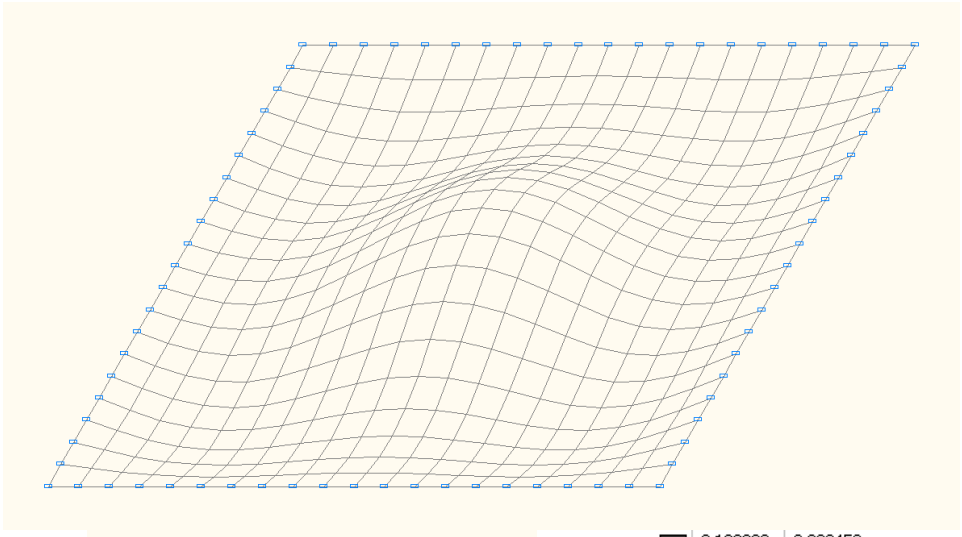
4-я собственная форма колебаний

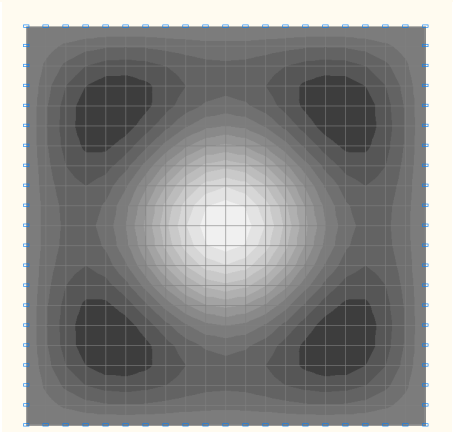




	-0,121723	-0,104334
	-0,104334	-0,086945
	-0,086945	-0,069556
	-0,069556	-0,052167
	-0,052167	-0,034778
	-0,034778	-0,017389
	-0,017389	0
	0	0,017389
	0,017389	0,034778
	0,034778	0,052167
	0,052167	0,069556
	0,069556	0,086945
	0,086945	0,104334
	0,104334	0,121723

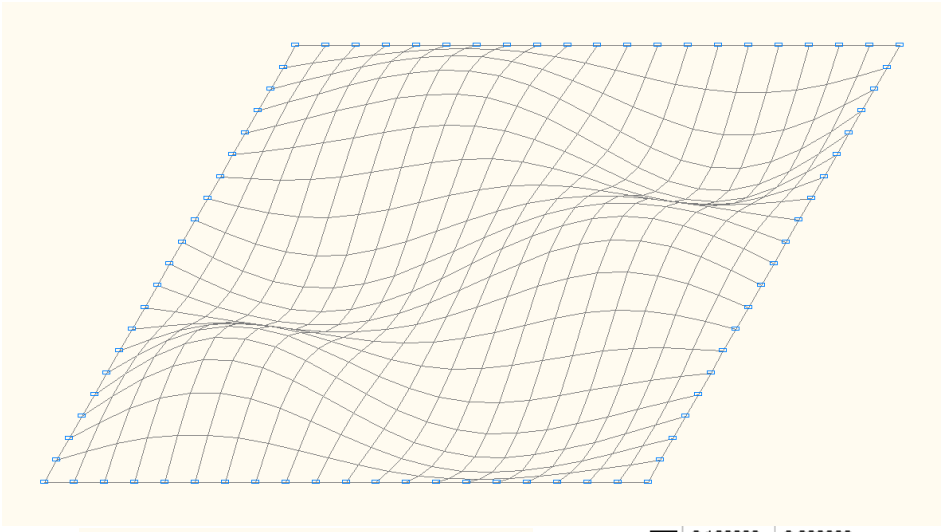
5-я собственная форма колебаний

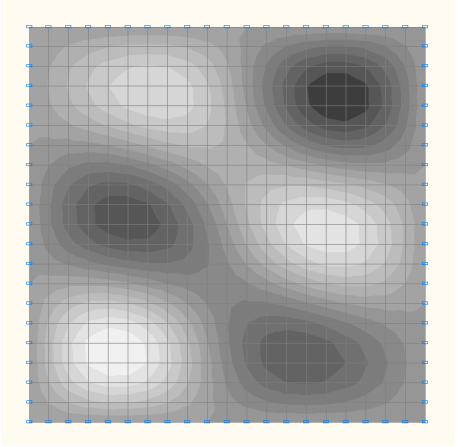




	-0,102969	-0,082458
	-0,082458	-0,061947
	-0,061947	-0,041435
	-0,041435	-0,020924
	-0,020924	-0,000413
	-0,000413	0,020099
	0,020099	0,04061
	0,04061	0,061121
	0,061121	0,081633
	0,081633	0,102144
	0,102144	0,122655
	0,122655	0,143166
	0,143166	0,163678
	0,163678	0,184189

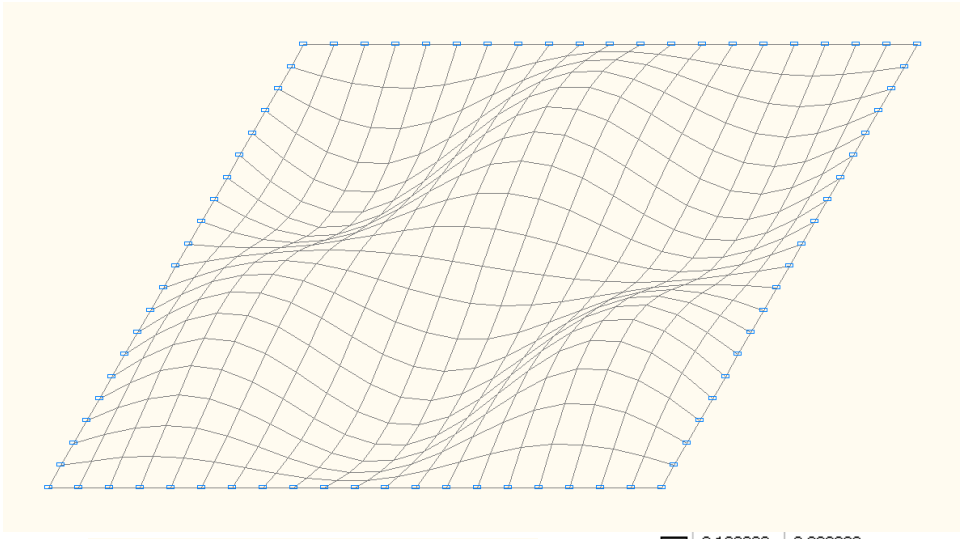
6-я собственная форма колебаний

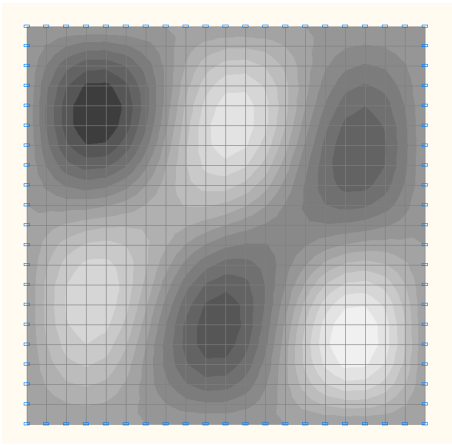




	-0,108892	-0,093336
	-0,093336	-0,07778
	-0,07778	-0,062224
	-0,062224	-0,046668
	-0,046668	-0,031112
	-0,031112	-0,015556
	-0,015556	0
	0	0,015556
	0,015556	0,031112
	0,031112	0,046668
	0,046668	0,062224
	0,062224	0,07778
	0,07778	0,093336
	0,093336	0,108892

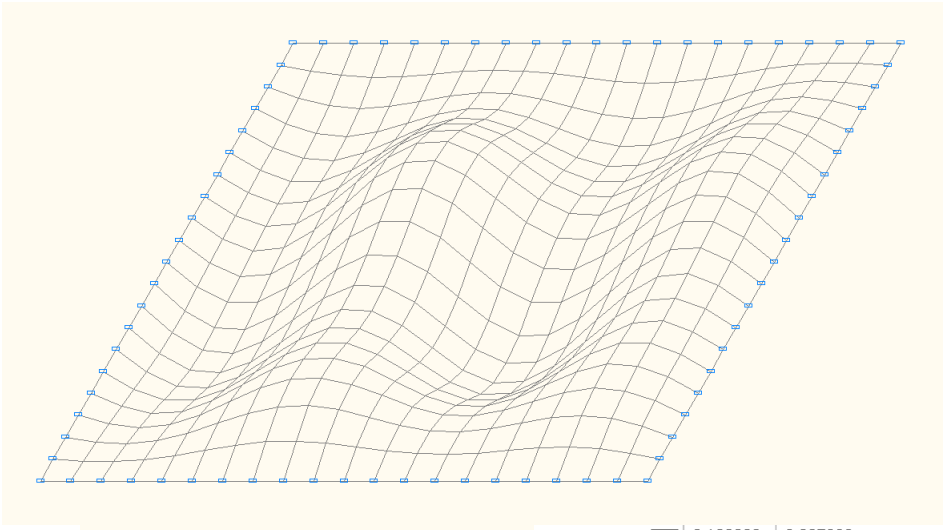
7-я собственная форма колебаний

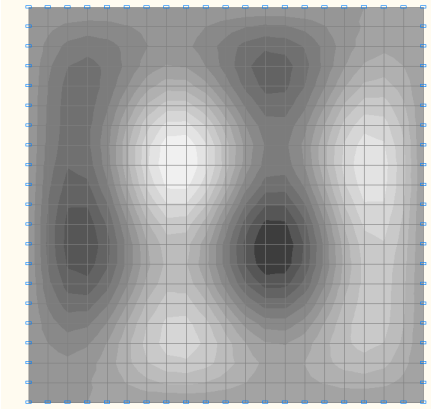




	-0,108892	-0,093336
	-0,093336	-0,07778
	-0,07778	-0,062224
	-0,062224	-0,046668
	-0,046668	-0,031112
	-0,031112	-0,015556
	-0,015556	0
	0	0,015556
	0,015556	0,031112
	0,031112	0,046668
	0,046668	0,062224
	0,062224	0,07778
	0,07778	0,093336
	0,093336	0,108892

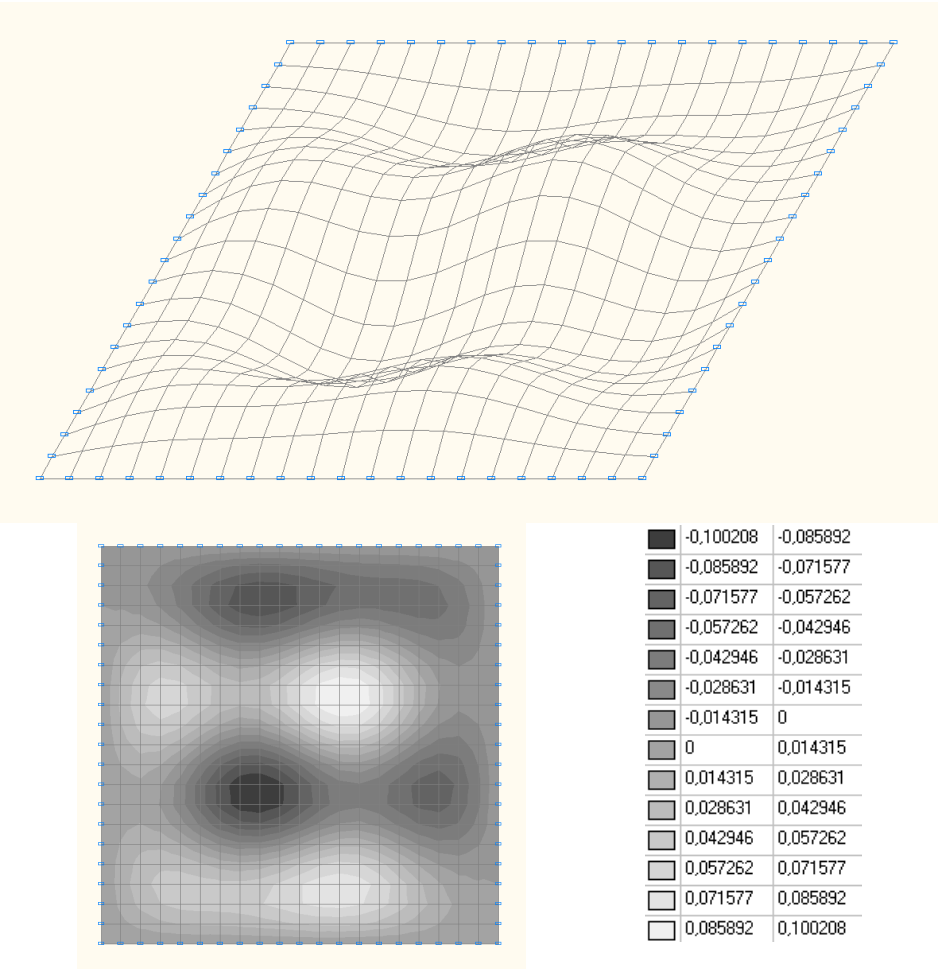
8-я собственная форма колебаний



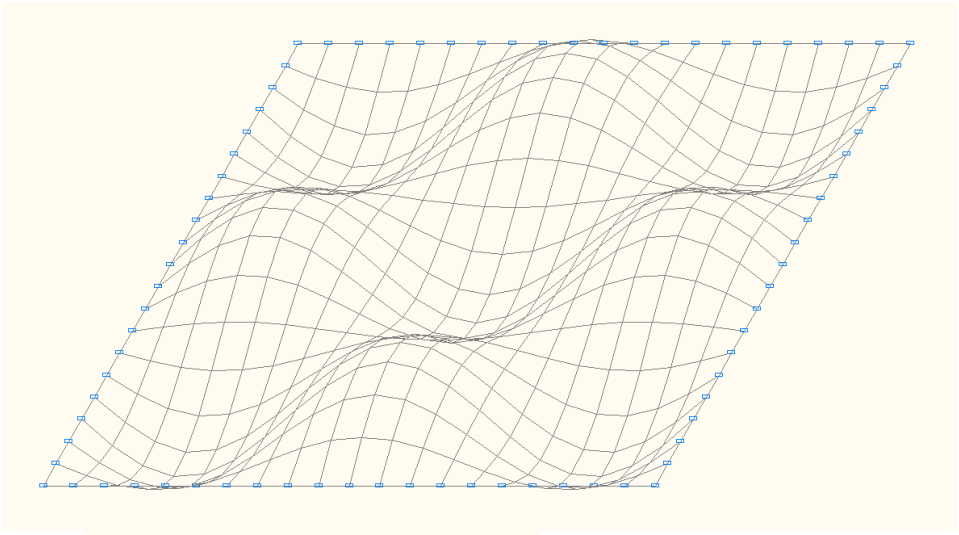


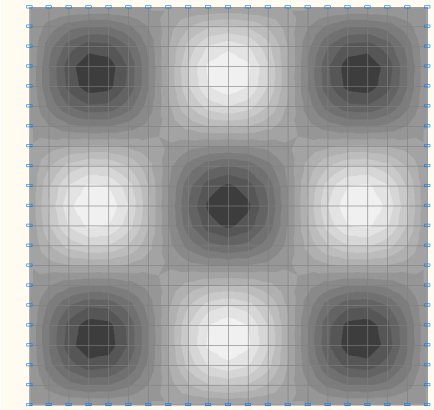
	-0,100208	-0,085892
	-0,085892	-0,071577
	-0,071577	-0,057262
	-0,057262	-0,042946
	-0,042946	-0,028631
	-0,028631	-0,014315
	-0,014315	0
	0	0,014315
	0,014315	0,028631
	0,028631	0,042946
	0,042946	0,057262
	0,057262	0,071577
	0,071577	0,085892
	0,085892	0,100208

9-я собственная форма колебаний



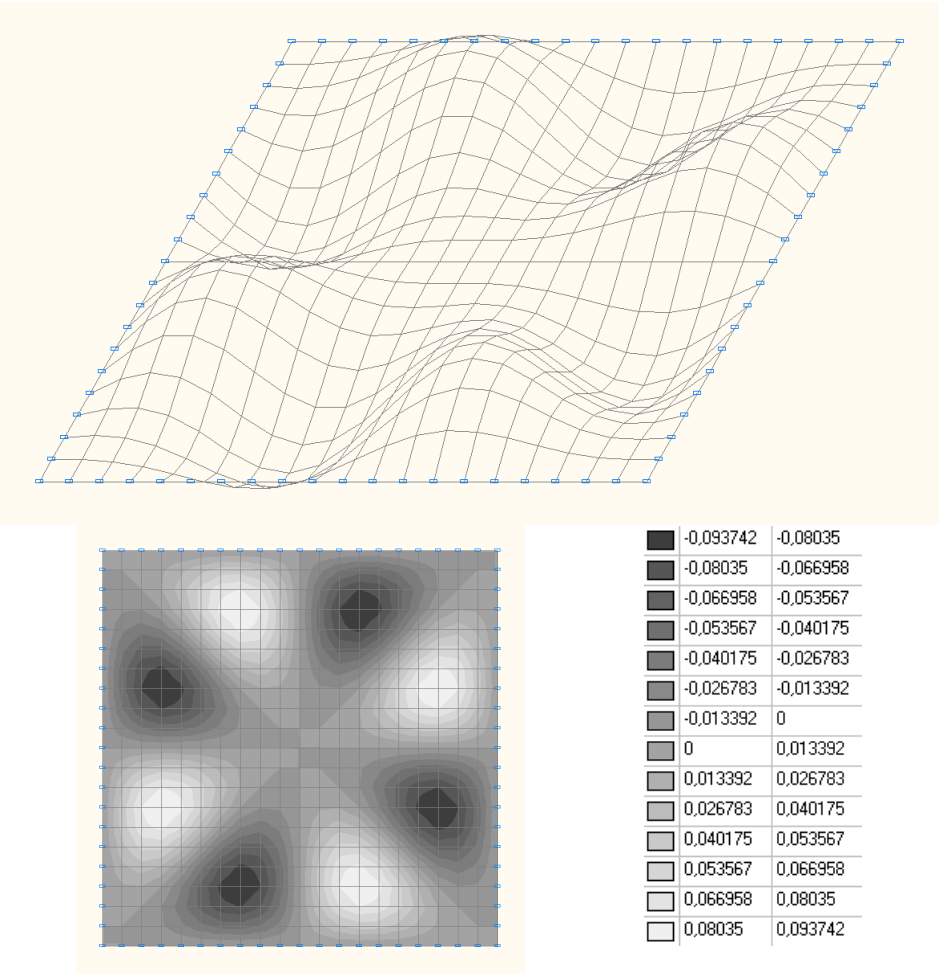
10-я собственная форма колебаний



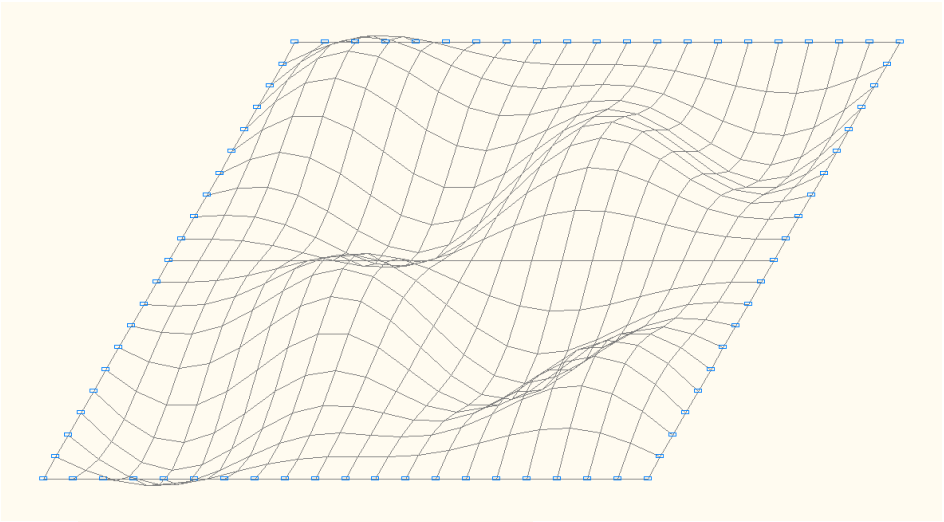


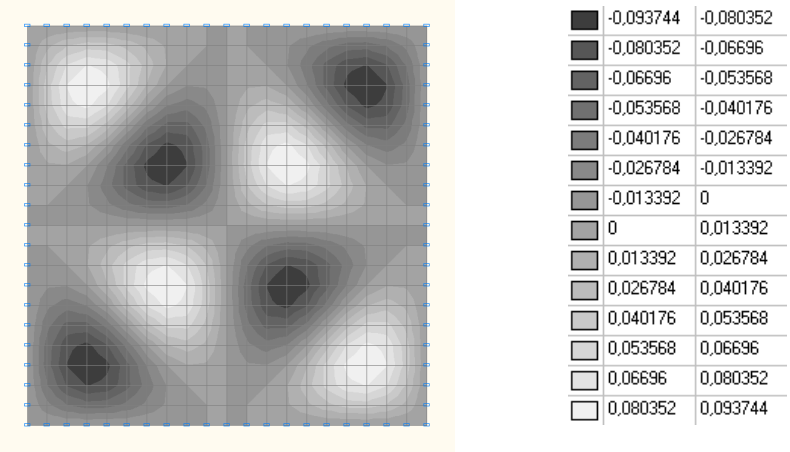
	-0,104181	-0,08939
	-0,08939	-0,074598
	-0,074598	-0,059806
	-0,059806	-0,045014
	-0,045014	-0,030222
	-0,030222	-0,015431
	-0,015431	-0,000639
	-0,000639	0,014153
	0,014153	0,028945
	0,028945	0,043736
	0,043736	0,058528
	0,058528	0,07332
	0,07332	0,088112
	0,088112	0,102904

11-я собственная форма колебаний

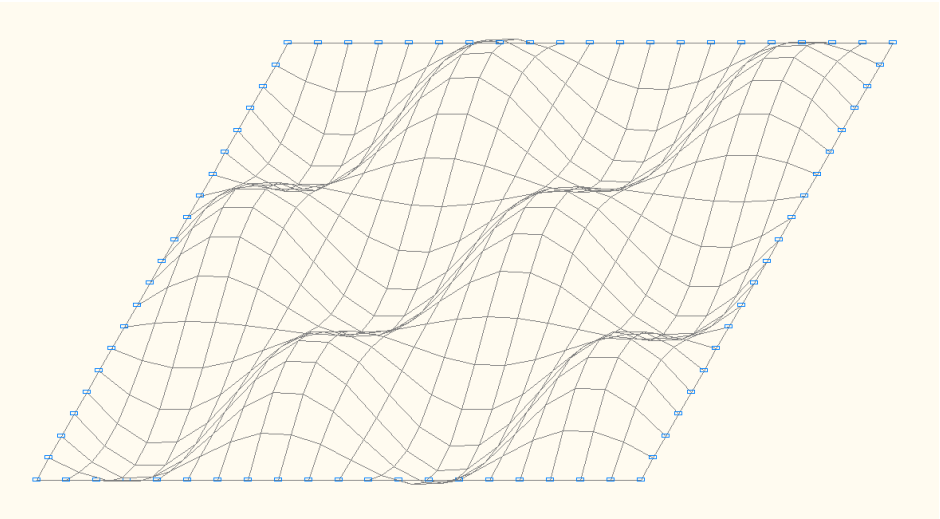


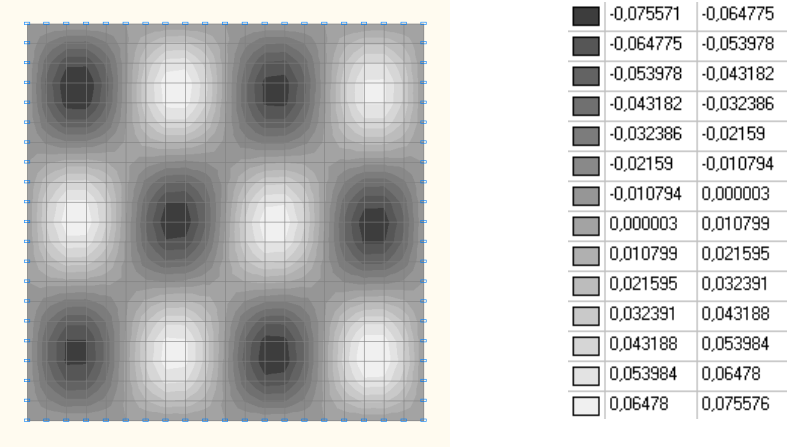
12-я собственная форма колебаний



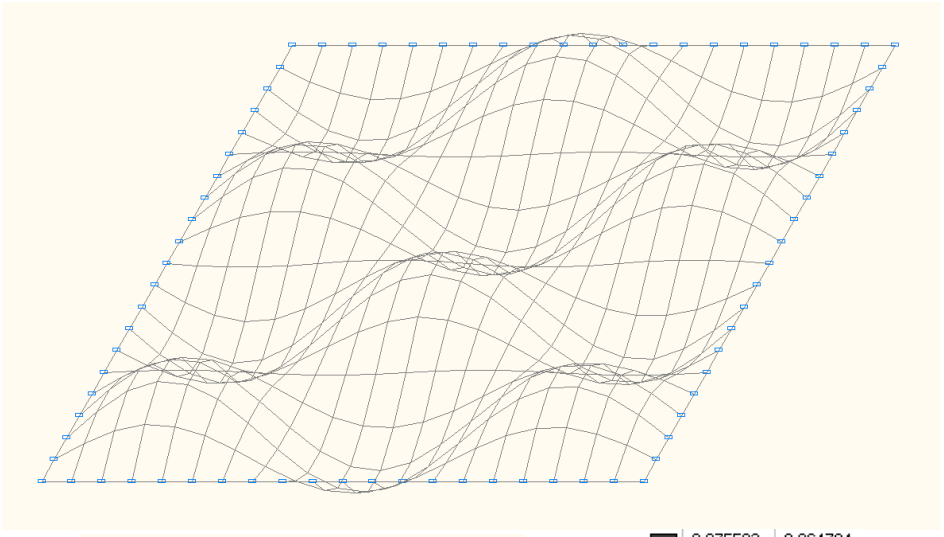


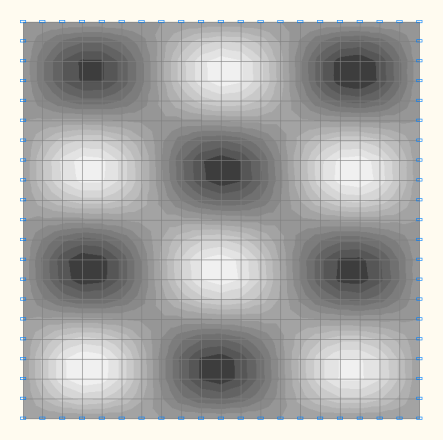
13-я собственная форма колебаний





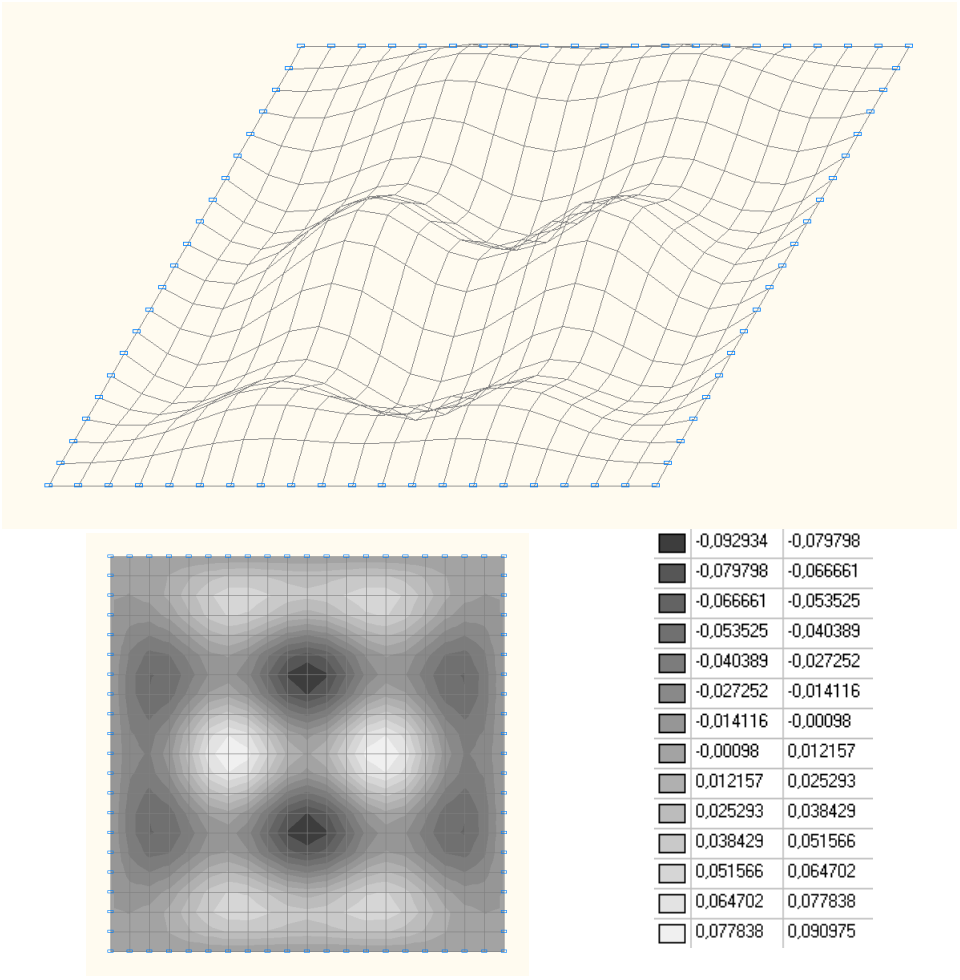
14-я собственная форма колебаний



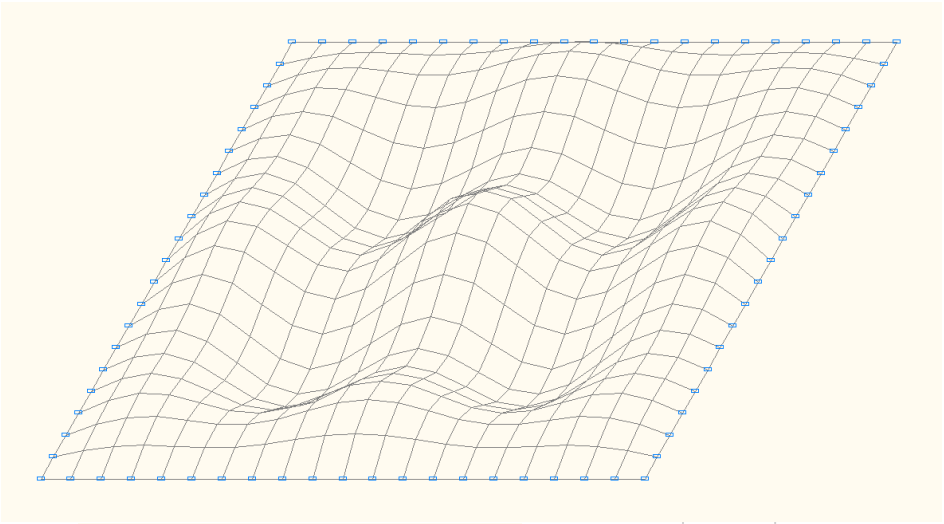


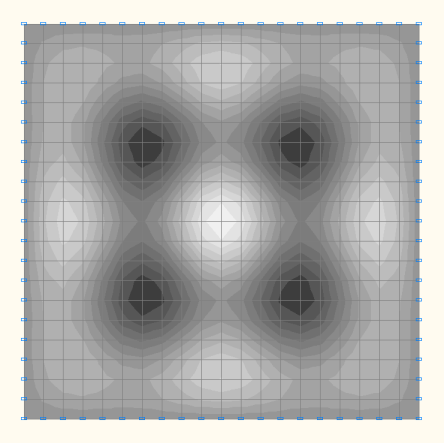
-0,075582	-0,064784
-0,064784	-0,053987
-0,053987	-0,04319
-0,04319	-0,032393
-0,032393	-0,021596
-0,021596	-0,010798
-0,010798	-0,000001
-0,000001	0,010796
0,010796	0,021593
0,021593	0,03239
0,03239	0,043188
0,043188	0,053985
0,053985	0,064782
0,064782	0,075579

15-я собственная форма колебаний



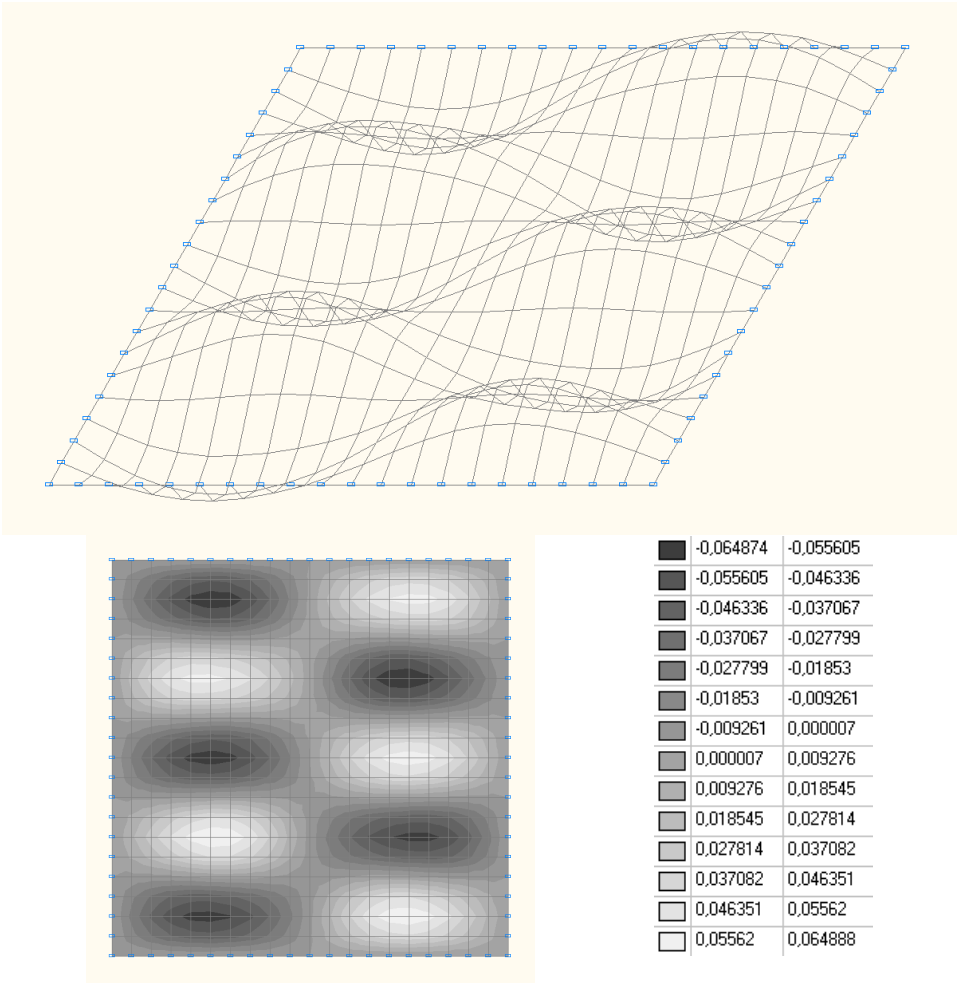
16-я собственная форма колебаний



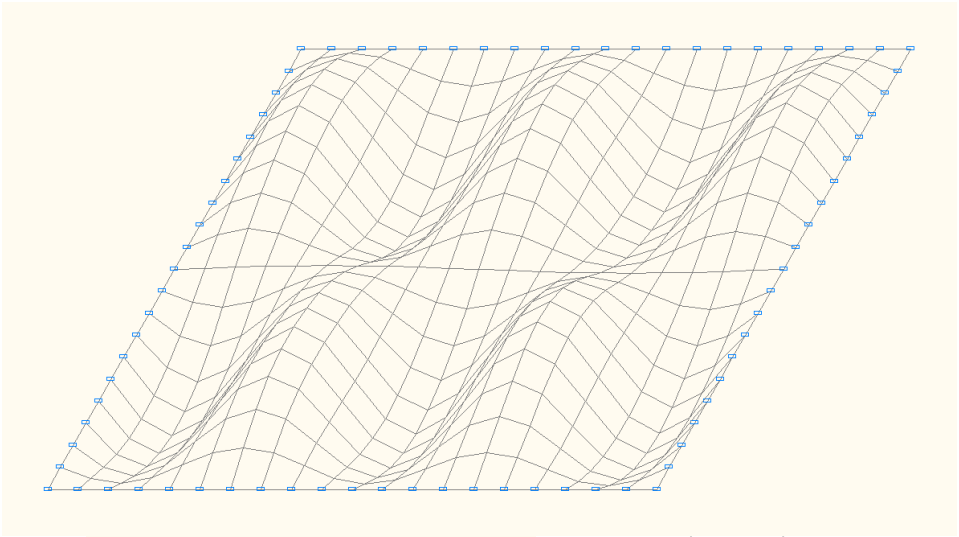


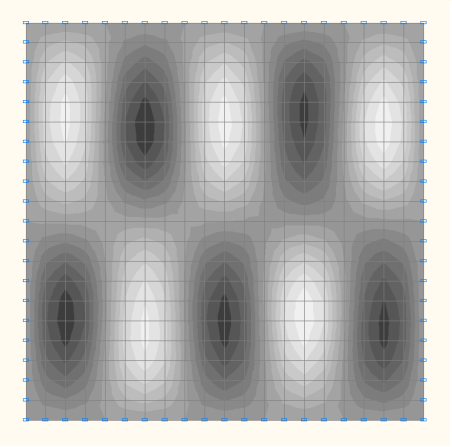
-0,079882	-0,067124
-0,067124	-0,054366
-0,054366	-0,041608
-0,041608	-0,02885
-0,02885	-0,016092
-0,016092	-0,003334
-0,003334	0,009424
0,009424	0,022182
0,022182	0,03494
0,03494	0,047698
0,047698	0,060457
0,060457	0,073215
0,073215	0,085973
0,085973	0,098731

17-я собственная форма колебаний



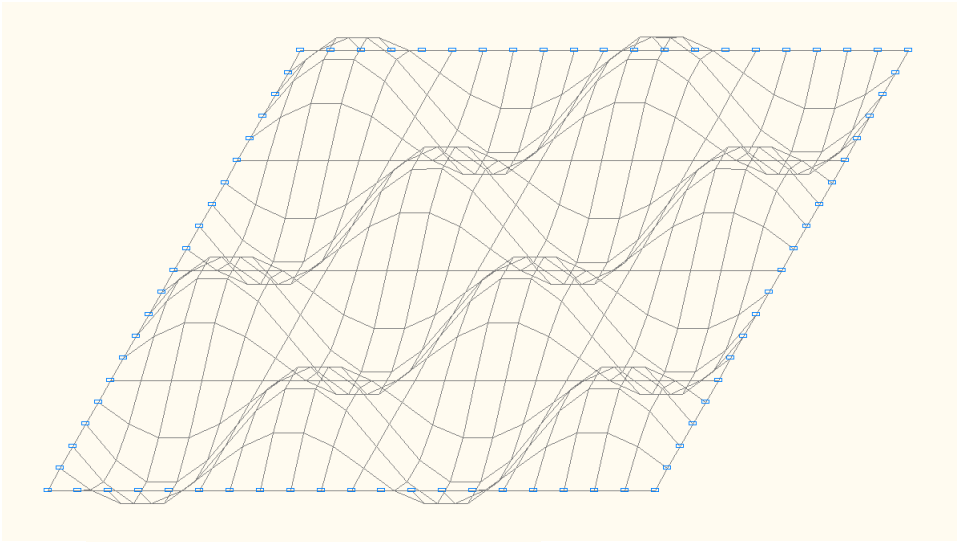
18-я собственная форма колебаний

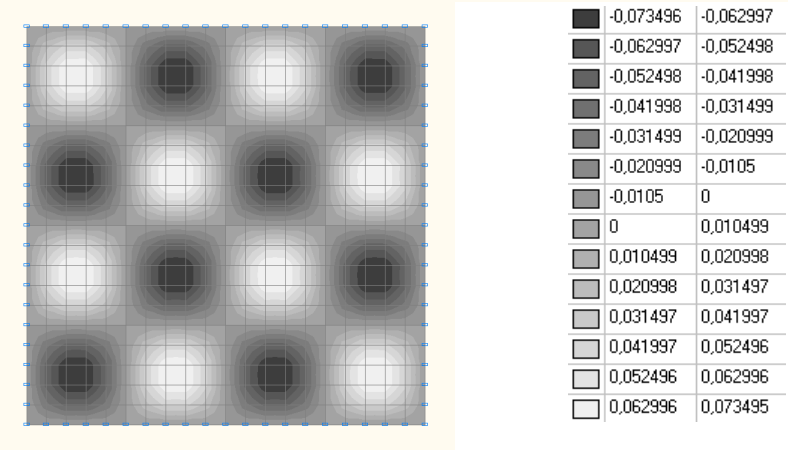




	-0,064869	-0,055602
	-0,055602	-0,046336
	-0,046336	-0,037069
	-0,037069	-0,027803
	-0,027803	-0,018536
	-0,018536	-0,00927
	-0,00927	-0,000004
	-0,000004	0,009263
	0,009263	0,018529
	0,018529	0,027796
	0,027796	0,037062
	0,037062	0,046329
	0,046329	0,055595
	0,055595	0,064862

19-я собственная форма колебаний





20-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

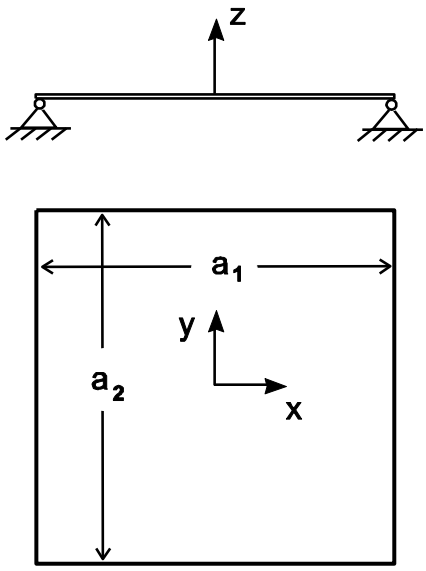
Собственные частоты колебаний ω, рад / с

Форма колебаний	**Число полуволн m1, m2**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	1, 1	306.0	306,1	0,05
2	1, 2	765. 0	765,6	0,08
3	2, 1	765.0	765,6	0,08
4	2, 2	1224.0	1226,4	0,19
5	1, 3	1530.0	1531,4	0,09
6	3, 1	1530.0	1531,4	0,09
7	2, 3	1989.0	1994,4	0,27
8	3, 2	1989.0	1994,4	0,27
9	1, 4	2601.0	2603,6	0,10
10	4, 1	2601.0	2603,6	0,10
11	3, 3	2754.0	2766,2	0,44
12	2, 4	3060.0	3069,7	0,32
13	4, 2	3060.0	3069,7	0,32
14	3, 4	3825.0	3846,8	0,57
15	4, 3	3825.0	3846,8	0,57
16	1, 5	3978.0	3982,6	0,12
17	5, 1	3978.0	3982,6	0,12
18	2, 5	4437.0	4452,7	0,35
19	5, 2	4437.0	4452,7	0,35
20	4, 4	4896.0	4934,7	0,79

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты ω колебаний квадратной шарнирно опертой по периметру пластины с плотностью материала ρ могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\omega = \pi^2 \cdot \left(\frac{m_1^{\,2}}{a_2^{\,2}} + \frac{m_2^{\,2}}{a_2^{\,2}} \right) \cdot \left(\frac{D}{\rho \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где:} \qquad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}, \qquad m_1, m_2 = 1,2,3\ldots$$

Свободные колебания прямоугольной шарнирно опертой по периметру пластины



Цель: Модальный анализ прямоугольной шарнирно опертой по периметру пластины.

Имя файла с исходными данными: **5.3.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω прямоугольной шарнирно опертой по периметру пластины с плотностью материала ρ.

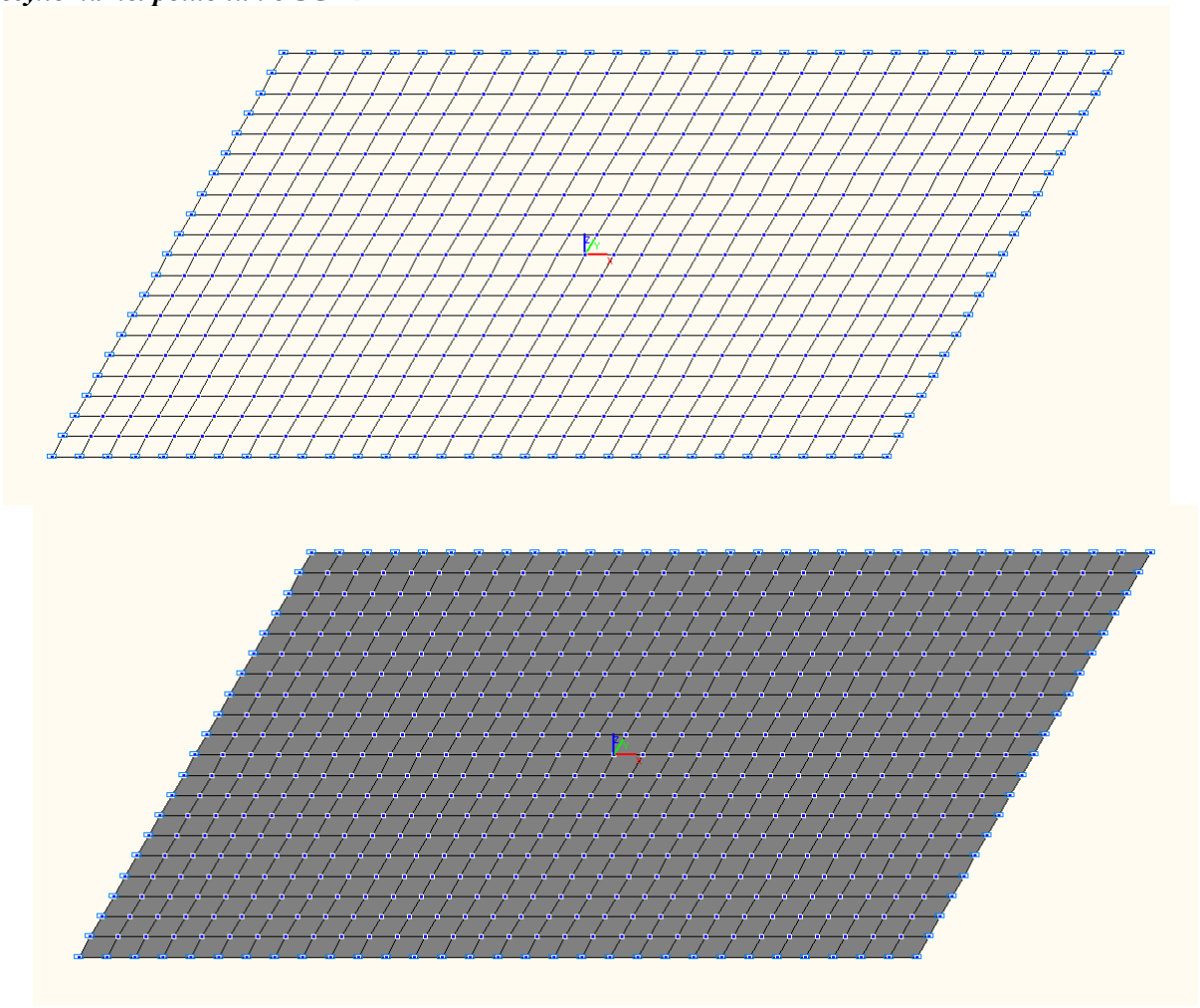
Ссылки: И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 375.

Исходные данные:

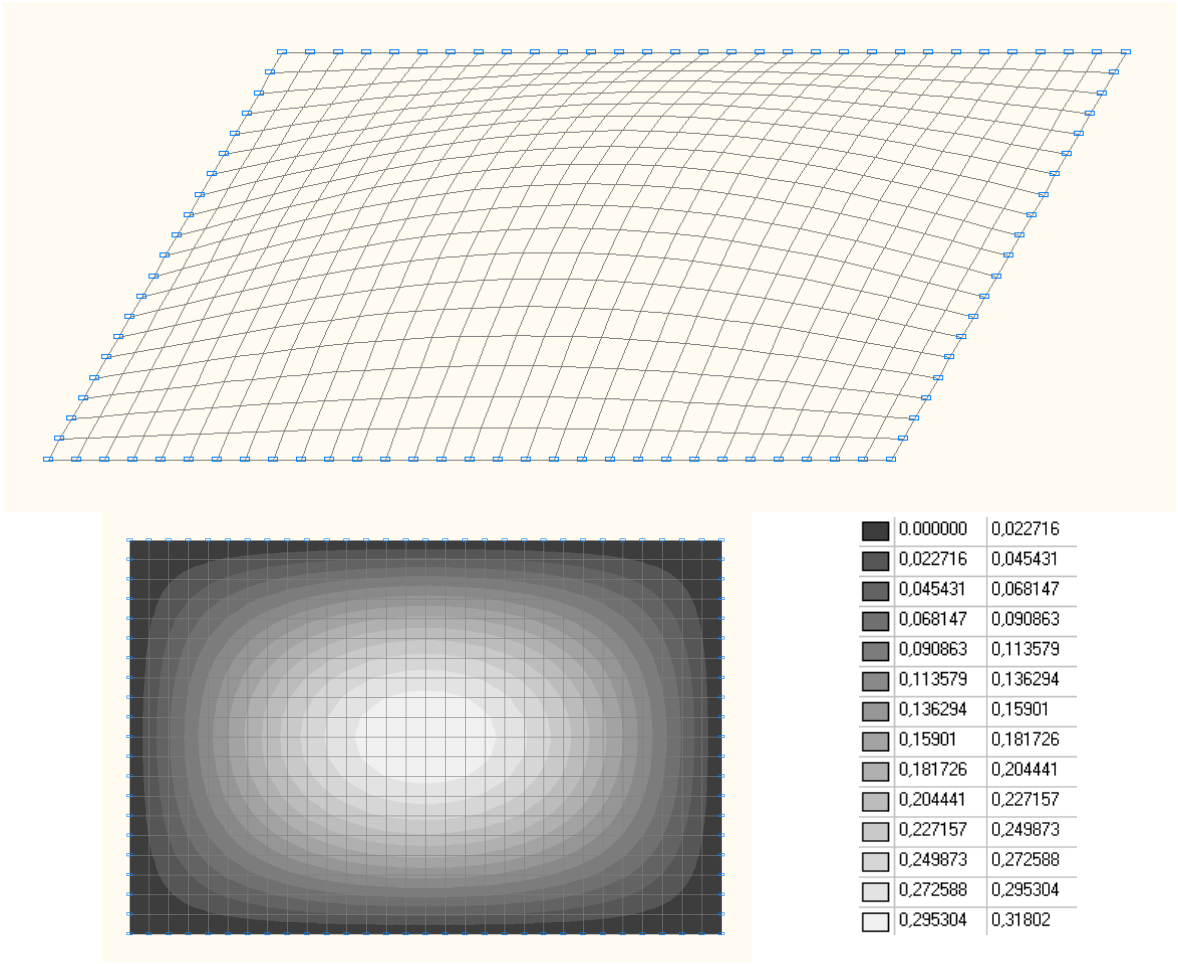
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.85$ т/м^3 - плотность материала;
$h = 0.01$ м - толщина пластины;
$a_1 = 1.5$ м - размер длинной стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
$a_2 = 1.0$ м - размер короткой стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 600 элементов плиты типа 20. Сетка конечных элементов разбита по длинам сторон пластины (вдоль осей X, Y общей системы координат) с шагом 0.05 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z для кромок, расположенных вдоль осей X и Y общей системы координат. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса пластины $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.01$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 651. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

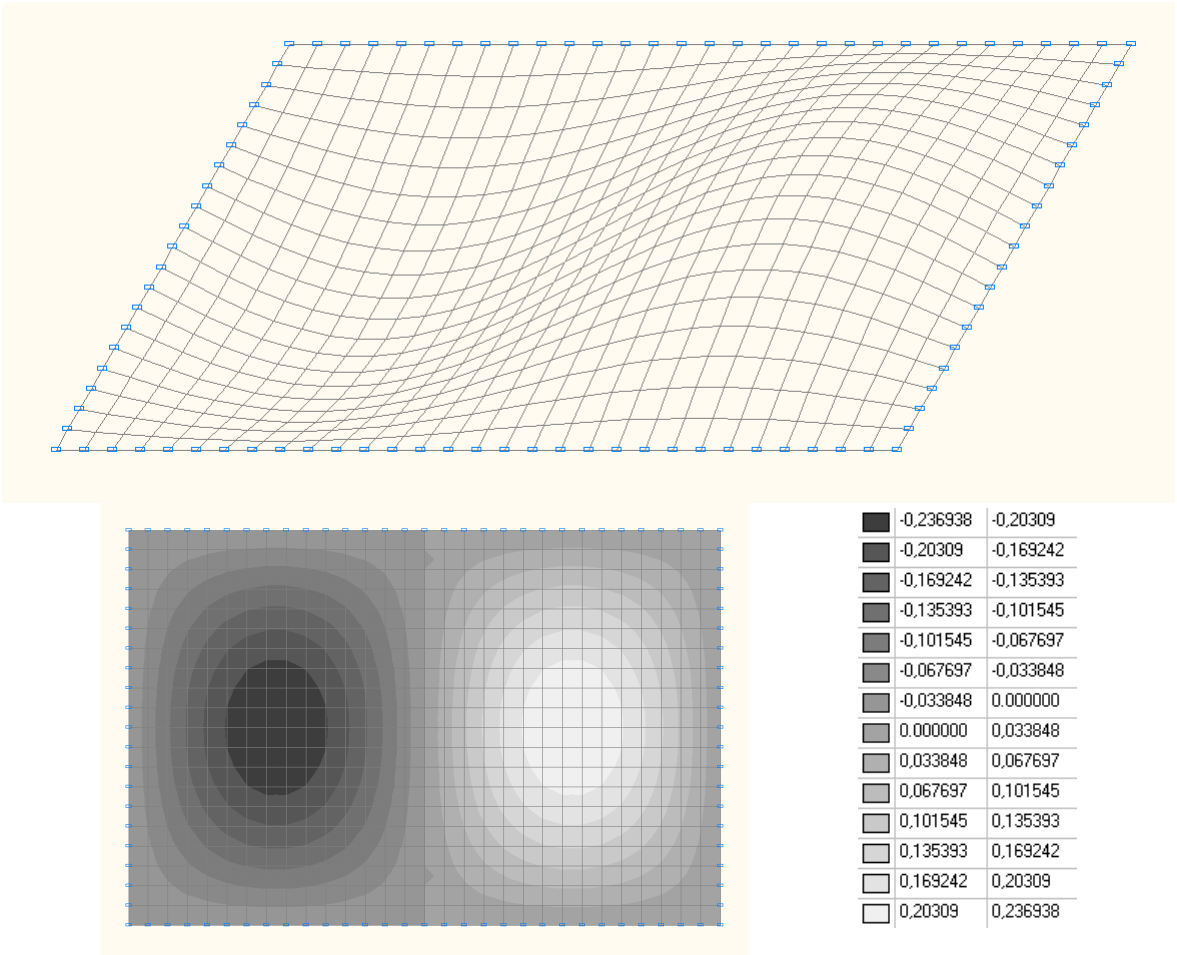
Результаты решения в SCAD



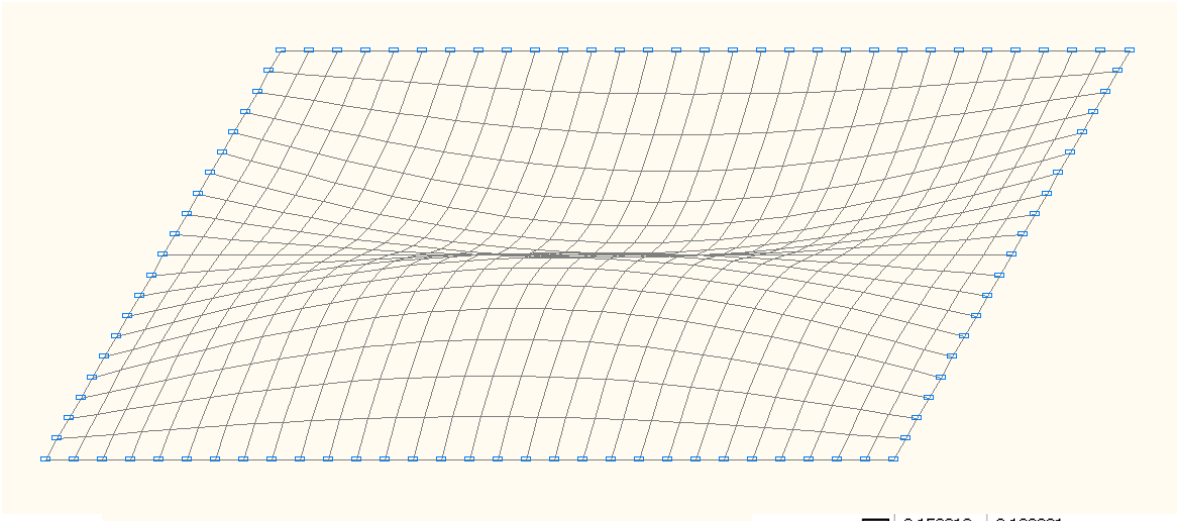
Расчетная схема

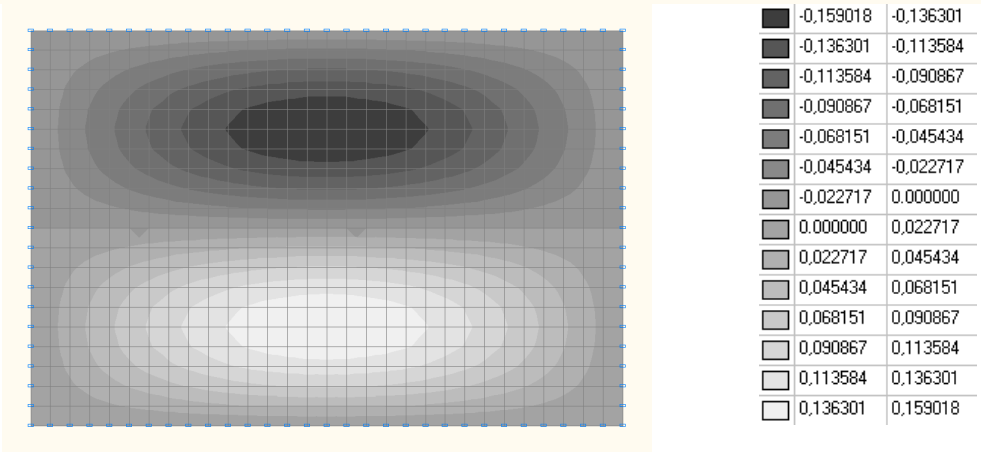


1-я собственная форма колебаний

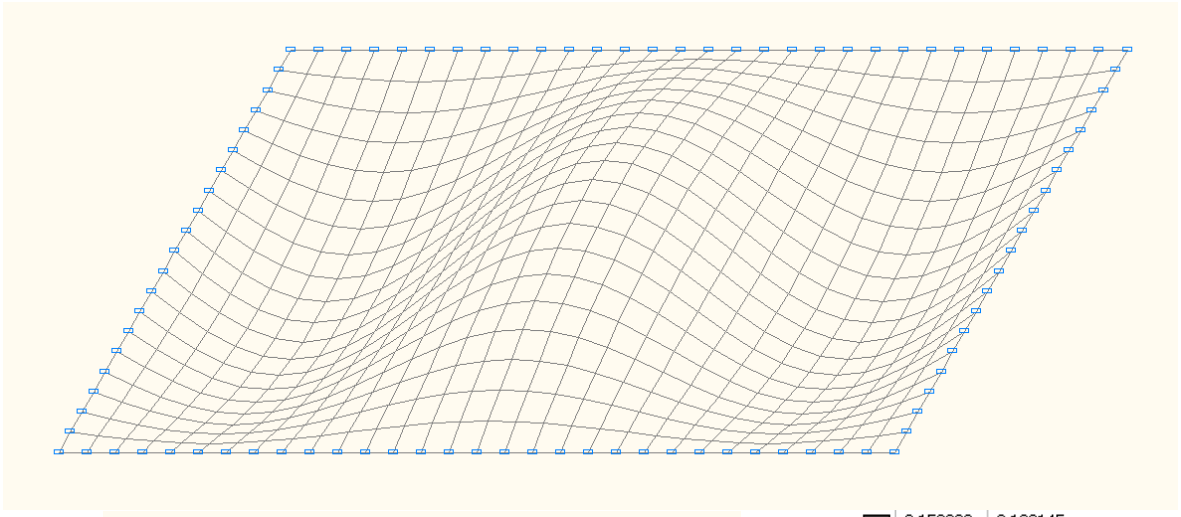


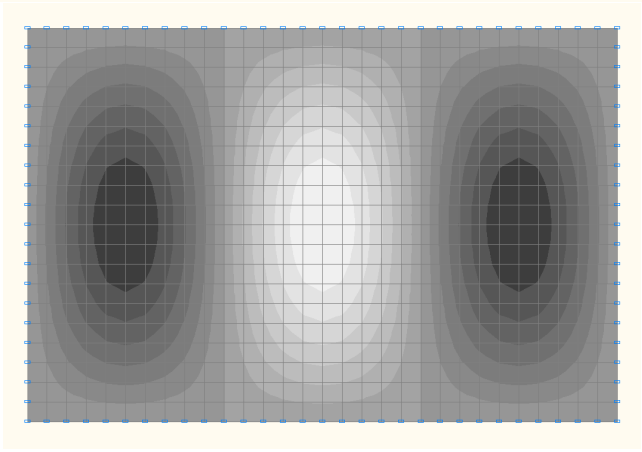
2-я собственная форма колебаний





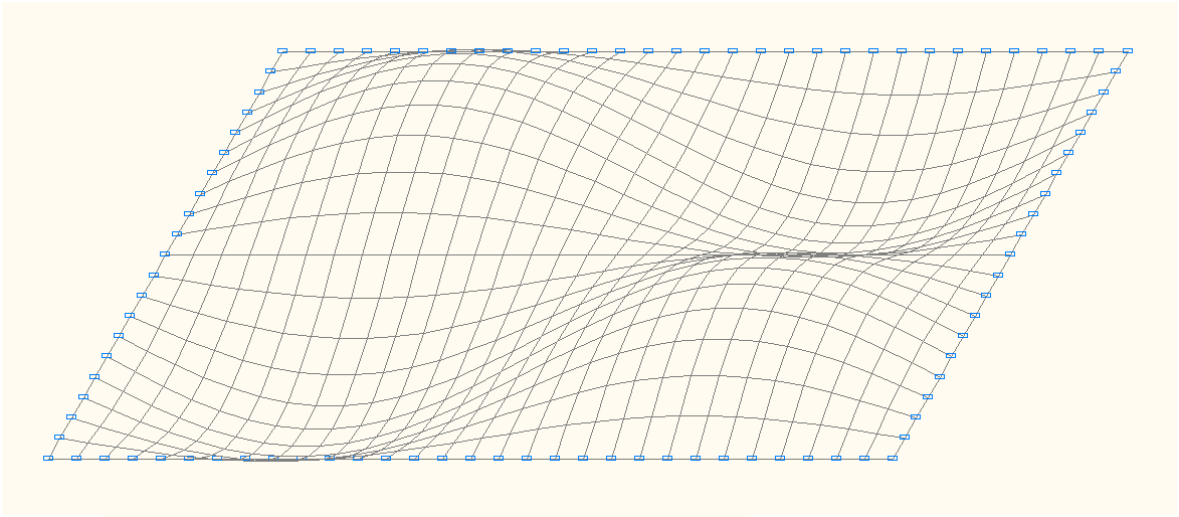
3-я собственная форма колебаний

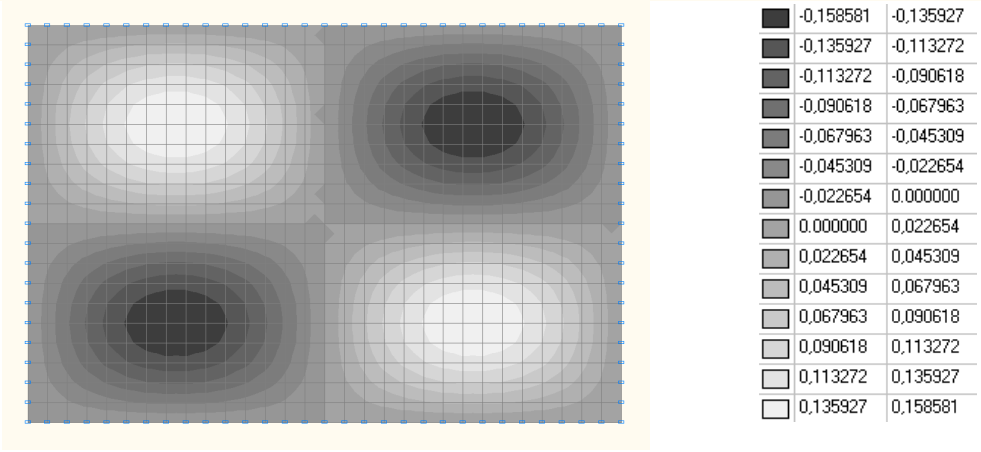




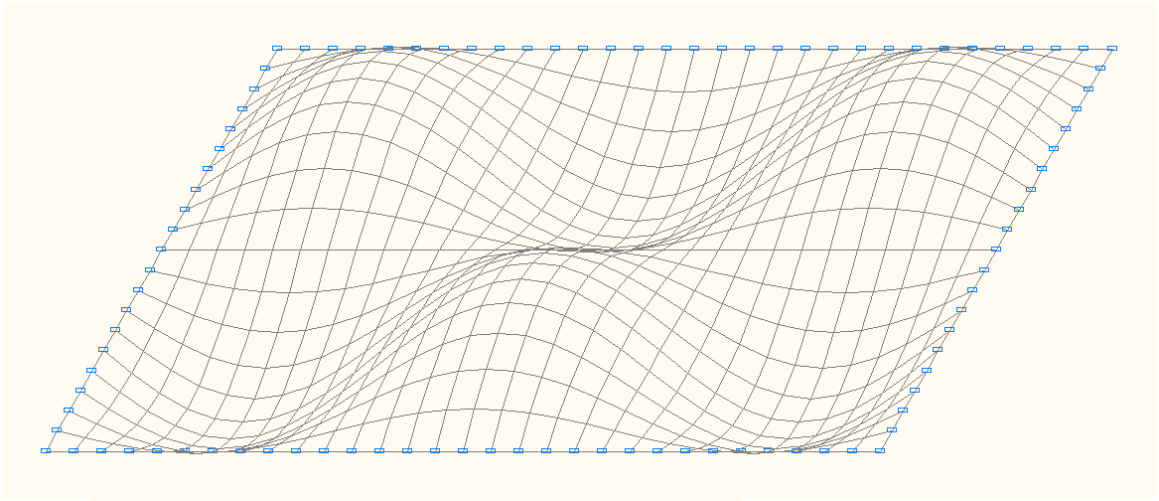
-0,158836	-0,136145
-0,136145	-0,113454
-0,113454	-0,090763
-0,090763	-0,068073
-0,068073	-0,045382
-0,045382	-0,022691
-0,022691	0
0	0,022691
0,022691	0,045382
0,045382	0,068072
0,068072	0,090763
0,090763	0,113454
0,113454	0,136145
0,136145	0,158836

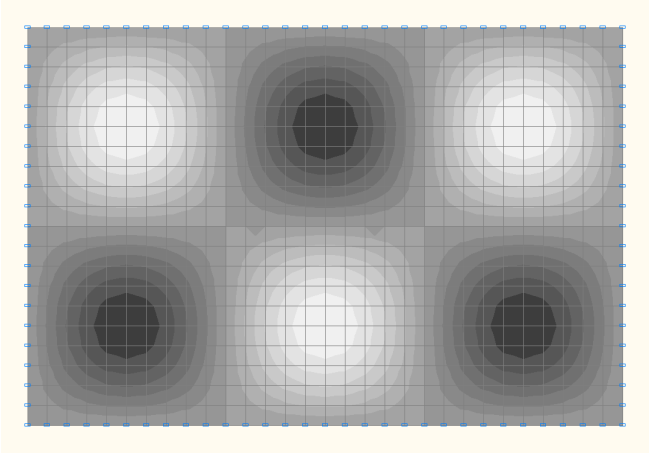
4-я собственная форма колебаний





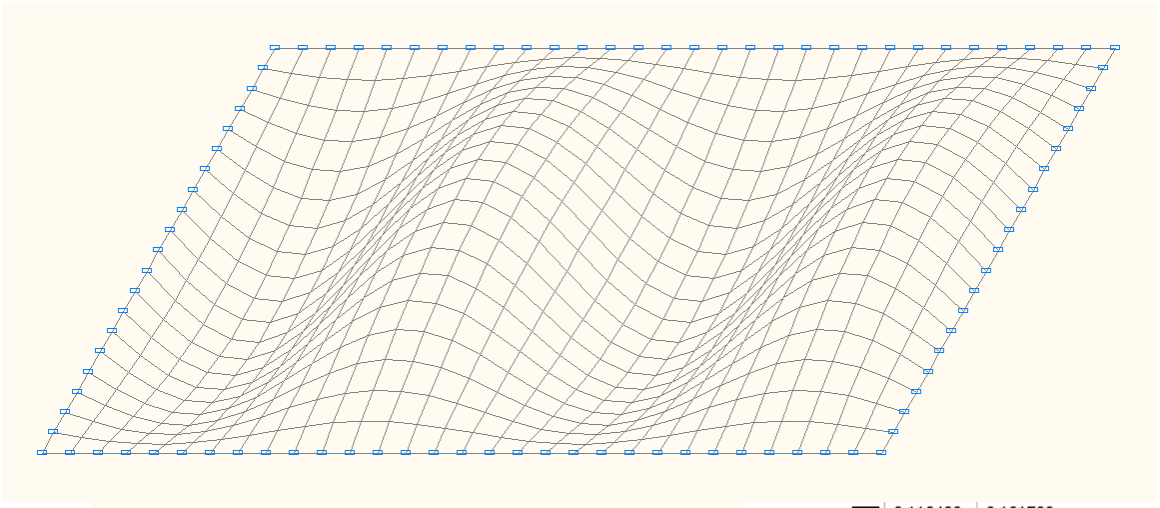
5-я собственная форма колебаний

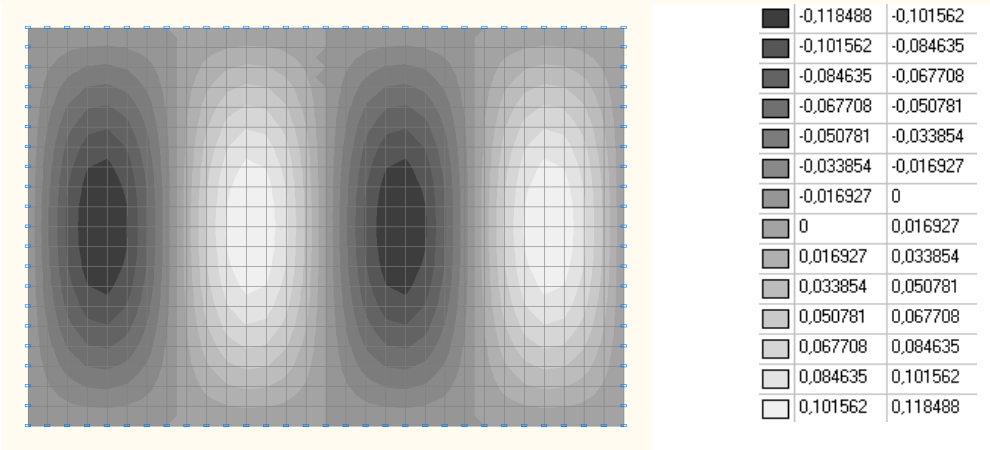




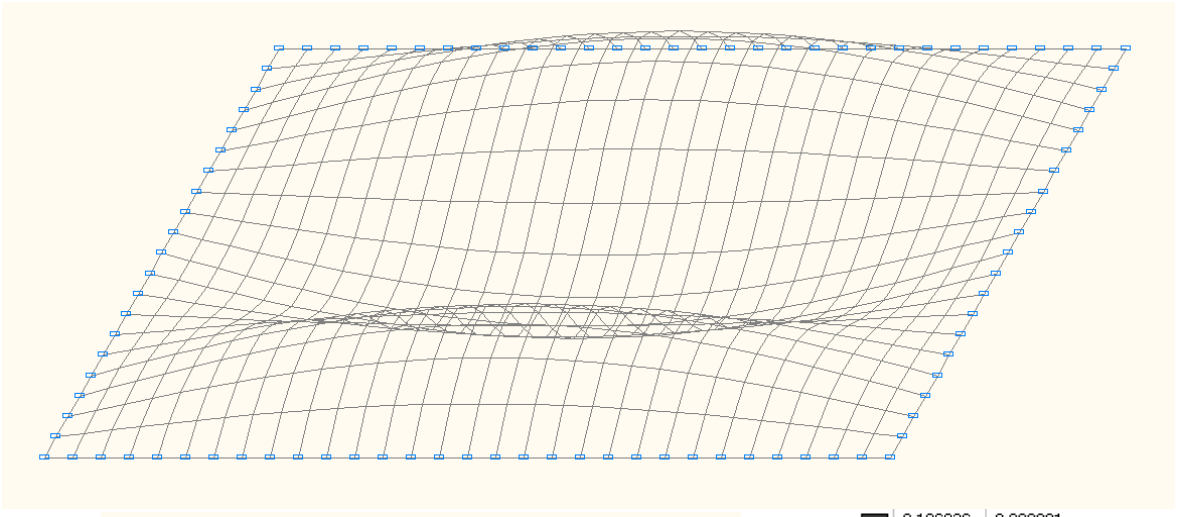
	-0,157853	-0,135303
	-0,135303	-0,112752
	-0,112752	-0,090202
	-0,090202	-0,067651
	-0,067651	-0,045101
	-0,045101	-0,02255
	-0,02255	0
	0	0,02255
	0,02255	0,045101
	0,045101	0,067651
	0,067651	0,090202
	0,090202	0,112752
	0,112752	0,135303
	0,135303	0,157853

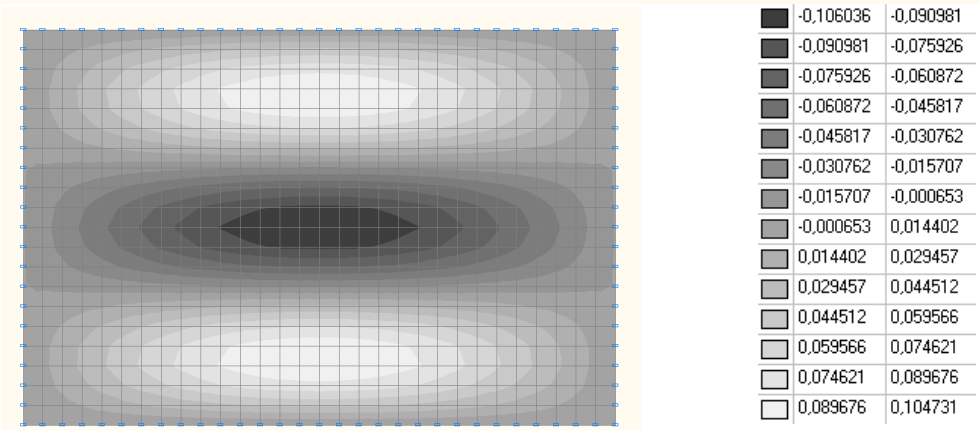
6-я собственная форма колебаний



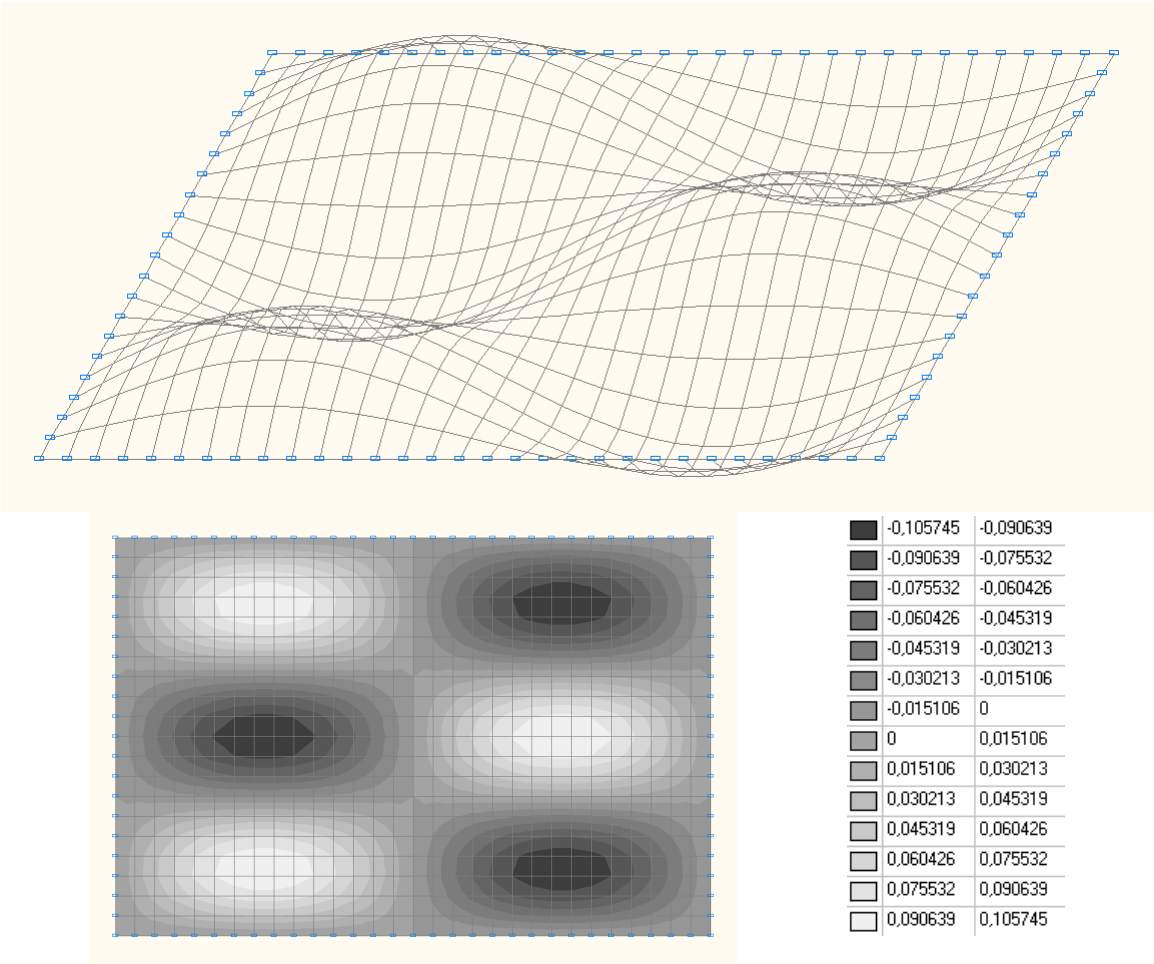


7-я собственная форма колебаний

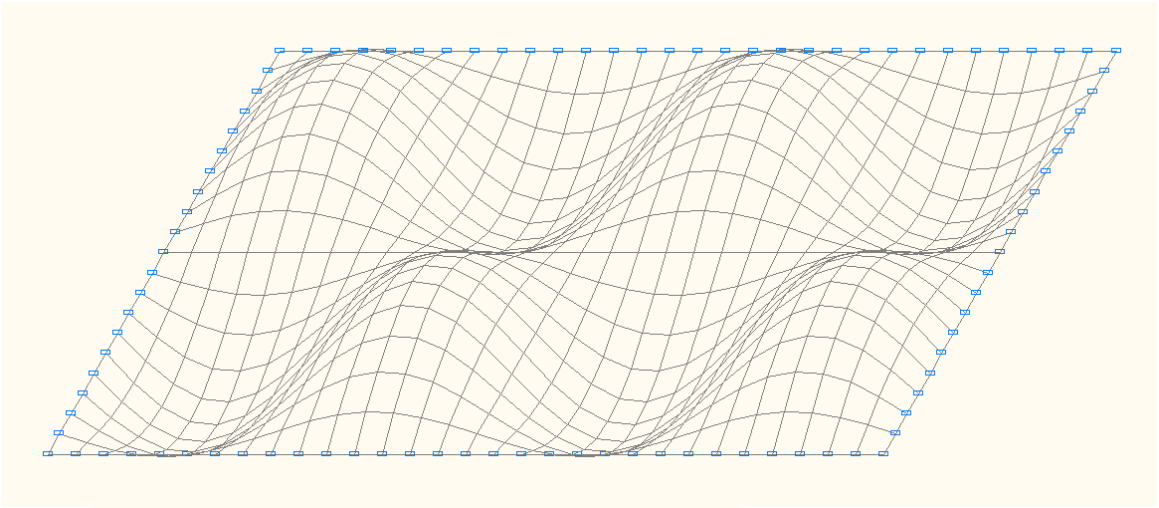


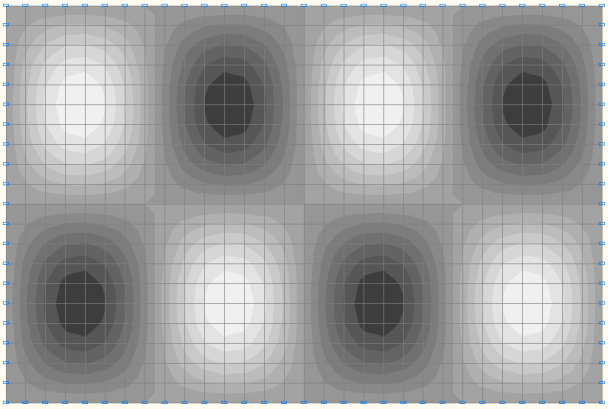


8-я собственная форма колебаний



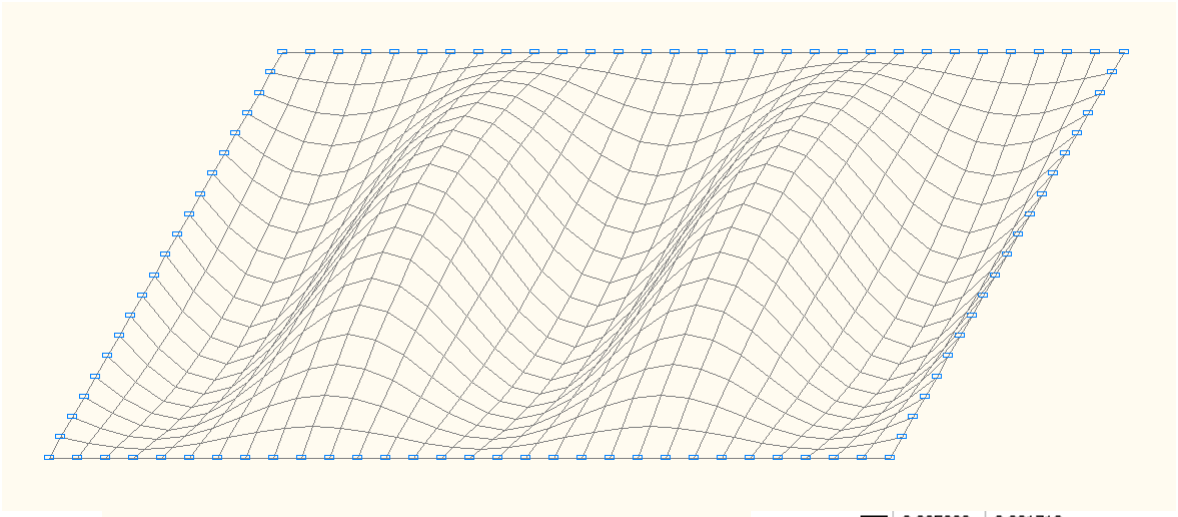
9-я собственная форма колебаний

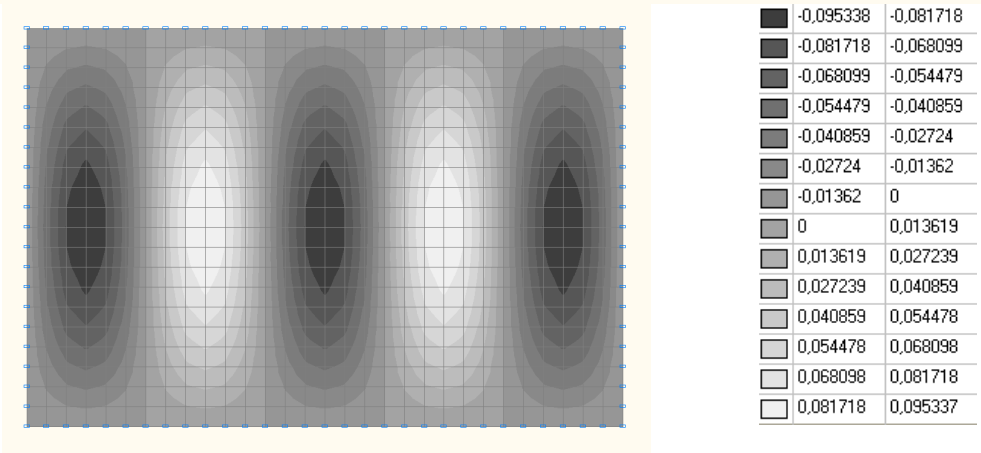




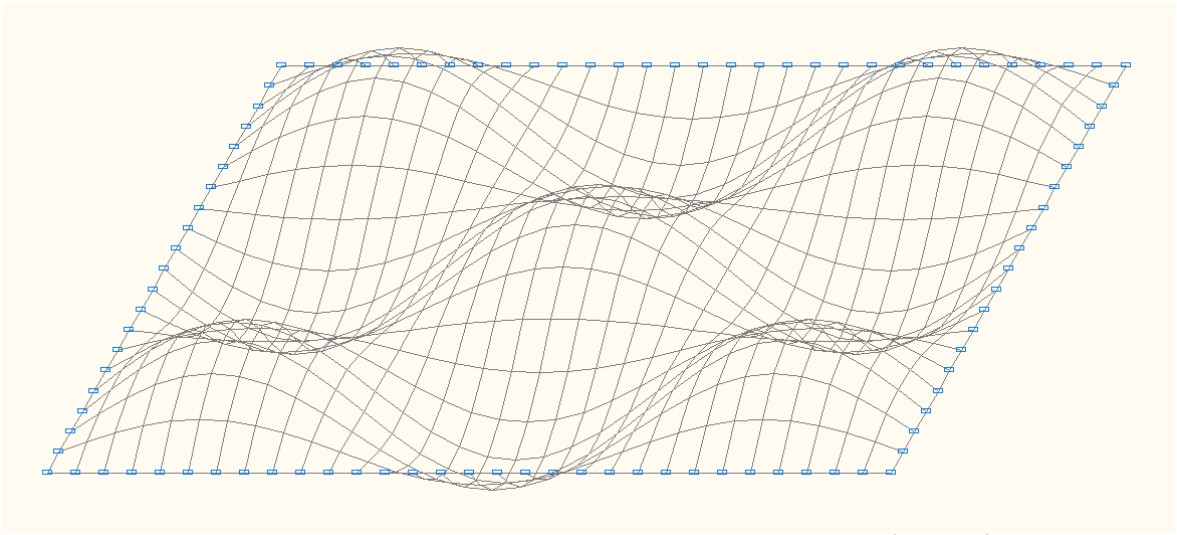
-0,117756	-0,100934
-0,100934	-0,084112
-0,084112	-0,067289
-0,067289	-0,050467
-0,050467	-0,033645
-0,033645	-0,016822
-0,016822	0
0	0,016822
0,016822	0,033645
0,033645	0,050467
0,050467	0,067289
0,067289	0,084112
0,084112	0,100934
0,100934	0,117756

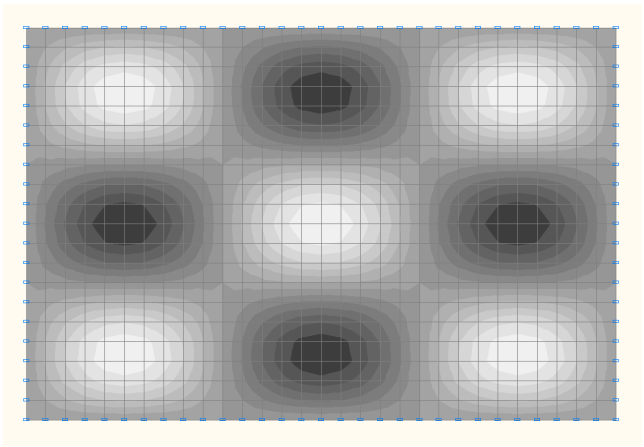
10-я собственная форма колебаний





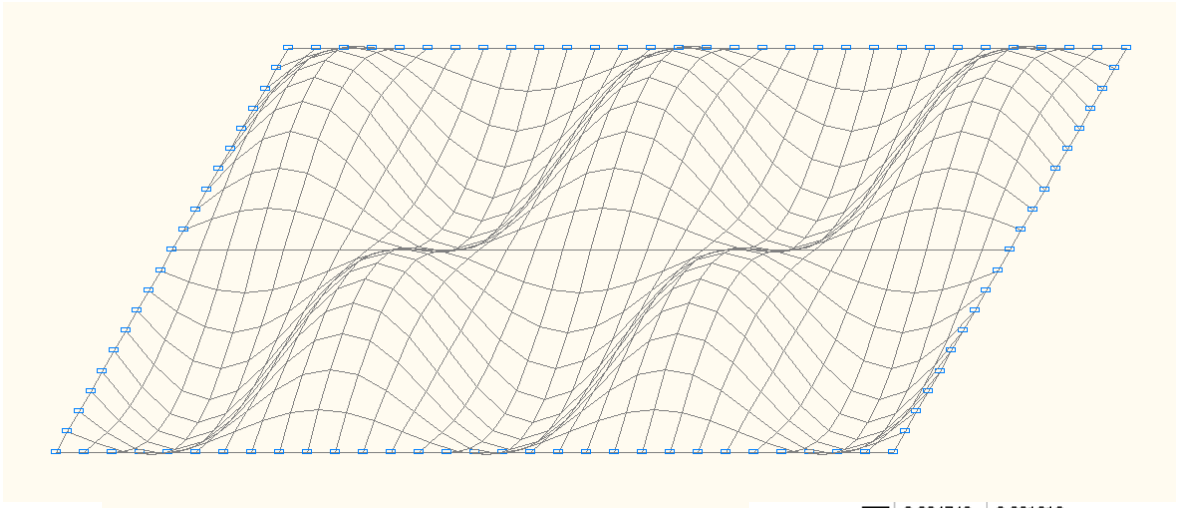
11-я собственная форма колебаний

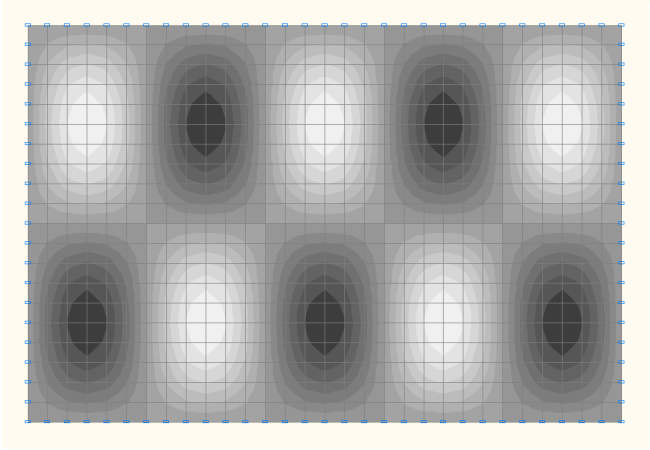




	-0,105263	-0,090225
	-0,090225	-0,075188
	-0,075188	-0,06015
	-0,06015	-0,045113
	-0,045113	-0,030075
	-0,030075	-0,015037
	-0,015037	0
	0	0,015038
	0,015038	0,030075
	0,030075	0,045113
	0,045113	0,060151
	0,060151	0,075188
	0,075188	0,090226
	0,090226	0,105263

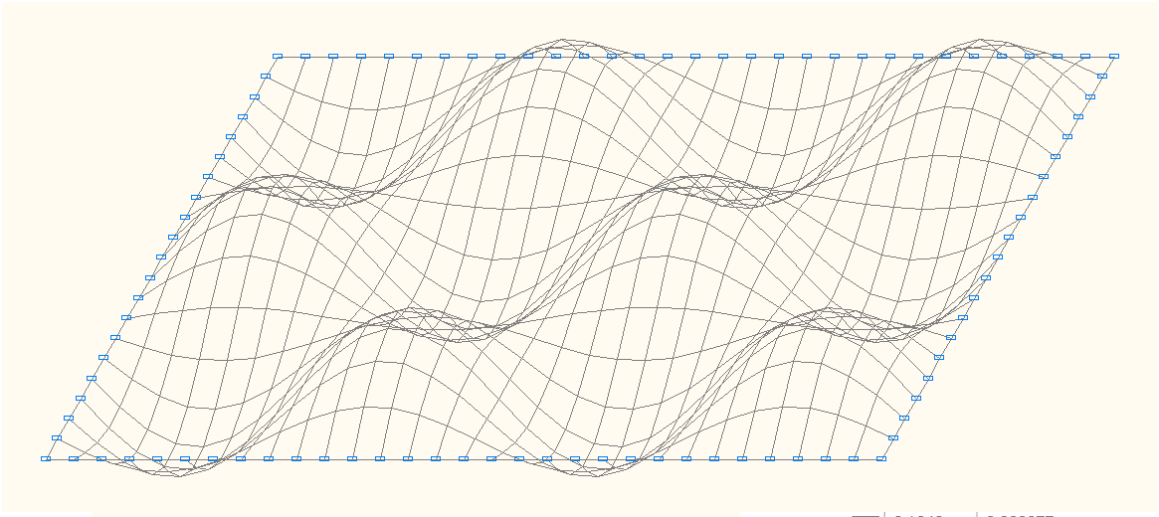
12-я собственная форма колебаний

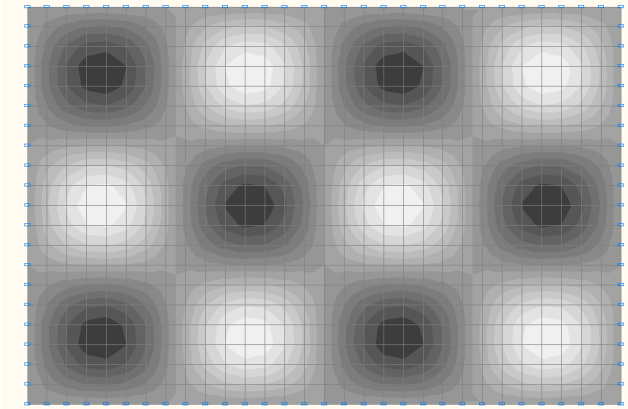




	-0,094749	-0,081213
	-0,081213	-0,067678
	-0,067678	-0,054142
	-0,054142	-0,040607
	-0,040607	-0,027071
	-0,027071	-0,013536
	-0,013536	0
	0	0,013535
	0,013535	0,027071
	0,027071	0,040606
	0,040606	0,054142
	0,054142	0,067677
	0,067677	0,081213
	0,081213	0,094748

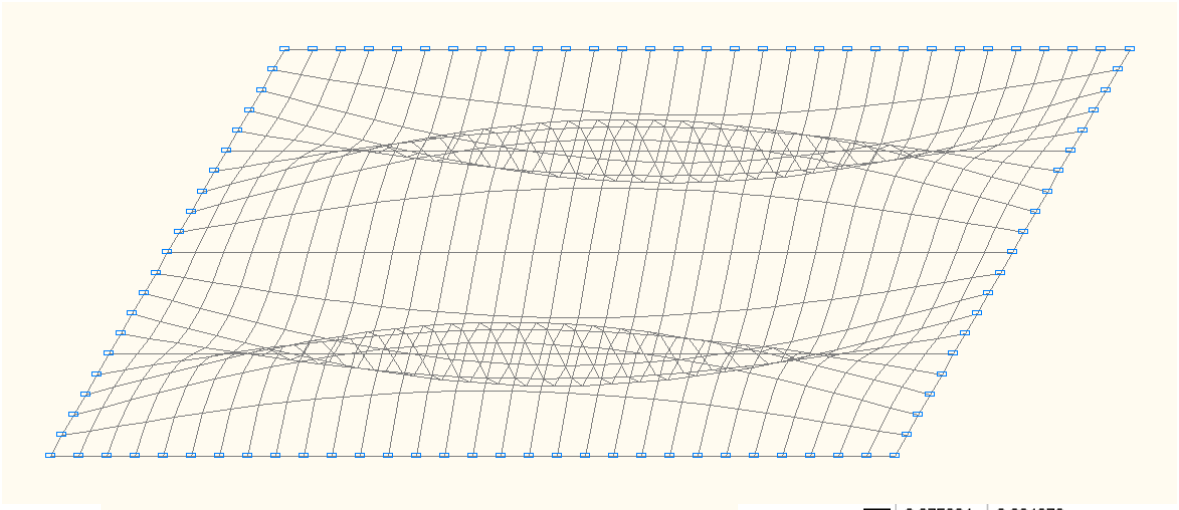
13-я собственная форма колебаний

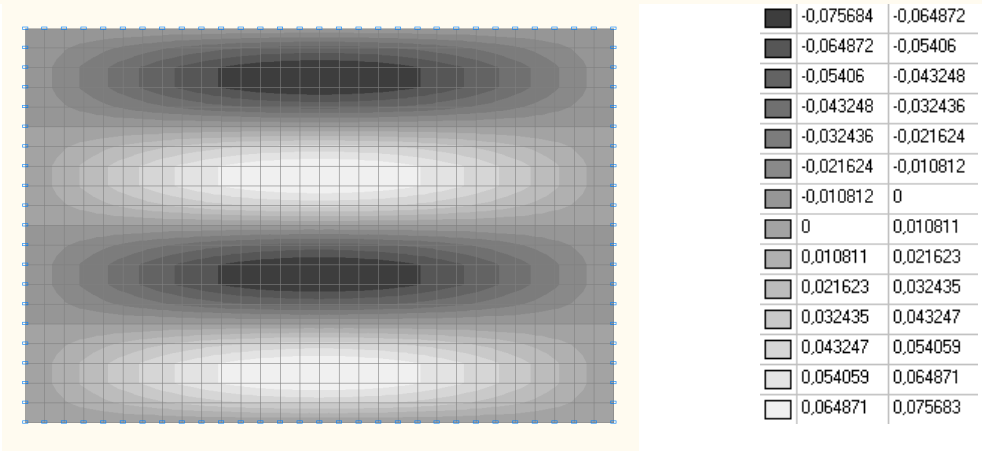




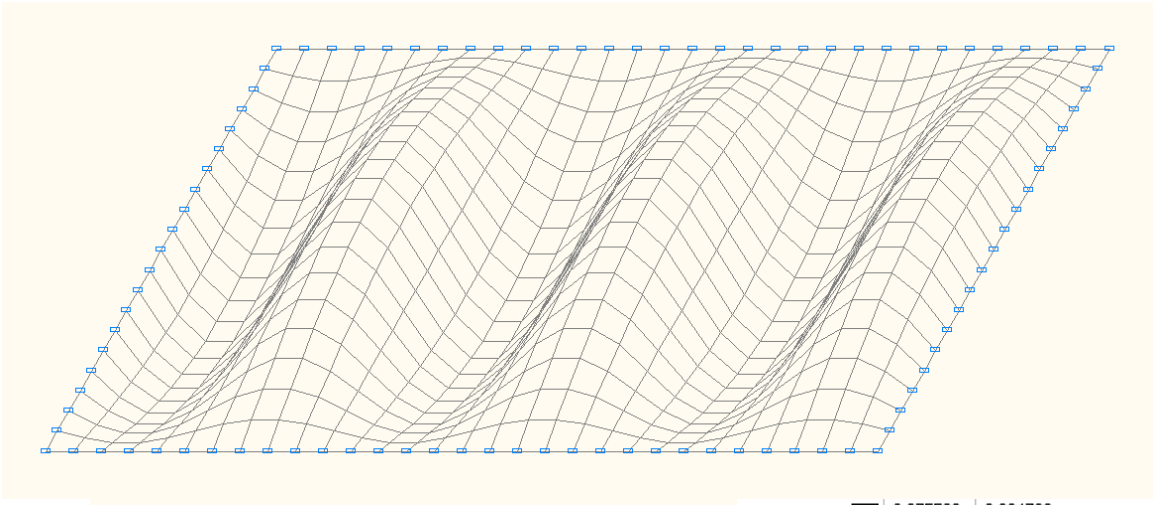
-0,1046	-0,089657
-0,089657	-0,074715
-0,074715	-0,059772
-0,059772	-0,044829
-0,044829	-0,029886
-0,029886	-0,014943
-0,014943	0
0	0,014942
0,014942	0,029885
0,029885	0,044828
0,044828	0,05977
0,05977	0,074713
0,074713	0,089656
0,089656	0,104599

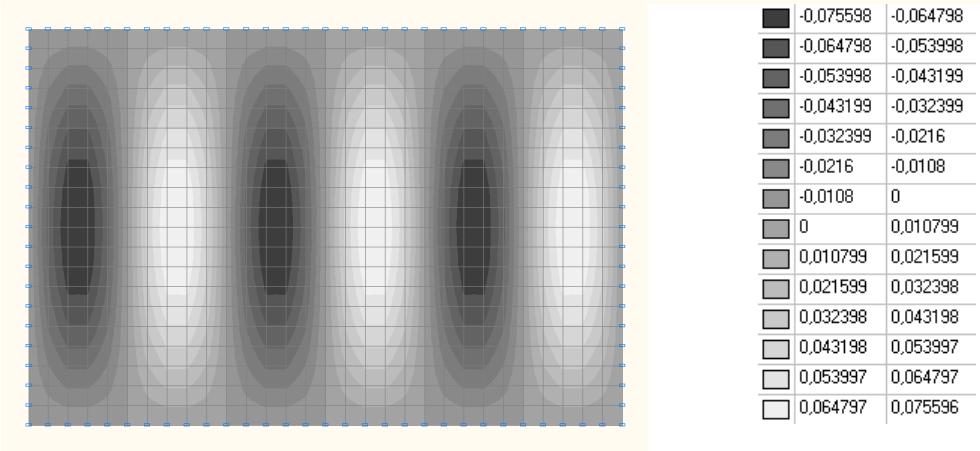
14-я собственная форма колебаний



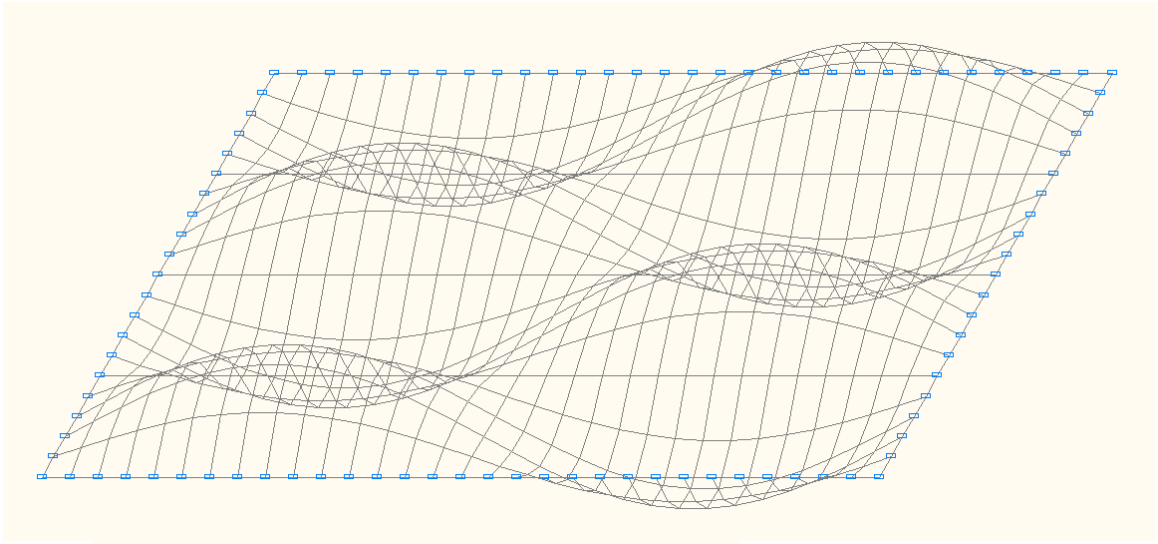


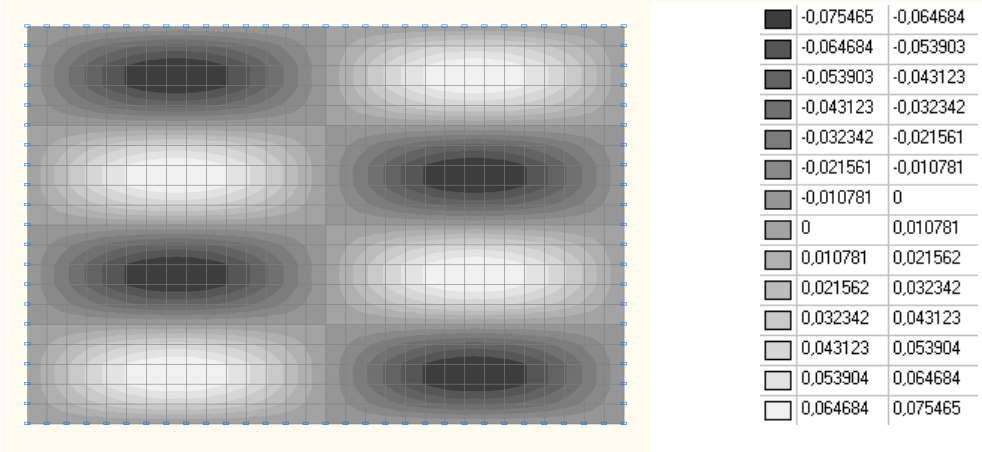
15-я собственная форма колебаний



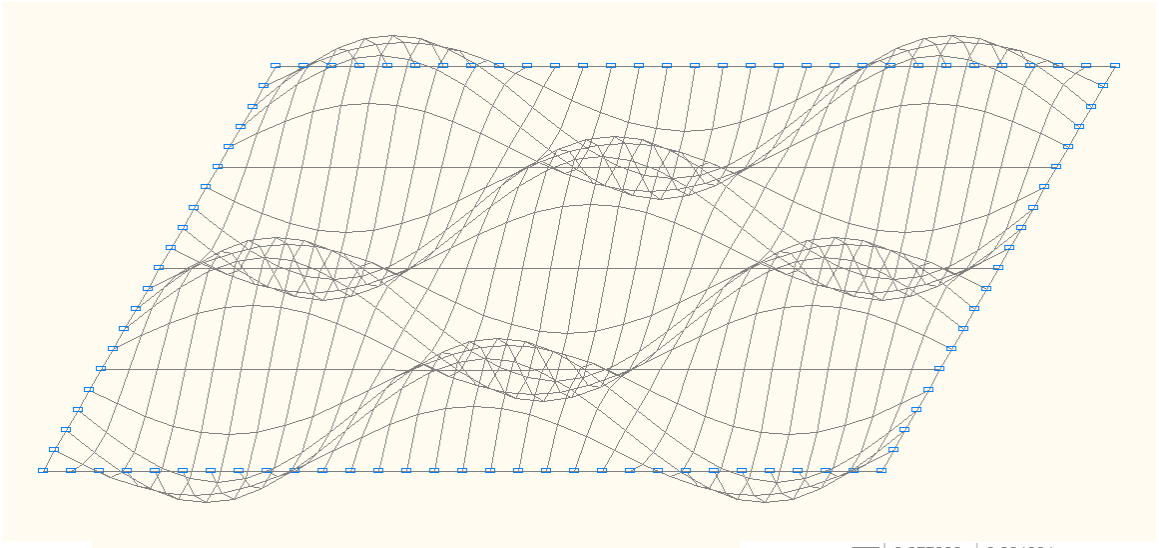


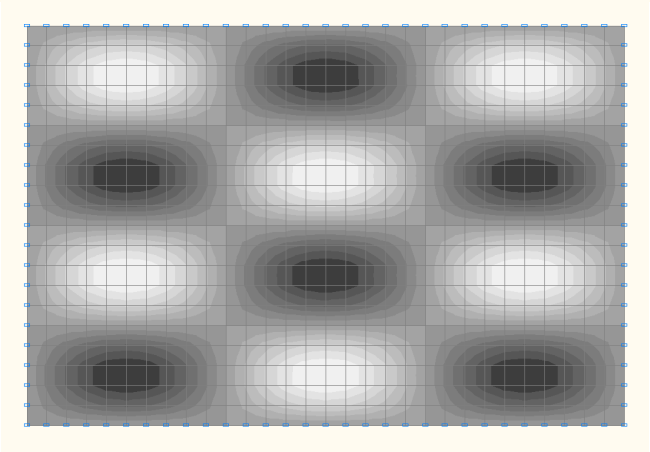
16-я собственная форма колебаний





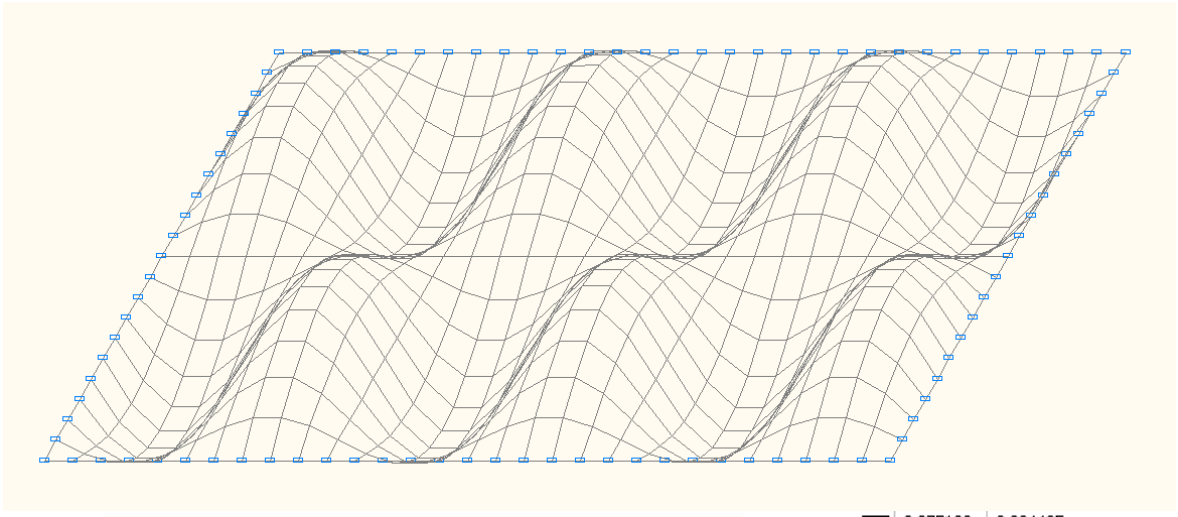
17-я собственная форма колебаний

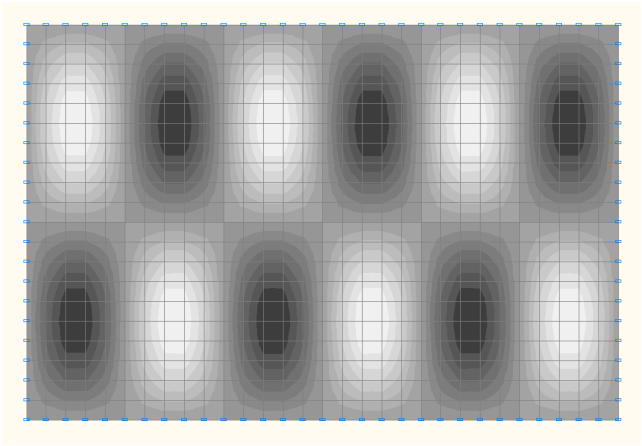




	-0,075093	-0,064364
	-0,064364	-0,053635
	-0,053635	-0,042906
	-0,042906	-0,032177
	-0,032177	-0,021448
	-0,021448	-0,010719
	-0,010719	0,00001
	0,00001	0,010739
	0,010739	0,021468
	0,021468	0,032197
	0,032197	0,042926
	0,042926	0,053655
	0,053655	0,064384
	0,064384	0,075113

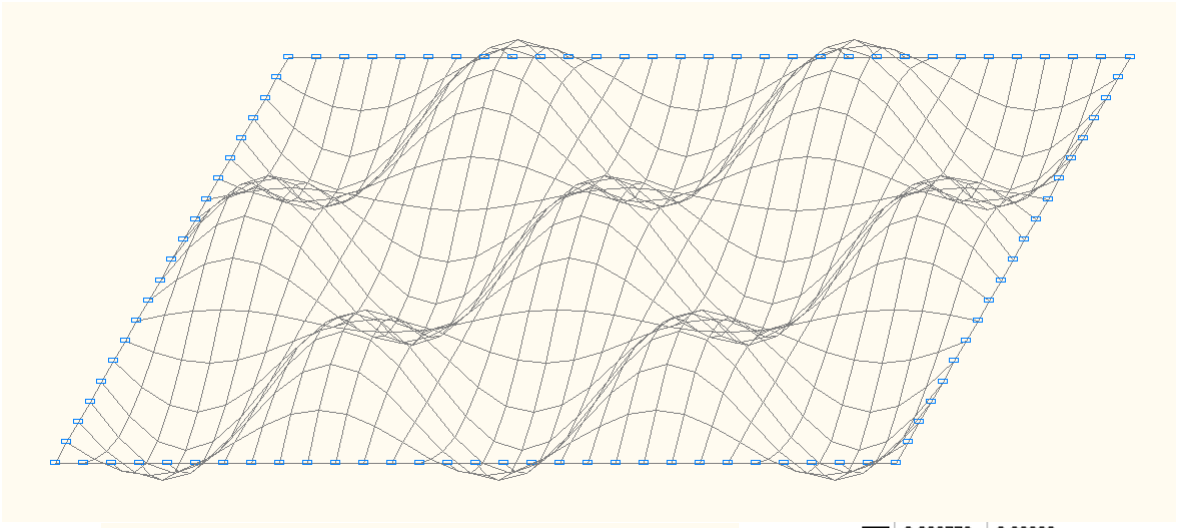
18-я собственная форма колебаний

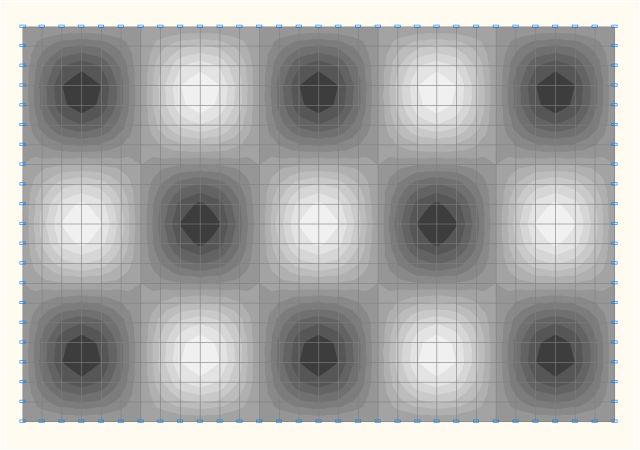


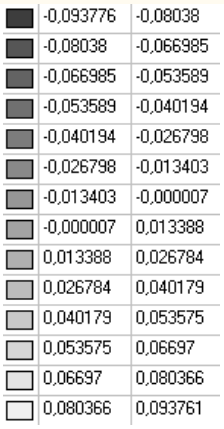


-0,075136	-0,064405
-0,064405	-0,053674
-0,053674	-0,042943
-0,042943	-0,032212
-0,032212	-0,021481
-0,021481	-0,01075
-0,01075	-0,000018
-0,000018	0,010713
0,010713	0,021444
0,021444	0,032175
0,032175	0,042906
0,042906	0,053637
0,053637	0,064368
0,064368	0,075099

19-я собственная форма колебаний







20-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

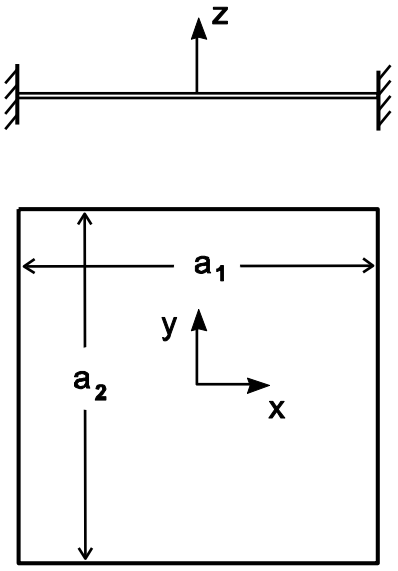
Собственные частоты колебаний ω, рад / с

Форма колебаний	**Число полуволн m1, m2**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	1, 1	221.0	221.1	0.05
2	2, 1	425.0	425.3	0.07
3	1, 2	678.0	680.3	0.34
4	3, 1	765.0	765.6	0.08
5	2, 2	884.0	885.1	0.12
6	3, 2	1224.0	1226.4	0.20
7	4, 1	1241.0	1242.0	0.08
8	1, 3	1445.0	1445.5	0.03
9	2, 3	1649.0	1651.4	0.15
10	4, 2	1700.0	1704.3	0.25
11	5, 1	1853.0	1854.6	0.09
12	3, 3	1989.0	1994.5	0.28
13	5, 2	2312.0	2318.8	0.29
14	4, 3	2465.0	2474.9	0.40
15	1, 4	2516.0	2516.8	0.03
16	6, 1	2601.0	2603.1	0.08
17	2, 4	2720.0	2724.1	0.15
18	3, 4	3060.0	3069.7	0.32
19	6, 2	3060.0	3069.7	0.32
20	5, 3	3077.0	3092.5	0.50

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты ω колебаний прямоугольной шарнирно опертой по периметру пластины с плотностью материала ρ могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\omega = \pi^2 \cdot \left(\frac{m_1^{\,2}}{a_2^{\,2}} + \frac{m_2^{\,2}}{a_2^{\,2}} \right) \cdot \left(\frac{D}{\rho \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где:} \qquad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}, \qquad m_1, m_2 = 1,2,3\ldots$$

Свободные колебания квадратной жестко защемленной по периметру пластины



Цель: Модальный анализ квадратной защемленной по периметру пластины.

Имя файла с исходными данными: **5.4.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω квадратной защемленной по периметру пластины с плотностью материала ρ.

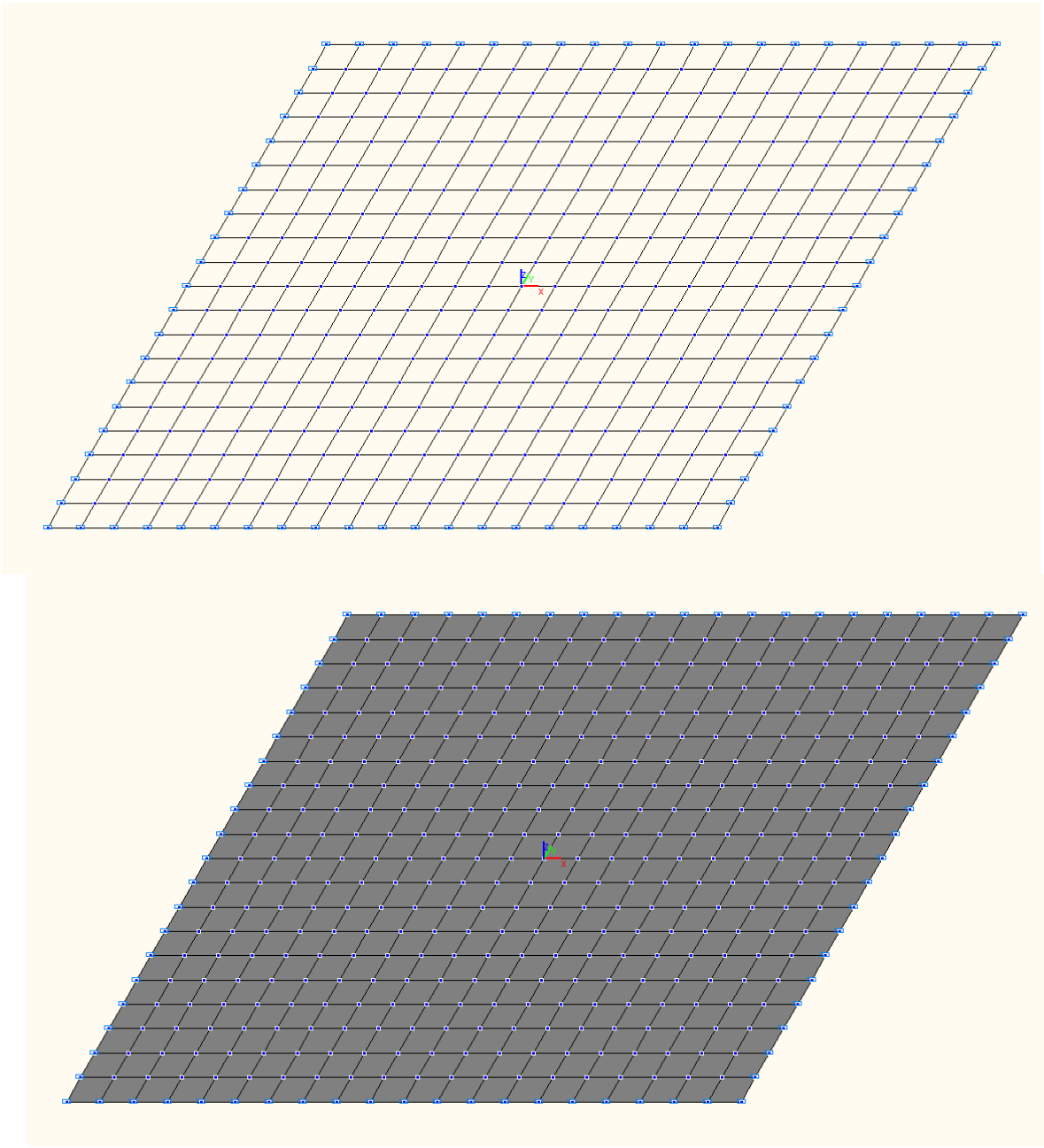
Ссылки: И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 377.

Исходные данные:

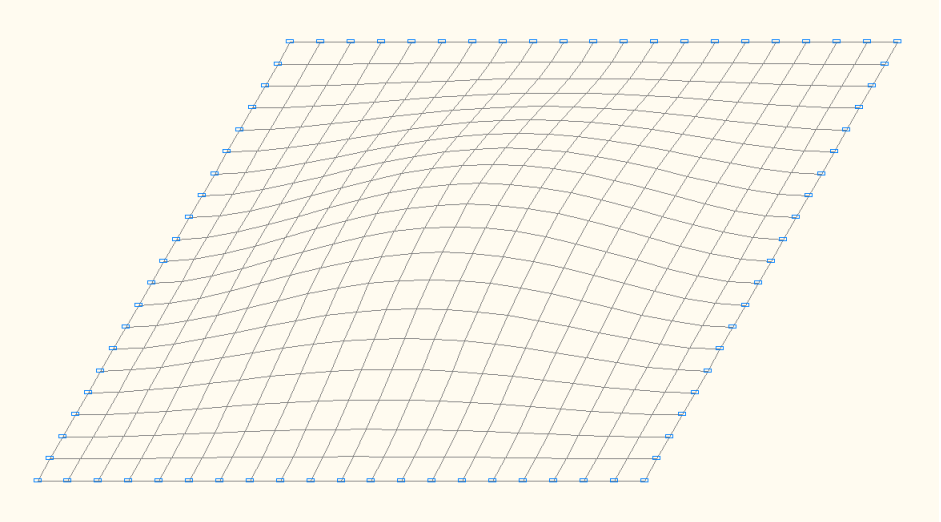
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.85$ т/м^3 - плотность материала;
$h = 0.01$ м - толщина пластины;
$a_1 = 1.0$ м - размер длинной стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
$a_2 = 1.0$ м - размер короткой стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат).

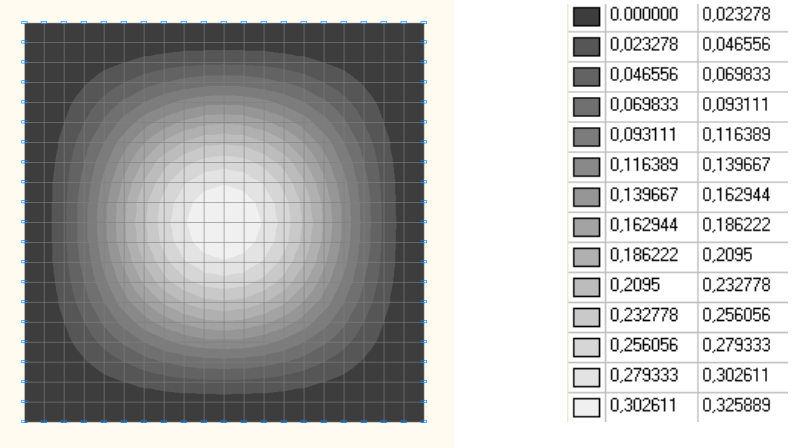
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 400 элементов плиты типа 20. Сетка конечных элементов разбита по длинам сторон пластины (вдоль осей X, Y общей системы координат) с шагом 0.05 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлению степеней свободы Z, UX, UY для кромок, расположенных вдоль осей X и Y общей системы координат. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса пластины $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.01$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 441. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD

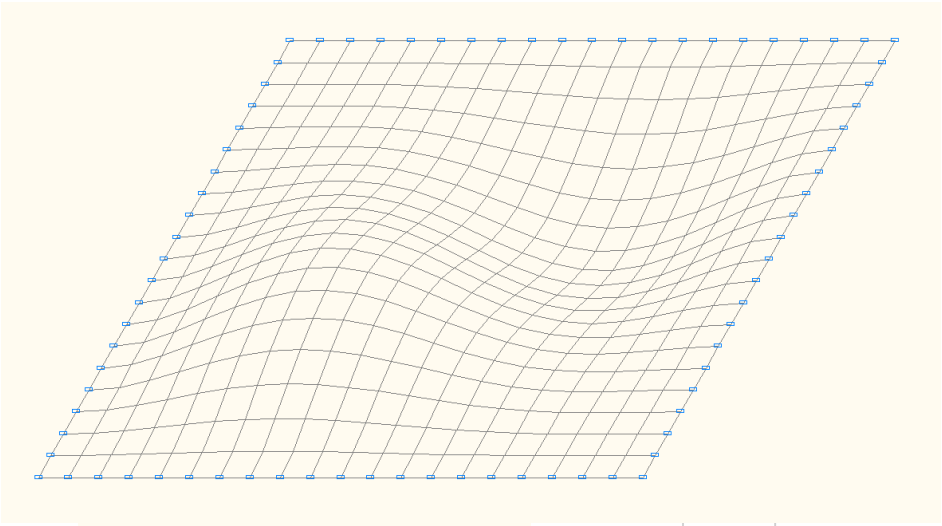


Расчетная схема

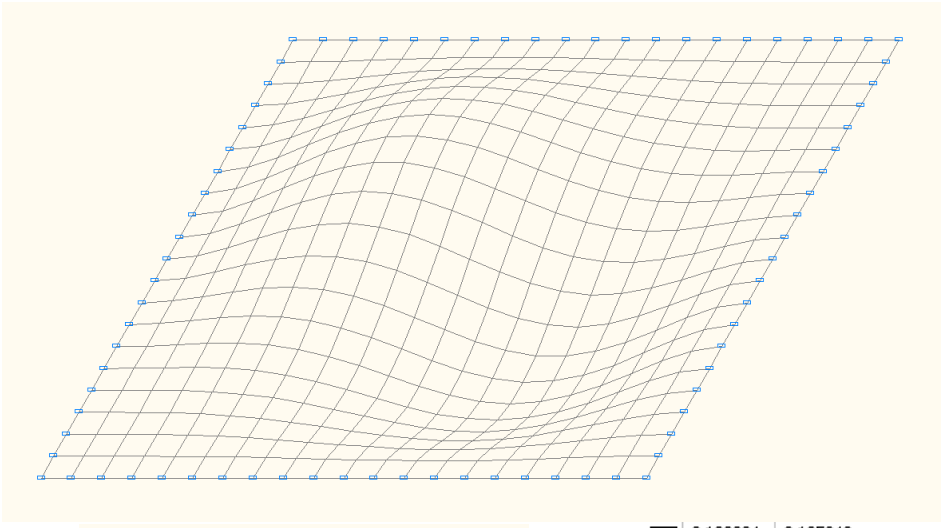


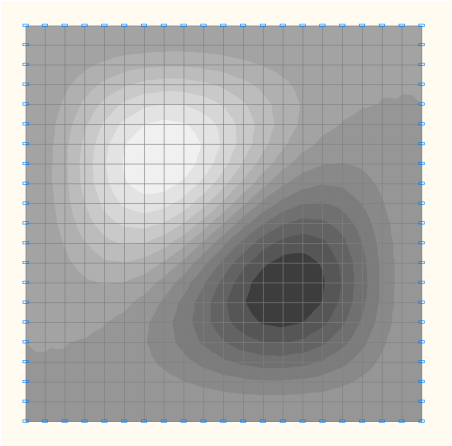


1-я собственная форма колебаний



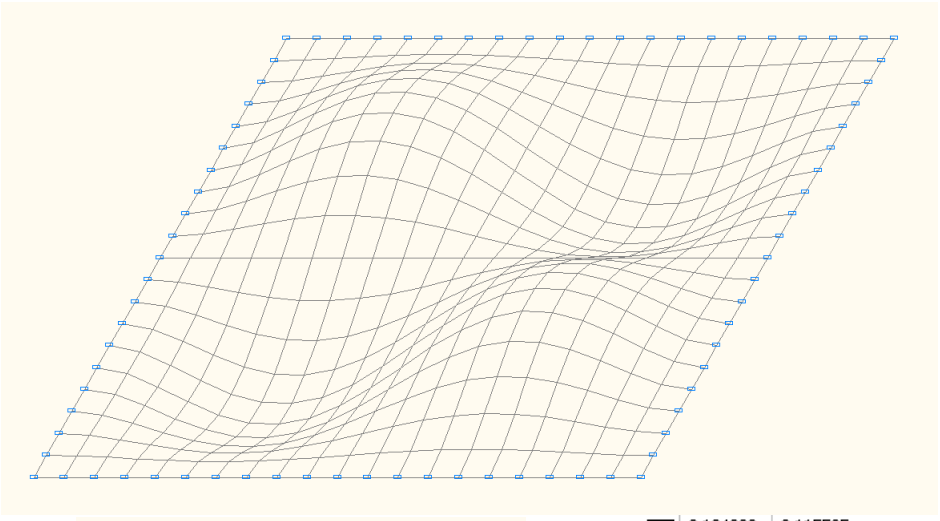
2-я собственная форма колебаний



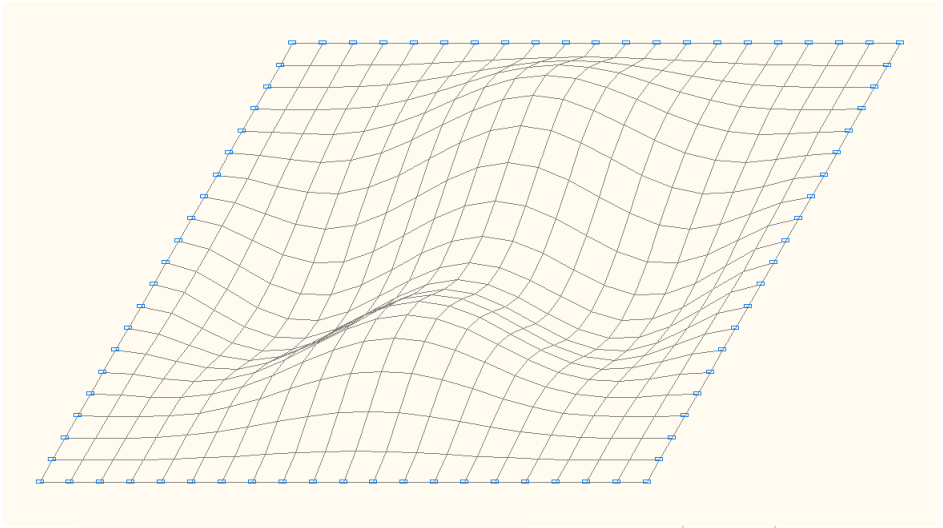


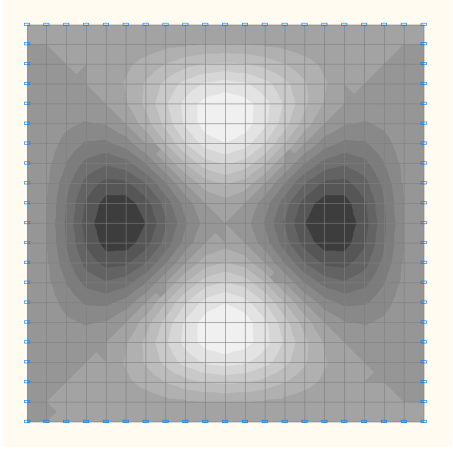
	-0,192904	-0,165346
	-0,165346	-0,137789
	-0,137789	-0,110231
	-0,110231	-0,082673
	-0,082673	-0,055115
	-0,055115	-0,027558
	-0,027558	0,000000
	0,000000	0,027558
	0,027558	0,055115
	0,055115	0,082673
	0,082673	0,110231
	0,110231	0,137789
	0,137789	0,165346
	0,165346	0,192904

3-я собственная форма колебаний



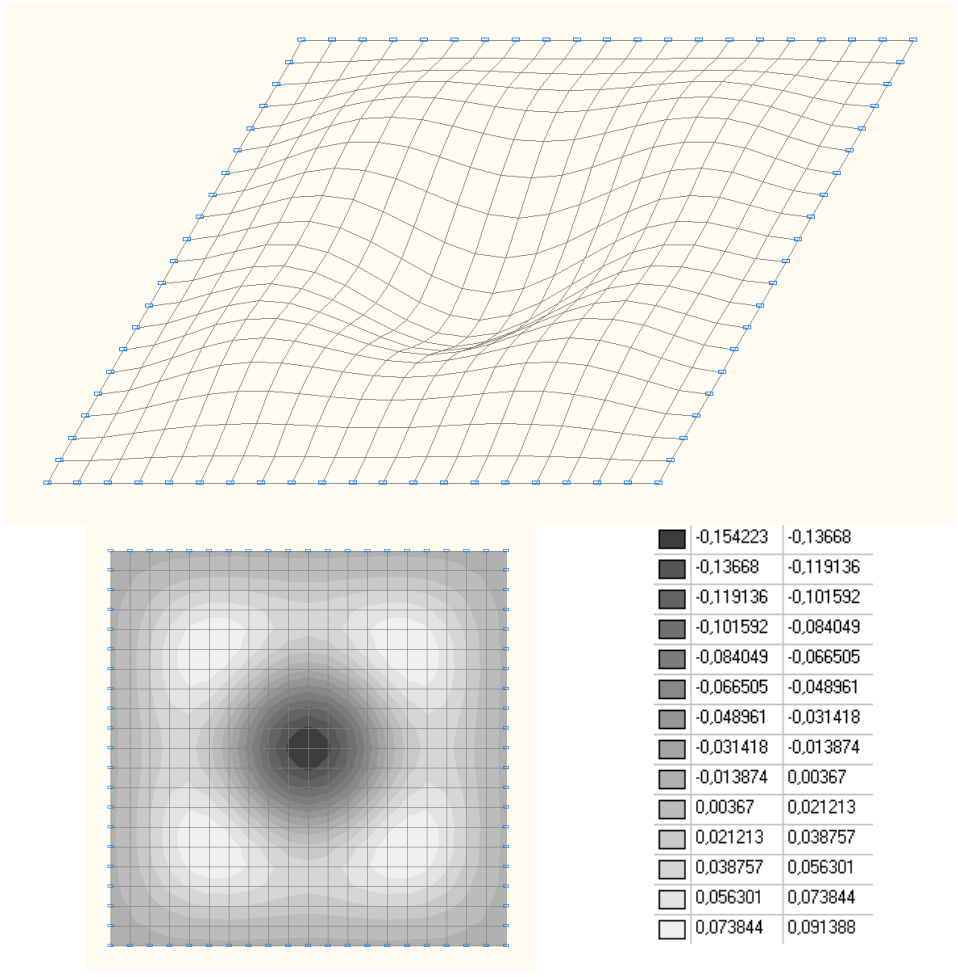
4-я собственная форма колебаний



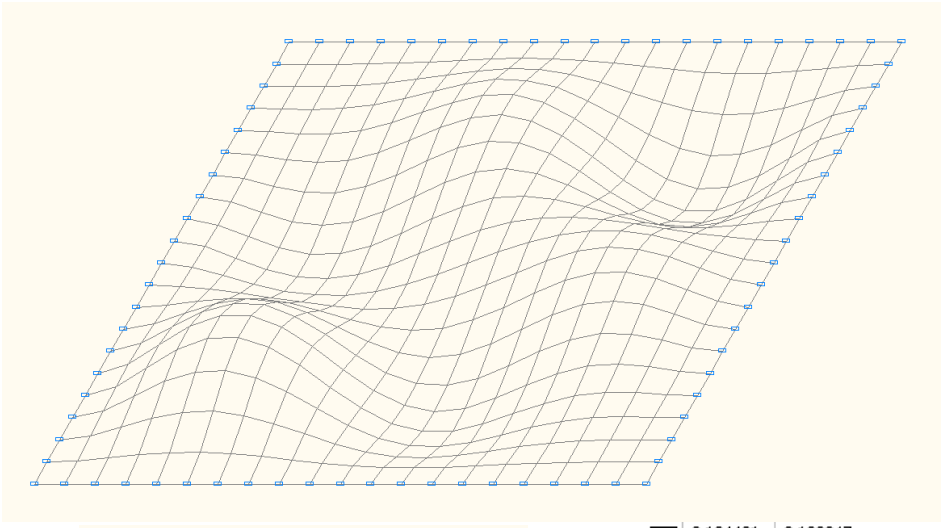


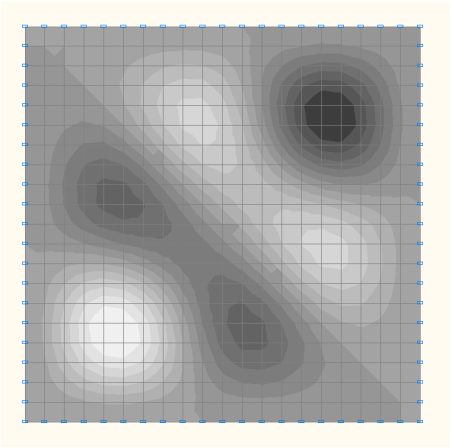
-0,146969	-0,125973
-0,125973	-0,104978
-0,104978	-0,083982
-0,083982	-0,062987
-0,062987	-0,041991
-0,041991	-0,020996
-0,020996	0.000000
0.000000	0,020996
0,020996	0,041991
0,041991	0,062987
0,062987	0,083982
0,083982	0,104978
0,104978	0,125973
0,125973	0,146969

5-я собственная форма колебаний



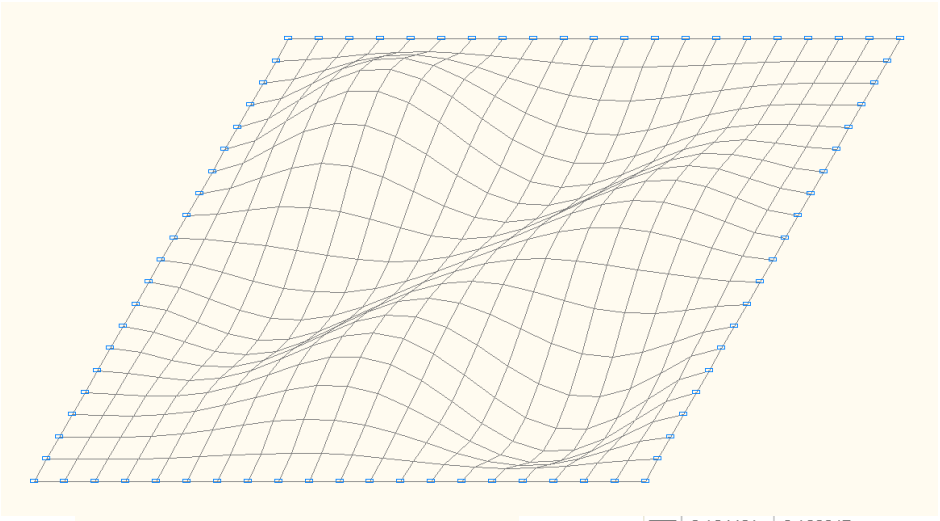
6-я собственная форма колебаний

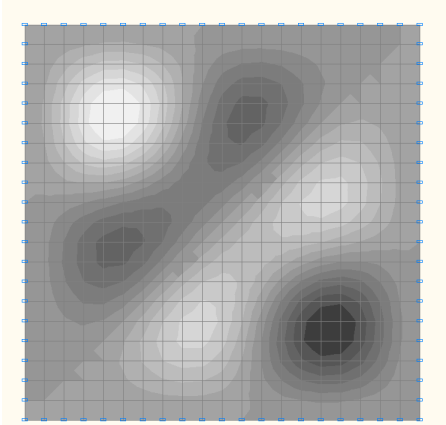




	-0,124421	-0,106647
	-0,106647	-0,088872
	-0,088872	-0,071098
	-0,071098	-0,053323
	-0,053323	-0,035549
	-0,035549	-0,017774
	-0,017774	0
	0	0,017774
	0,017774	0,035549
	0,035549	0,053323
	0,053323	0,071098
	0,071098	0,088872
	0,088872	0,106647
	0,106647	0,124421

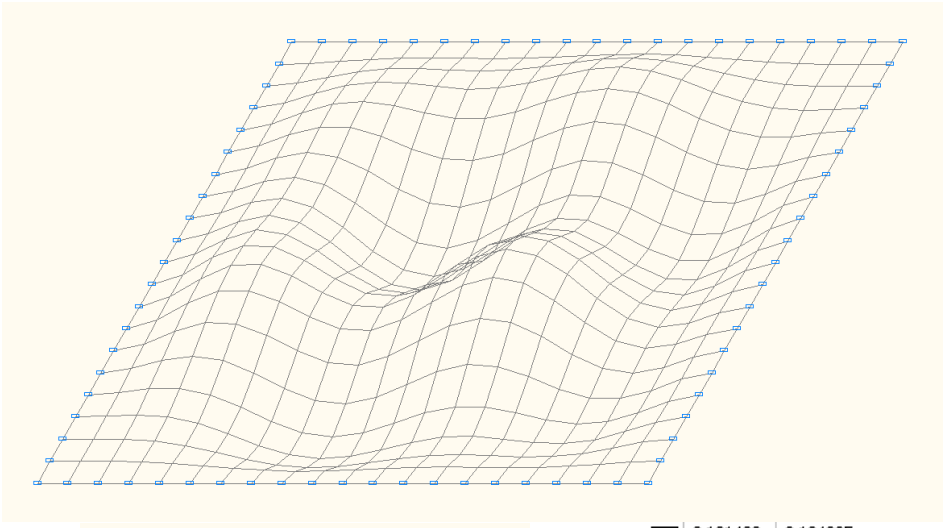
7-я собственная форма колебаний

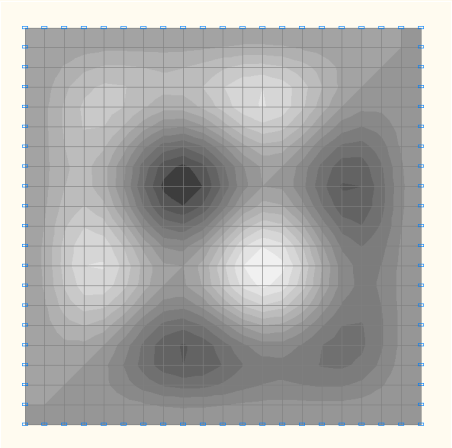




	-0,124421	-0,106647
	-0,106647	-0,088872
	-0,088872	-0,071098
	-0,071098	-0,053323
	-0,053323	-0,035549
	-0,035549	-0,017774
	-0,017774	0
	0	0,017774
	0,017774	0,035549
	0,035549	0,053323
	0,053323	0,071098
	0,071098	0,088872
	0,088872	0,106647
	0,106647	0,124421

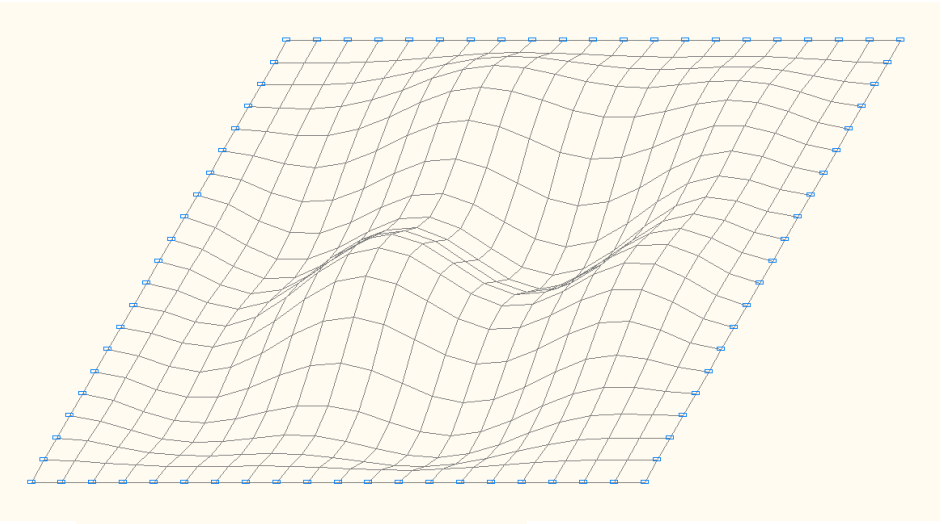
8-я собственная форма колебаний

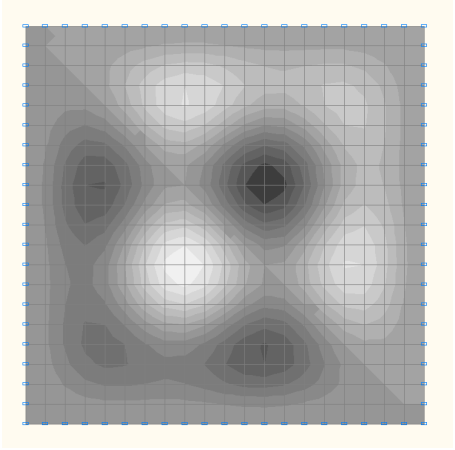




-0,121409	-0,104065
-0,104065	-0,086721
-0,086721	-0,069377
-0,069377	-0,052032
-0,052032	-0,034688
-0,034688	-0,017344
-0,017344	0
0	0,017344
0,017344	0,034688
0,034688	0,052032
0,052032	0,069377
0,069377	0,086721
0,086721	0,104065
0,104065	0,121409

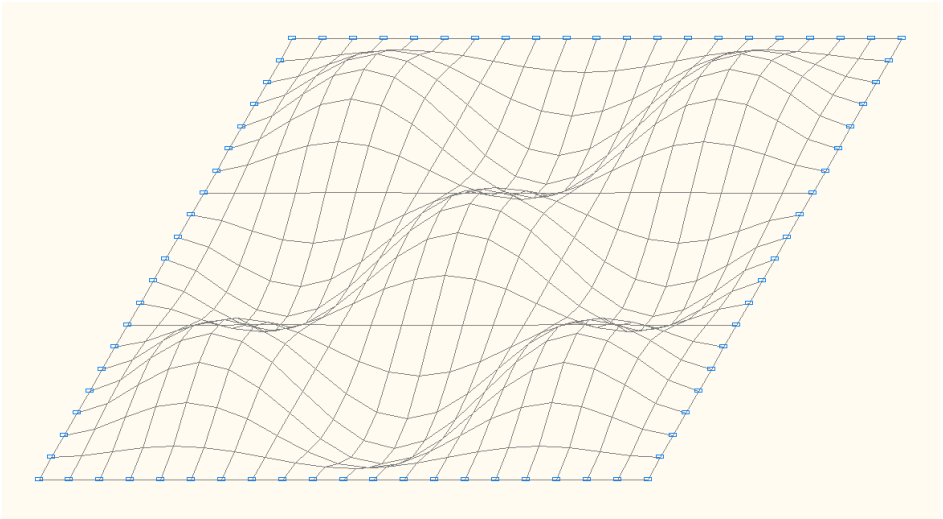
9-я собственная форма колебаний

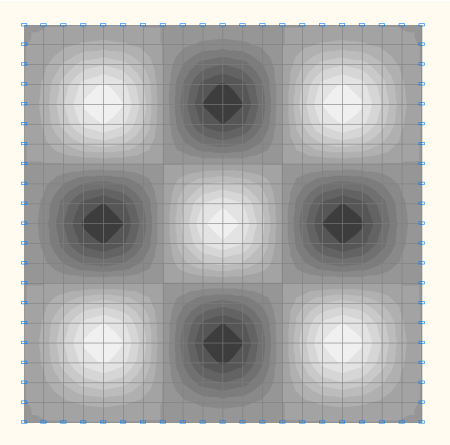




-0,121409	-0,104065
-0,104065	-0,086721
-0,086721	-0,069377
-0,069377	-0,052032
-0,052032	-0,034688
-0,034688	-0,017344
-0,017344	0.000000
0.000000	0,017344
0,017344	0,034688
0,034688	0,052032
0,052032	0,069377
0,069377	0,086721
0,086721	0,104065
0,104065	0,121409

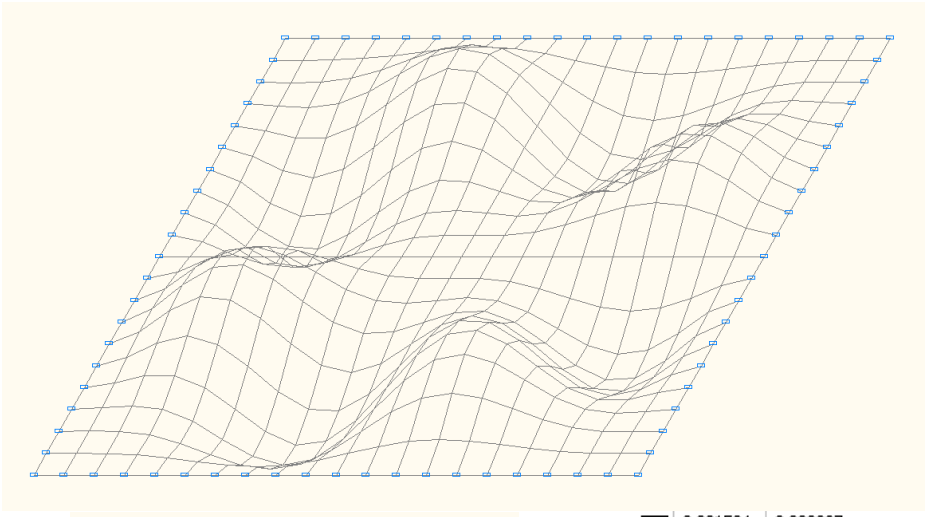
10-я собственная форма колебаний

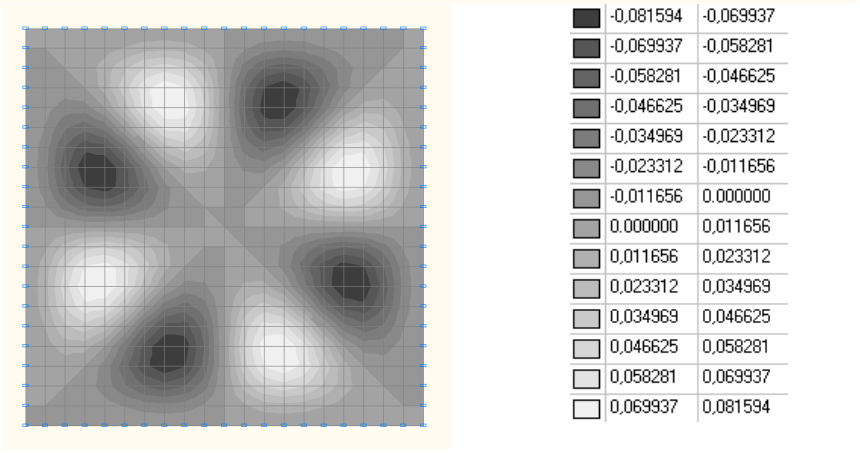




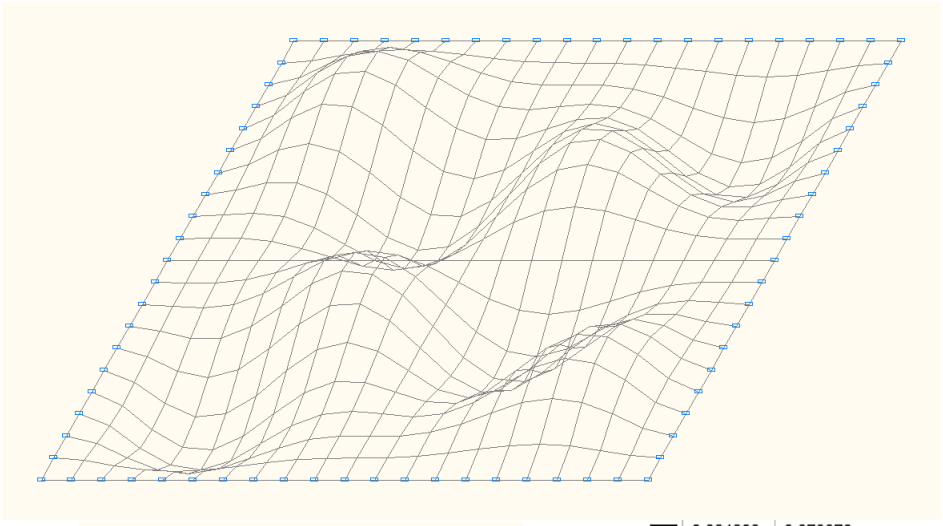
-0,093192	-0,079797
-0,079797	-0,066403
-0,066403	-0,053008
-0,053008	-0,039614
-0,039614	-0,02622
-0,02622	-0,012825
-0,012825	0,000569
0,000569	0,013964
0,013964	0,027358
0,027358	0,040752
0,040752	0,054147
0,054147	0,067541
0,067541	0,080936
0,080936	0,09433

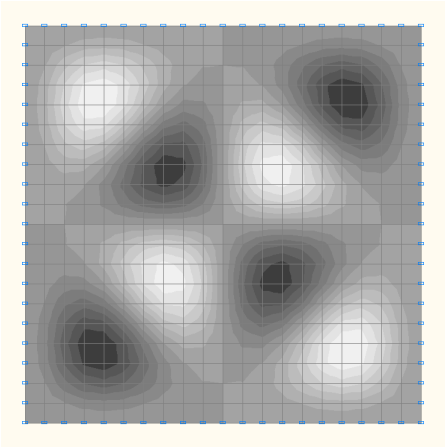
11-я собственная форма колебаний





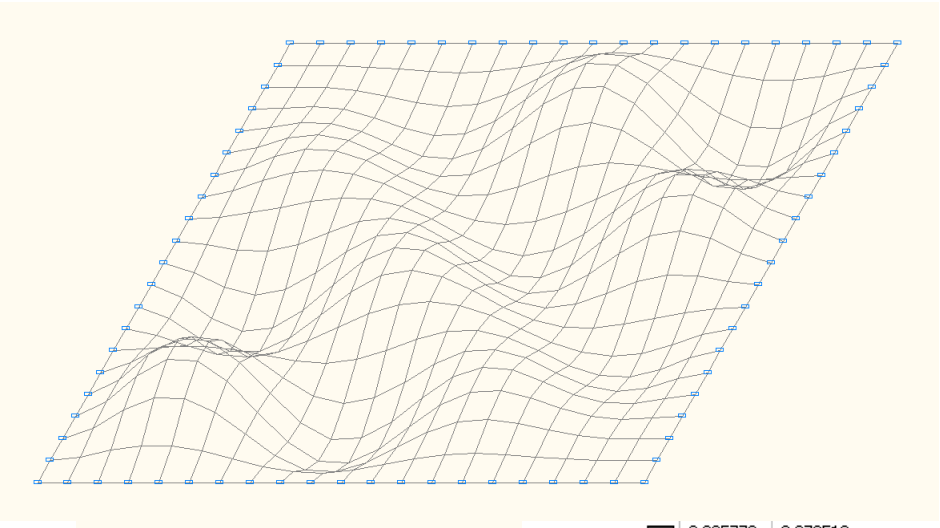
12-я собственная форма колебаний

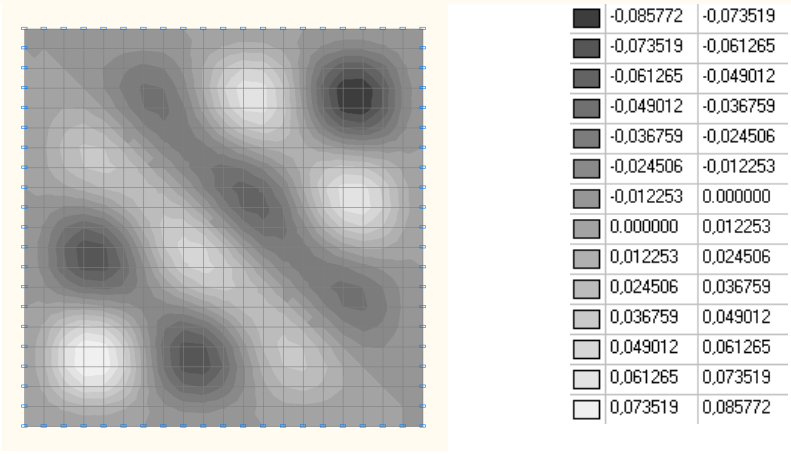




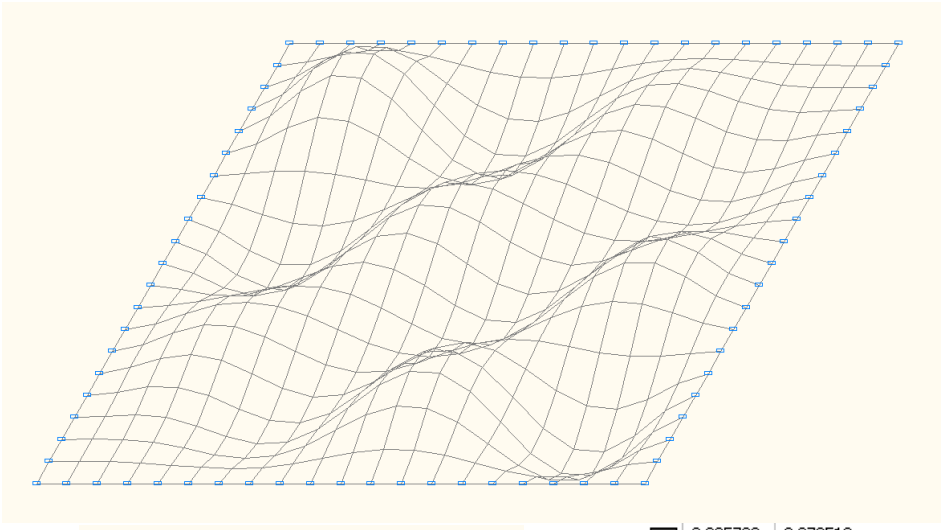
	-0,084326	-0,072279
	-0,072279	-0,060233
	-0,060233	-0,048186
	-0,048186	-0,03614
	-0,03614	-0,024093
	-0,024093	-0,012046
	-0,012046	0
	0	0,012047
	0,012047	0,024093
	0,024093	0,03614
	0,03614	0,048186
	0,048186	0,060233
	0,060233	0,072279
	0,072279	0,084326

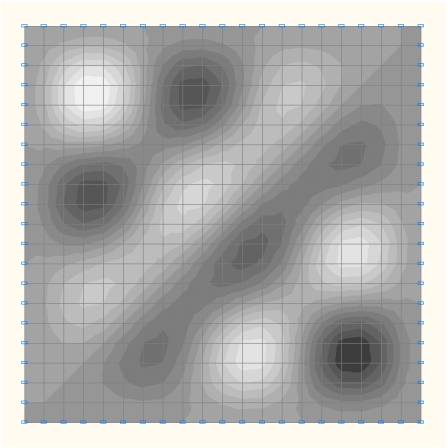
13-я собственная форма колебаний





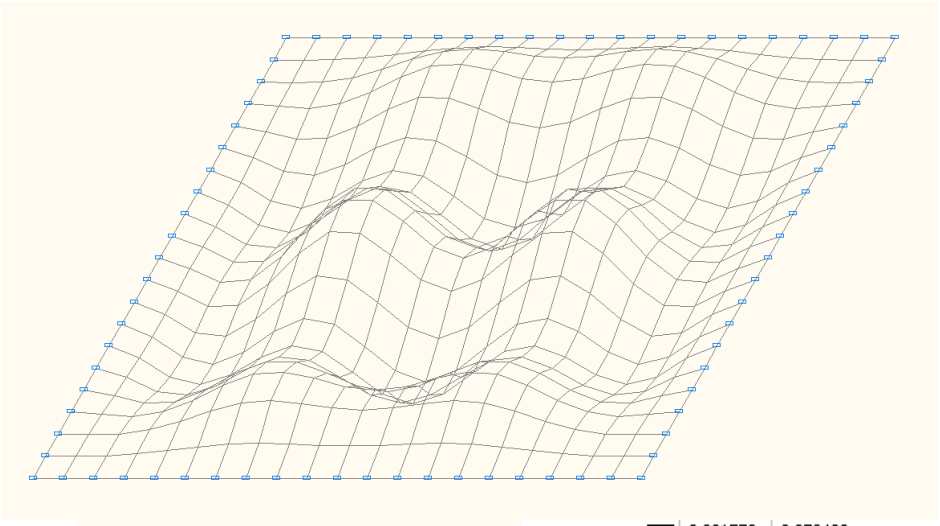
14-я собственная форма колебаний



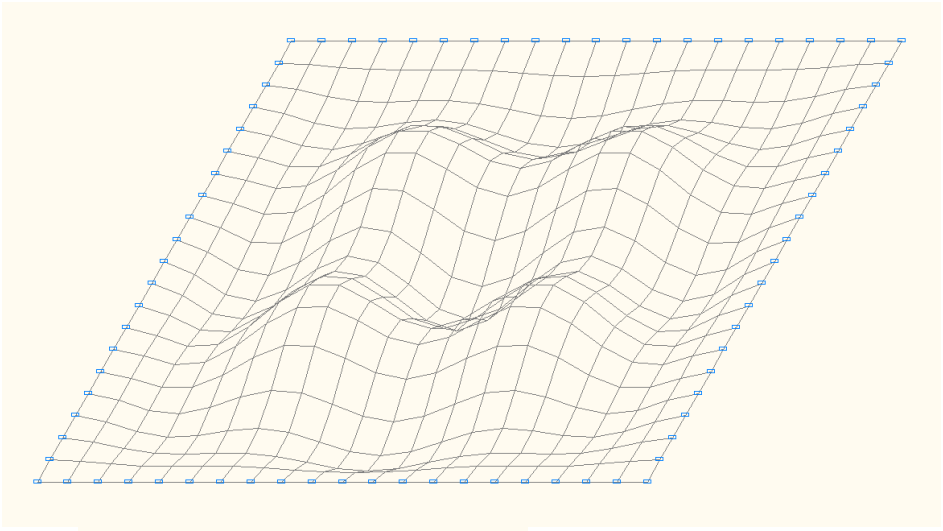


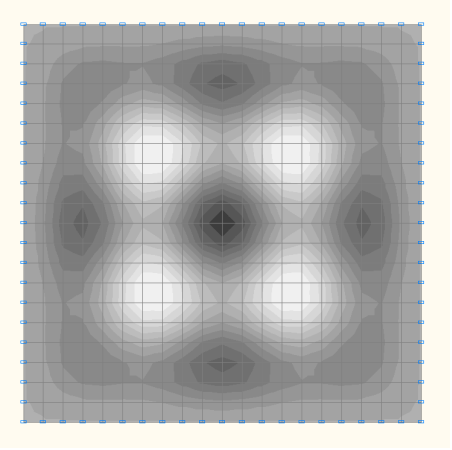
-0,085769	-0,073516
-0,073516	-0,061263
-0,061263	-0,04901
-0,04901	-0,036757
-0,036757	-0,024503
-0,024503	-0,01225
-0,01225	0,000003
0,000003	0,012256
0,012256	0,024509
0,024509	0,036763
0,036763	0,049016
0,049016	0,061269
0,061269	0,073522
0,073522	0,085775

15-я собственная форма колебаний



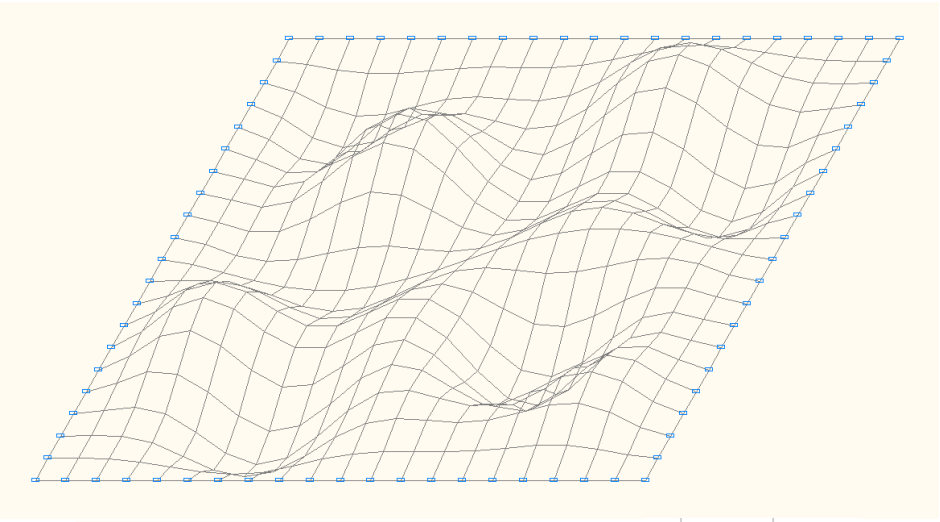
16-я собственная форма колебаний

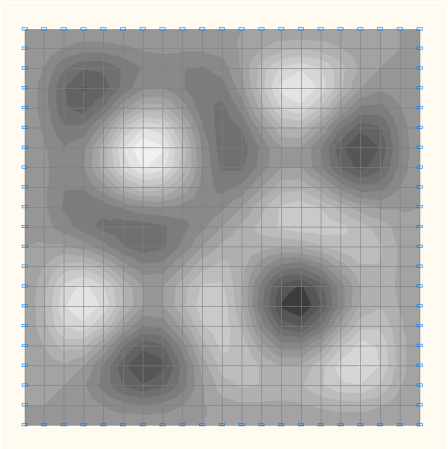




	-0,109557	-0,095964
	-0,095964	-0,08237
	-0,08237	-0,068776
	-0,068776	-0,055183
	-0,055183	-0,041589
	-0,041589	-0,027995
	-0,027995	-0,014402
	-0,014402	-0,000808
	-0,000808	0,012786
	0,012786	0,026379
	0,026379	0,039973
	0,039973	0,053567
	0,053567	0,06716
	0,06716	0,080754

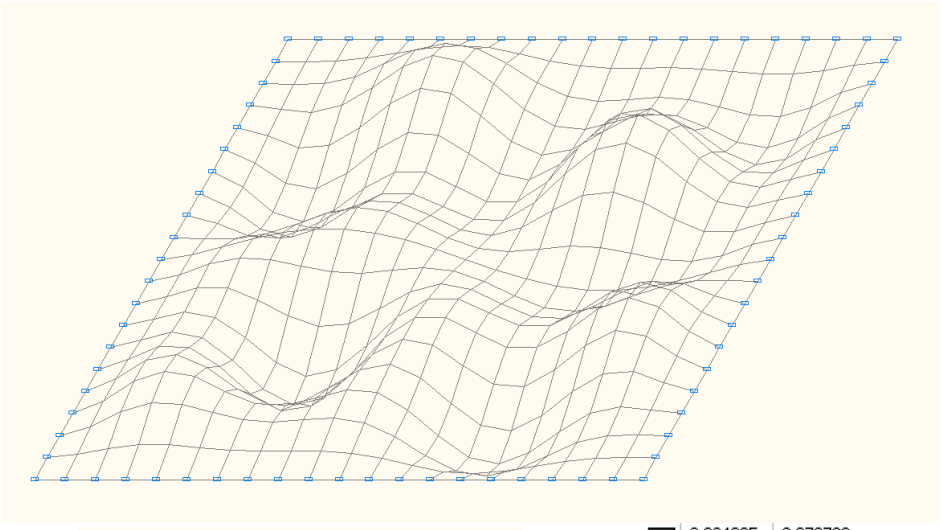
17-я собственная форма колебаний

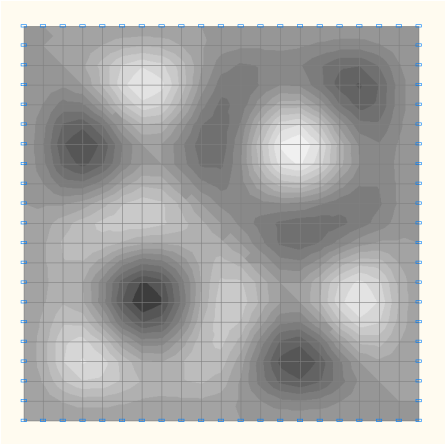




	-0,084916	-0,072785
	-0,072785	-0,060653
	-0,060653	-0,048521
	-0,048521	-0,03639
	-0,03639	-0,024258
	-0,024258	-0,012127
	-0,012127	0,000005
	0,000005	0,012137
	0,012137	0,024268
	0,024268	0,0364
	0,0364	0,048532
	0,048532	0,060663
	0,060663	0,072795
	0,072795	0,084927

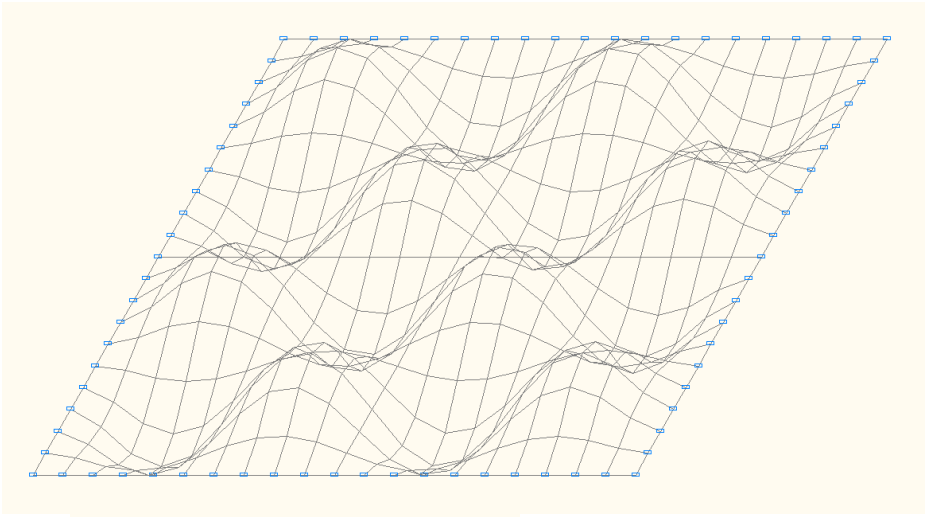
18-я собственная форма колебаний

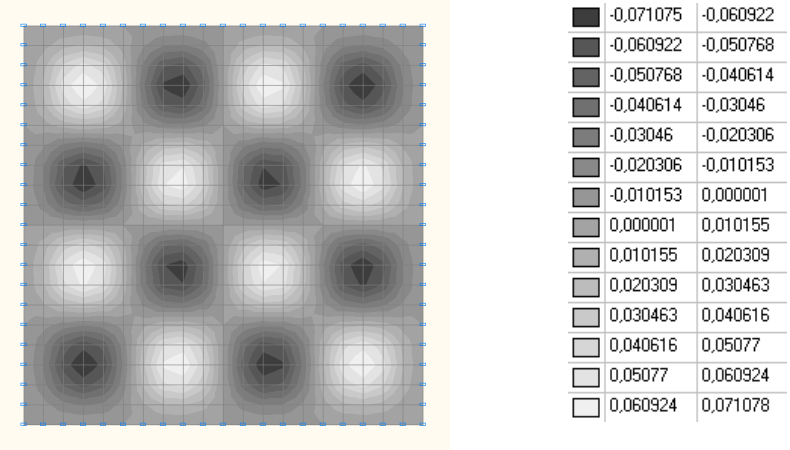




-0,084925	-0,072793
-0,072793	-0,060661
-0,060661	-0,048529
-0,048529	-0,036396
-0,036396	-0,024264
-0,024264	-0,012132
-0,012132	0,000000
0,000000	0,012132
0,012132	0,024264
0,024264	0,036396
0,036396	0,048529
0,048529	0,060661
0,060661	0,072793
0,072793	0,084925

19-я собственная форма колебаний





20-я собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, рад / с

Форма колебаний	**Число полуволн m1, m2**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	1, 1	560.1	558.5	0.29
2	1, 2	1143.2	1139.4	0.33
3	2, 1	1143.2	1139.4	0.33
4	2, 2	1686.6	1683.4	0.19
5	1, 3	2054.0	2042.8	0.55
6	3, 1	2054.0	2052.2	0.09
7	2, 3	2571.5	2569.1	0.09
8	3, 2	2571.5	2569.1	0.09
9	1, 4	3276.5	3267.5	0.27
10	4, 1	3276.5	3267.5	0.27
11	3, 3	3424.6	3434.5	0.29
12	2, 4	3782.2	3772.0	0.27
13	4, 2	3782.2	3786.2	0.11
14	3, 4	4611.8	4632.3	0.44
15	4, 3	4611.8	4632.3	0.44
16	1, 5	4806.6	4793.0	0.28
17	5, 1	4806.6	4796.7	0.21
18	2, 5	5307.4	5303.5	0.07
19	5, 2	5307.4	5303.5	0.07
20	4, 4	5774.8	5821.8	0.81

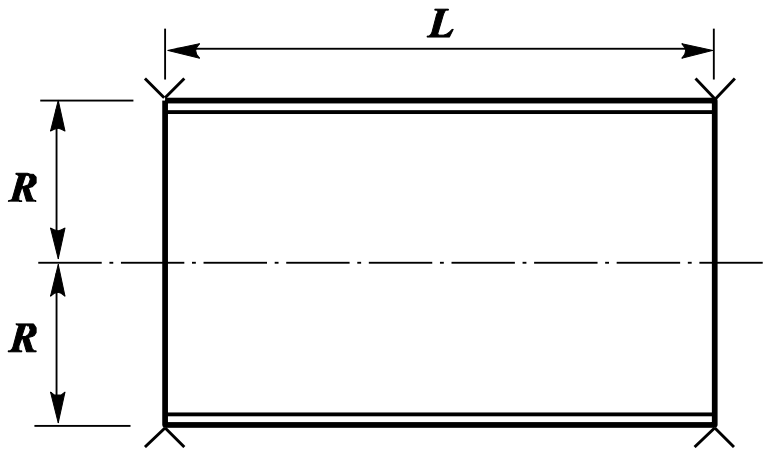
Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний ω квадратной защемленной по периметру пластины с плотностью материала ρ могут быть вычислены по следующей формуле, полученной на основе решения по методу Рэлея-Ритца:

$$\omega = \pi^2 \cdot \left(\frac{D}{\rho \cdot h} \cdot \left(\frac{A_m{}^4}{a_1{}^4} + \frac{A_n{}^4}{a_2{}^4} + 2 \cdot \frac{B_m \cdot B_n}{a_1{}^2 \cdot a_2{}^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где:}$$

$$A_m = \begin{cases} 1.506 & m = 1 \\ m + 0.5 & m \geq 2 \end{cases}, \quad A_n = \begin{cases} 1.506 & n = 1 \\ n + 0.5 & n \geq 2 \end{cases}, \quad B_m = \begin{cases} 1.248 & m = 1 \\ A_m \cdot \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & m \geq 2 \end{cases}, \quad B_m = \begin{cases} 1.248 & n = 1 \\ A_n \cdot \left(A_n - \frac{2}{\pi} \right) & n \geq 2 \end{cases},$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}, \qquad m_1, m_2 = 1,2,3\ldots$$

Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам



Цель: Модальный анализ круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам.

Имя файла с исходными данными: **5.8_S.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам, с плотностью материала ρ.

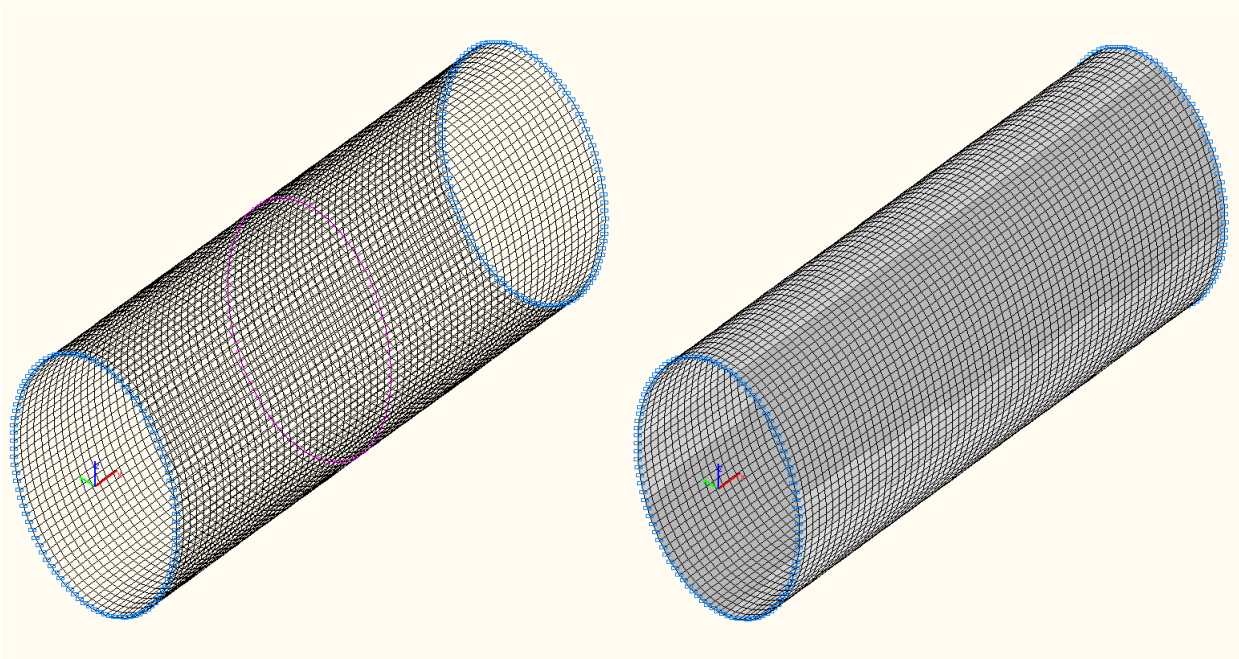
Ссылки: И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 426.
В.Л. Бидерман, Теория механических колебаний, Москва, Высшая школа, 1980, стр. 290.

Исходные данные:

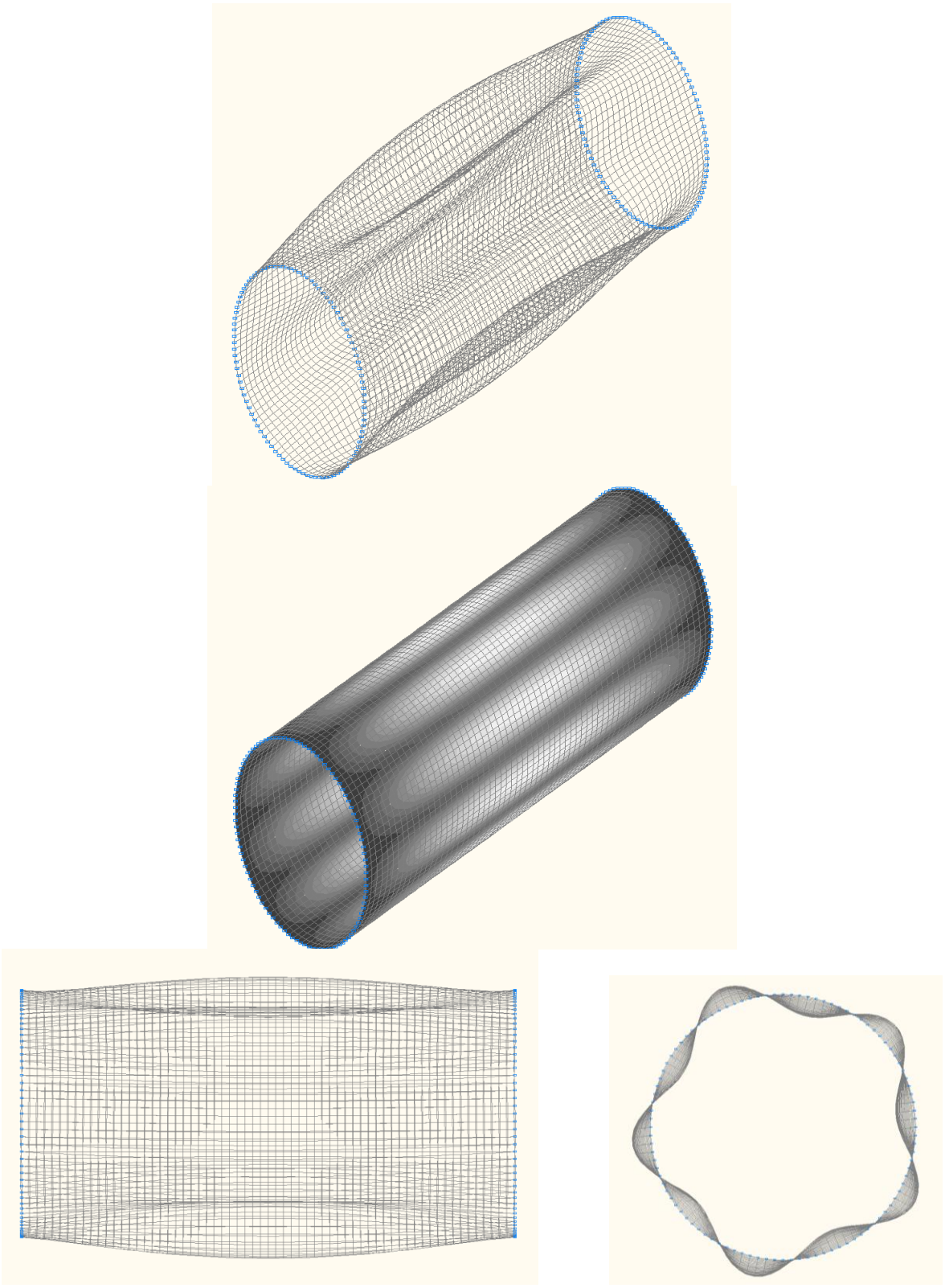
$E = 1.96 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.70$ т/м^3	- плотность материала;
$h = 0.25 \cdot 10^{-3}$ м	- толщина цилиндрической оболочки;
R = 0.076 м	- радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки;
L = 0.305 м	- длина цилиндрической оболочки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 6400 четырехузловых элементов оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом $4.765625 \cdot 10^{-3}$ м в меридиональном направлении (64 элемента) и с шагом 3.6º в окружном направлении (100 элементов). Обеспечение граничных условий на свободно опертых торцах достигается за счет наложения связей по направлениям линейных перемещений в их плоскости (степени свободы Y, Z). Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связей конечной жесткости (100 элементов типа 51) в узлах поперечного сечения плоскостью симметрии цилиндрической оболочки в меридиональном направлении (k_x = 1.0 кН/м). Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса цилиндрической оболочки: ow = γ·h, где γ = ρ·g = 75.537 кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 6500. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

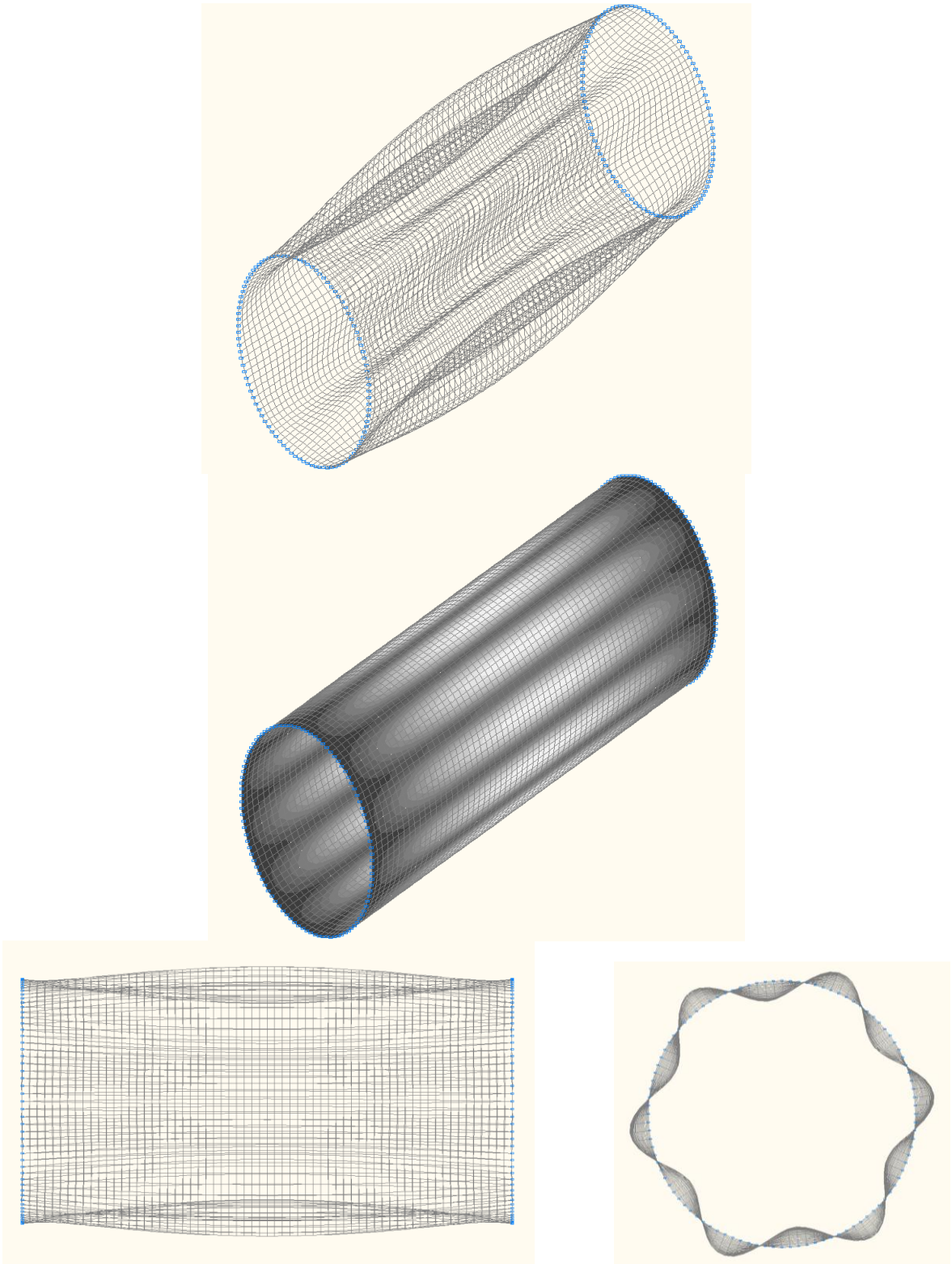
Результаты решения в SCAD



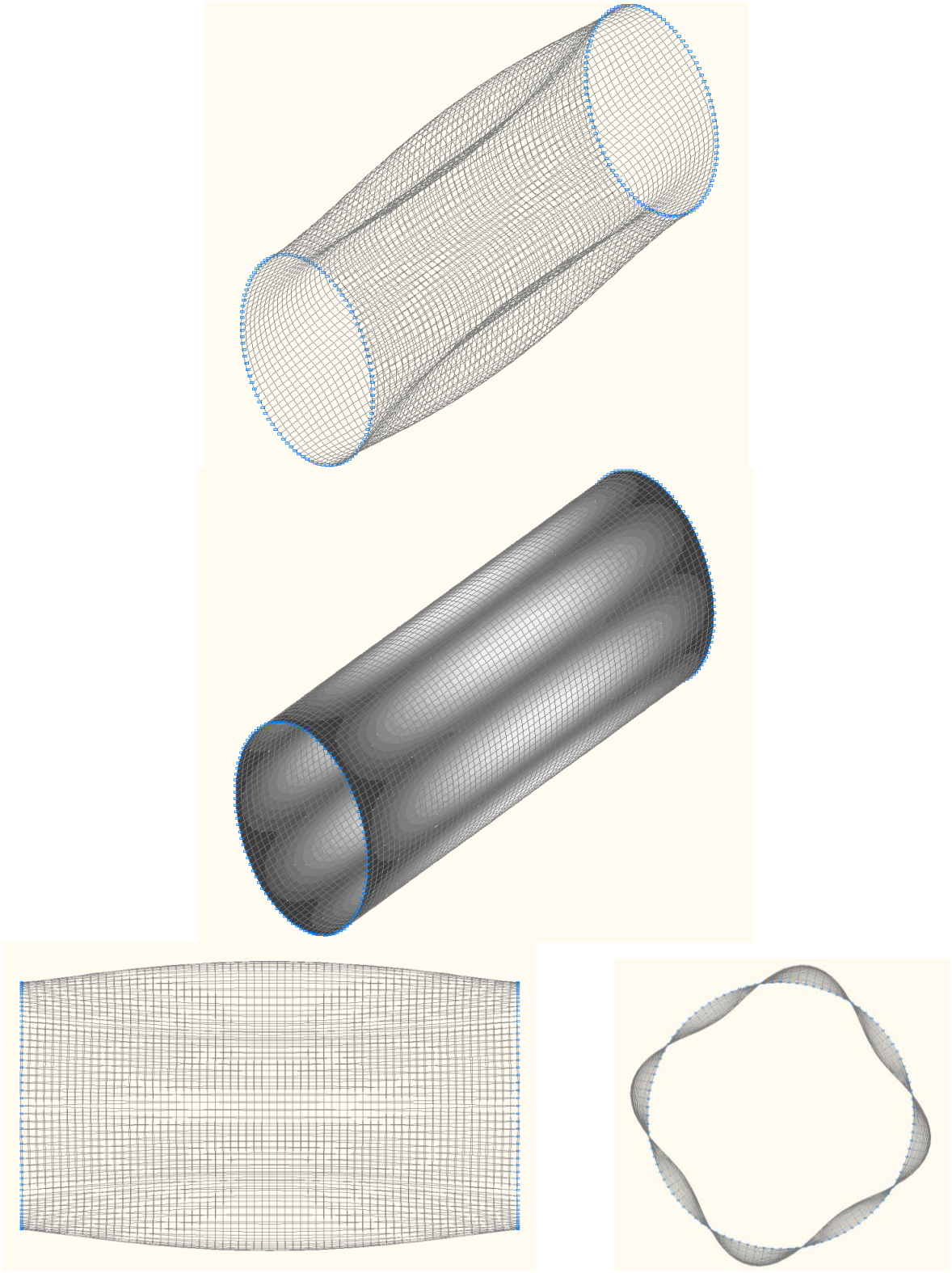
Расчетная схема



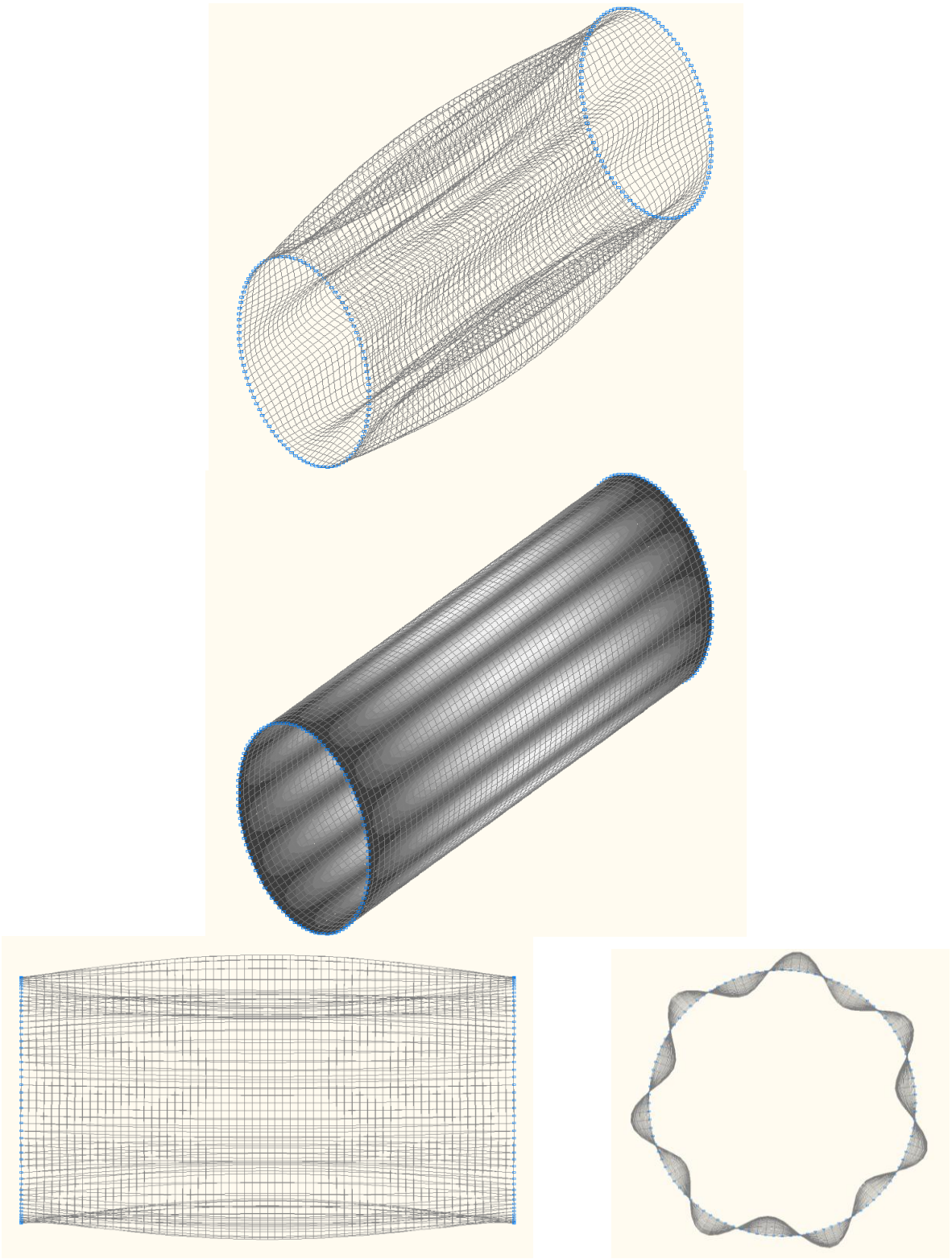
2-я (1-я теоретическая) собственная форма колебаний



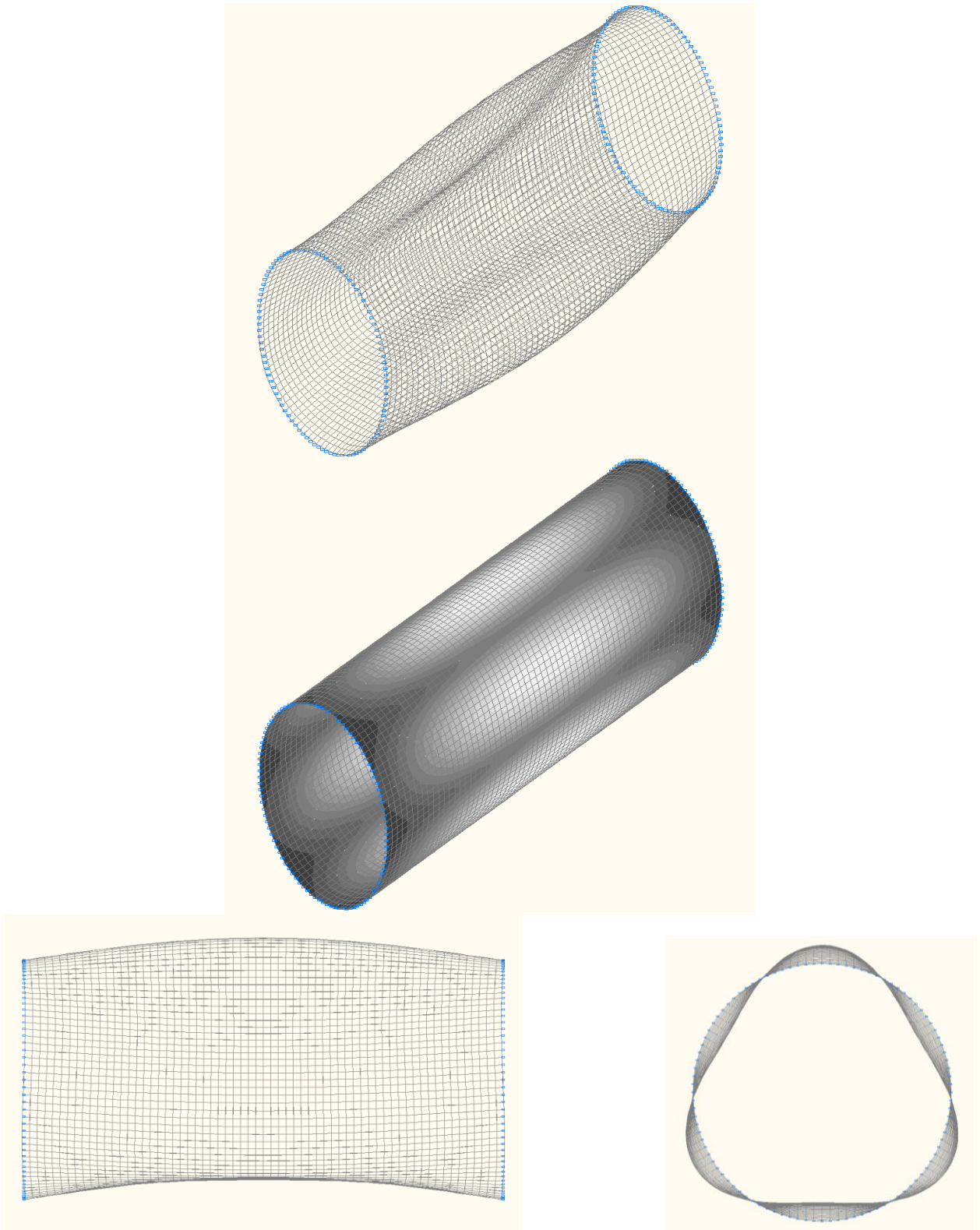
4-я (3-я теоретическая) собственная форма колебаний



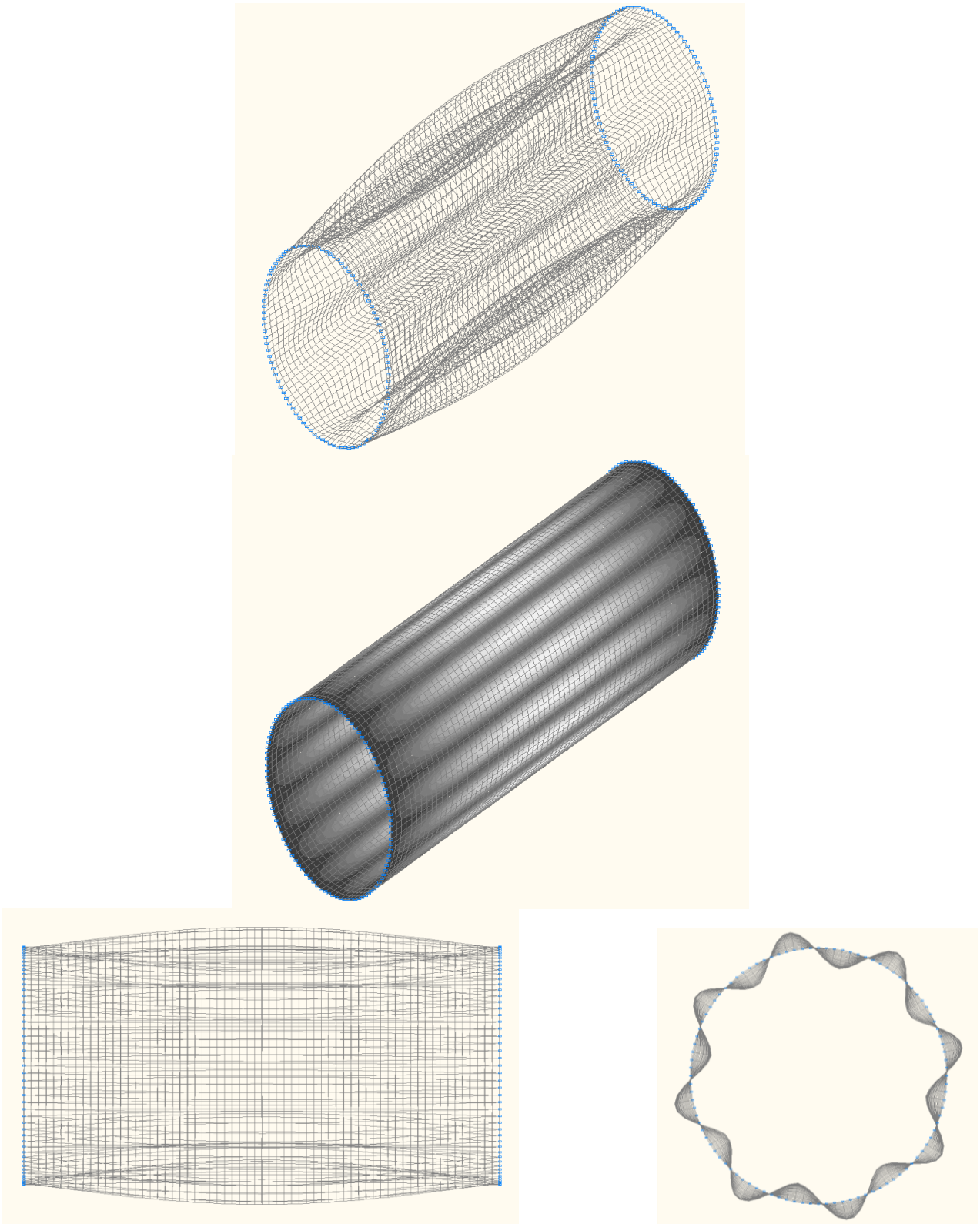
6-я (5-я теоретическая) собственная форма колебаний



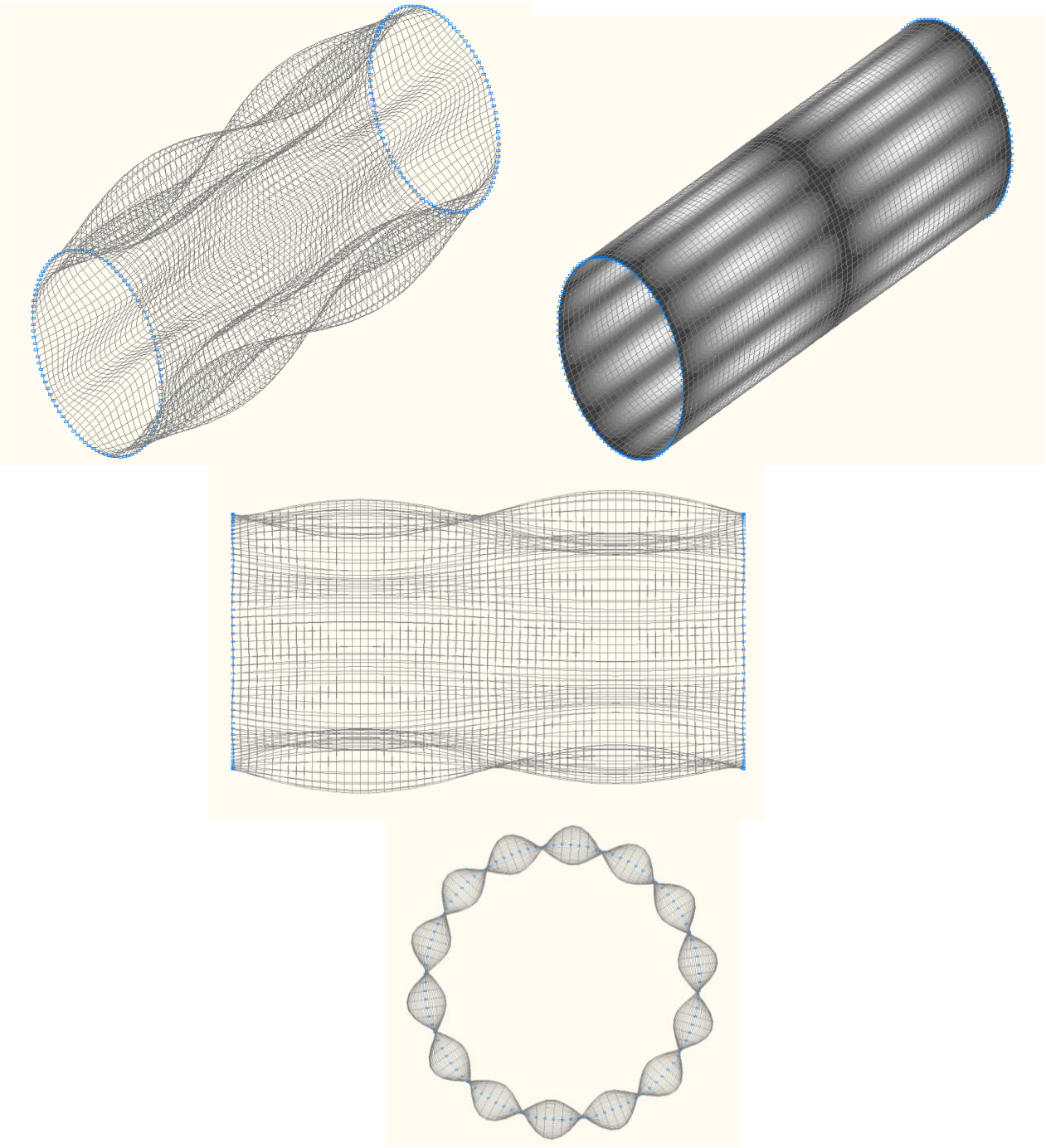
8-я (7-я теоретическая) собственная форма колебаний



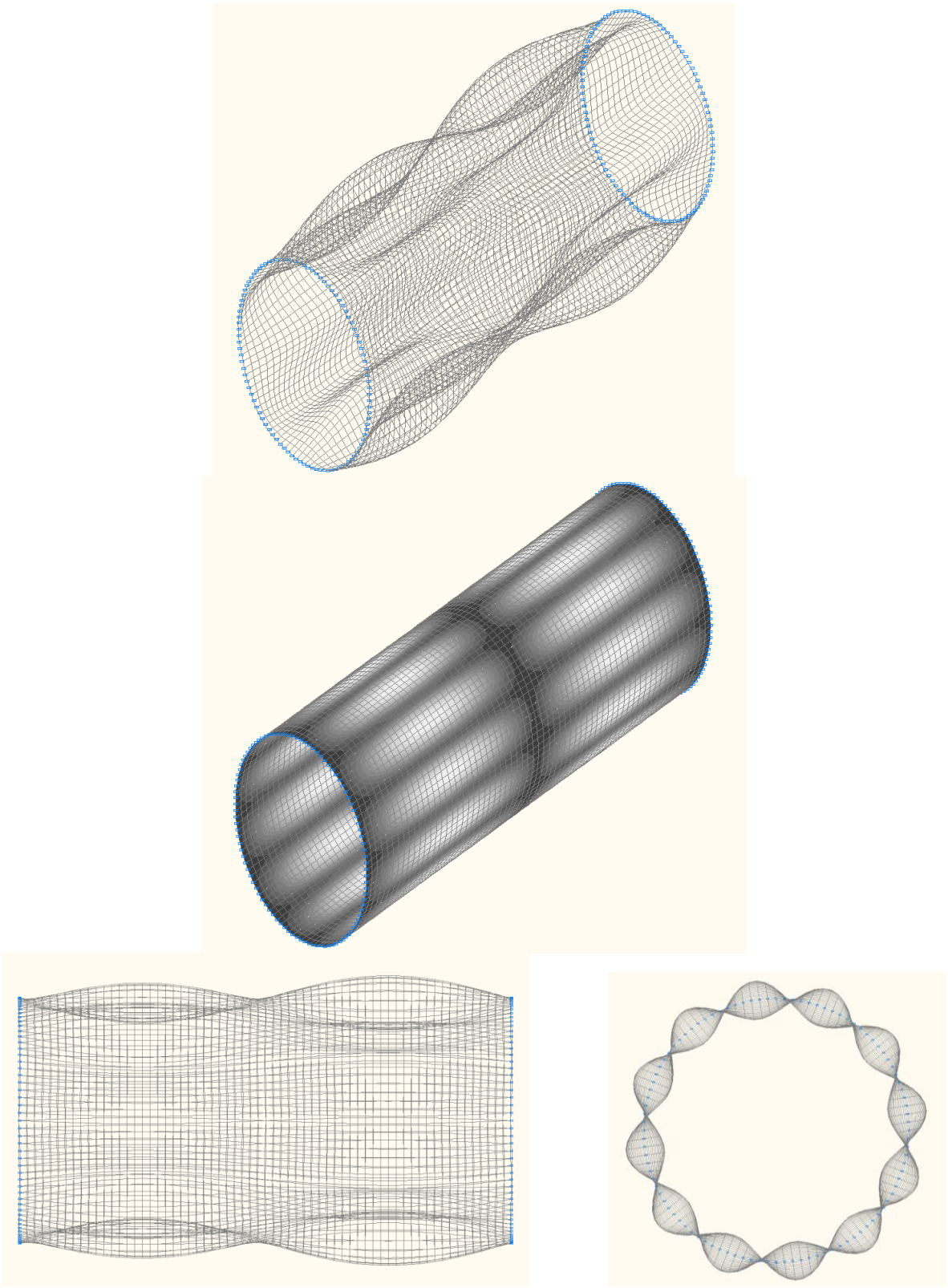
10-я (9-я теоретическая) собственная форма колебаний



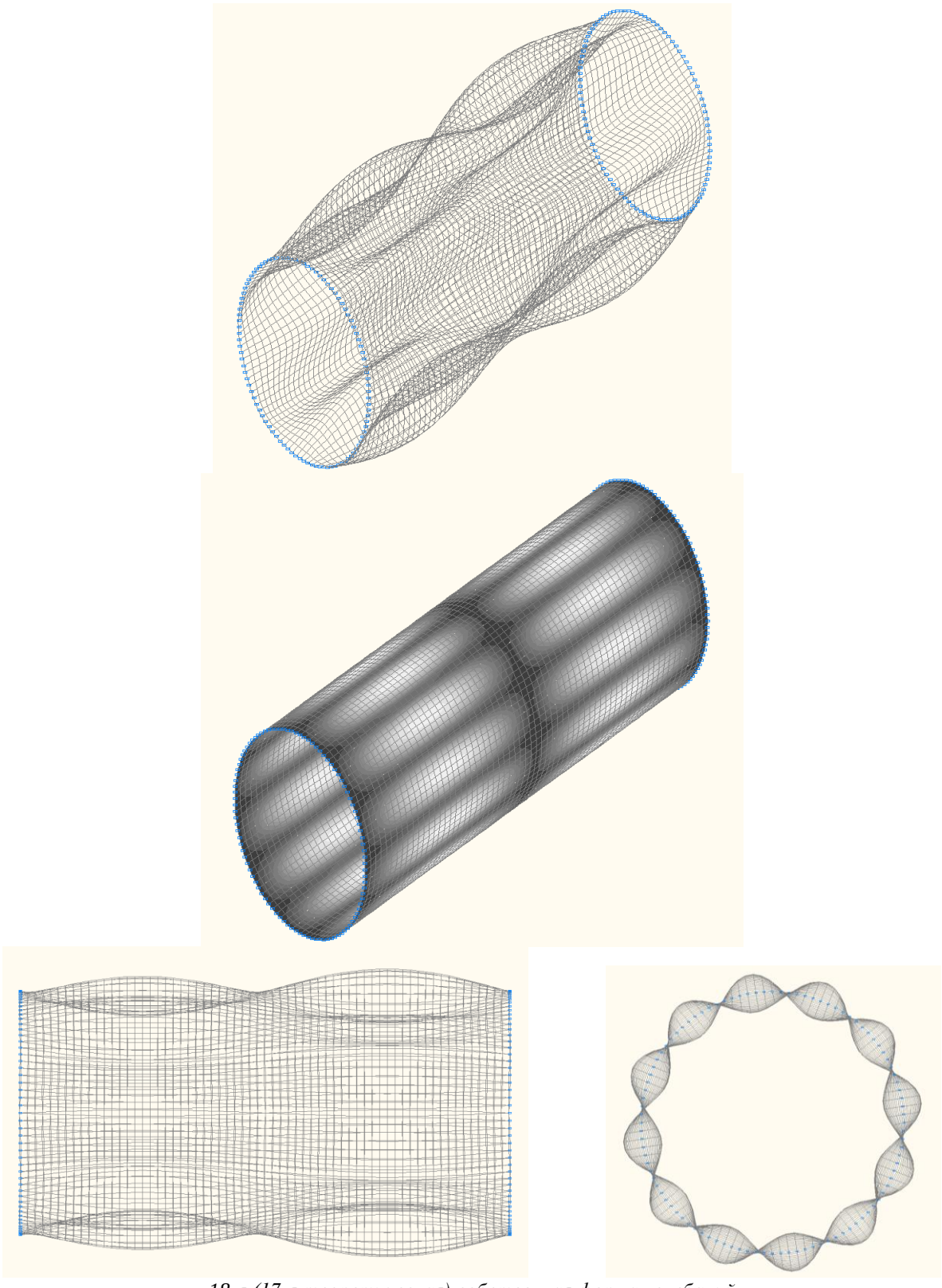
12-я (11-я теоретическая) собственная форма колебаний



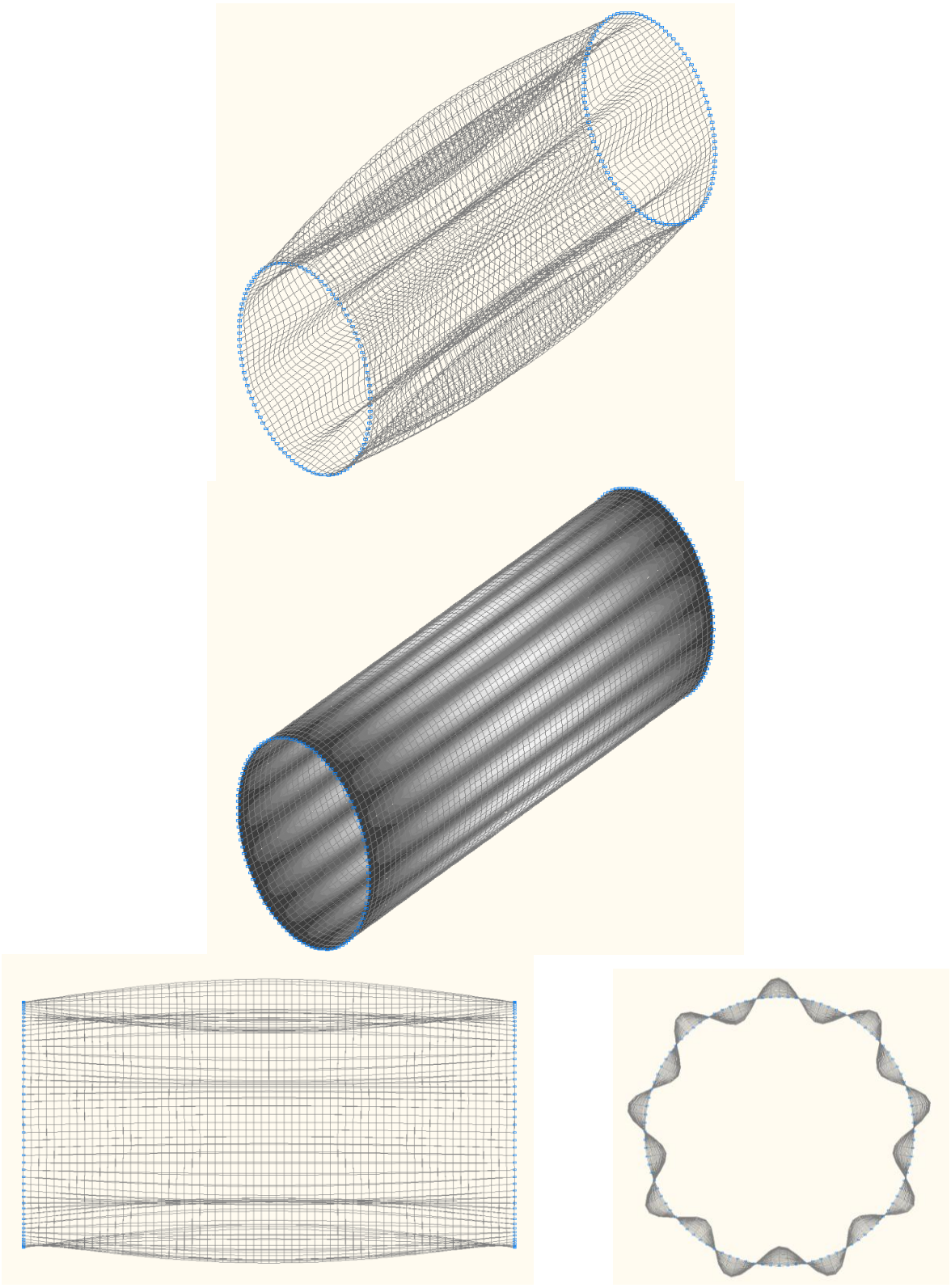
14-я (13-я теоретическая) собственная форма колебаний



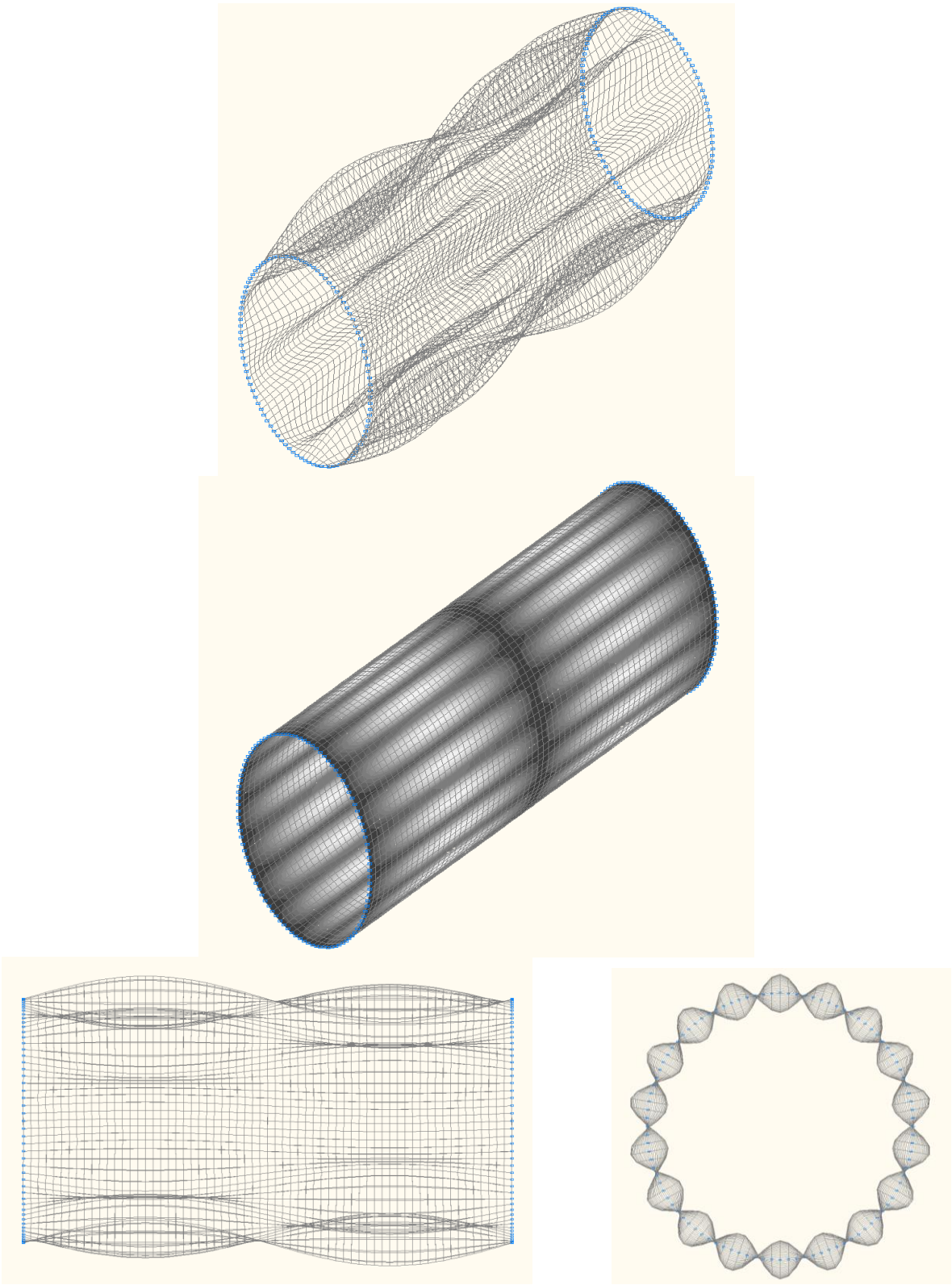
16-я (15-я теоретическая) собственная форма колебаний



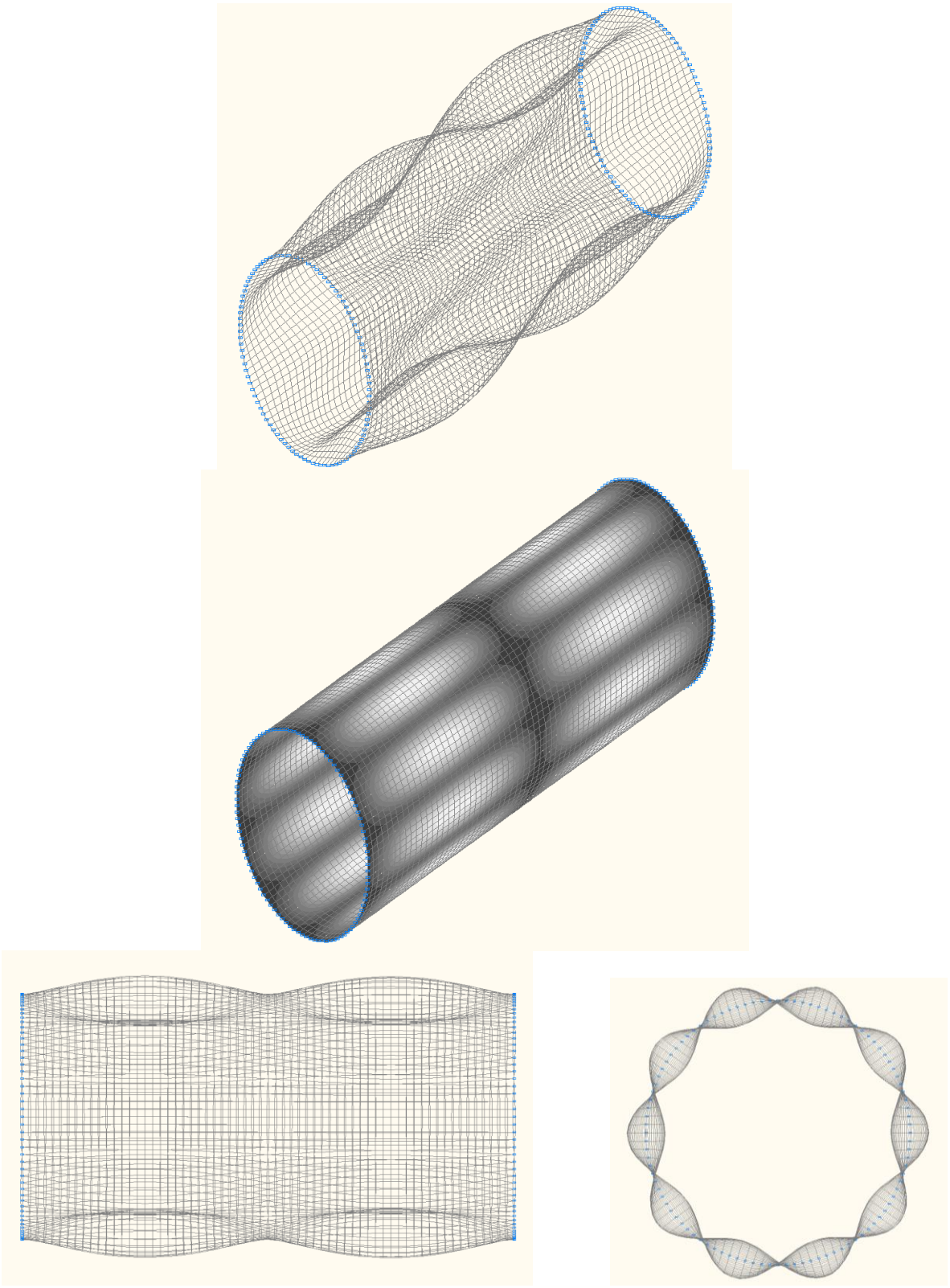
18-я (17-я теоретическая) собственная форма колебаний



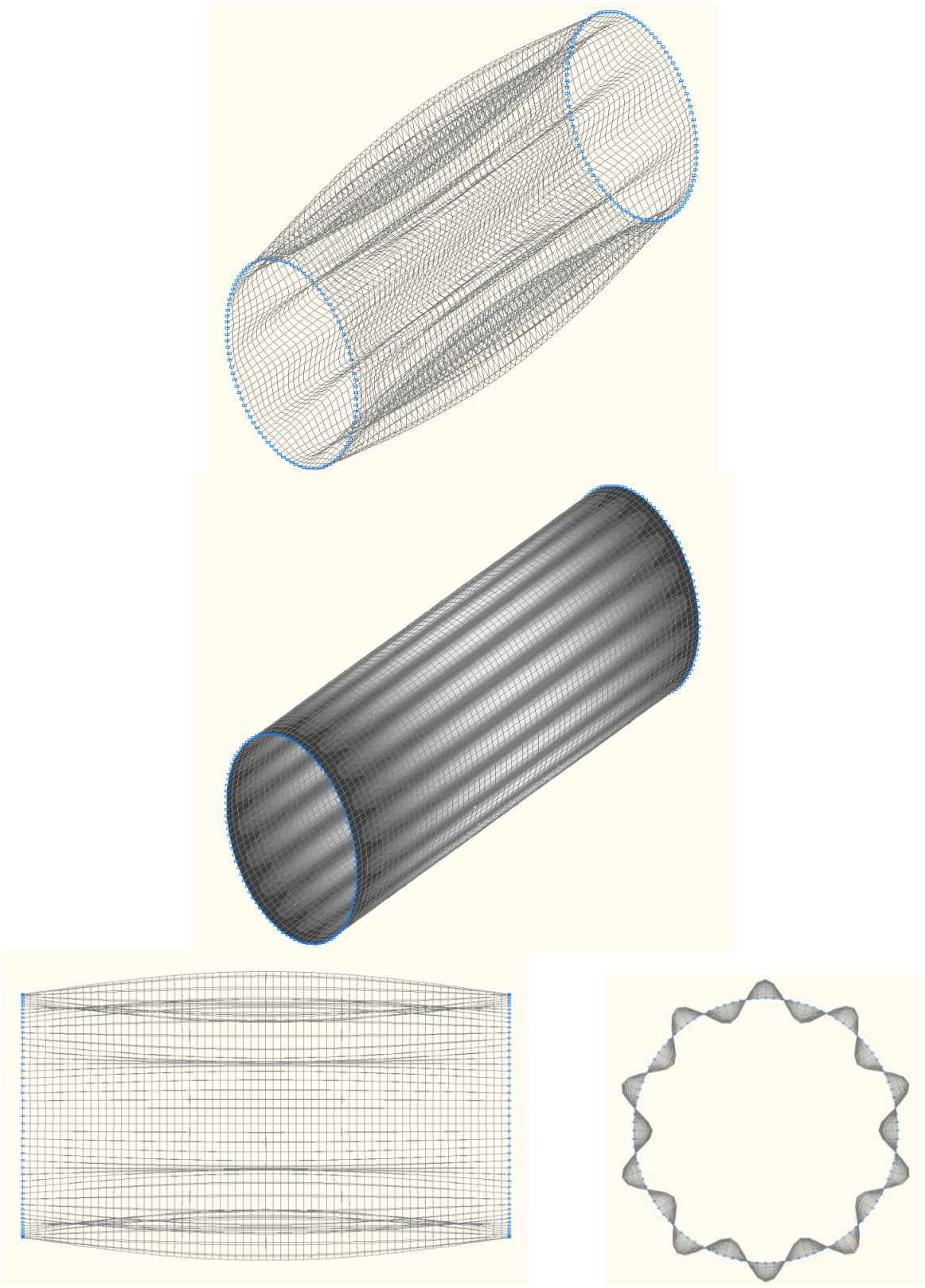
20-я (19-я теоретическая) собственная форма колебаний



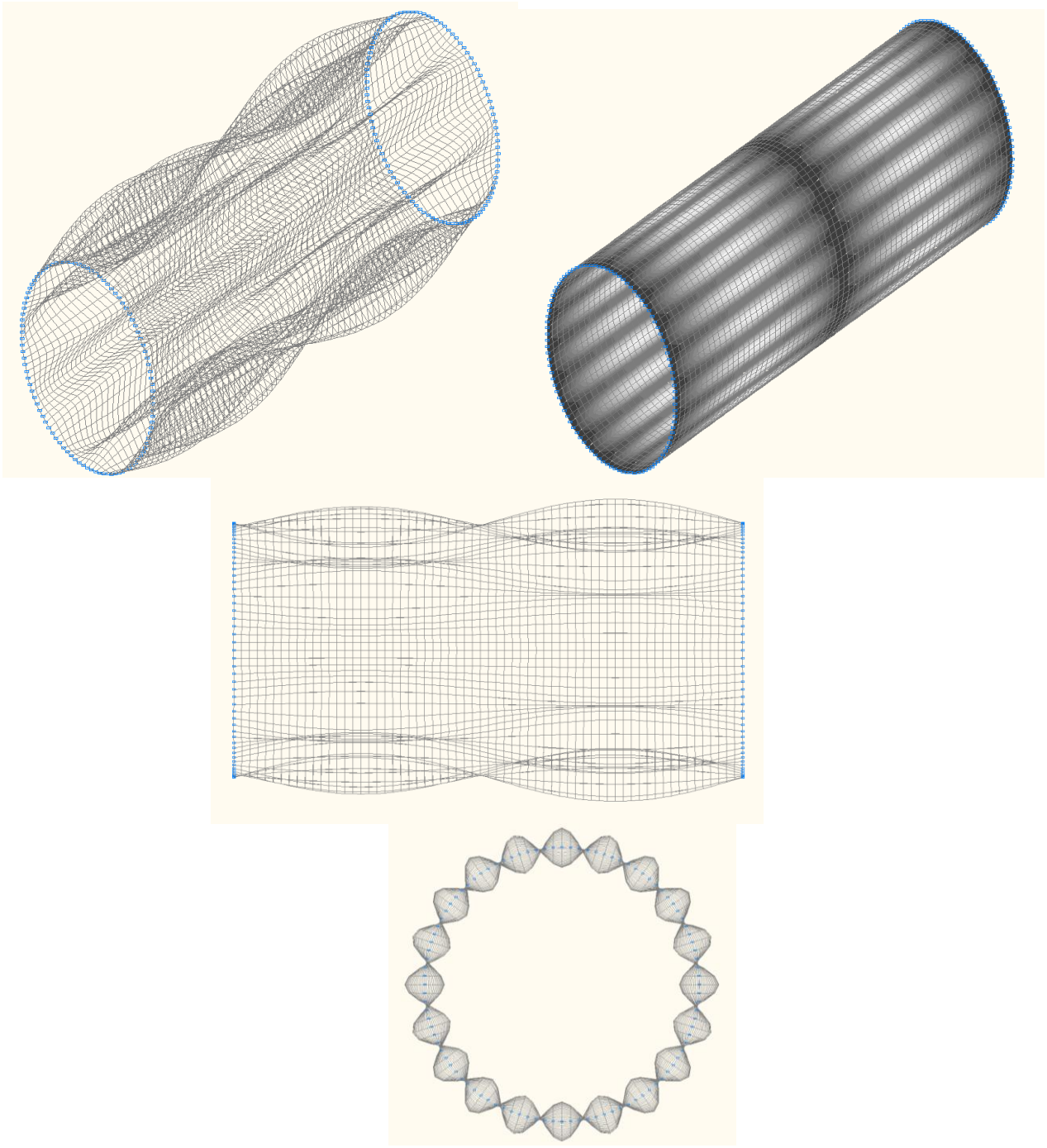
22-я (21-я теоретическая) собственная форма колебаний



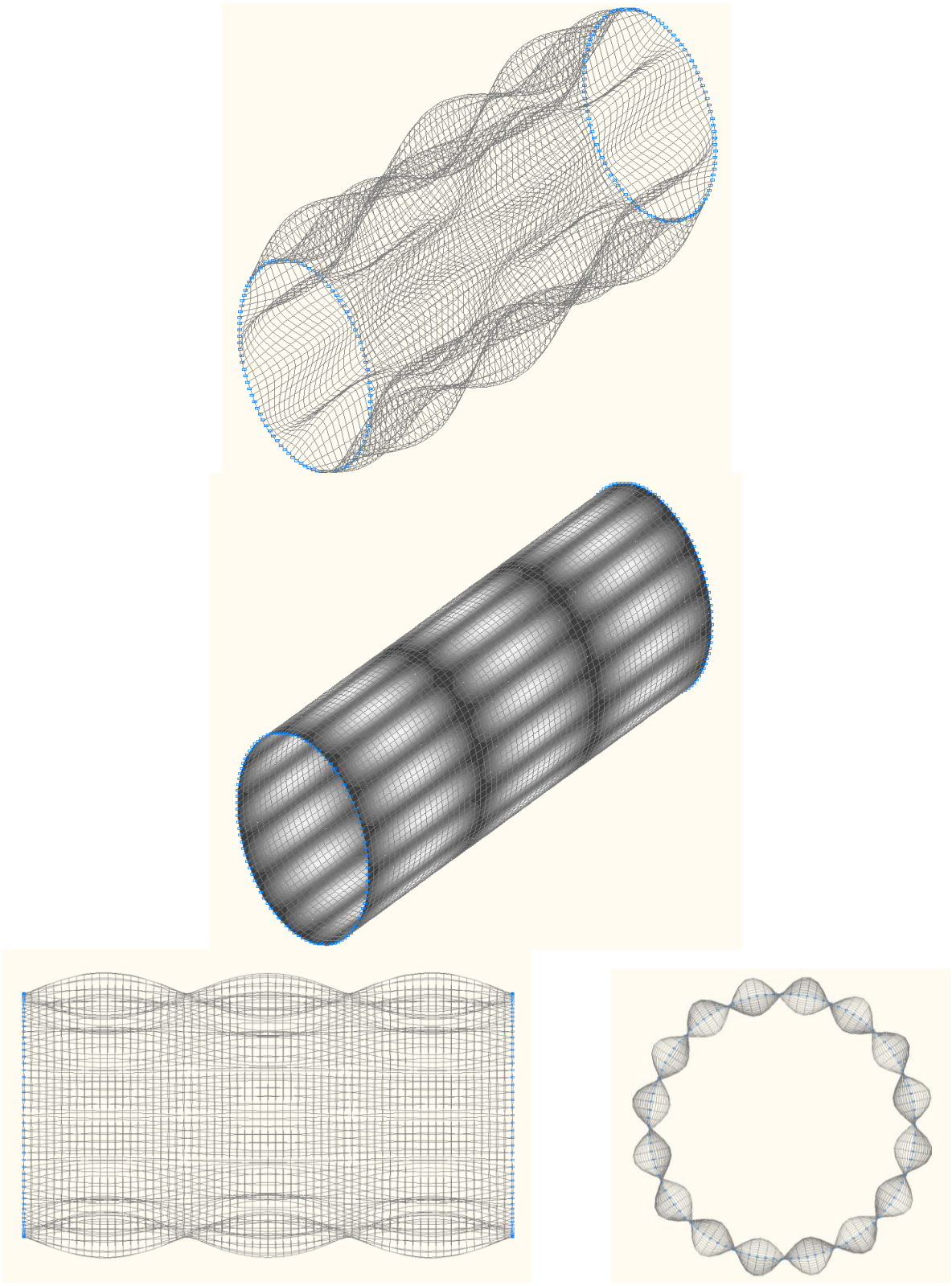
24-я (23-я теоретическая) собственная форма колебаний



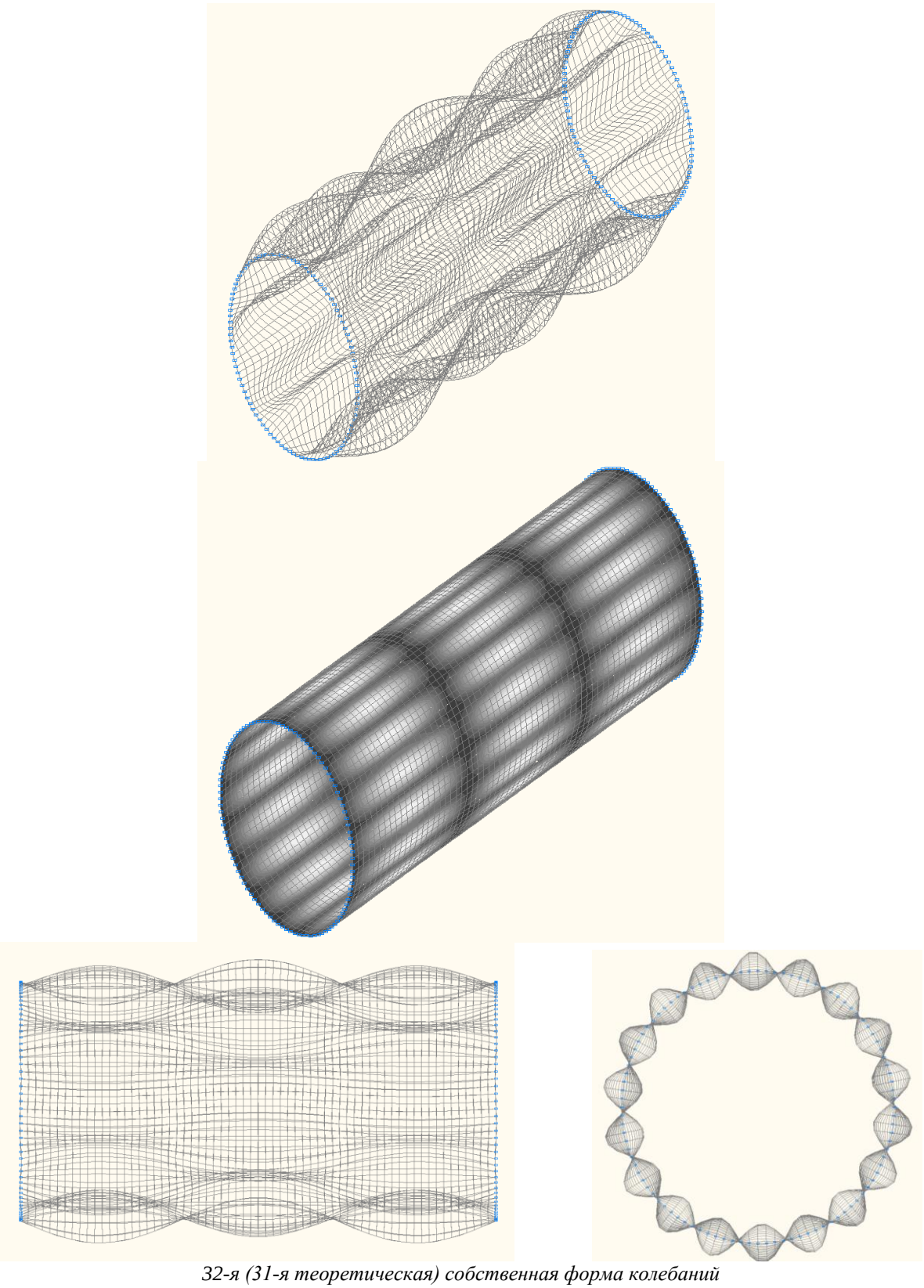
26-я (25-я теоретическая) собственная форма колебаний



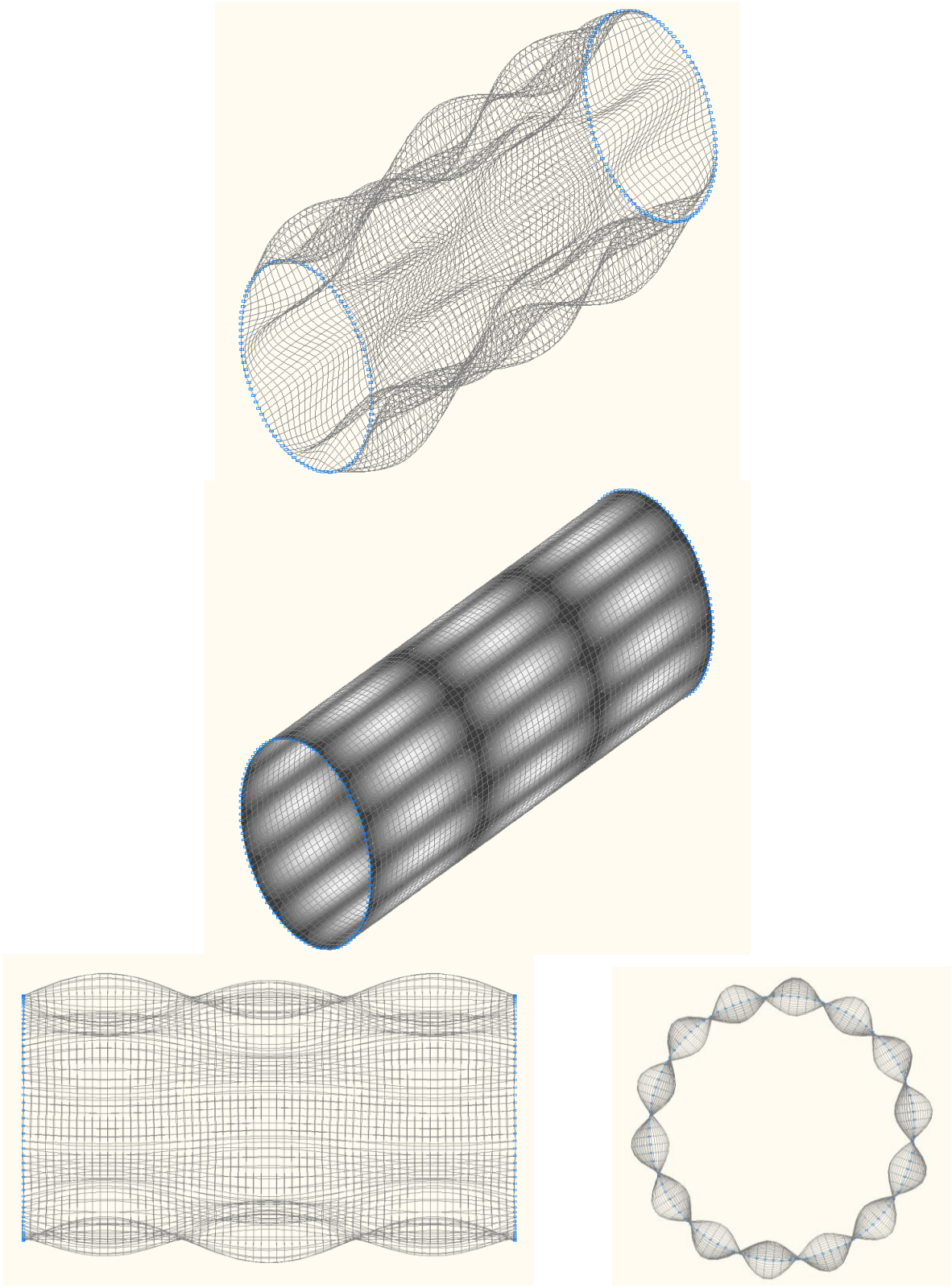
28-я (27-я теоретическая) собственная форма колебаний



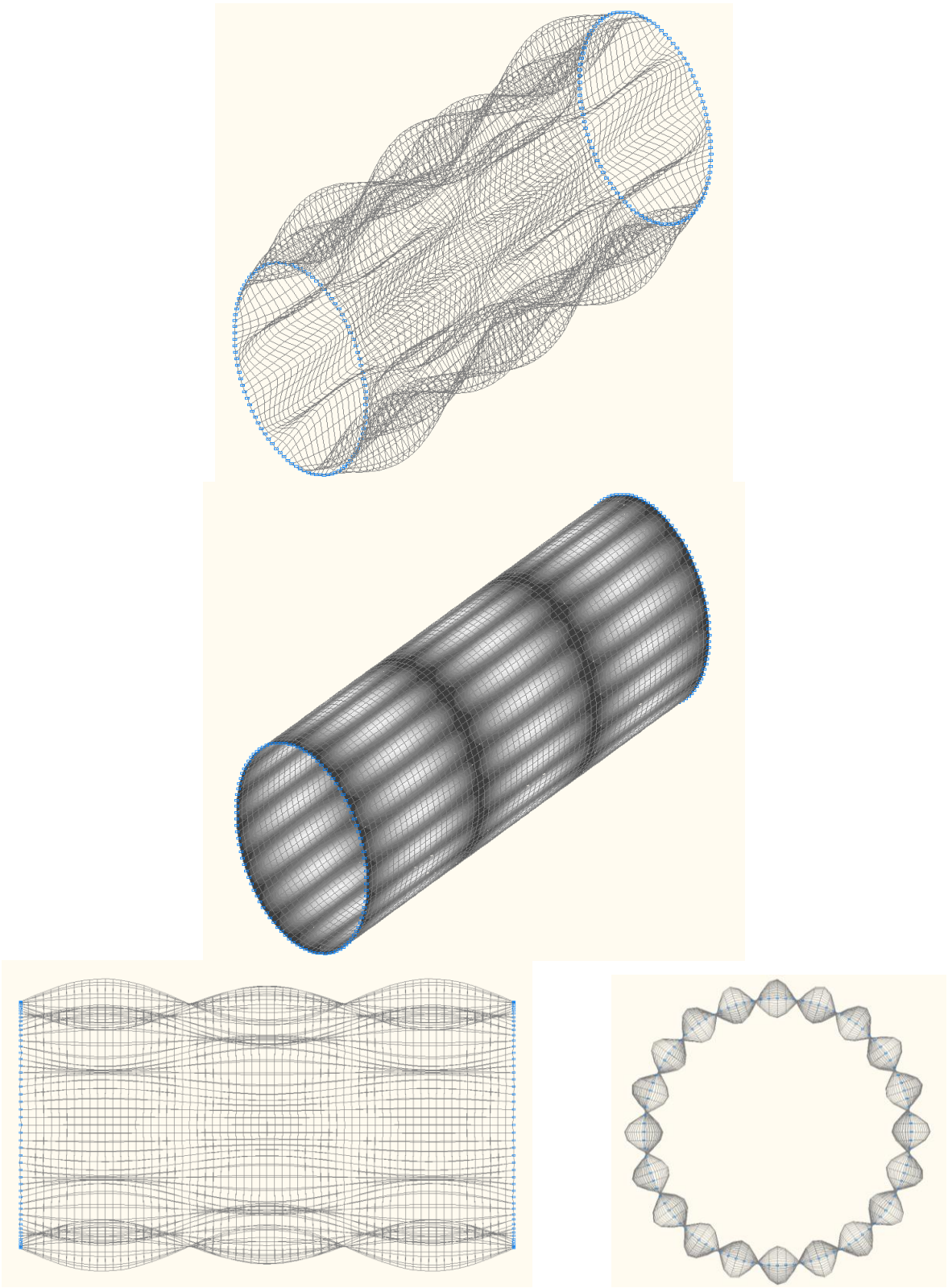
30-я (29-я теоретическая) собственная форма колебаний



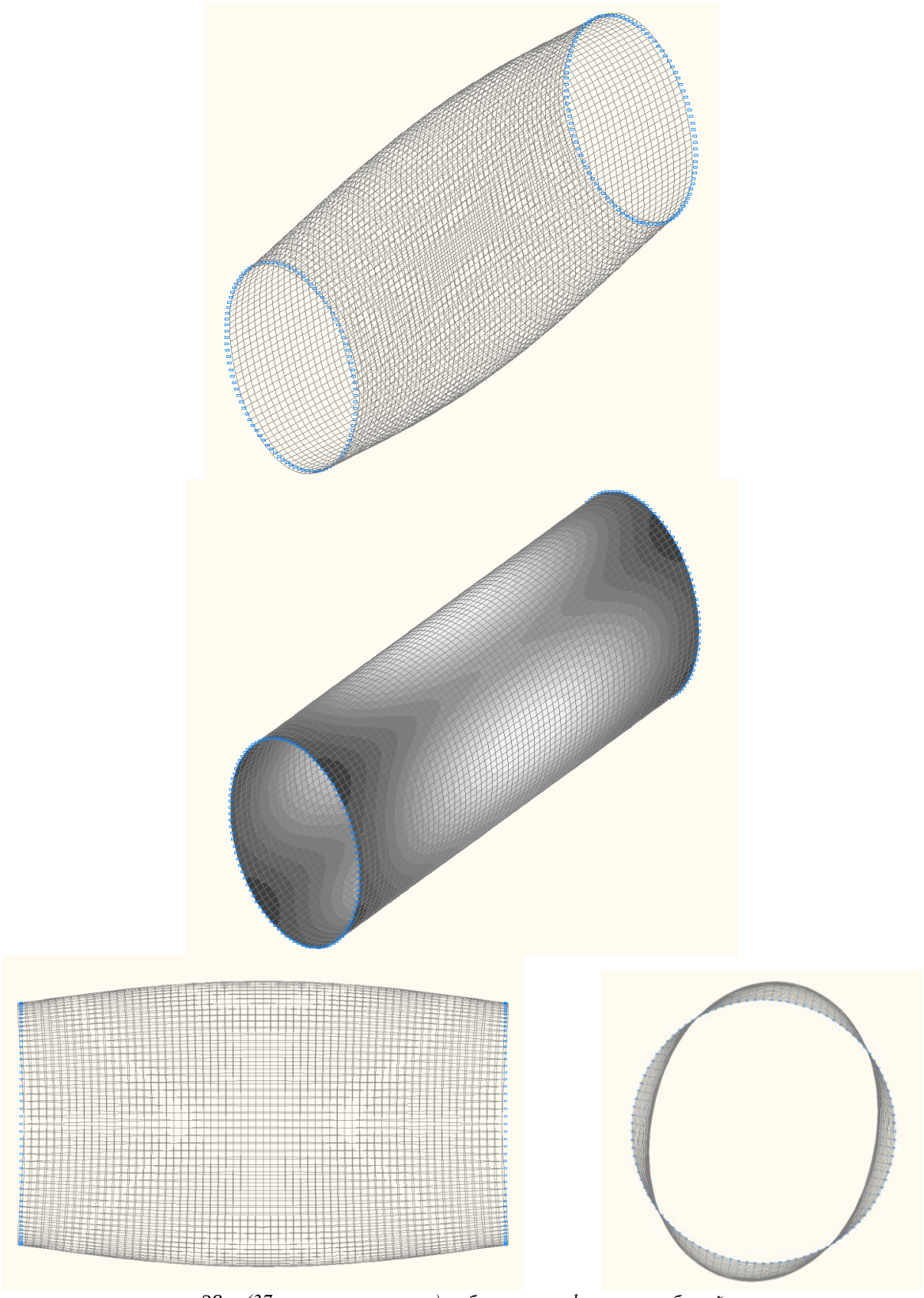
32-я (31-я теоретическая) собственная форма колебаний



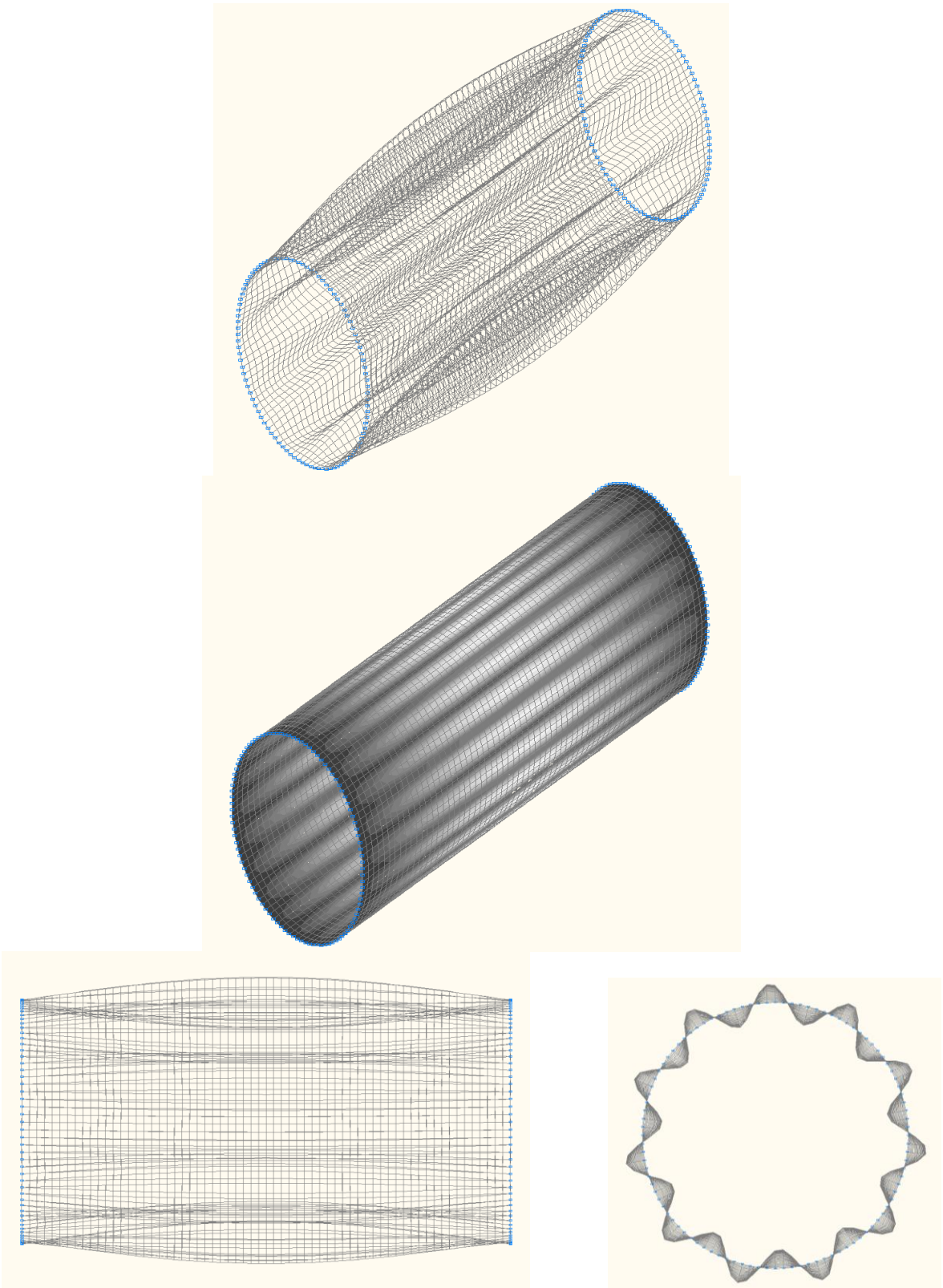
34-я (33-я теоретическая) собственная форма колебаний



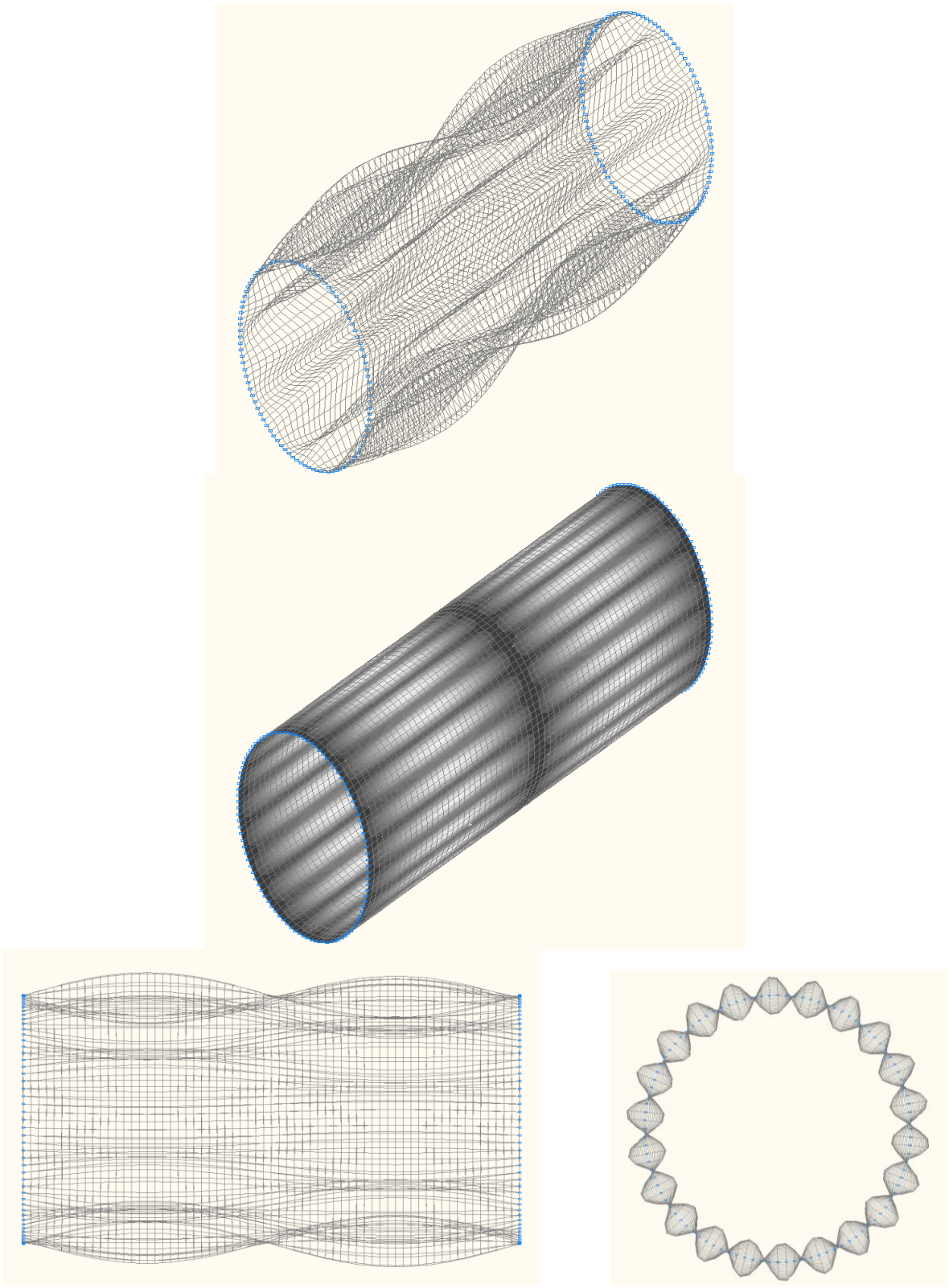
36-я (35-я теоретическая) собственная форма колебаний



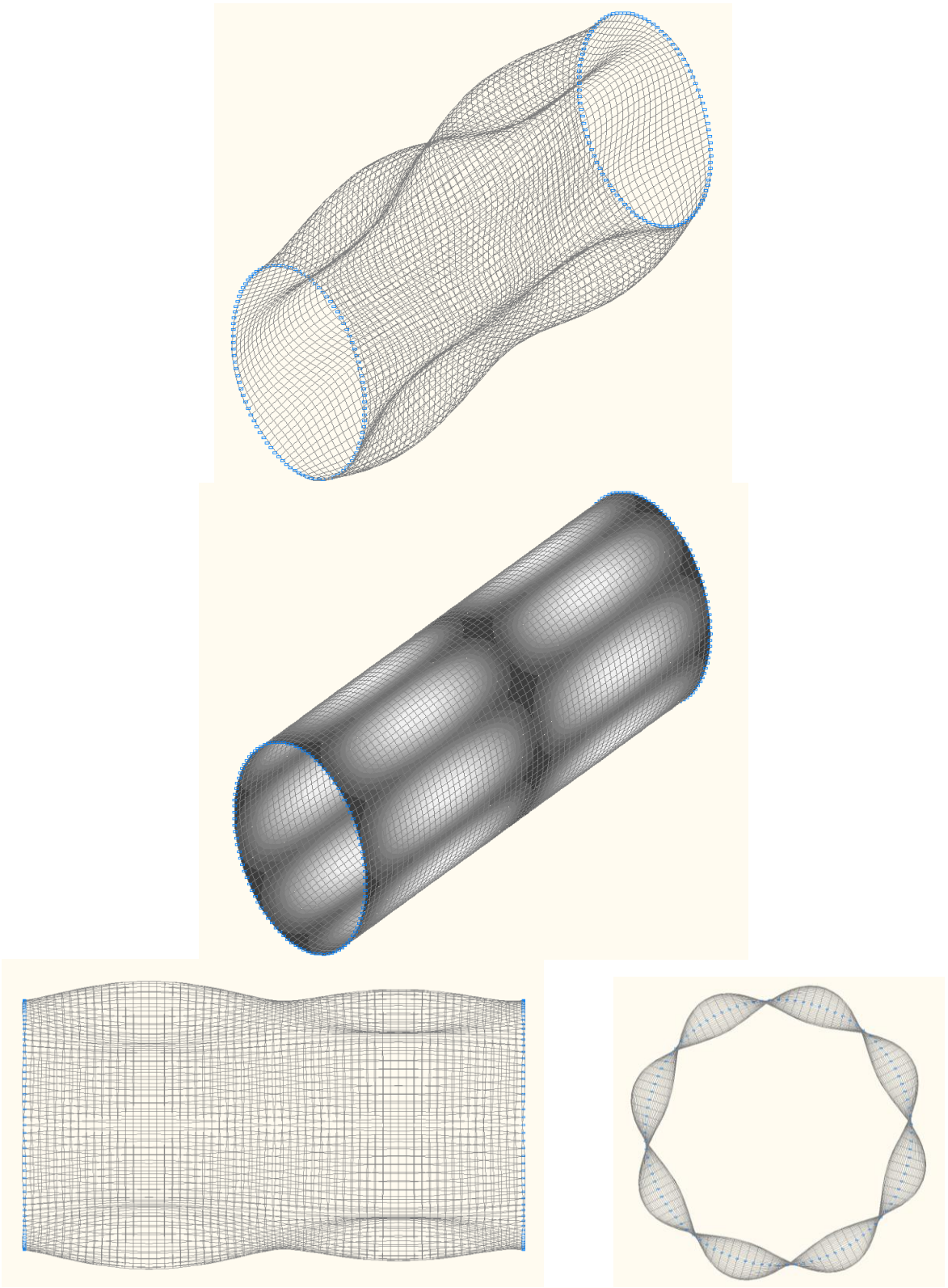
38-я (37-я теоретическая) собственная форма колебаний



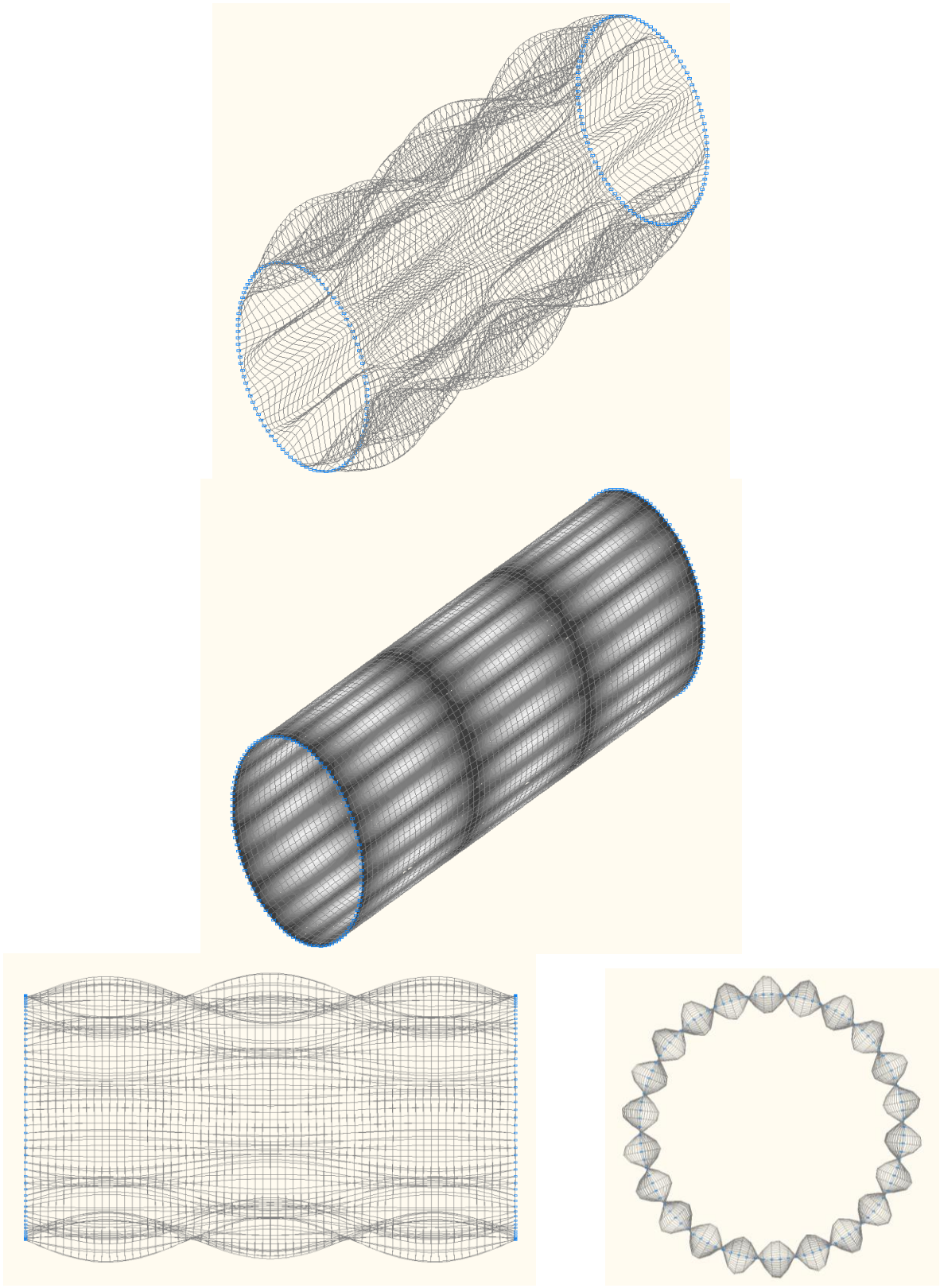
40-я (39-я теоретическая) собственная форма колебаний



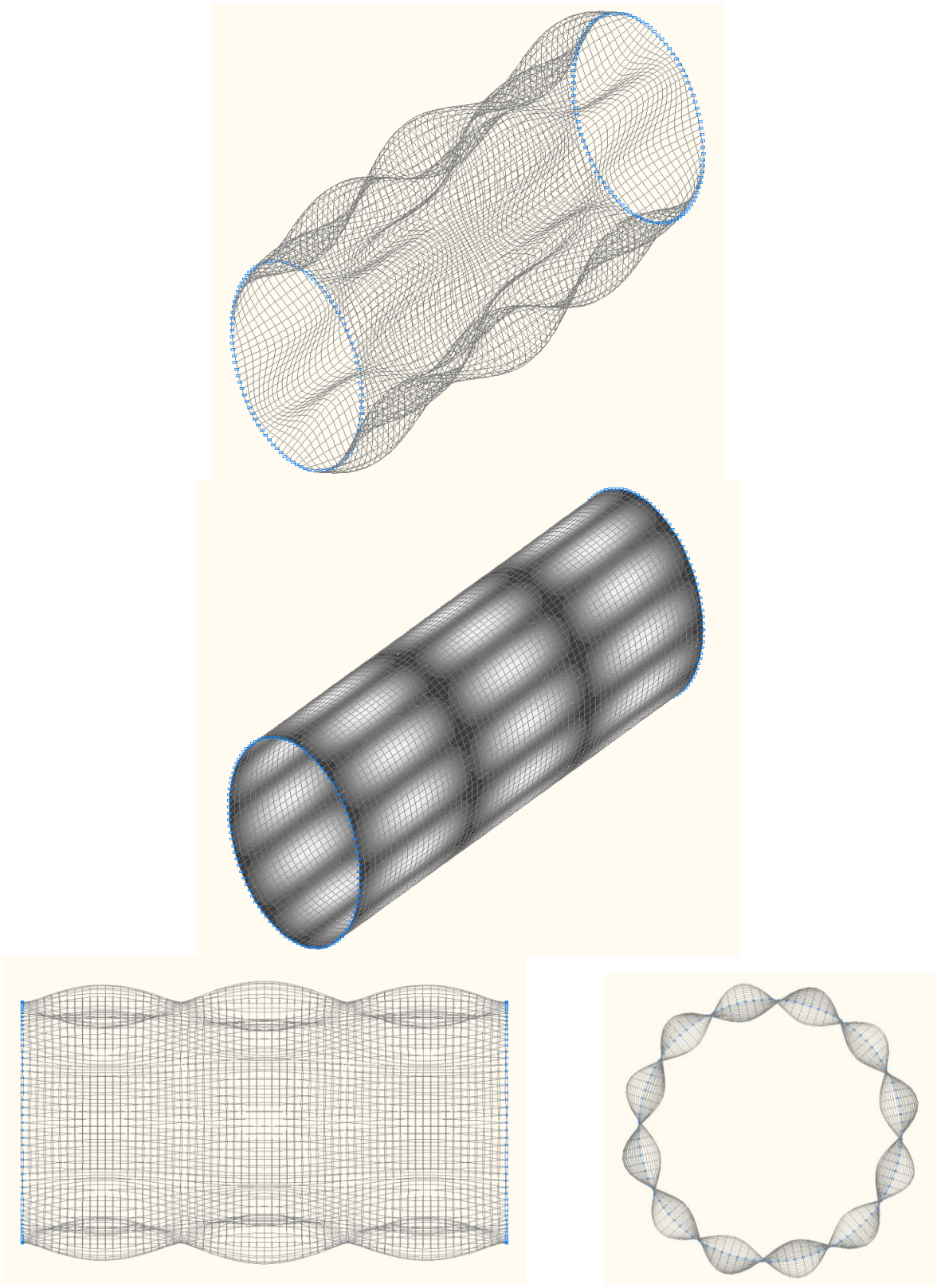
42-я (41-я теоретическая) собственная форма колебаний



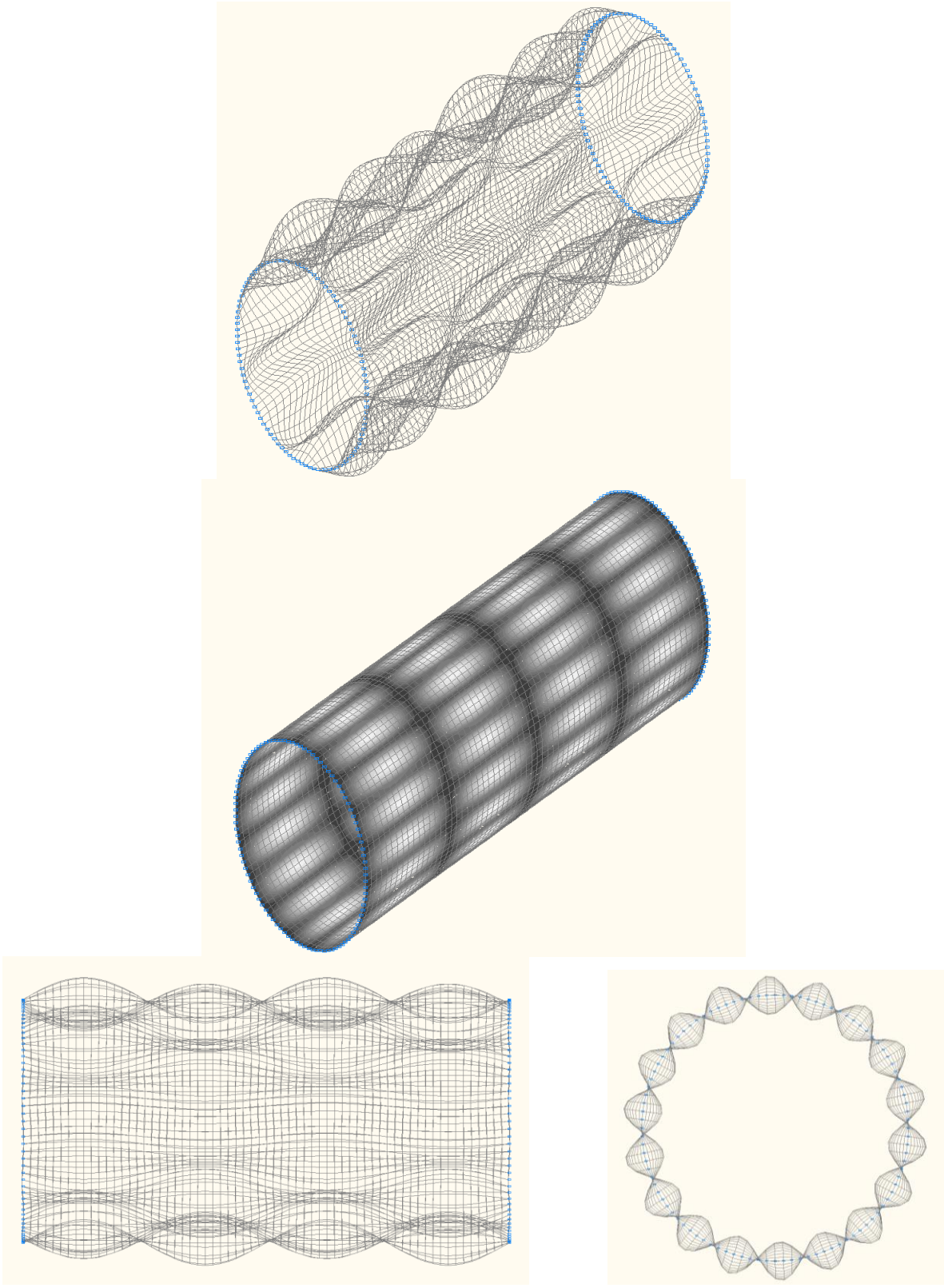
44-я (43-я теоретическая) собственная форма колебаний



46-я (45-я теоретическая) собственная форма колебаний



48-я (47-я теоретическая) собственная форма колебаний



50-я (49-я теоретическая) собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, Гц

Форма колебаний	**Число узловых окружностей m и меридианов n**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1, 2	2, 5	354.4	354.9	0.14
3, 4	2, 6	408.3	408.9	0.15
5, 6	2, 4	409.5	410.1	0.15
7, 8	2, 7	522.1	522.9	0.15

Форма колебаний	Число узловых окружностей m и меридианов n	Теория	SCAD	Отклонения, %
9, 10	2, 3	642.1	642.8	0.11
11, 12	2, 8	671.1	672.0	0.13
13, 14	3, 7	723.2	724.9	0.24
15, 16	3, 6	768.5	770.3	0.23
17, 18	3, 8	784.3	785.9	0.20
19, 20	2, 9	846.2	847.3	0.13
21, 22	3, 9	914.9	916.6	0.19
23, 24	3, 5	962.3	964.5	0.23
25, 26	2, 10	1044.3	1045.7	0.13
27, 28	3, 10	1090.7	1092.5	0.17
29, 30	4, 8	1095.6	1099.3	0.34
31, 32	4, 9	1115.7	1119.2	0.31
33, 34	4, 7	1194.2	1198.2	0.33
35, 36	4, 10	1223.2	1226.5	0.27
37, 38	2, 2	1241.3	1242.5	0.10
39, 40	2, 11	1264.3	1265.9	0.13
41, 42	3, 11	1299.1	1301.2	0.16
43, 44	3, 4	1368.6	1370.9	0.17
45, 46	4, 11	1391.6	1395.0	0.24
47, 48	4, 6	1444.4	1448.8	0.30
49, 50	5, 9	1470.4	1477.2	0.46
51, 52	5, 10	1474.4	1480.6	0.42
53, 54	2, 12	1505.8	1507.5	0.11
55, 56	3, 12	1534.3	1536.6	0.15
57, 58	5, 11	1570.6	1576.5	0.38
59, 60	5, 8	1584.6	1591.9	0.46
61, 62	4, 12	1603.7	1607.1	0.21
63, 64	5, 12	1735.5	1741.2	0.33
65, 66	2, 13	1768.5	1770.3	0.10
67, 68	3, 13	1793.5	1795.9	0.13
69, 70	6, 10	1837.2	1848.0	0.59
71, 72	5, 7	1842.3	1850.1	0.42
73, 74	6, 11	1844.3	1854.3	0.54
75, 76	4, 13	1849.2	1852.7	0.19
77, 78	4, 5	1892.8	1897.7	0.26
79, 80	6, 12	1942.4	1951.9	0.49
81, 82	6, 9	1942.8	1954.3	0.59
83, 84	5, 13	1951.0	1956.7	0.29
85, 86	2, 14	2052.3	2054.1	0.09
87, 88	3, 14	2075.2	2077.7	0.12
89, 90	6, 13	2111.1	2120.1	0.43
91, 92	4, 14	2122.7	2126.3	0.17
93, 94	3, 3	2137.0	2140.0	0.14
95, 96	6, 8	2181.3	2193.4	0.55
97, 98	5, 14	2205.6	2211.2	0.25
99, 100	7, 11	2199.6	2215.4	0.72
101, 102	7, 12	2223.0	2237.8	0.67
103, 104	5, 6	2275.4	2283.7	0.36
105, 106	7, 10	2281.7	2298.3	0.73
107, 108	7, 13	2333.3	2347.3	0.60
109, 110	6, 14	2333.8	2342.5	0.37
111, 112	2, 15	2357.2	2358.9	0.07
113, 114	3, 15	2378.9	2381.2	0.10
115, 116	4, 15	2421.3	2424.8	0.14
117, 118	7, 9	2485.9	2503.2	0.70
119, 120	5, 15	2492.0	2497.5	0.22
121, 122	7, 14	2512.8	2526.3	0.54
123, 124	8, 12	2565.0	2586.6	0.84

Форма колебаний	Число узловых окружностей m и меридианов n	Теория	SCAD	Отклонения, %
125, 126	6, 7	2574.4	2586.9	0.49
127, 128	6, 15	2598.7	2607.3	0.33
129,130	8, 13	2613.1	2633.7	0.79
131, 132	8, 11	2614.4	2637.0	0.86
133, 134	4, 4	2630.0	2635.4	0.21
135, 136	2, 16	2683.2	2684.5	0.05
137, 138	3, 16	2704.1	2706.1	0.07
139, 140	8, 14	2742.8	2762.4	0.71
141, 142	4, 16	2743.2	2746.5	0.12
143, 144	7, 15	2747.0	2759.9	0.47
145, 146	8, 10	2776.0	2799.3	0.84
147, 148	5, 16	2806.0	2811.3	0.19
149, 150	2, 1	2832.3	2835.3	0.11

Замечания: При аналитическом решении собственные частоты колебаний ω круговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам, с плотностью материала ρ могут быть определены из характеристического уравнения:

$$\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot\rho\cdot R^2\cdot\left(1-\nu^2\right)}{E}\right)^3\cdot\omega^6+K2\cdot\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot\rho\cdot R^2\cdot\left(1-\nu^2\right)}{E}\right)^2\cdot\omega^4+K1\cdot\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot\rho\cdot R^2\cdot\left(1-\nu^2\right)}{E}\right)\cdot\omega^2+K0=0$$, где:

$$K2=-1-\frac{1}{2}\cdot(3-\nu)\cdot\left[\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right]-\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left\{\left[\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right]^2+2\cdot(1-\nu)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right\}$$

$$K1=\frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot\left[\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right]^2+\frac{1}{2}\cdot\left(3-\nu-2\cdot\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot n^2+$$

$$\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(3-\nu)\cdot\left[\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right]^3+2\cdot(1-\nu)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^4-\left(2-\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^2-\frac{1}{2}(3+\nu)\cdot n^4+\right.$$

$$\left.2\cdot(1-\nu)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right\}+\frac{h^4}{144\cdot R^4}\cdot\left\{2\cdot(1-\nu)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^6+\left(1-\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^4\cdot n^2\right\}$$

$$K0=-\frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^4-\frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left\{\left[\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right]^4-2\cdot\left(4-\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^4\cdot n^2-\right.$$

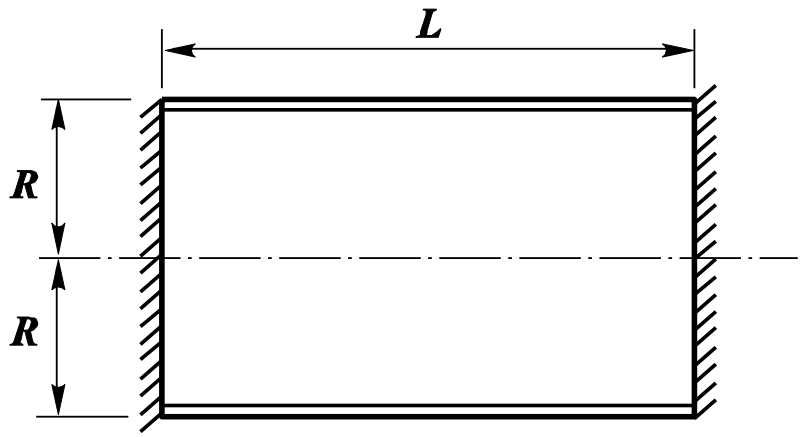
$$\left.8\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^4-2\cdot n^6+4\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^4+4\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^2+n^4\right\}-$$

$$\frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot\frac{h^4}{144\cdot R^4}\cdot\left\{4\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^8-4\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^6\cdot n^2+\left(1-\nu^2\right)\cdot\left(\frac{(m-1)\cdot\pi\cdot R}{L}\right)^4\cdot n^4\right\}$$

$m=2,3,4\ldots$ - число узловых линий в окружном направлении с учетом линий по торцевым опорным контурам,

$n=0,1,2,\ldots$ - число пар узловых линий в меридиональном направлении при расположении каждой пары на одном диаметре.

Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам



***Цель*:** Модальный анализ круговой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам.

Имя файла с исходными данными: **5.8_C.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω круговой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам, с плотностью материала ρ.

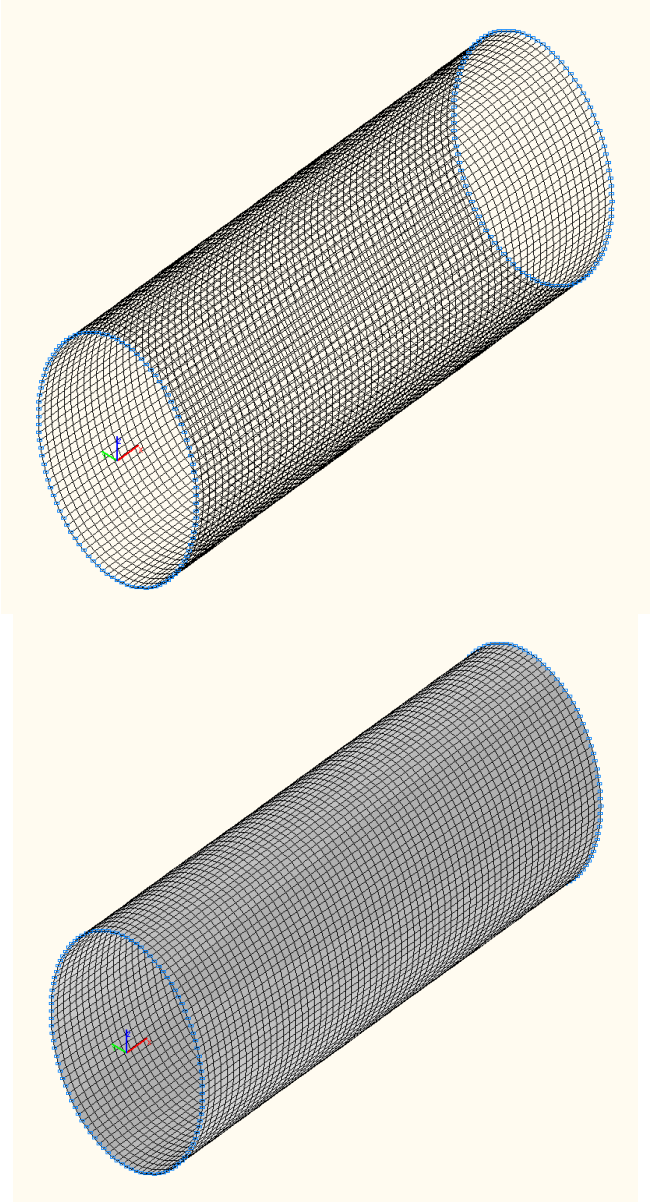
Ссылки: И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 437.
В.С. Гонткевич, Собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек, Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, КФАН, 1961.

Исходные данные:

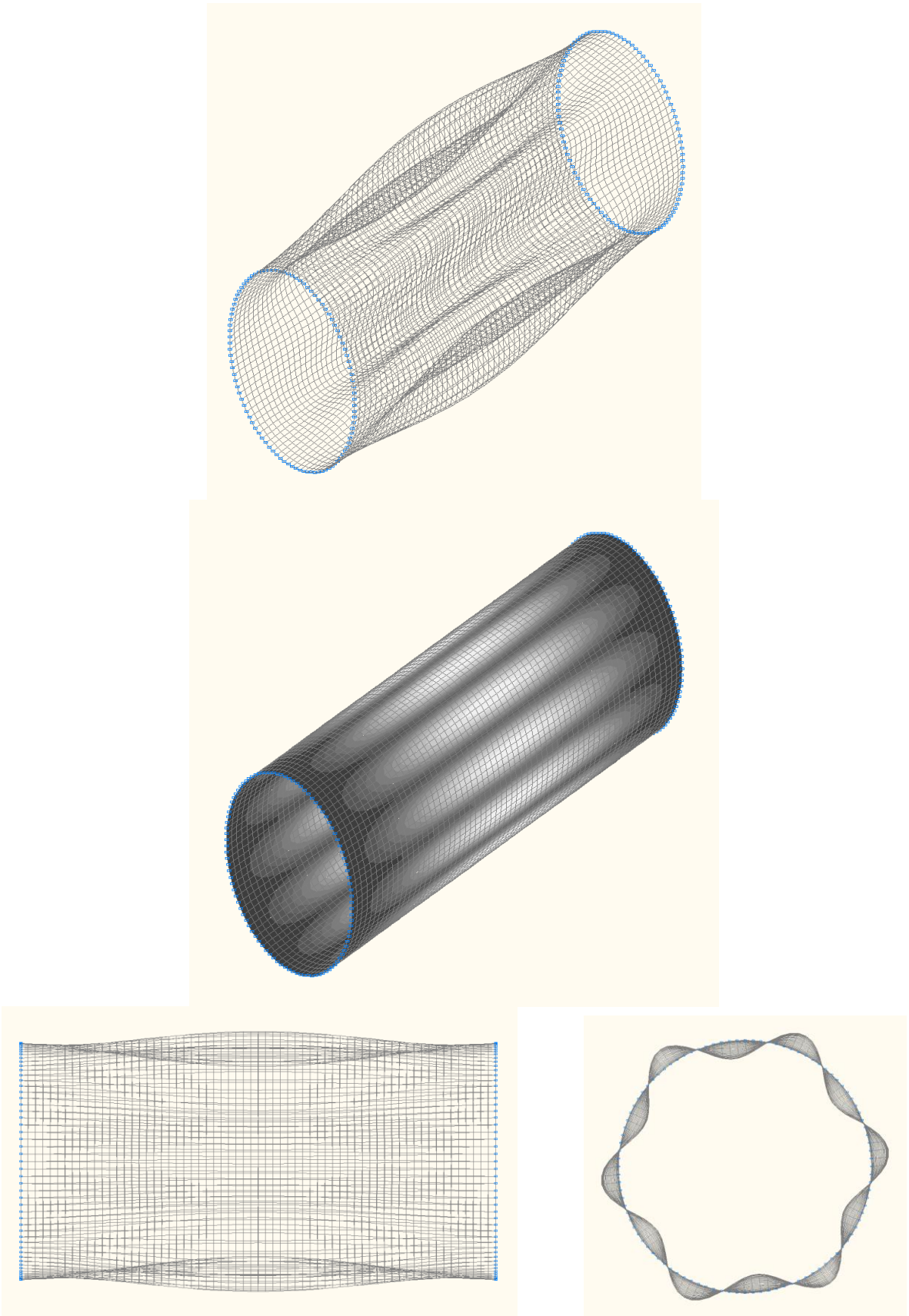
$E = 1.96 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$\rho = 7.70$ т/м^3	- плотность материала;
$h = 0.25 \cdot 10^{-3}$ м	- толщина цилиндрической оболочки;
R = 0.076 м	- радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки;
L = 0.305 м	- длина цилиндрической оболочки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 6400 четырехузловых элементов оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом $4.765625 \cdot 10^{-3}$ м в меридиональном направлении (64 элемента) и с шагом 3.6º в окружном направлении (100 элементов). Обеспечение граничных условий на свободно опертых торцах достигается за счет наложения связей по направлениям всех линейных и угловых перемещений (степени свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ). Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса цилиндрической оболочки: $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 75.537$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 6500. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

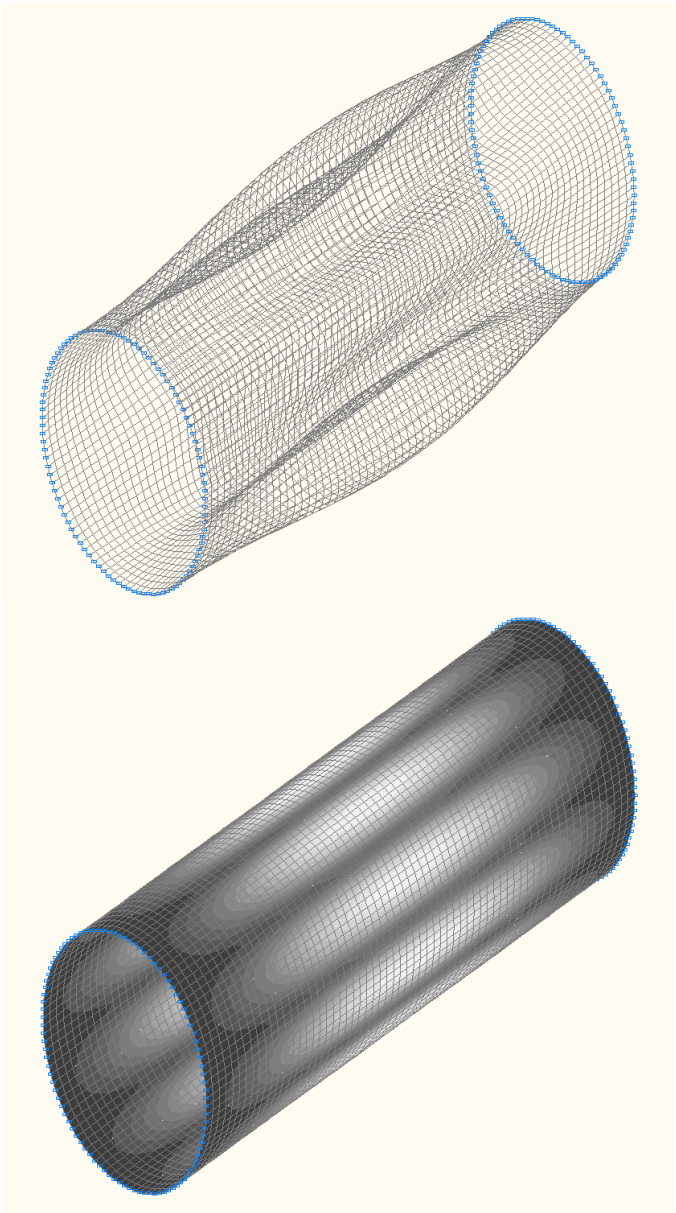
Результаты решения в SCAD

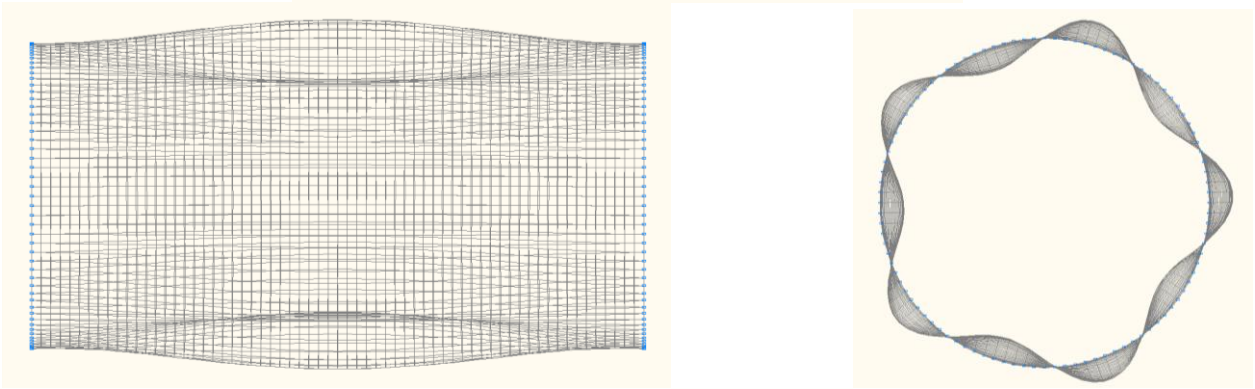


Расчетная схема

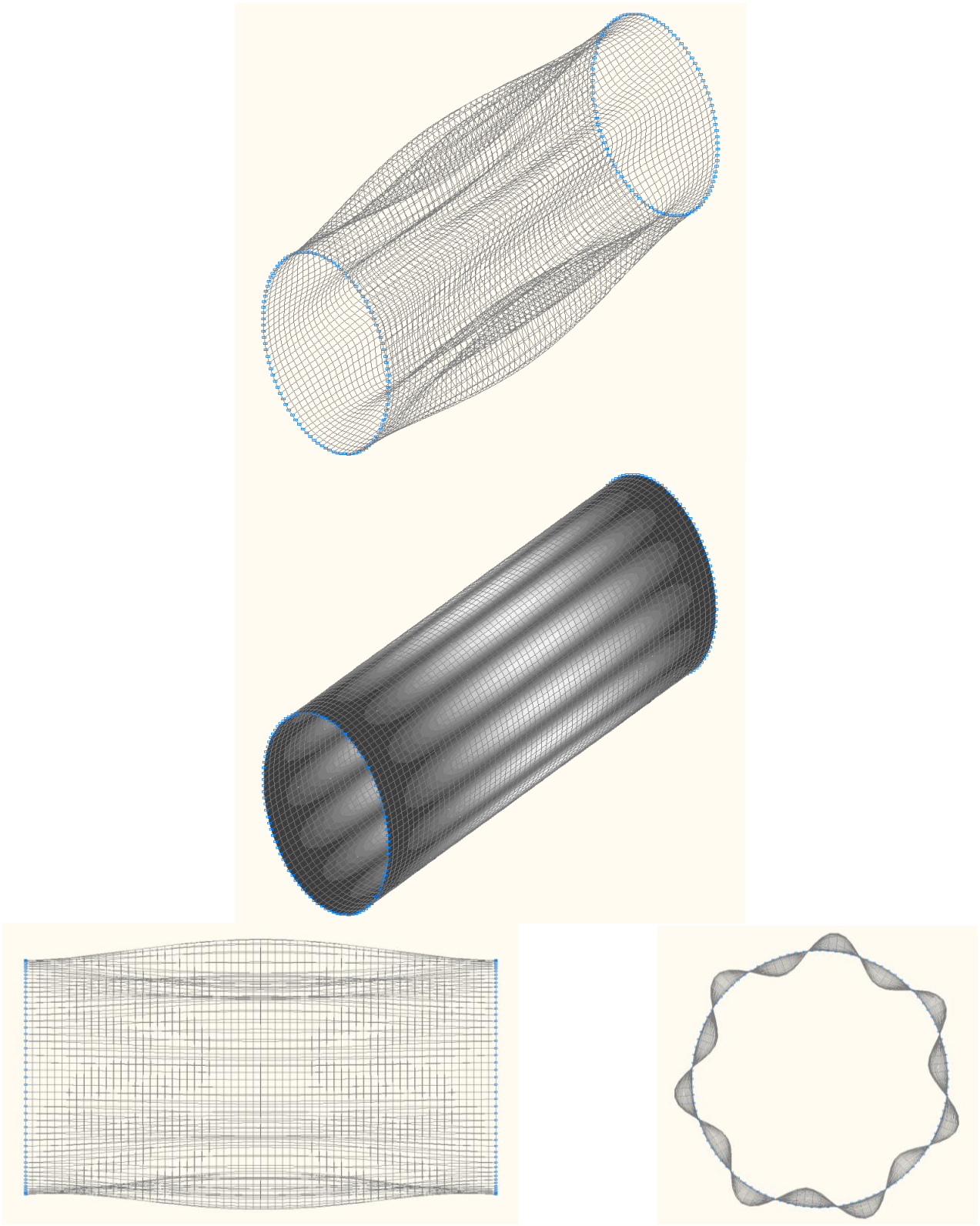


1-я (1-я теоретическая) собственная форма колебаний

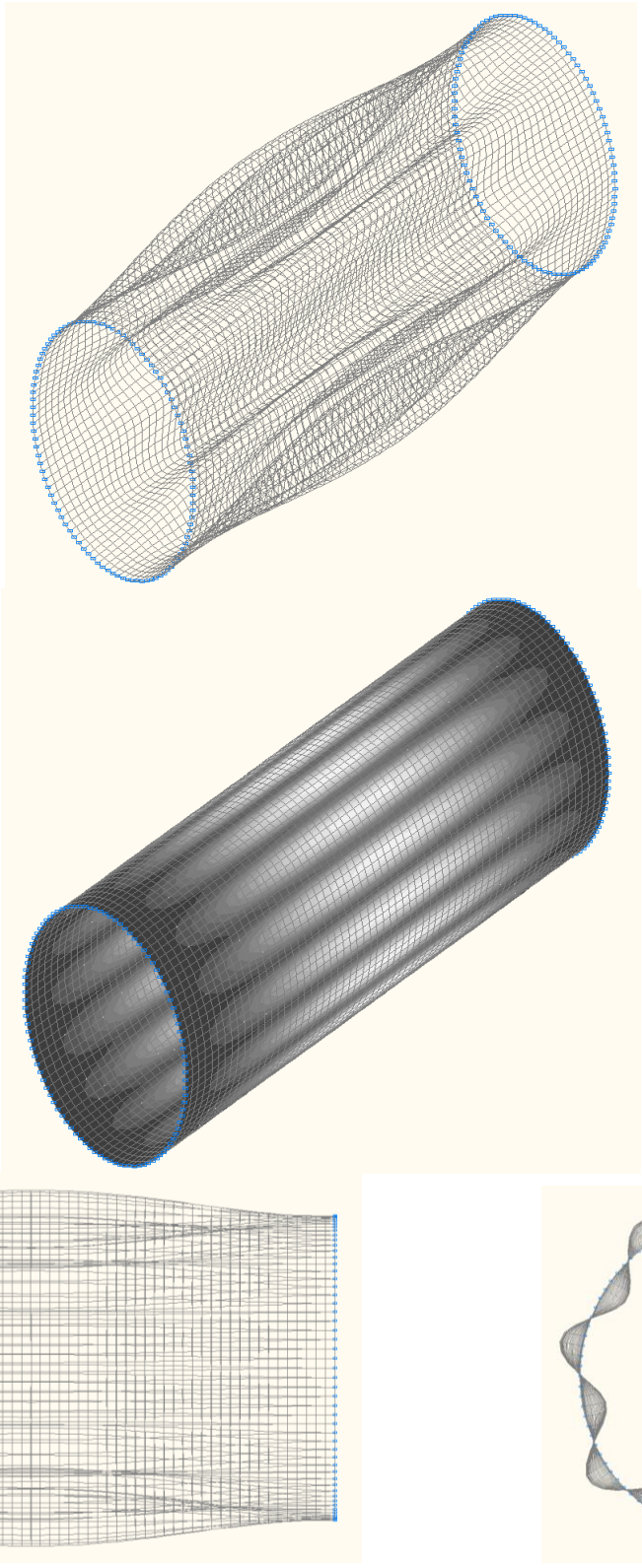




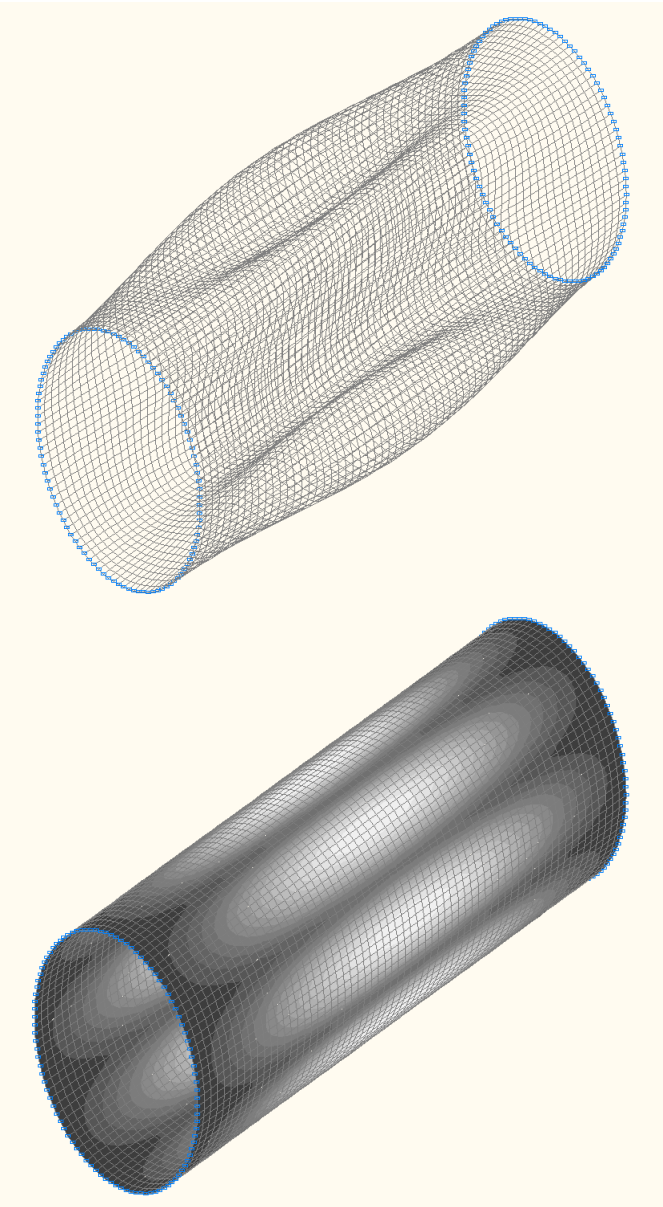
3-я (3-я теоретическая) собственная форма колебаний

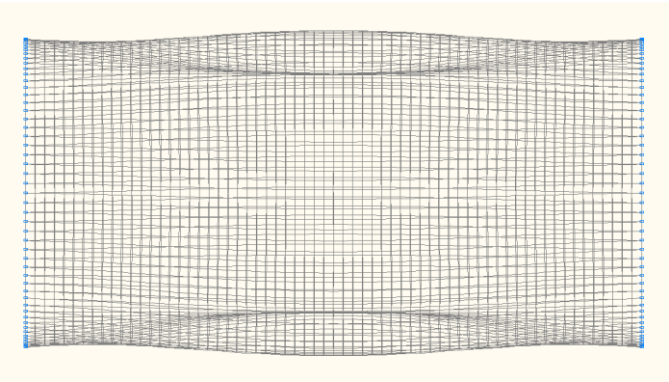


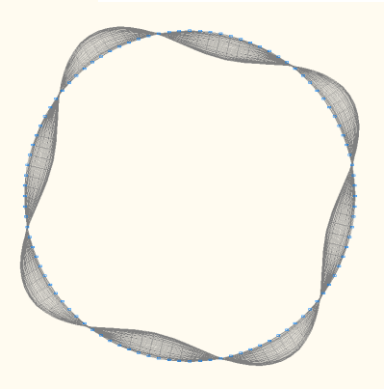
5-я (5-я теоретическая) собственная форма колебаний



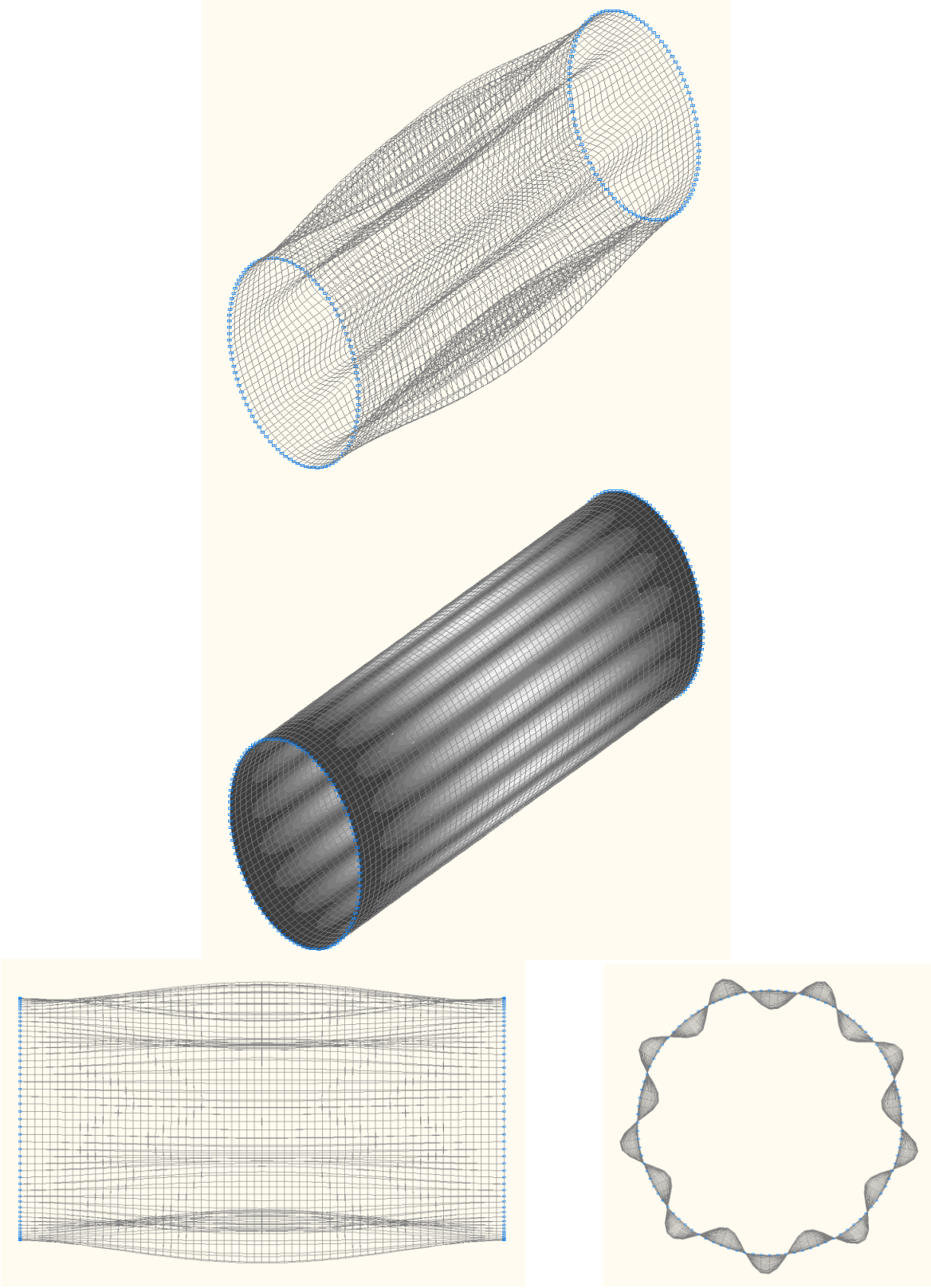
7-я (7-я теоретическая) собственная форма колебаний



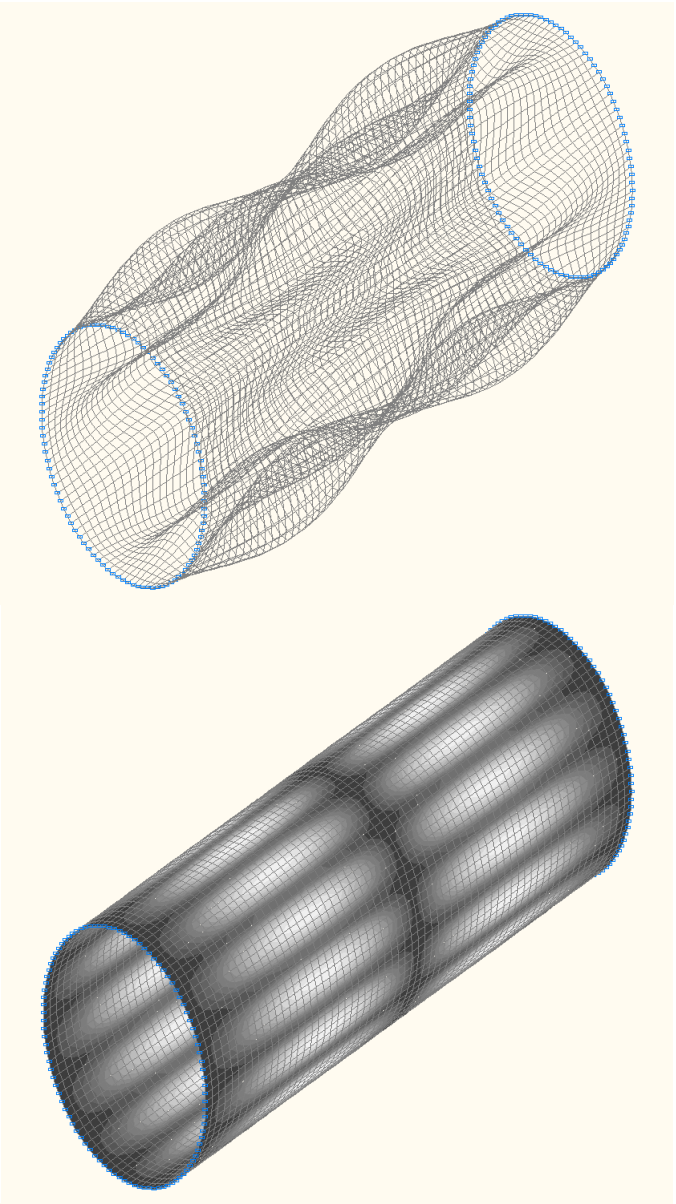


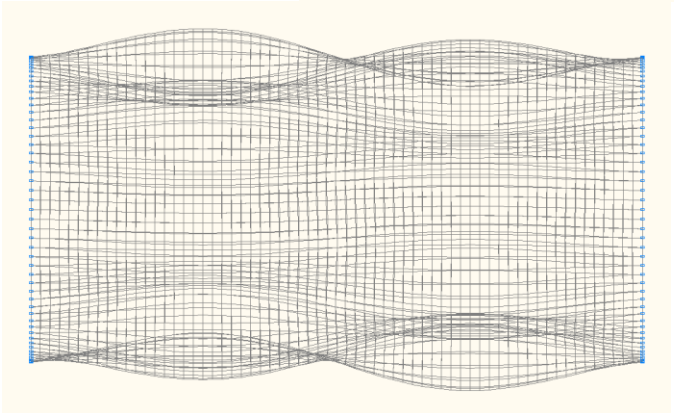


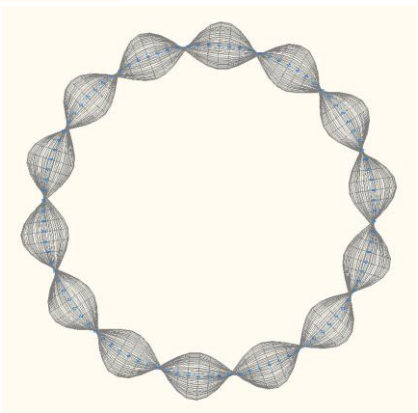
9-я (9-я теоретическая) собственная форма колебаний



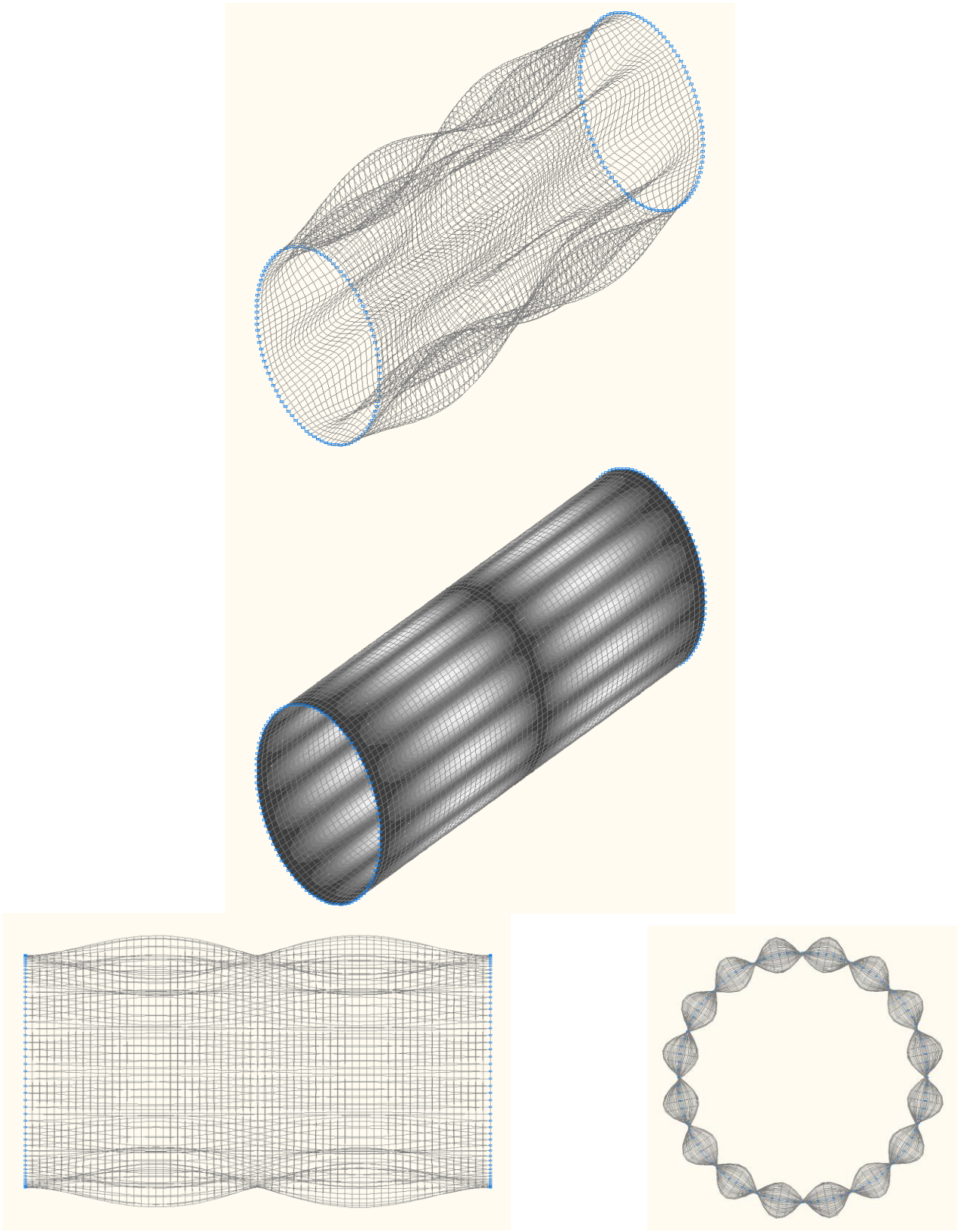
11-я (11-я теоретическая) собственная форма колебаний



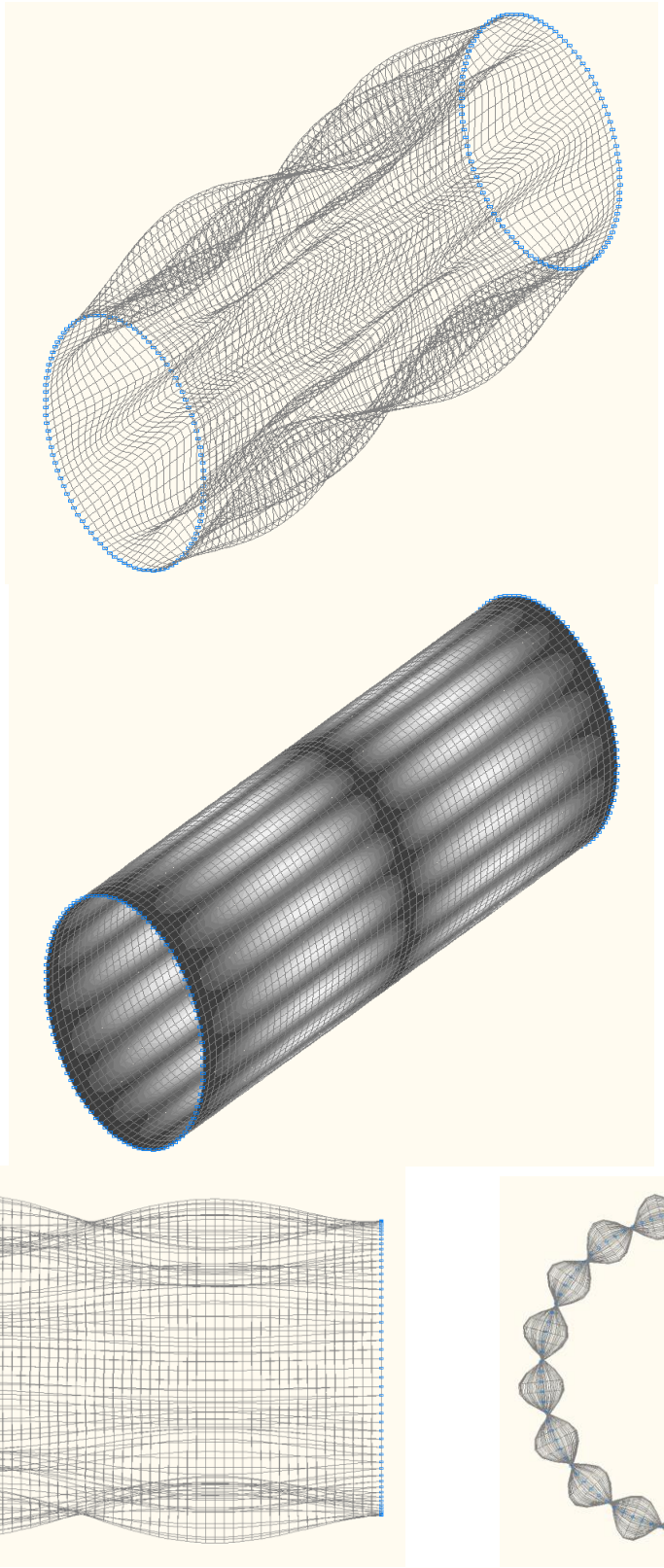




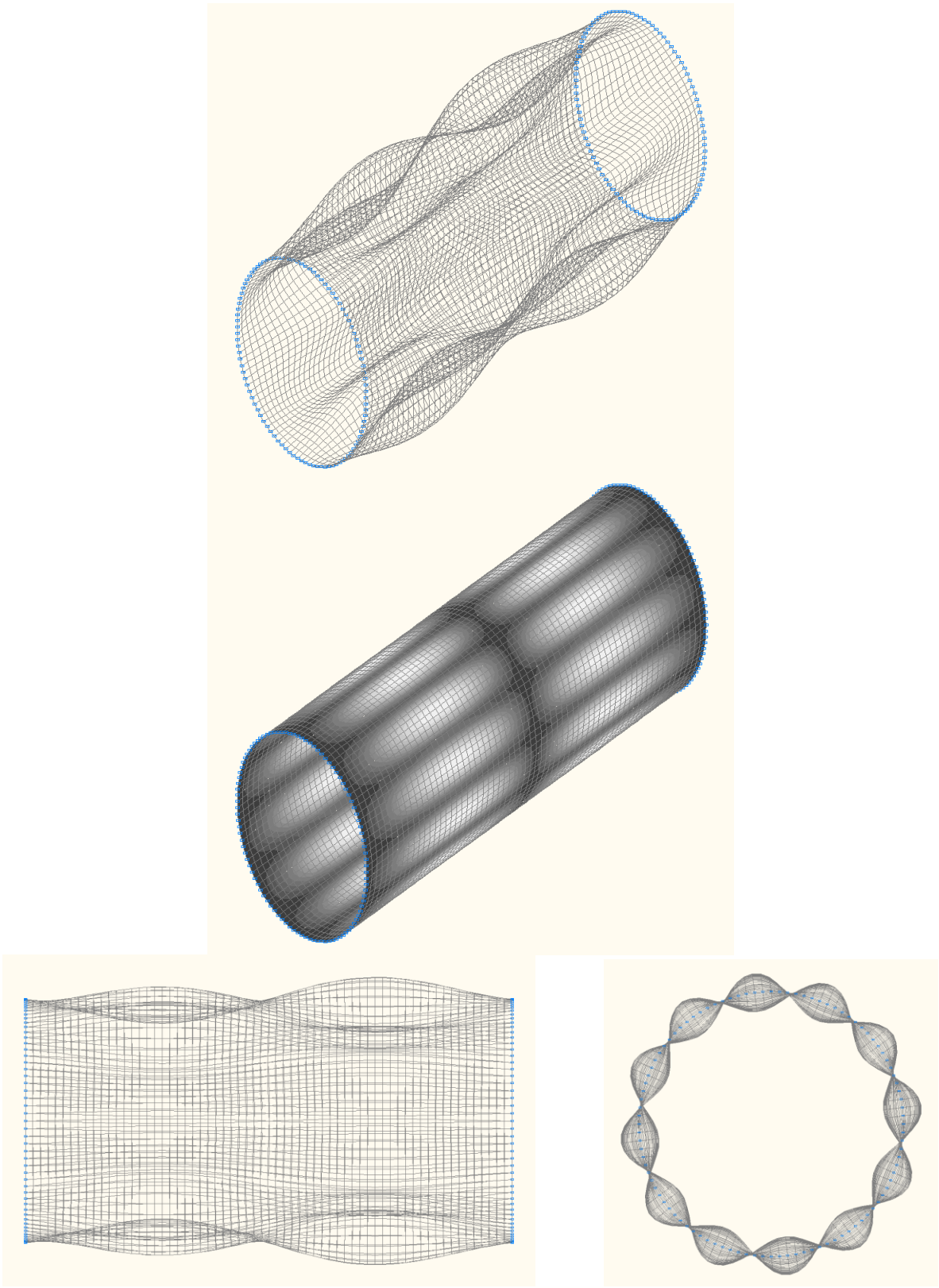
13-я (13-я теоретическая) собственная форма колебаний



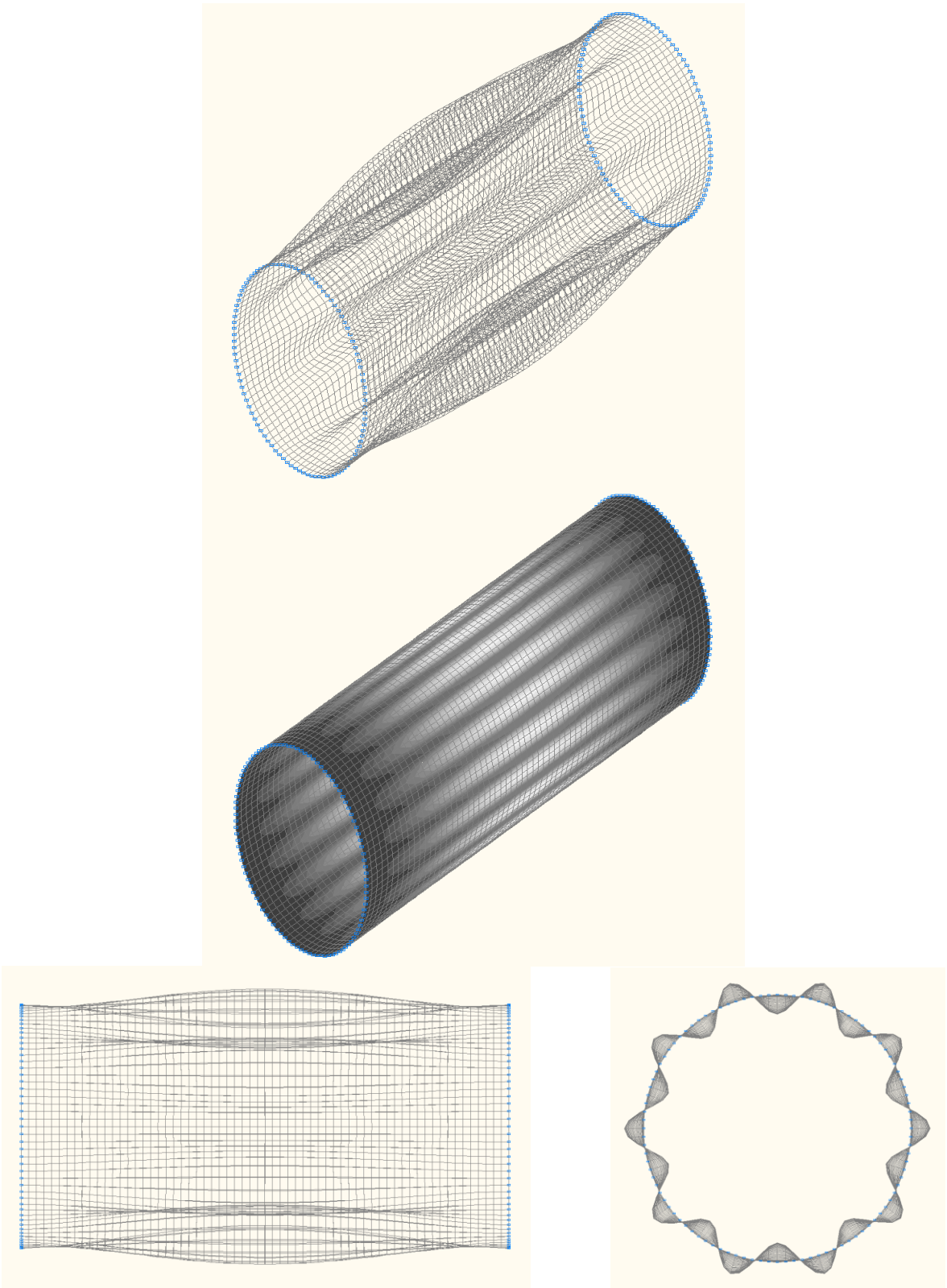
15-я (15-я теоретическая) собственная форма колебаний



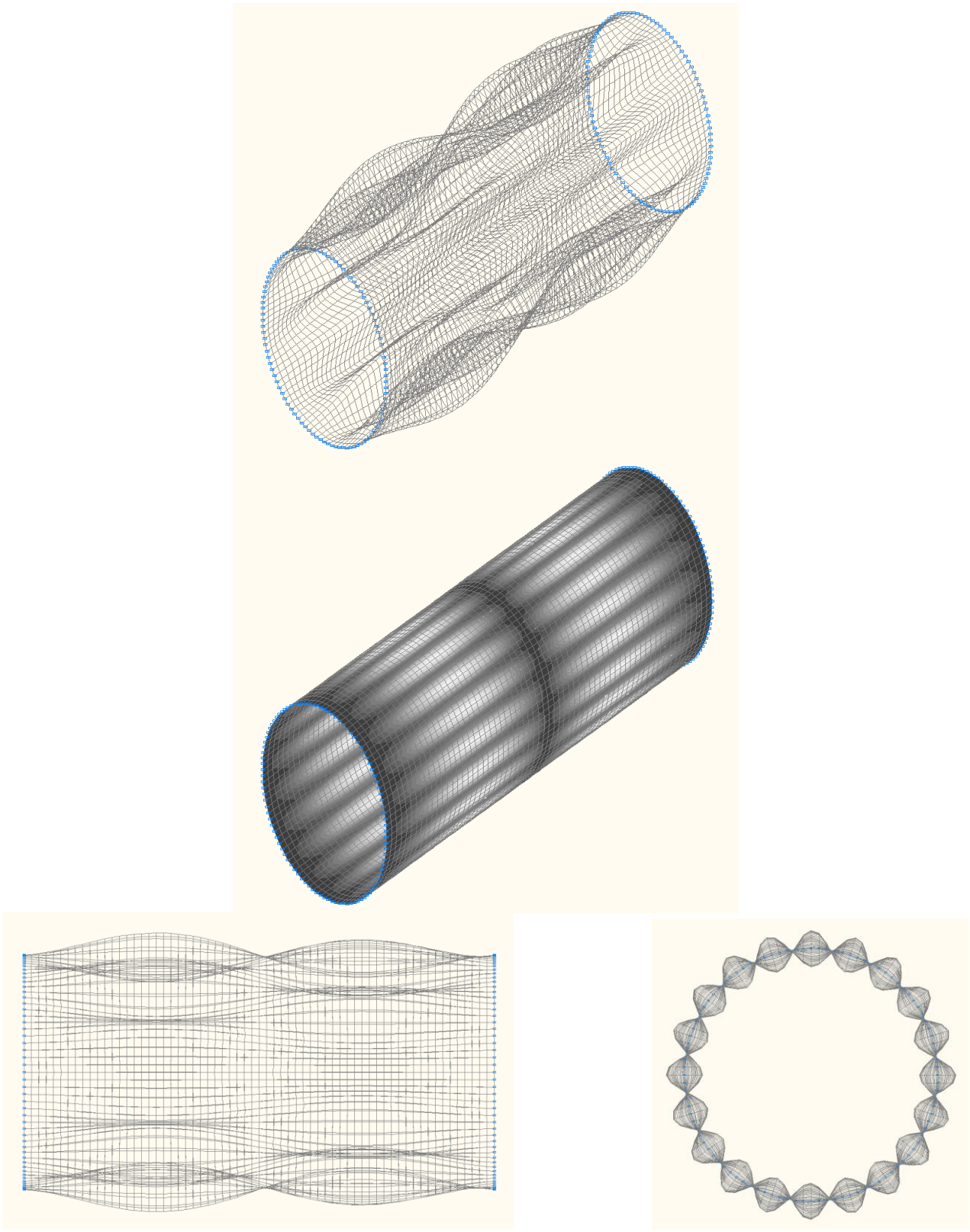
17-я (17-я теоретическая) собственная форма колебаний



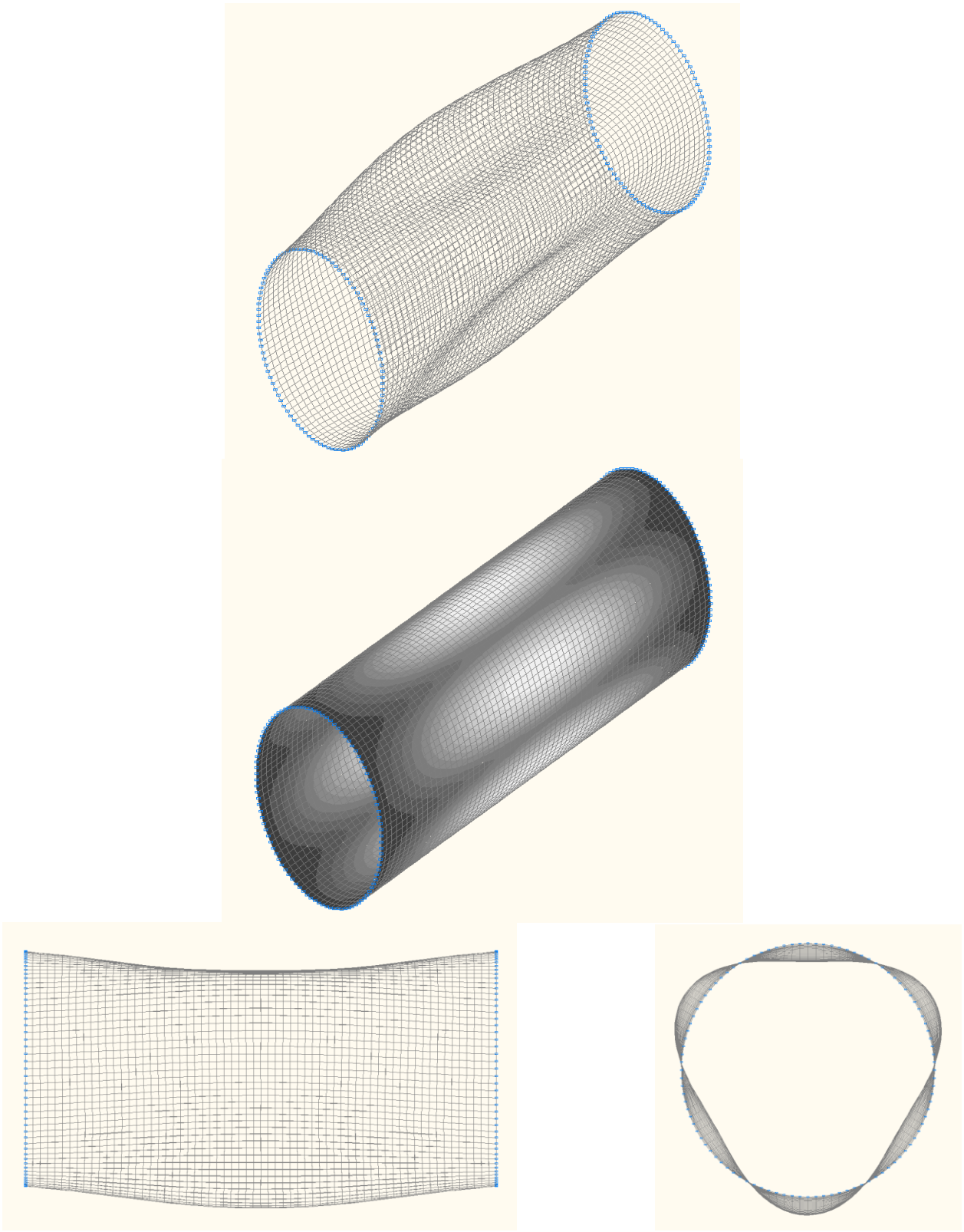
19-я (19-я теоретическая) собственная форма колебаний



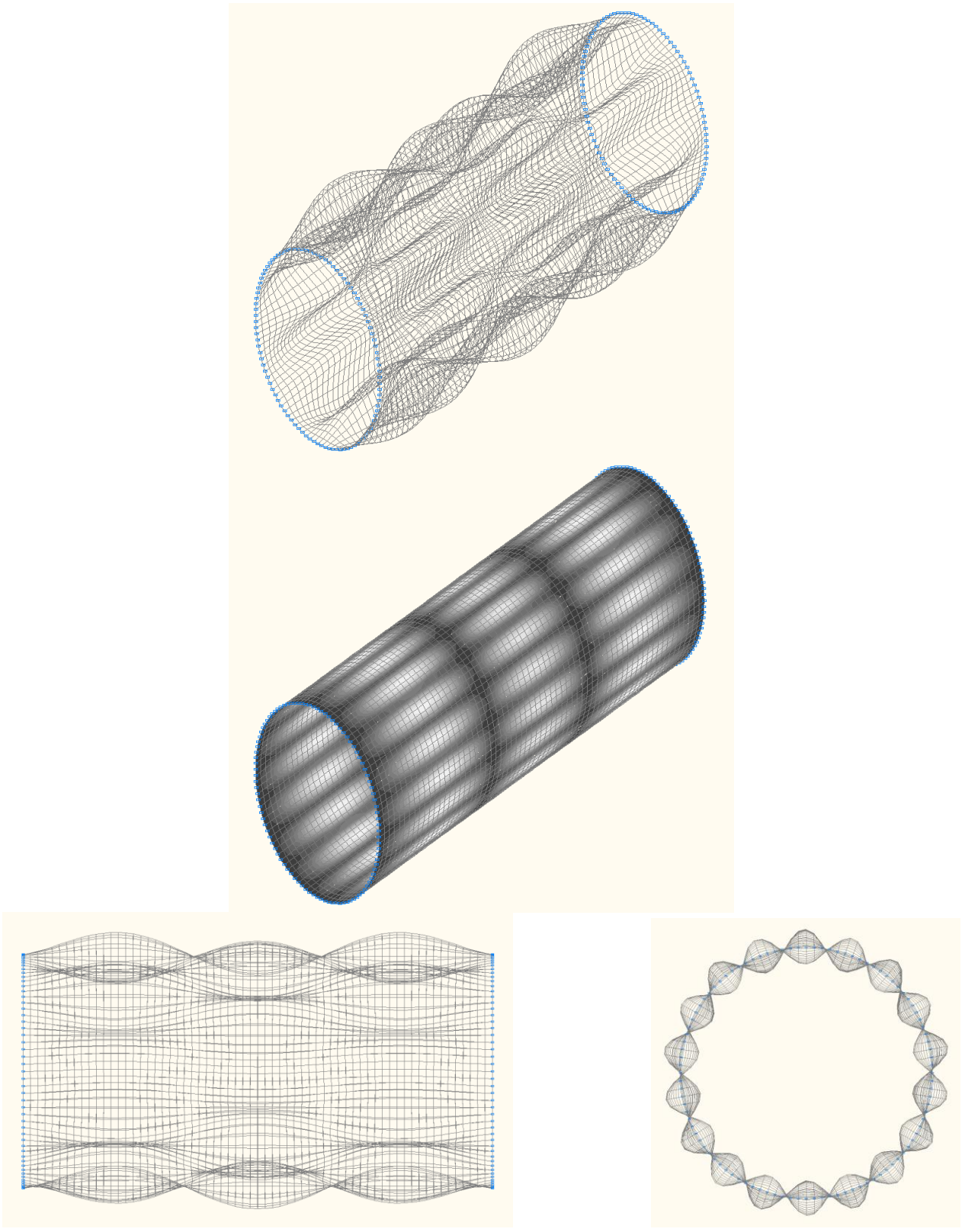
21-я (21-я теоретическая) собственная форма колебаний



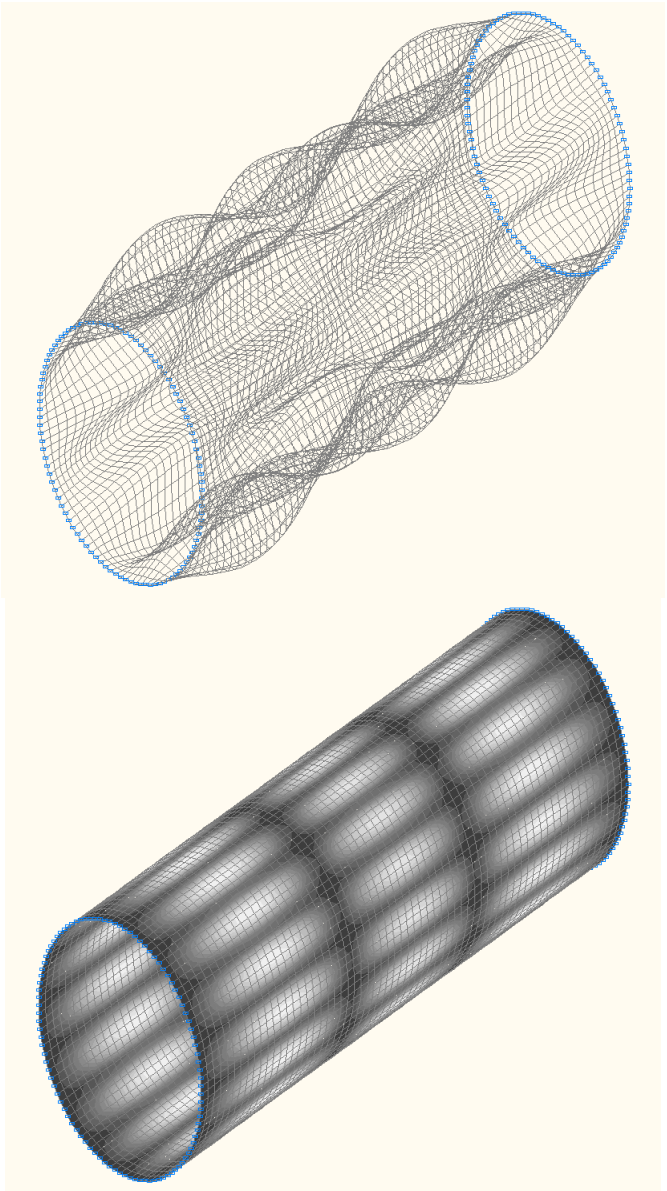
23-я (25-я теоретическая) собственная форма колебаний



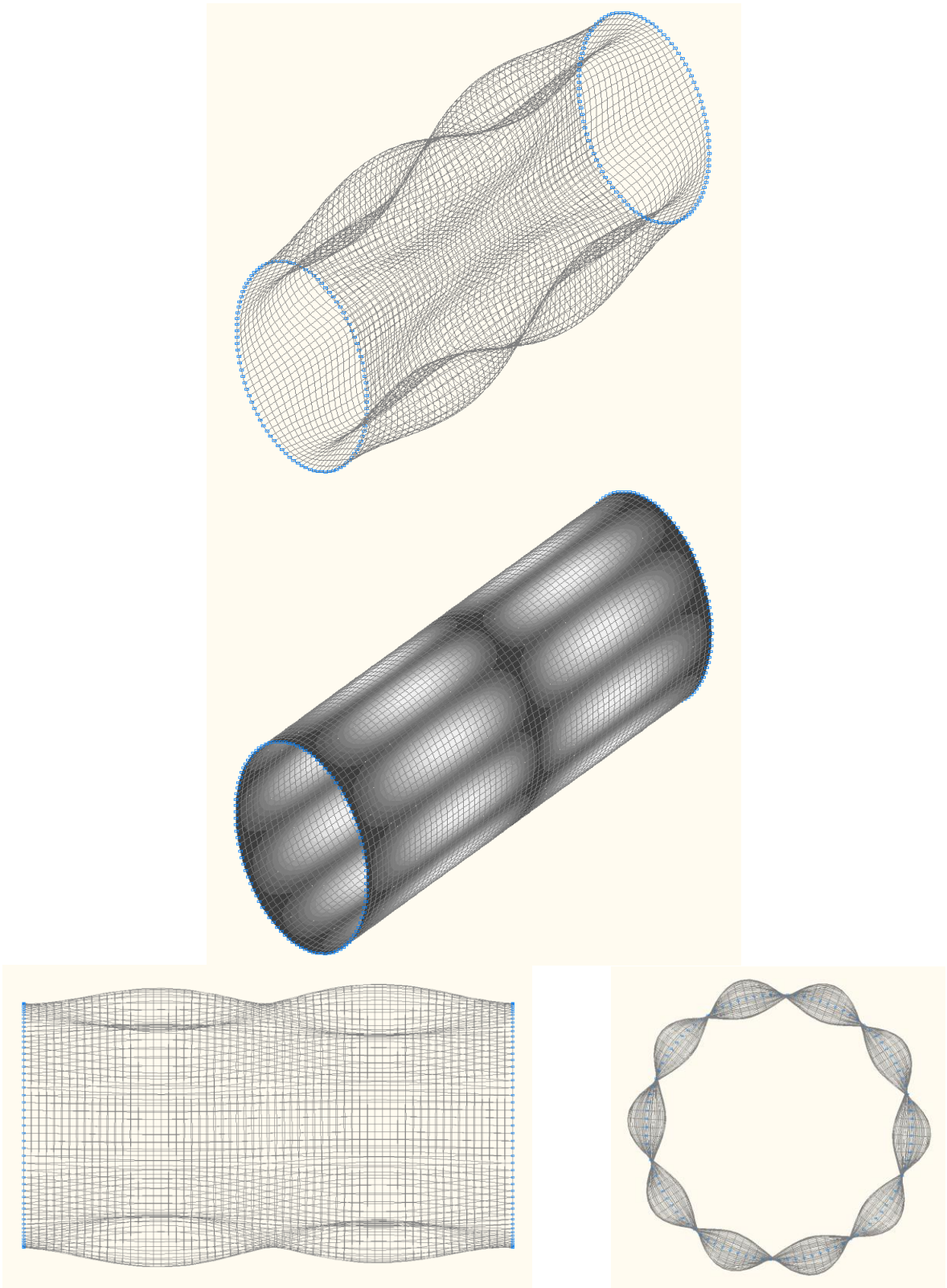
25-я (23-я теоретическая) собственная форма колебаний



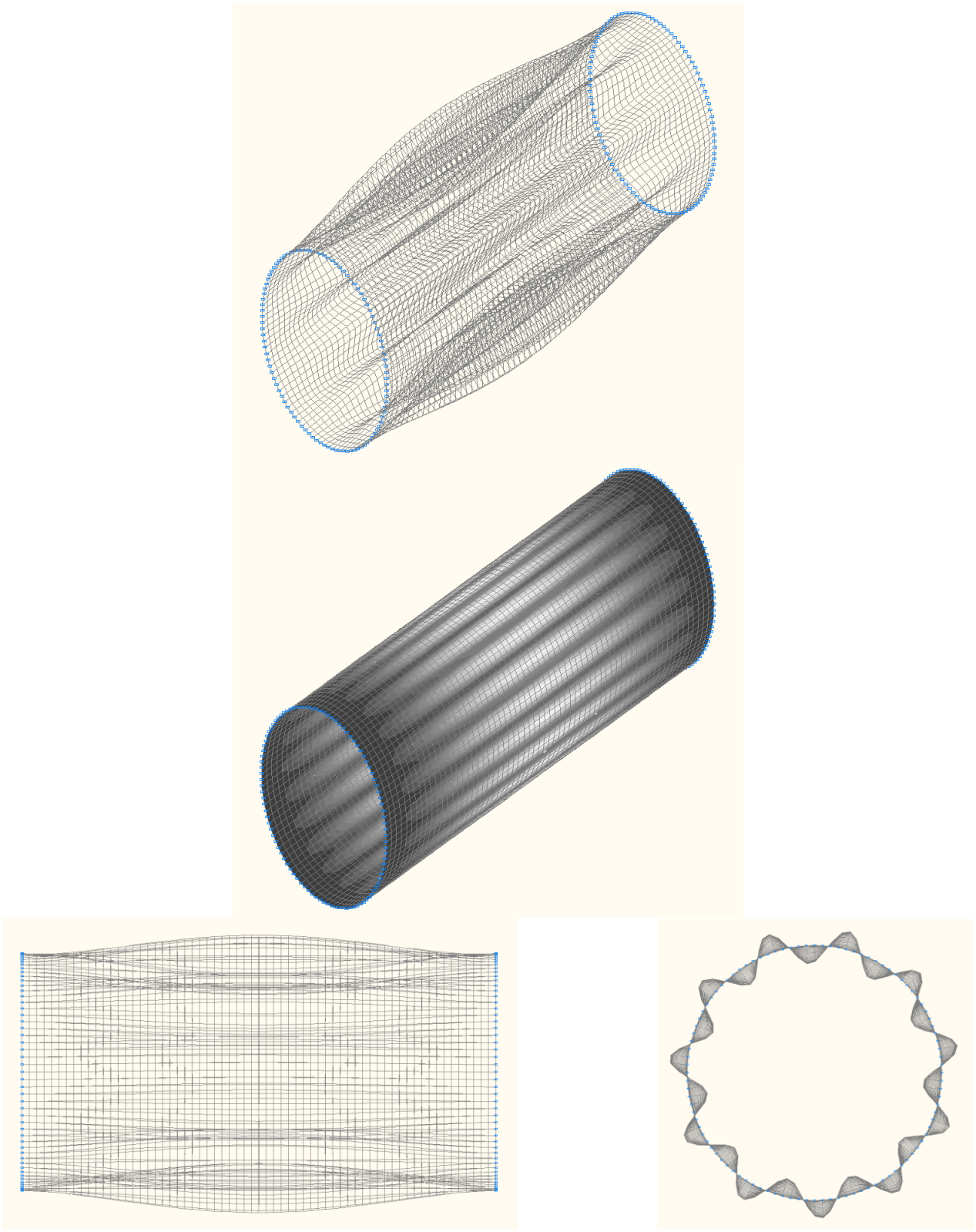
27-я (27-я теоретическая) собственная форма колебаний



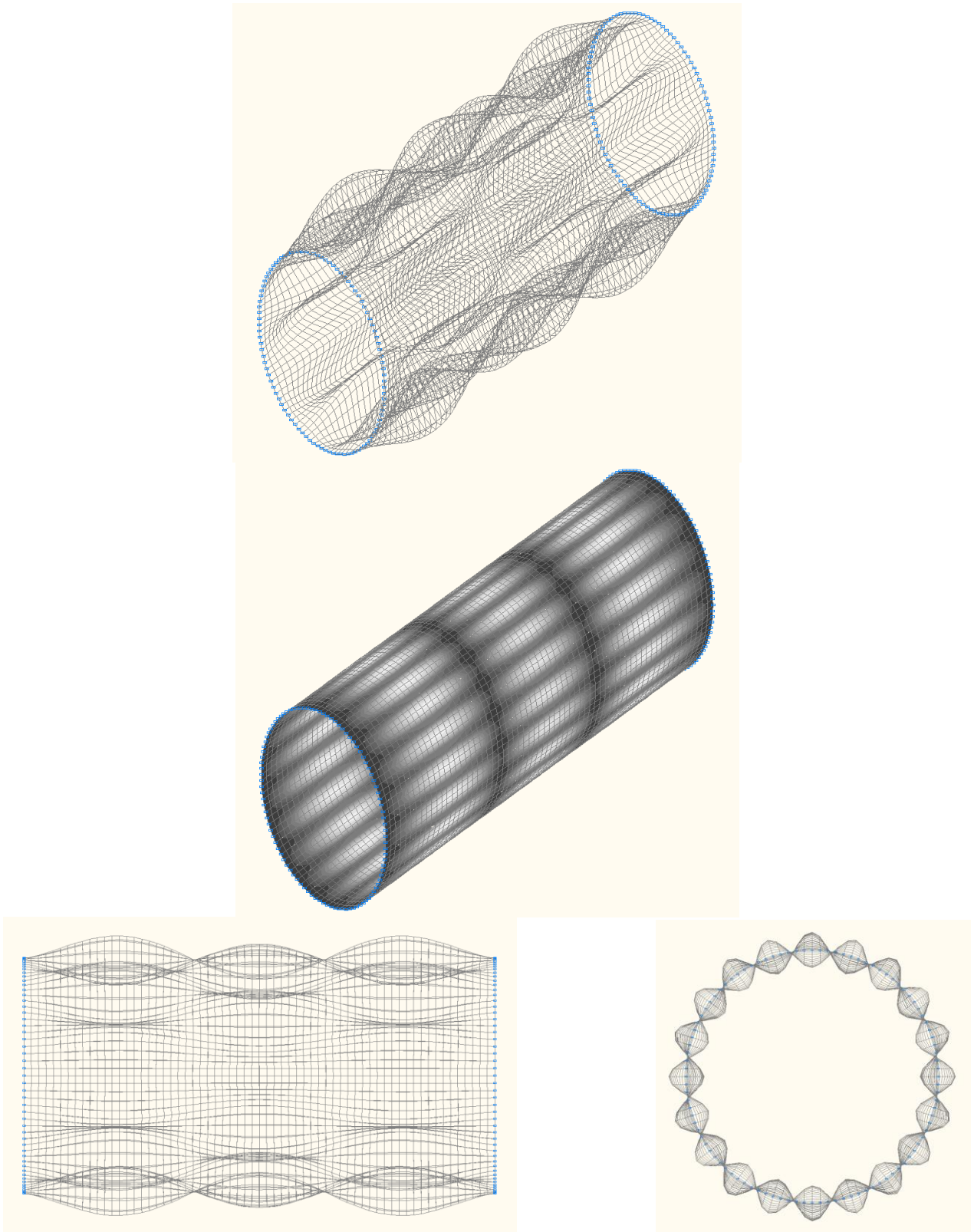
29-я (31-я теоретическая) собственная форма колебаний



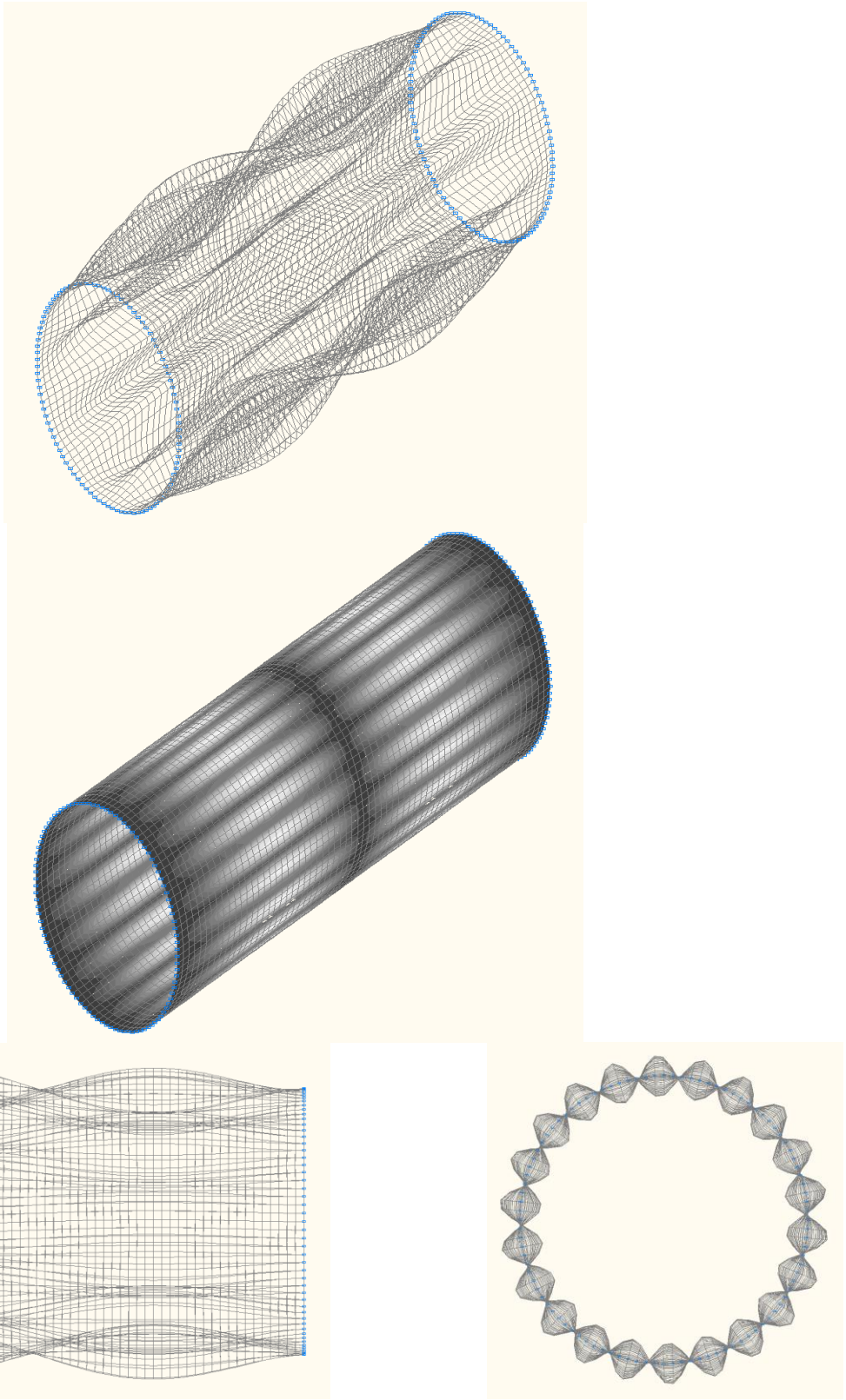
31-я (29-я теоретическая) собственная форма колебаний



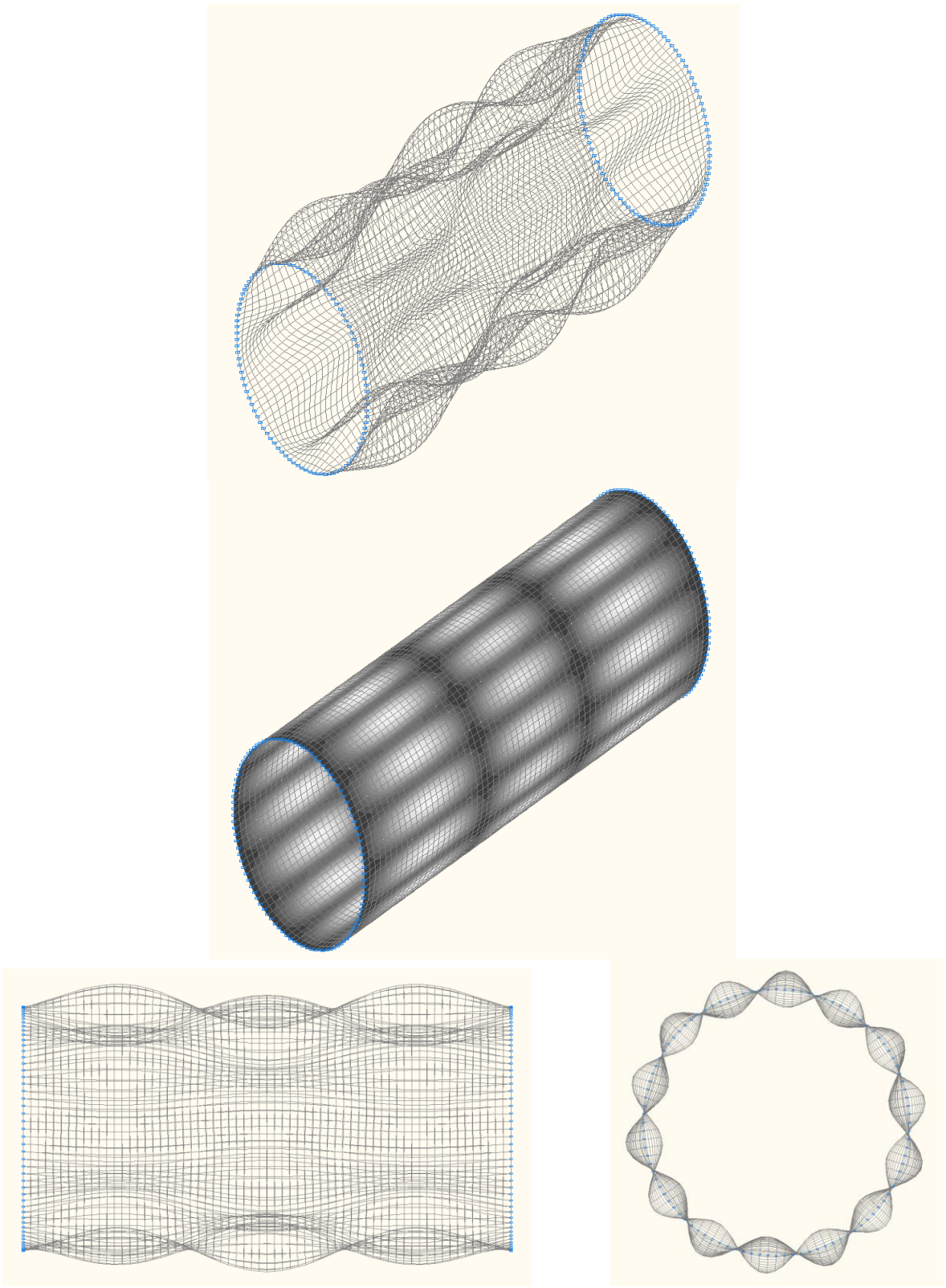
33-я (33-я теоретическая) собственная форма колебаний



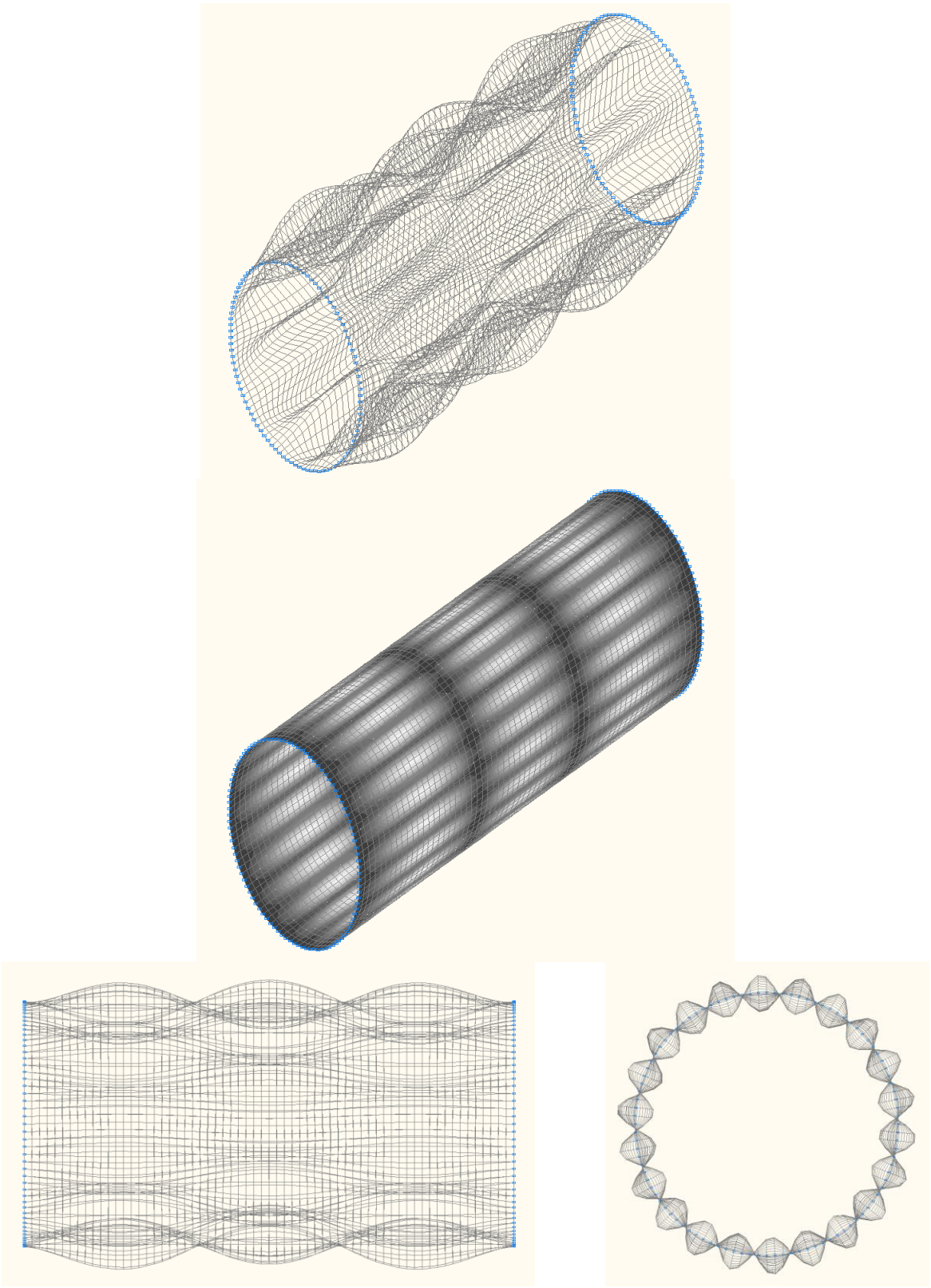
35-я (35-я теоретическая) собственная форма колебаний



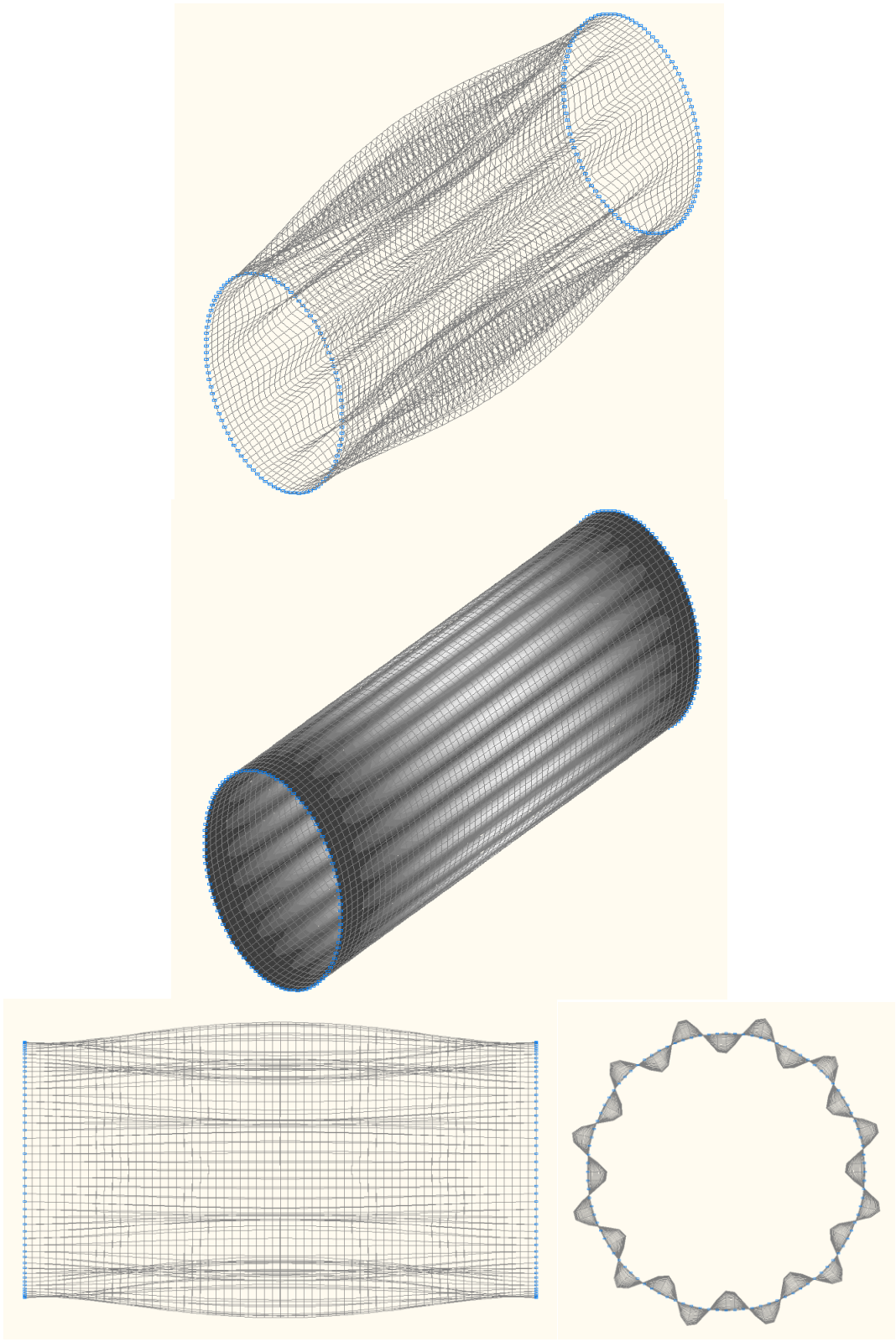
37-я (37-я теоретическая) собственная форма колебаний



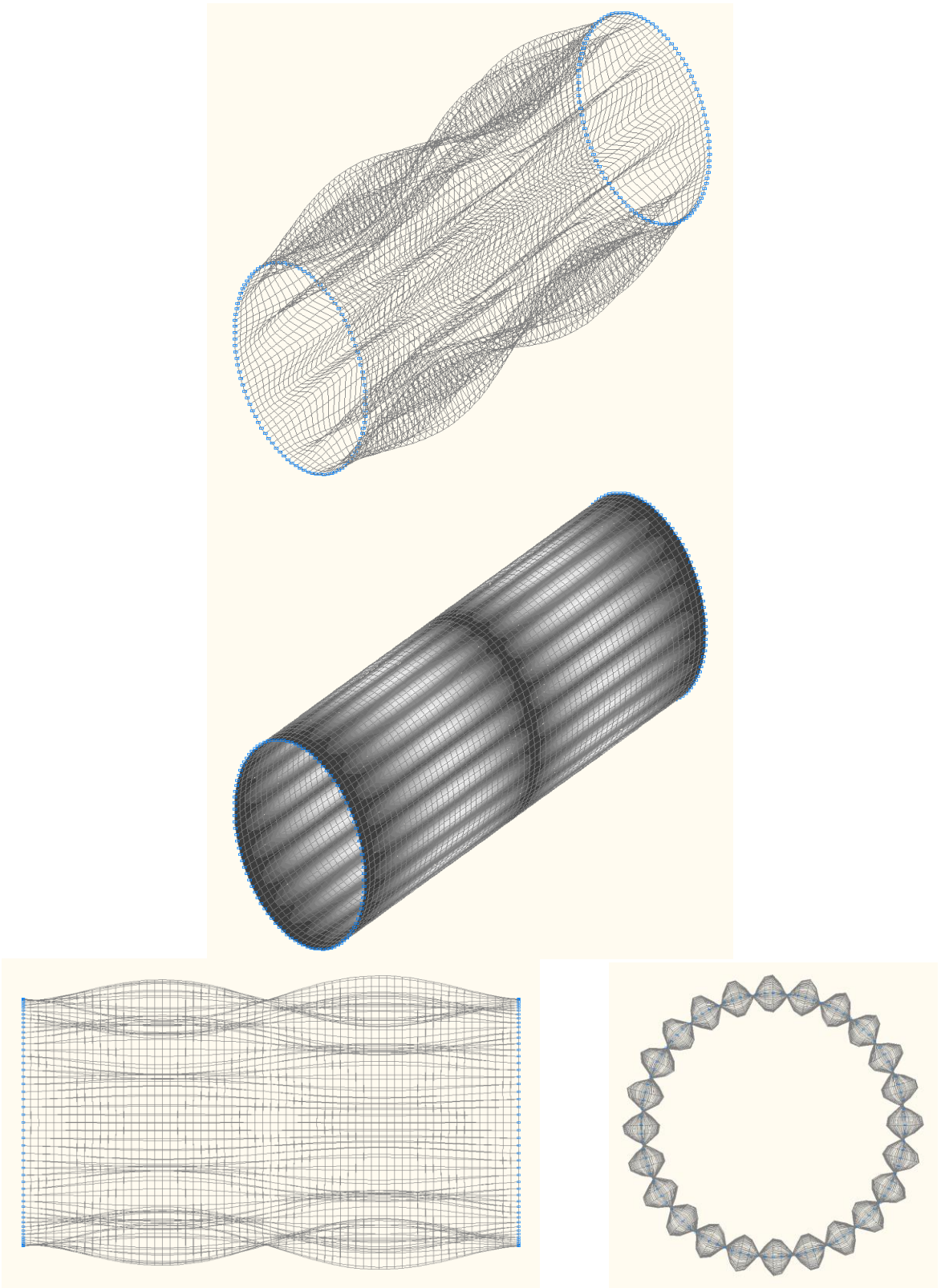
39-я (39-я теоретическая) собственная форма колебаний



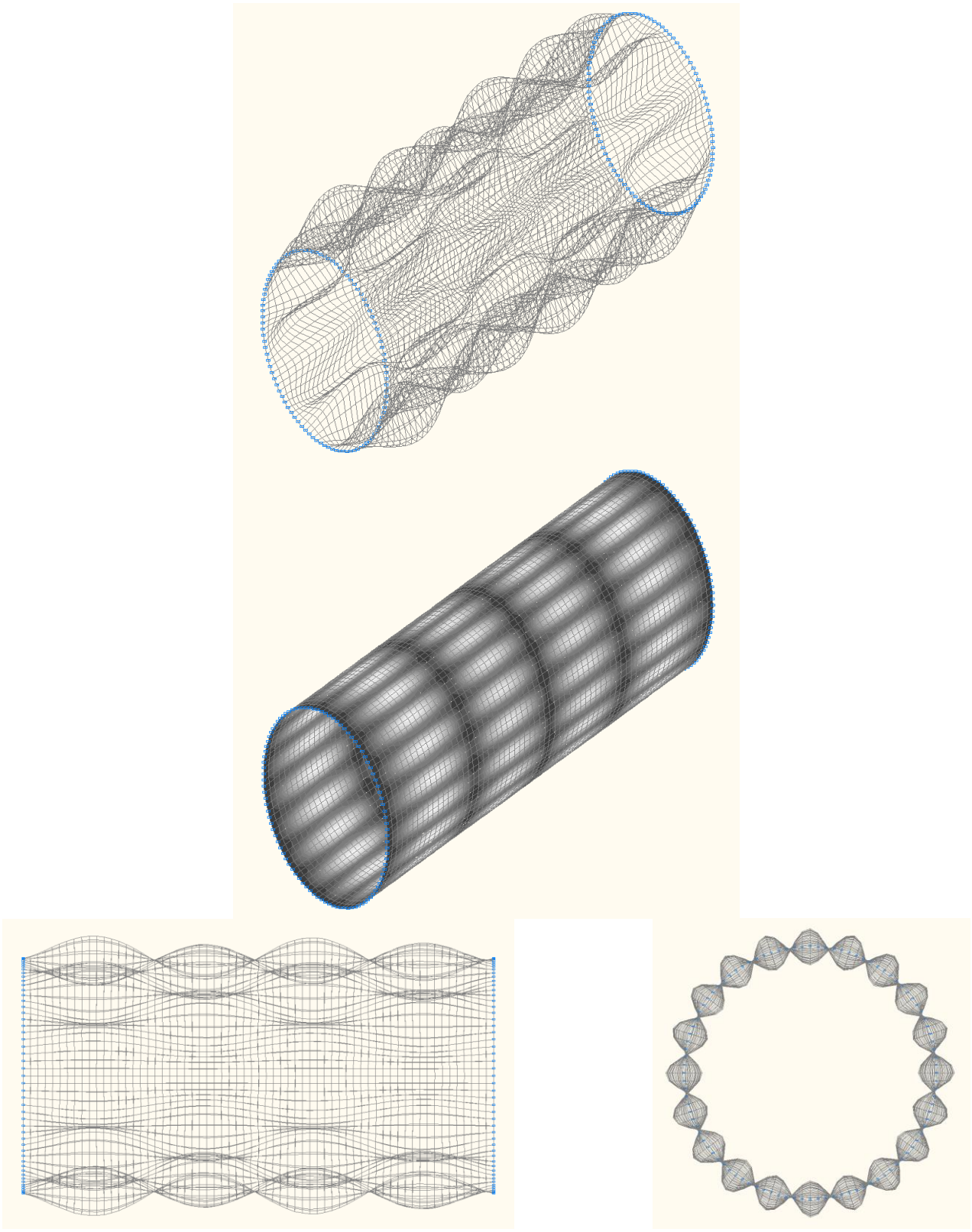
41-я (41-я теоретическая) собственная форма колебаний



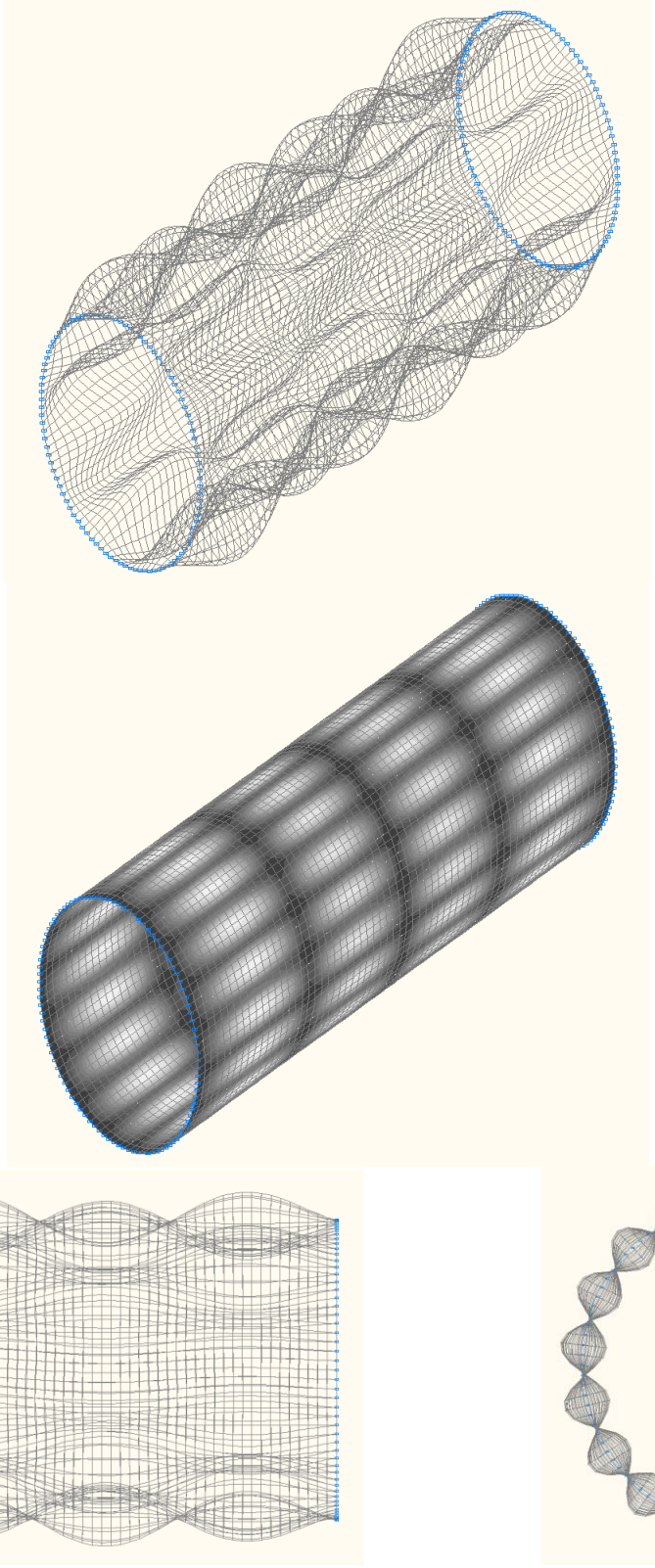
43-я (43-я теоретическая) собственная форма колебаний



45-я (45-я теоретическая) собственная форма колебаний



47-я (47-я теоретическая) собственная форма колебаний



49-я (49-я теоретическая) собственная форма колебаний

Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, Гц

Форма колебаний	**Число узловых окружностей m и меридианов n**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1, 2	2, 6	533 (529.2)	522.2	2.03
3, 4	2, 5	574 (585.3)	567.0	1.22
5, 6	2, 7	593 (579.2)	578.9	2.38

Форма колебаний	Число узловых окружностей m и меридианов n	Теория	SCAD	Отклонения, %
7, 8	2, 8	717 (697.2)	700.3	2.33
9, 10	2, 4	755 (787.9)	751.1	0.52
11, 12	2, 9	881 (857.8)	862.6	2.09
13, 14	3, 7	898 (910.0)	888.2	1.09
15, 16	3, 8	903 (897.8)	889.5	1.50
17, 18	3, 9	996 (979.9)	979.5	1.66
19, 20	3, 6	1011 (1047.7)	1004.6	0.63
21, 22	2, 10	1075 (1048.9)	1054.6	1.90
23, 24	2, 3	1140 (1209.6)	1136.7	0.29
25, 26	3, 10	1151 (1127.1)	1131.1	1.73
27, 28	4, 9	1251 (1251.3)	1238.2	1.02
29, 30	3, 5	1272 (1344.8)	1267.7	0.34
31, 32	4, 8	1273 (1293.0)	1264.2	0.69
33, 34	2, 11	1295 (1265.4)	1271.5	1.81
35, 36	4, 10	1325 (1310.9)	1308.2	1.27
37, 38	3, 11	1348 (1319.3)	1325.7	1.65
39, 40	4, 7	1415 (1460.8)	1409.3	0.40
41, 42	4, 11	1471 (1446.7)	1450.2	1.41
43, 44	2, 12	—— (1504.9)	1511.3	–
45, 46	3, 12	—— (1545.3)	1552.9	–
47, 48	5, 10	—— (1611.9)	1597.9	–
49, 50	5, 9	—— (1657.6)	1627.9	–
51, 52	3, 12	—— (1637.7)	1644.9	–
53, 54	5, 11	—— (1666.7)	1663.6	–
55, 56	4, 6	1700 (1781.0)	1696.6	0.20
57, 58	3, 4	1731 (1863.8)	1728.3	0.16
59, 60	5, 8	—— (1824.3)	1772.9	–
61, 62	2, 13	—— (1766.4)	1773.0	–
63, 64	5, 12	—— (1800.5)	1804.6	–
65, 66	3, 13	—— (1799.0)	1807.3	–
67, 68	4, 13	—— (1869.9)	1879.4	–
69, 70	2, 2	—— (2045.1)	1889.1	–
71, 72	6, 11	—— (1975.1)	1963.8	–
73, 74	6, 10	—— (2007.8)	1982.0	–
75, 76	5, 13	—— (1994.2)	2002.9	–
77, 78	6, 12	—— (2038.4)	2037.7	–
79, 80	5, 7	—— (2131.6)	2051.4	–
81, 82	2, 14	—— (2049.6)	2056.1	–
83, 84	3, 14	—— (2077.5)	2086.0	–
85, 86	6, 9	—— (2154.2)	2109.1	–
87, 88	4, 14	—— (2135.1)	2145.7	–
89, 90	4, 5	2165 (2295.4)	2163.0	0.09
91, 92	6, 13	—— (2179.6)	2186.2	–
93, 94	5, 14	—— (2233.9)	2245.5	–
95, 96	7, 11	—— (2352.7)	2334.1	–
97, 98	7, 12	—— (2343.7)	2338.1	–
99, 100	6, 8	—— (2429.8)	2360.2	–
101, 102	2, 15	—— (2354.1)	2360.4	–
103, 104	3, 15	—— (2379.1)	2387.6	–
105, 106	6, 14	—— (2381.8)	2393.2	–
107, 108	7, 13	—— (2425.1)	2429.2	–
109, 110	7, 10	—— (2467.4)	2432.1	–
111, 112	4, 15	—— (2428.2)	2439.5	–
113, 114	5, 6	—— (2606.7)	2488.7	–
115, 116	3, 3	2505 (2740.1)	2502.6	0.10
117, 118	5, 15	—— (2510.3)	2523.6	–
119, 120	7, 14	—— (2581.1)	2592.0	–
121, 122	7, 14	—— (2700.8)	2644.8	–

Форма колебаний	Число узловых окружностей m и меридианов n	Теория	SCAD	Отклонения, %
123, 124	7, 9	—— (2632.0)	2646.5	—
125, 126	6, 15	—— (2679.8)	2685.7	—
127, 128	2, 16	—— (2701.6)	2692.7	—
129,130	8, 12	—— (2702.9)	2711.1	—
131, 132	3, 16	—— (2723.2)	2725.6	—
133, 134	8, 13	—— (2852.2)	2752.7	—
135, 136	6, 7	—— (2777.7)	2754.5	—
137, 138	8, 11	—— (2746.6)	2757.9	—
139, 140	4, 16	—— (2796.9)	2812.5	—
141, 142	5, 16	—— (2817.6)	2831.6	—
143, 144	7, 15	—— (2829.0)	2839.8	—
145, 146	4, 4	2884 (3082.7)	2883.1	0.03
147, 148	8, 10	—— (2963.2)	2922.5	—
149, 150	6, 16	—— (2921.1)	2937.5	—

В графе «Теория» перед скобками указаны значения точного решения, а в скобках – значения приближенного решения по методу Рэлея-Ритца с выражением компонент перемещений с помощью балочных функций.

Замечания: При аналитическом решении по методу Рэлея-Ритца с выражением компонент перемещений с помощью балочных функций собственные частоты колебаний ω круговой цилиндрической оболочки, защемленной по торцам, с плотностью материала ρ определяются из характеристического уравнения:

$$\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot\rho\cdot R^2\cdot\left(1-\nu^2\right)}{E}\right)^3\cdot\omega^6+K2\cdot\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot\rho\cdot R^2\cdot\left(1-\nu^2\right)}{E}\right)^2\cdot\omega^4+K1\cdot\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot\rho\cdot R^2\cdot\left(1-\nu^2\right)}{E}\right)\cdot\omega^2+K0=0,$$

где:

$$K2=-1-\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{2}{\delta_m}+\delta_m-\nu\cdot\delta_m\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2+\left(3-\nu\right)\cdot n^2\right]-$$

$$\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left\{\left[\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4+2\cdot\delta_m\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^2+n^4\right]+2\cdot\left(1-\nu\right)\cdot\delta_m\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right\}$$

$$K1=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\nu\right)\cdot\left[\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4+2\cdot\left(\frac{1-\nu\cdot\delta_m{}^2}{\left(1-\nu\right)\cdot\delta_m}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^2+n^4\right]+$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\delta_m}+\delta_m-\nu\cdot\delta_m-2\cdot\nu^2\cdot\delta_m\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\nu\right)\cdot n^2+$$

$$\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{2}{\delta_m}+\delta_m-\nu\cdot\delta_m\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^6+\left(7+2\cdot\delta_m{}^2-\left(1+2\cdot\delta_m{}^2\right)\cdot\nu\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4\cdot n^2+\right.\right.$$

$$\left.\left(\frac{2}{\delta_m}+7\cdot\delta_m-3\cdot\nu\cdot\delta_m\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^4+\left(3-\nu\right)\cdot n^6\right]+2\cdot\left(1-\nu\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4-$$

$$\left.\left(3\cdot\delta_m-\frac{1}{\delta_m}-\nu^2\cdot\delta_m\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^2-\frac{1}{2}\cdot\left(3+\nu\right)\cdot n^4+2\cdot\left(1-\nu\right)\cdot\delta_m\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right\}$$

$$K0 = -\frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot\left(1-\nu^2\cdot\delta_m{}^2\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4 - \frac{1}{2}\cdot(1-\nu)\cdot\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left\{\left[\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^8 + 2\cdot\left(\frac{1+\delta_m{}^2-2\cdot\nu\cdot\delta_m}{(1-\nu)\cdot\delta_m}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^6\cdot n^2 + \left(\frac{6-2\cdot\nu\cdot\left(1+2\cdot\delta_m{}^2\right)}{1-\nu}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4\cdot n^4 + 2\cdot\left(\frac{1+\delta_m{}^2-2\cdot\nu\cdot\delta_m}{(1-\nu)\cdot\delta_m}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^6 + n^8\right] - 2\cdot\left(\frac{4-2\cdot\nu\cdot\left(1+\delta_m{}^2\right)-\nu^2\cdot\delta_m{}^2\cdot(1-\nu)}{1-\nu}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4\cdot n^4 - \left(\frac{4\cdot\left(1+\delta_m{}^2\right)-8\cdot\nu\cdot\delta_m{}^2}{(1-\nu)\cdot\delta_m}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^4 - 2\cdot n^6 + 4\cdot\left(1-\nu^2\cdot\delta_m{}^2\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^4 + \left(\frac{2\cdot\left(1+\delta_m{}^2\right)-4\cdot\nu\cdot\delta_m{}^2}{1-\nu}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_m\cdot R}{L}\right)^2\cdot n^2 + n^4\right\}$$

$$\delta_m = 1 - \frac{2}{\lambda_m}\cdot\left(\frac{sh(\lambda_m)\cdot ch(\lambda_m) - \lambda_m\cdot sh(\lambda_m)\cdot sin(\lambda_m) - sh(\lambda_m)\cdot cos(\lambda_m) - ch(\lambda_m)\cdot sin(\lambda_m) + sin(\lambda_m)\cdot cos(\lambda_m)}{(sh(\lambda_m) - sin(\lambda_m))^2}\right)$$

Собственные числа m-той балочной функции определяются из уравнения:

$$ch(\lambda_m)\cdot cos(\lambda_m) = 1$$

$m = 2,3,4\ldots$ - число узловых линий в окружном направлении с учетом линий по торцевым опорным контурам,

$n = 0,1,2,\ldots$ - число пар узловых линий в меридиональном направлении при расположении каждой пары на одном диаметре.

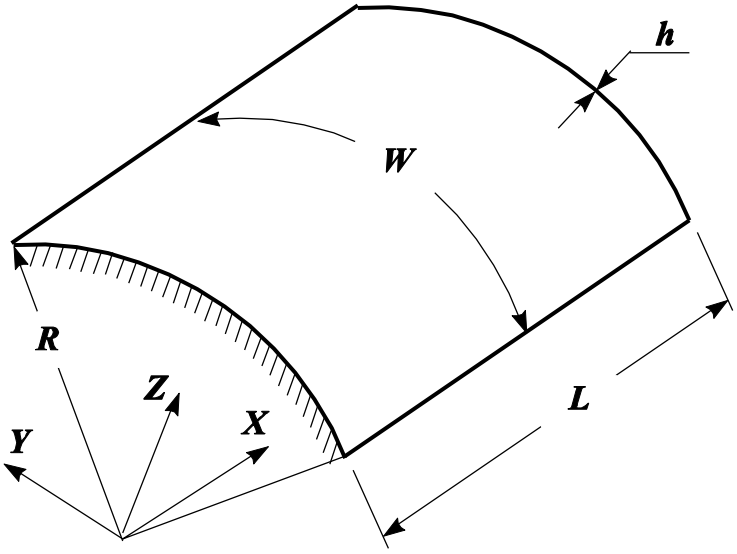
Расхождения с теорией для начальных собственных частот связаны с тем, что частоты и формы собственных колебаний программа определяла для расчетной модели, имеющей все степени свободы узловых перемещений, т.е. учитывались и тангенциальные силы инерции. Эти силы особенно заметны на формах собственных колебаний, имеющих малое число полуволн *m* в окружном направлении.

Точное решение из источника построено без учета тангенциальных сил инерции. Но на странице 440 этого справочника приведена формула для оценки погрешности, которая вносится указанным предположением. Она дает величину поправки к квадрату собственной частоты:

$$k = 1/(1+z).$$

Для первых форм, когда $m=2$ вычисления дали значение $z=0{,}042$. Следовательно, можно ожидать 2% поправки к теоретическому значению.

Свободные колебания консольной открытой цилиндрической оболочки



***Цель*:** Модальный анализ консольной открытой цилиндрической оболочки.

Имя файла с исходными данными: **5.9.SPR**

Формулировка задачи: Определить собственные формы и частоты колебаний ω консольной открытой цилиндрической оболочки с плотностью материала ρ.

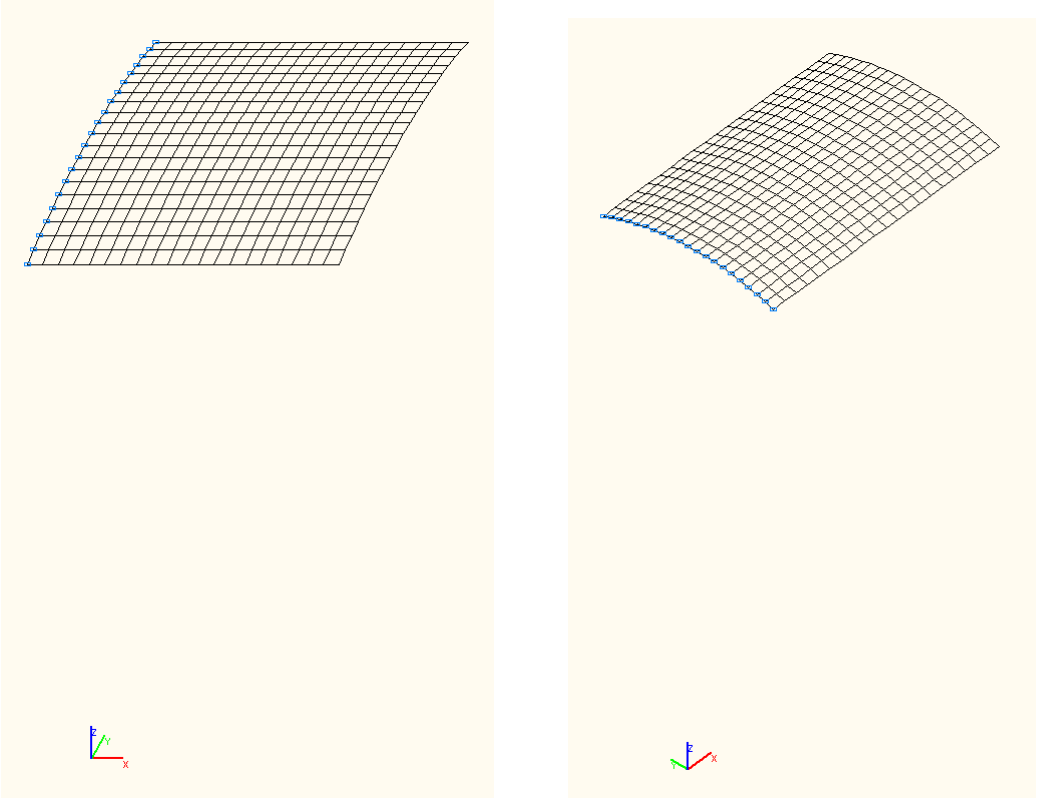
***Ссылки*:** Olson M. D., Lindberg G. M., Vibration analysis of cantilevered curved plates using a new cylindrical shell finite element, Second conference on matrix methods in structural mechanics at Wright – Patterson Air Force Base in Ohio, AFFDL-TR-68-155, 1969, p. 247-269.

Исходные данные:

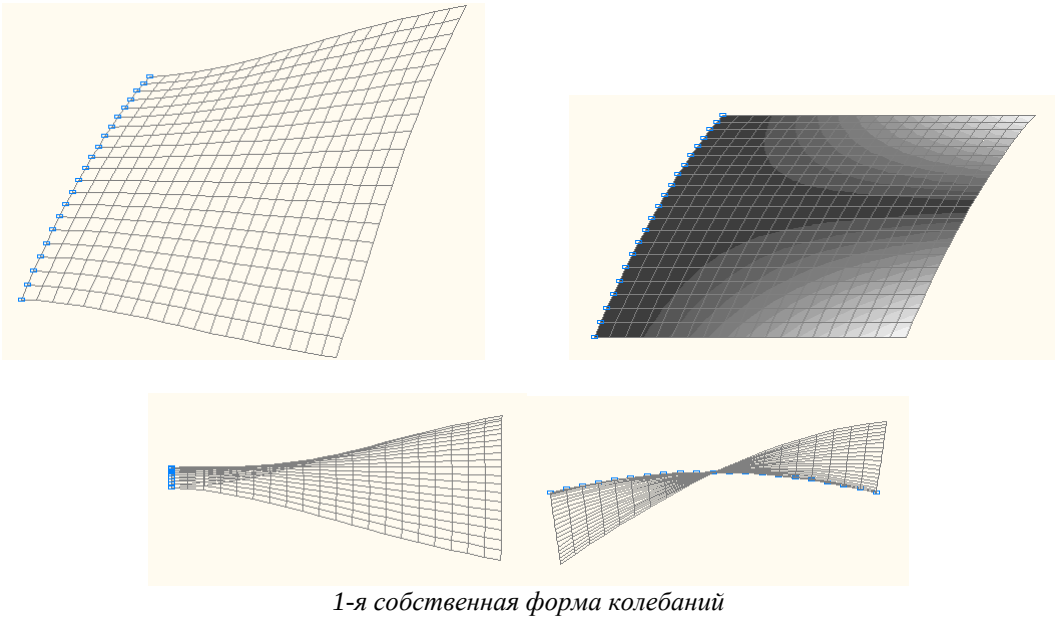
$E = 30.0 \cdot 10^6$ PSI $= 2.0685 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$\rho = 0.28386$ lb/in^3 $= 7.8572$ т/м^3	- плотность материала;
$h = 0.12$ in $= 3.048 \cdot 10^{-3}$ м	- толщина цилиндрической оболочки;
$R = 24$ in $= 0.6096$ м	- радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки;
$L = 12$ in $= 0.3048$ м	- длина образующей цилиндрической оболочки;
$W = 12$ in $= 0.3048$ м	- длина дуги направляющей цилиндрической оболочки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 400 четырехузловых элементов оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.01524 м (20 элементов) в меридиональном направлении и в окружном направлении. Обеспечение граничных условий на защемленном криволинейном торце достигается за счет наложения связей по направлениям всех линейных и угловых перемещений (степени свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ). Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса цилиндрической оболочки: $ow = \gamma \cdot h$, где $\gamma = \rho \cdot g = 77.0791$ кН/м^3. Количество узлов в расчетной схеме – 441. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации Ланцоша. При расчете используется согласованная матрица масс.

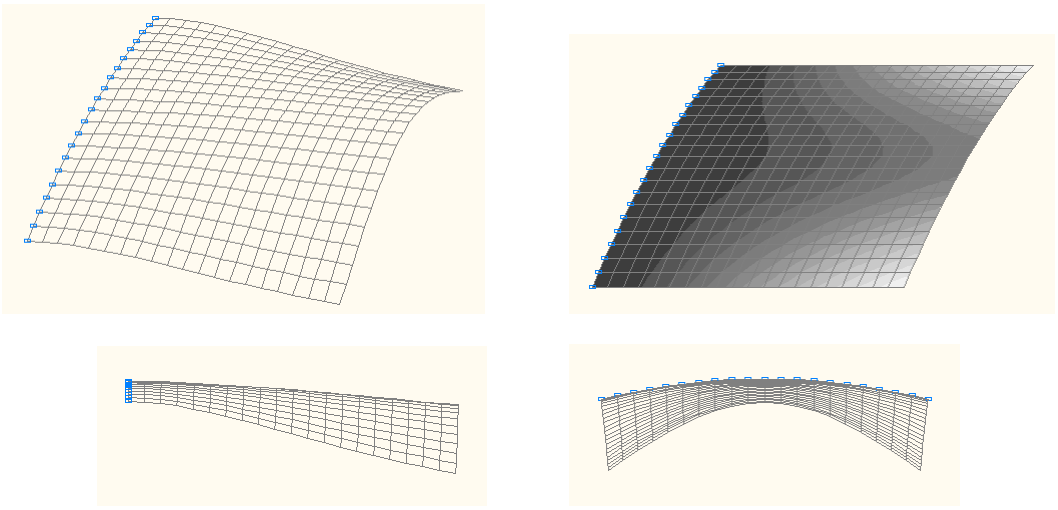
Результаты решения в SCAD



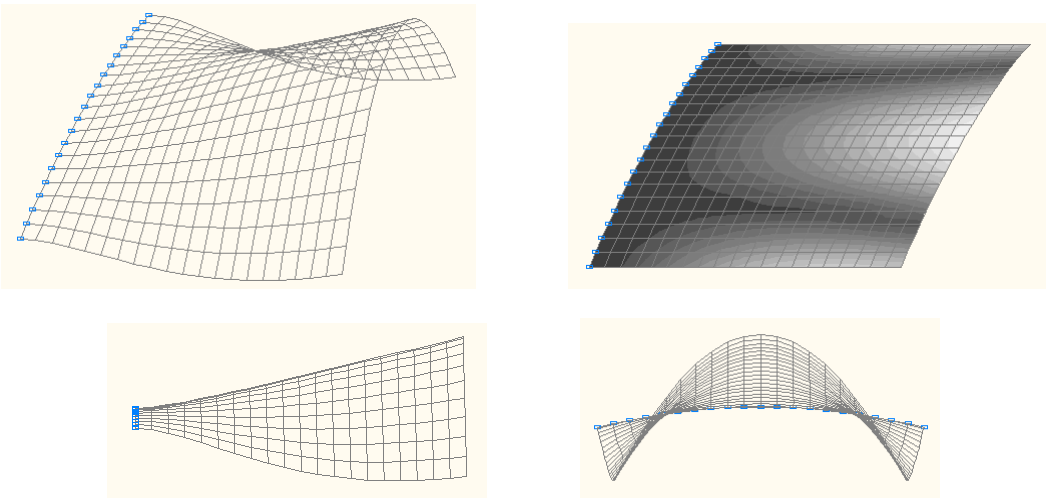
Расчетная схема



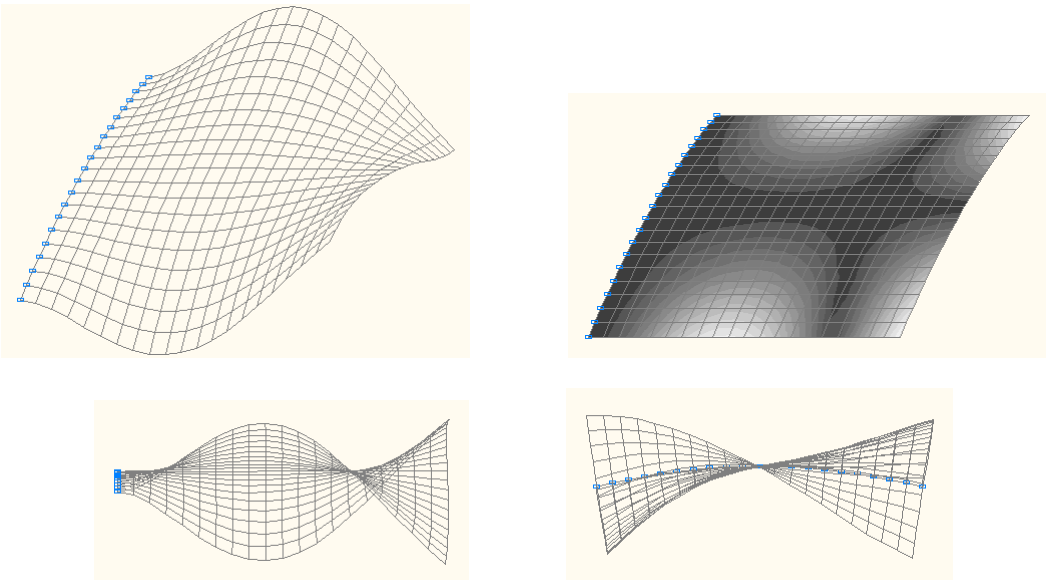
1-я собственная форма колебаний



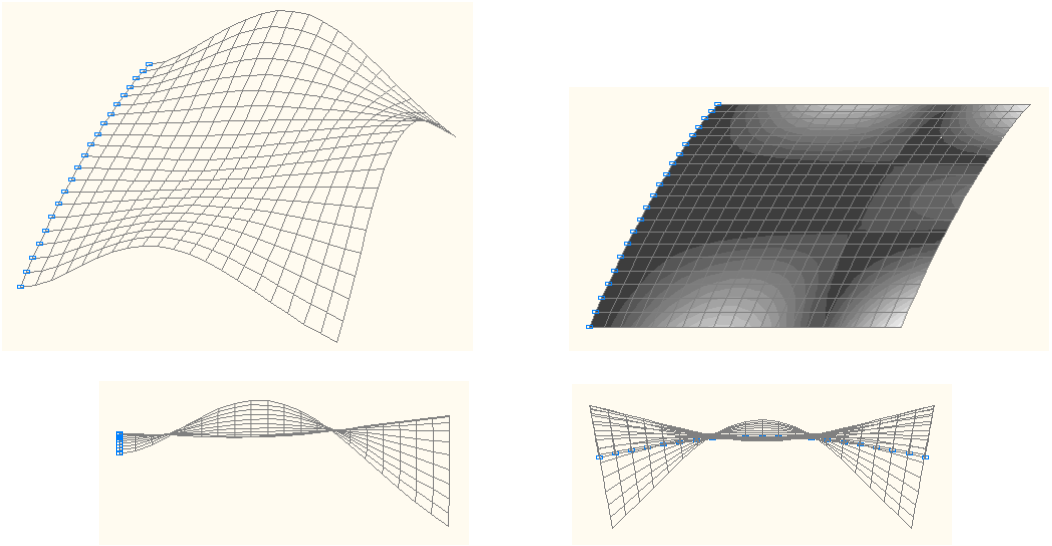
2-я собственная форма колебаний



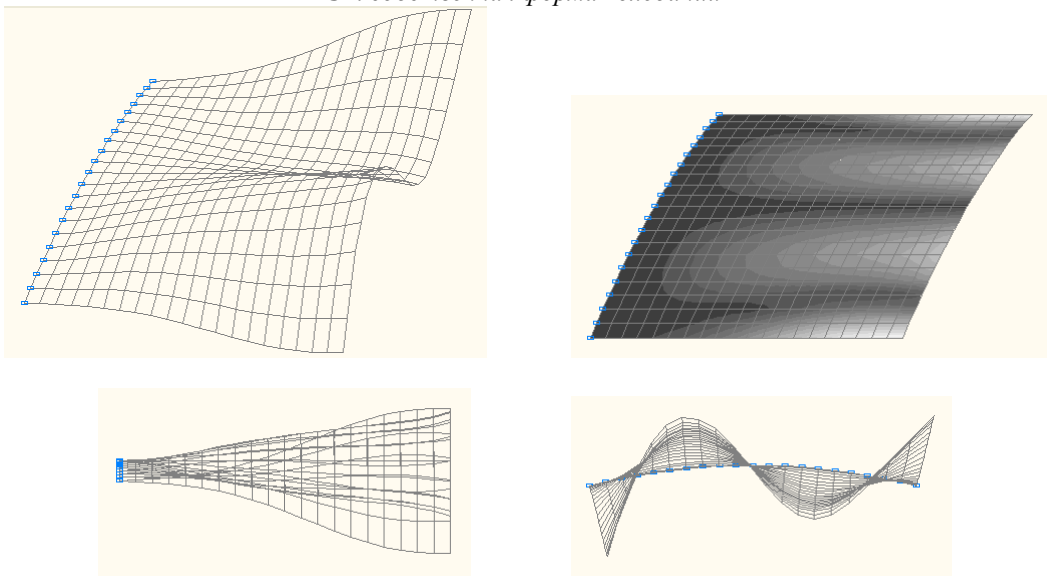
3-я собственная форма колебаний



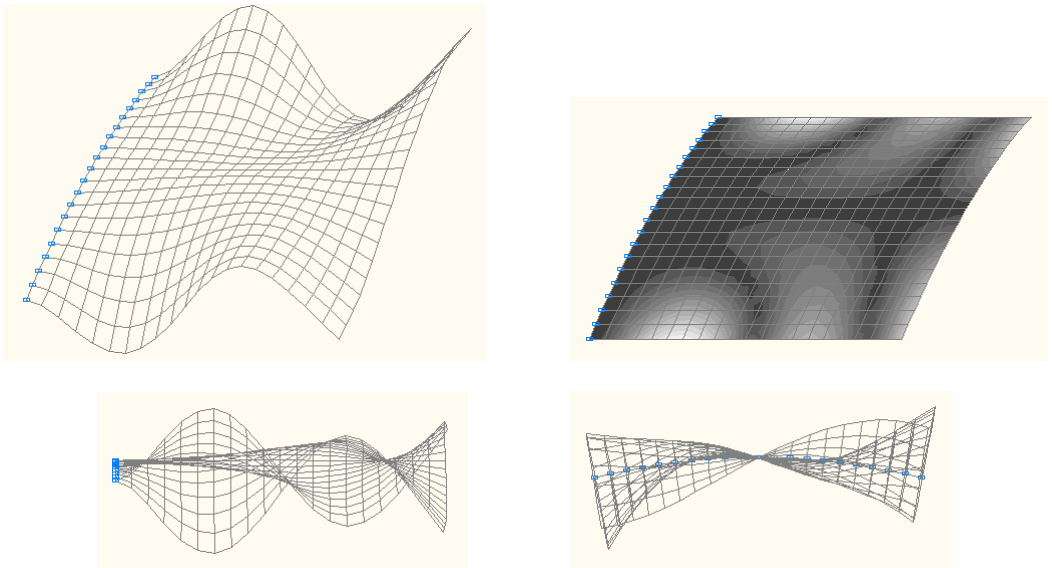
4-я собственная форма колебаний



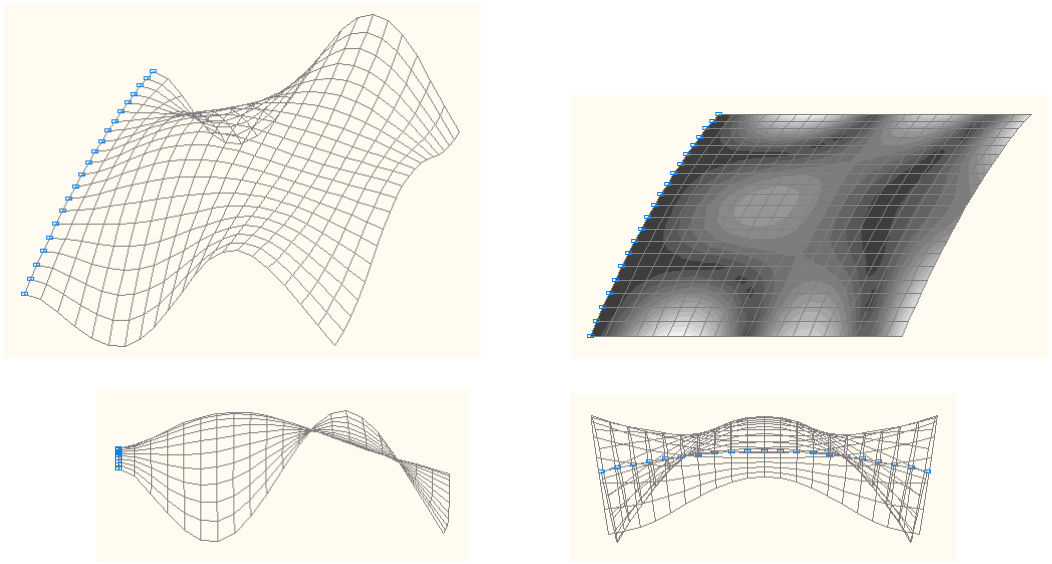
5-я собственная форма колебаний



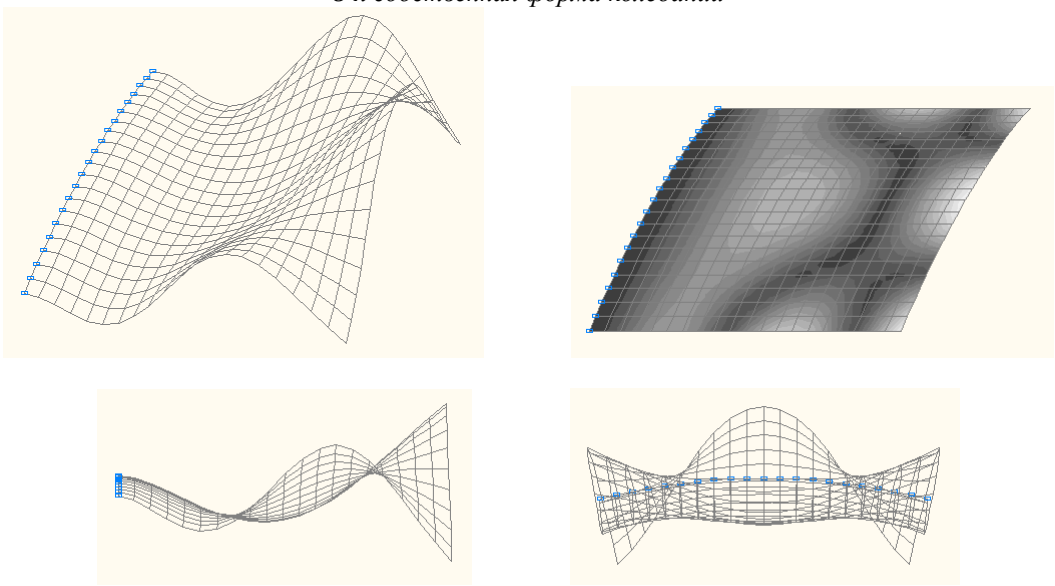
6-я собственная форма колебаний



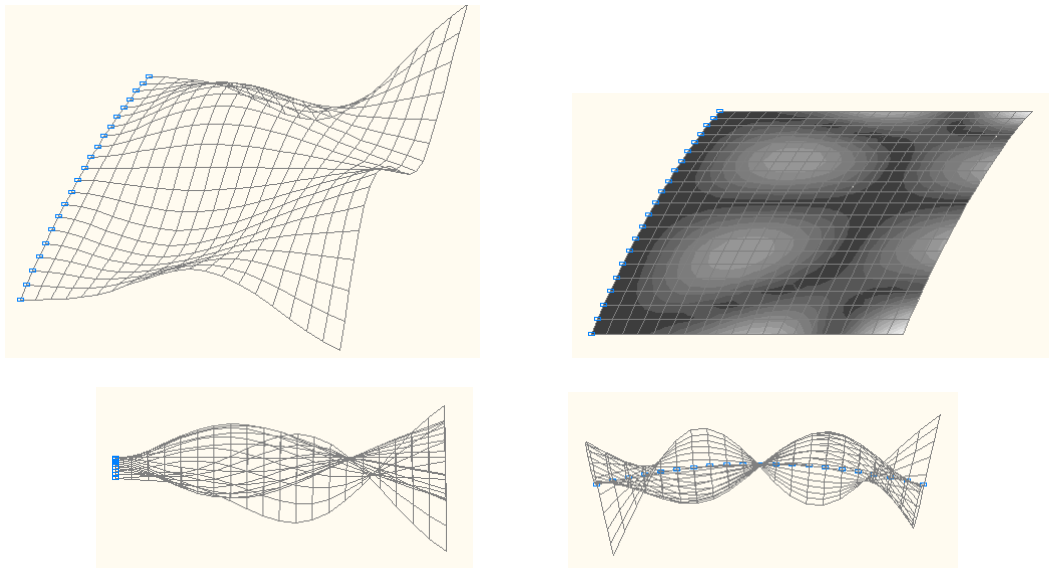
7-я собственная форма колебаний



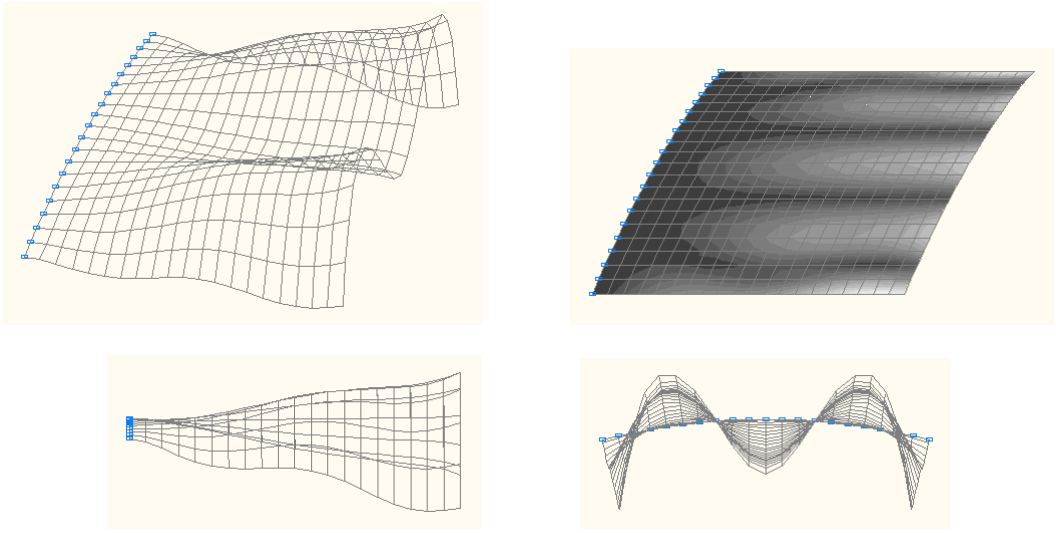
8-я собственная форма колебаний



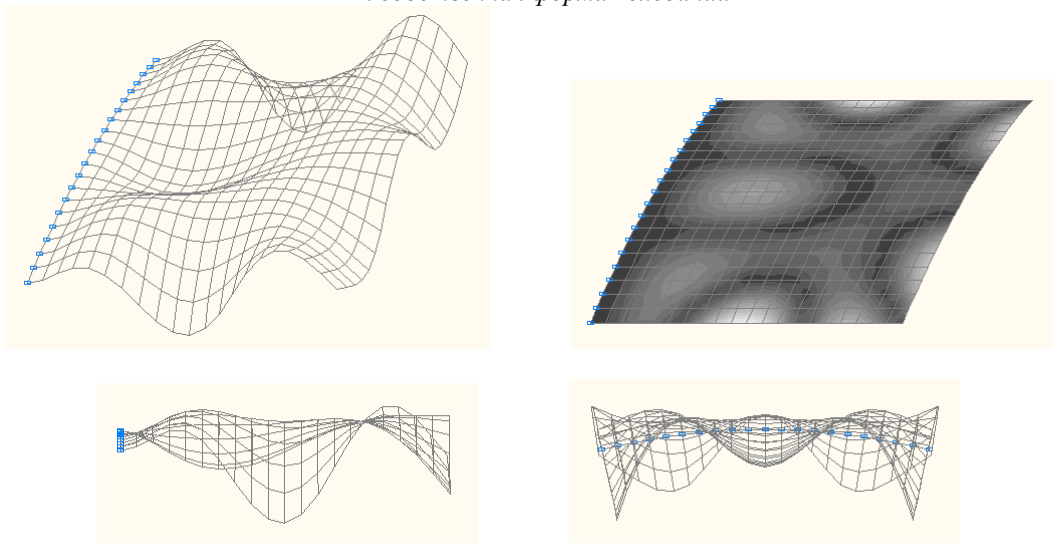
9-я собственная форма колебаний



10-я собственная форма колебаний



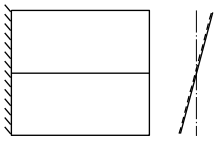
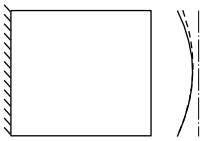
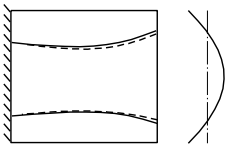
11-я собственная форма колебаний

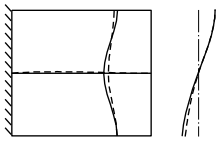
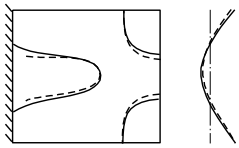
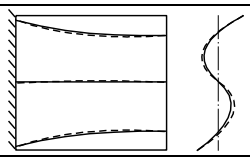
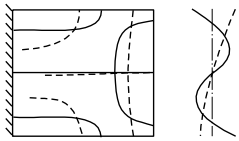
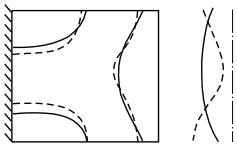
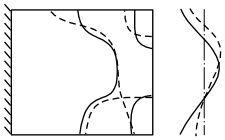
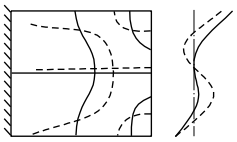
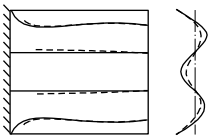
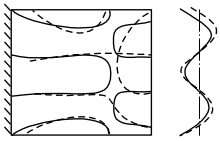


12-я собственная форма колебаний

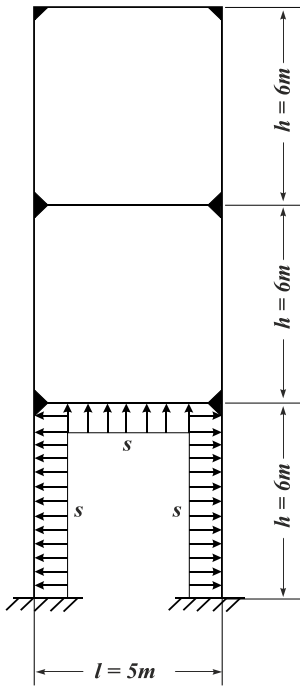
Сравнение решений:

Собственные частоты колебаний ω, Гц

Форма колебаний	**Узловые линии**	**Эксперимент**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1		85.6	86,2	0,35
2		135.5	139,2	0,57
3		258.9	248,2	0,95

Форма колебаний	Узловые линии	Эксперимент	SCAD	Отклонения, %
4		350.6	344,2	0,75
5		395.2	388,2	0,89
6		531.1	529,9	1,39
7		743.2	730,9	1,33
8		751.2	732,9	1,22
9		792.1	776,5	0,87
10		809.2	805,4	1,21
11		996.8	999,1	1,97
12		1215.0	1210,5	1,85

Плоская рама под действием равномерно распределенного мгновенного импульса



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния плоской рамы от воздействия равномерно распределенного мгновенного импульса.

Файл с исходными данными: DI_F.SPR

Формулировка задачи: Плоская однопролетная трехъярусная рама, защемленная по стойкам, с равномерно распределенной массой на стойках m_1 и ригелях m_2 нагружается мгновенным импульсом s равномерно распределенным по контуру нижнего яруса. Определить амплитудные значения изгибающего момента M в ригеле нижнего яруса по сечению сопряжения с левой стойкой при учете следующего допущения, принятого при выводе аналитического решения:
принимается отсутствие линейных перемещений узлов сопряжения стоек с ригелями при симметричном нагружении симметричной расчетной схемы и пренебрежении продольными деформациями элементов конструкции рамы.

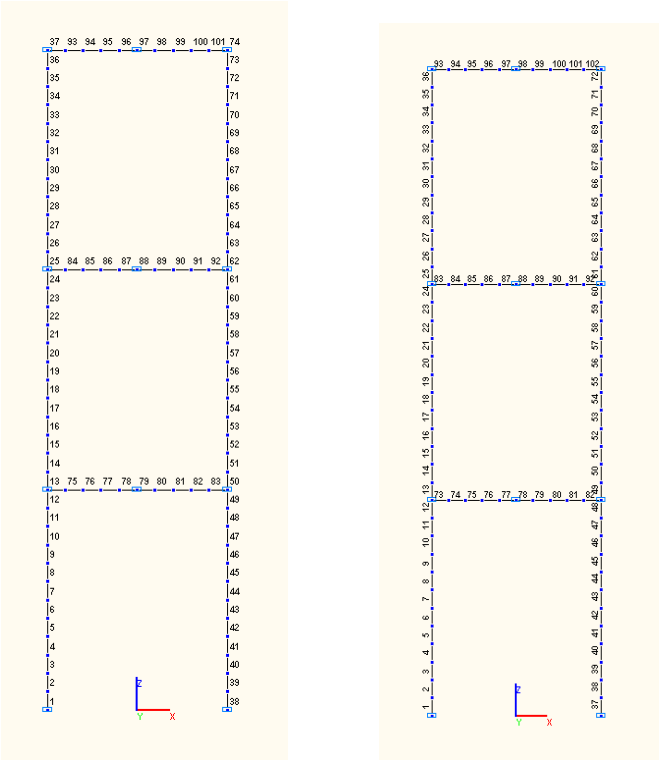
Ссылки: И.М. Рабинович, А.П. Синицын, О.В. Лужин, В.М. Теренин, Расчет сооружений на импульсные воздействия, Москва, Стройиздат, 1970, стр. 91;
Б.Г. Коренев, И.М. Рабинович, Динамический расчет зданий и сооружений (Справочник проектировщика), Москва, Стройиздат, 1984, стр. 79.

Исходные данные:

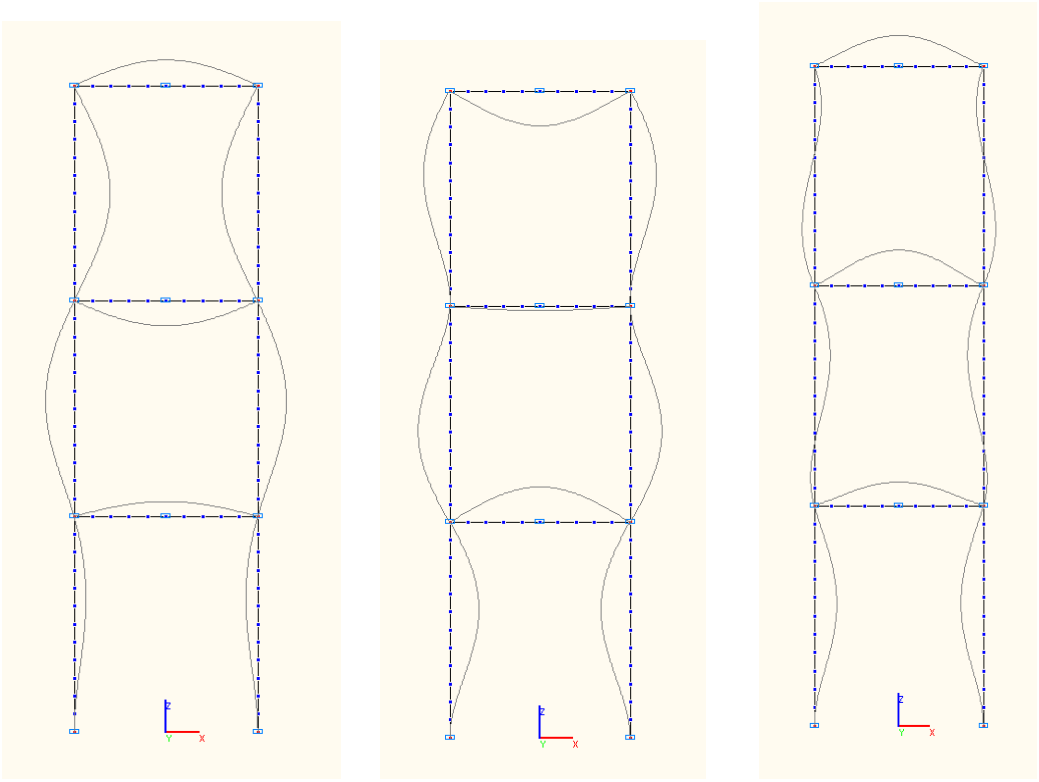
$E = 2.1 \cdot 10^7$ тс/м^2	- модуль упругости;
h = 6.0 м	- высота стоек рамы;
$I_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения стоек рамы;
$F_1 = 2 \cdot 10^{-1}$ м^2	- площадь поперечного сечения стоек рамы;
$m_1 = 0.0204$ тс·с^2/м^2	- значение равномерно распределенной массы на стойках рамы;
l = 5.0 м	- длина пролета ригелей рамы;
$I_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения ригелей рамы;
$F_2 = 4 \cdot 10^{-1}$ м^2	- площадь поперечного сечения ригелей рамы;
$m_2 = 0.0510$ тс·с^2/м^2	- значение равномерно распределенной массы на ригелях рамы;
s = 0.3· тс·с/м	- значение равномерно распределенного мгновенного импульса;
g = 9.81 м/с^2	- значение ускорения свободного падения.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 102 стержневых элемента типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей стоек и ригелей рамы с шагом 0.5 м. Обеспечение граничных условий по опорным узлам стоек нижнего яруса достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Z, UY. Обеспечение граничных условий в узлах сопряжения стоек с ригелями по допущению, принятому при выводе аналитического решения достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, Z. Обеспечение граничных условий в узлах середин пролетов ригелей по допущению, принятому при выводе аналитического решения достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы: X, UY. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки на стойках $m_1 \cdot g$ и ригелях $m_2 \cdot g$ рамы. Воздействие распределенного мгновенного импульса приводится к ряду узловых воздействий со значениями $0.5 \cdot s$. Количество узлов в расчетной схеме – 101. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

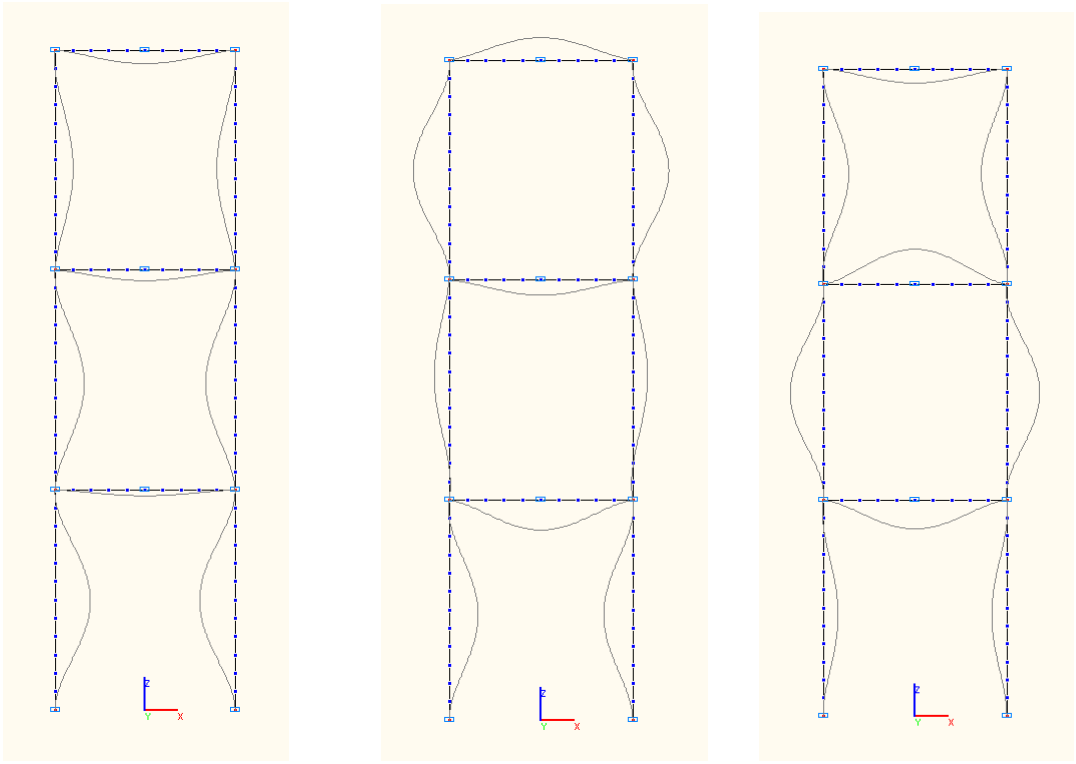
Результаты решения в SCAD:



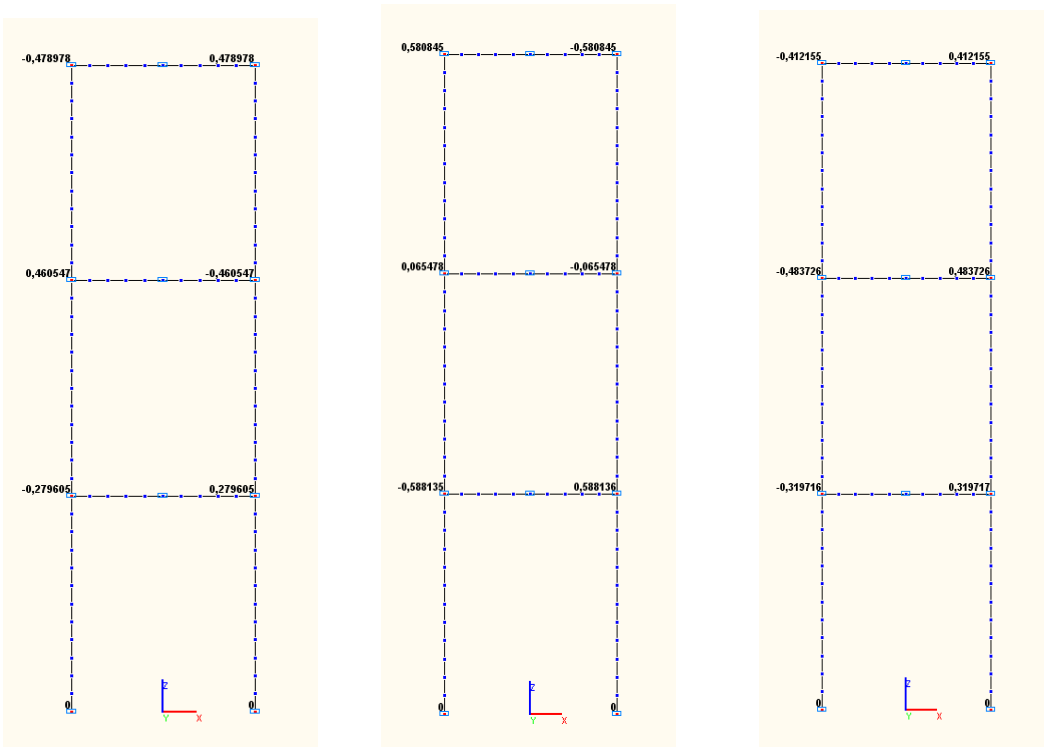
Расчетная схема



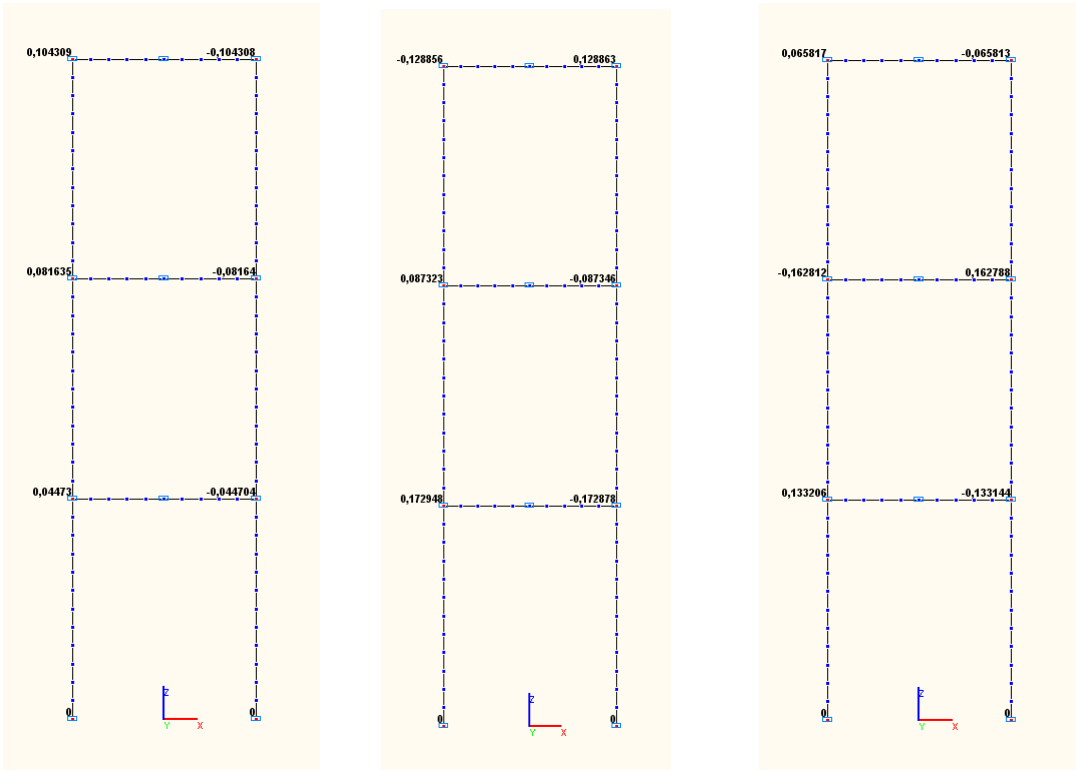
1-я, 2-я, 3-я собственные формы колебаний



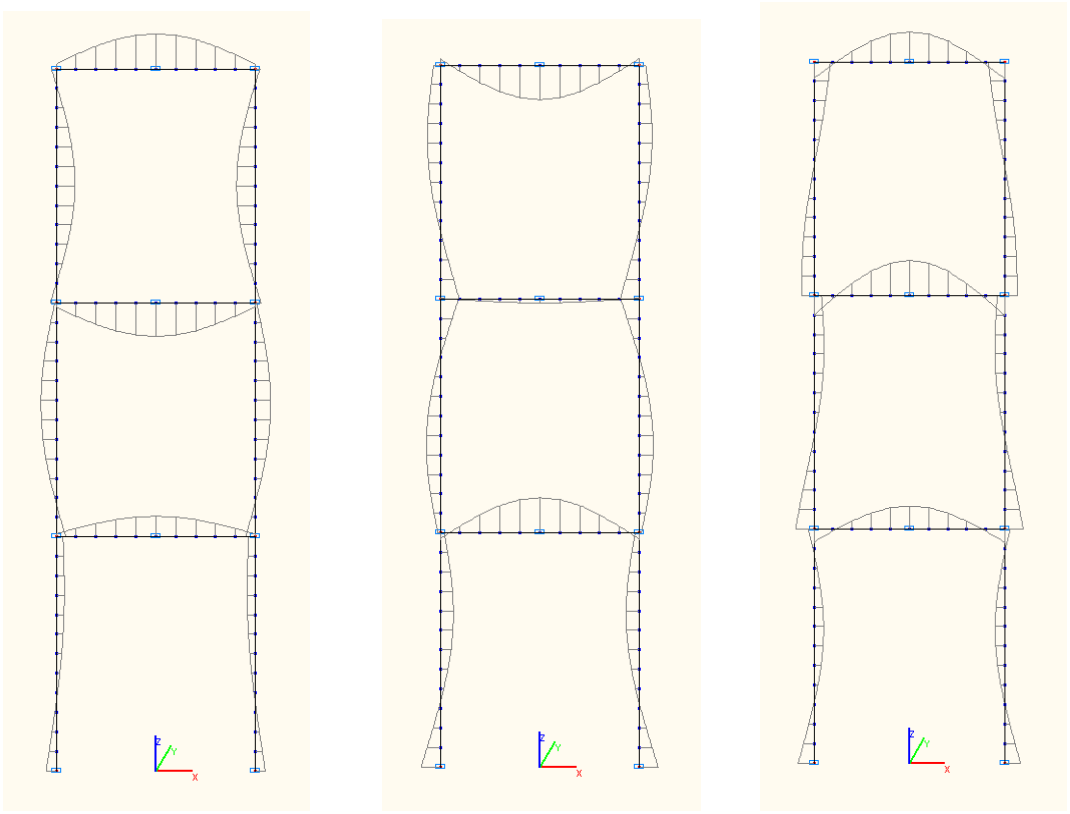
7-я, 8-я, 9-я собственные формы колебаний



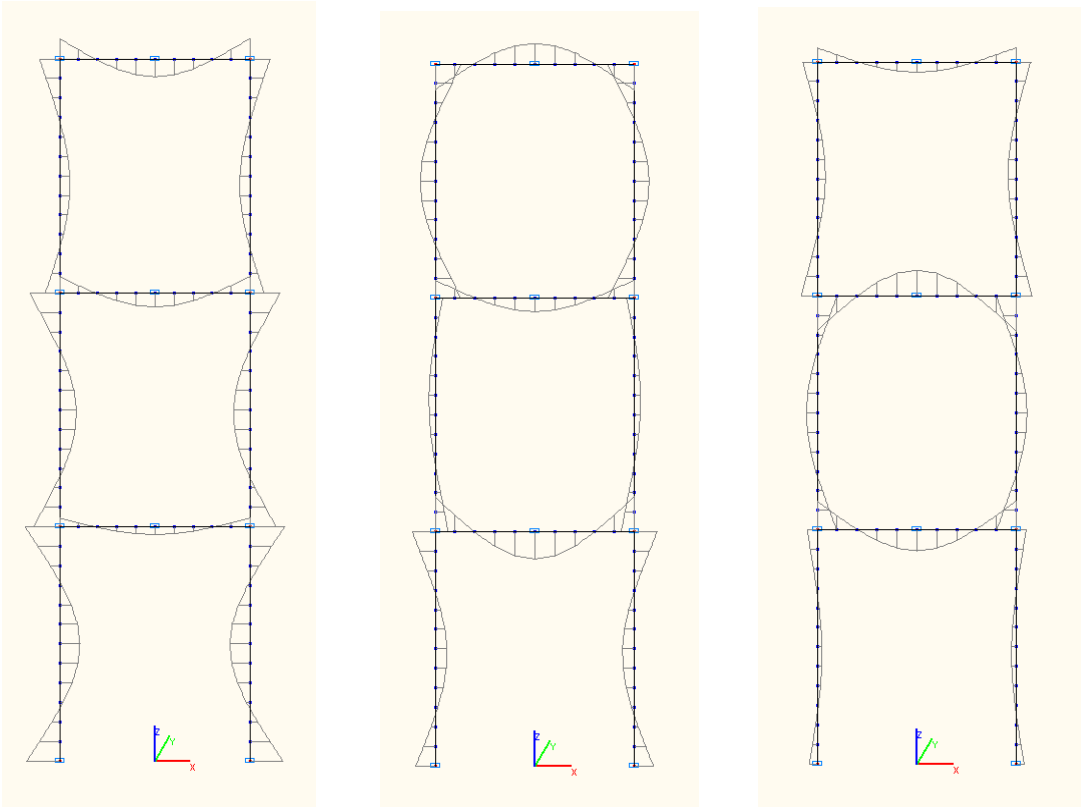
Амплитудные значения угловых перемещений UY_{ij} (рад)
в узлах сопряжений ригелей со стойками
по 1-й, 2-й, 3-й собственным формам колебаний
(модальный анализ)



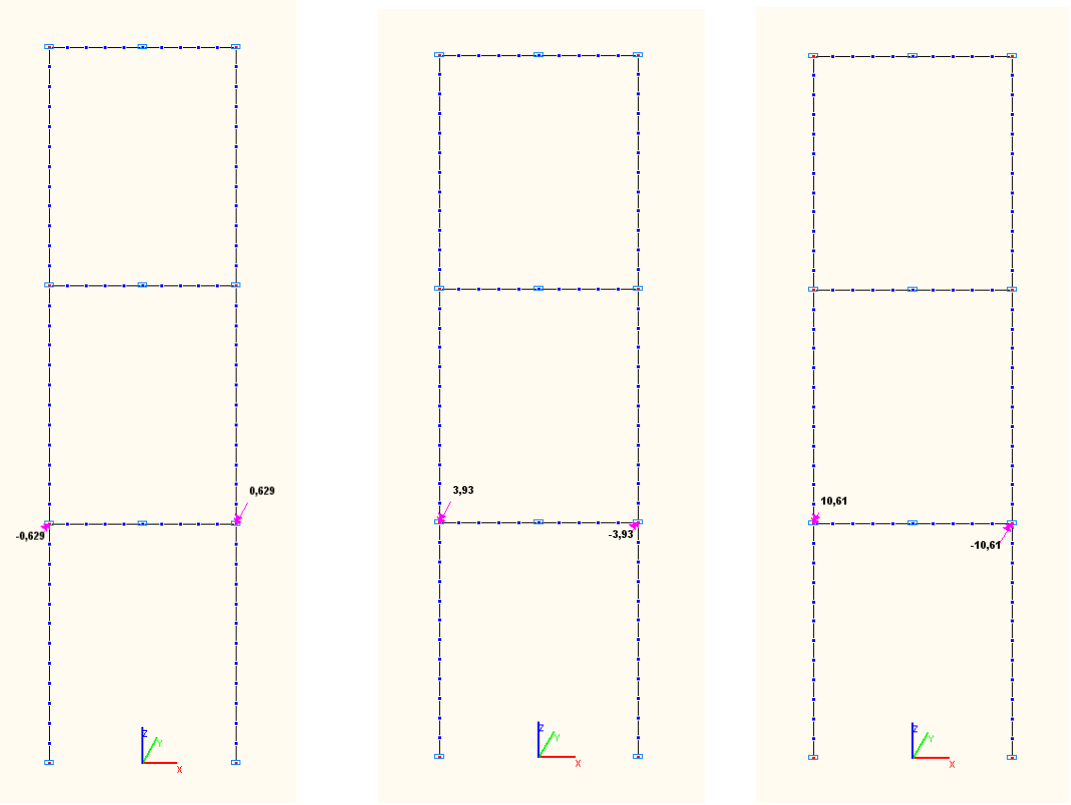
Амплитудные значения угловых перемещений UY_{ij} (рад)
в узлах сопряжений ригелей со стойками
по 7-й, 8-й, 9-й собственным формам колебаний
(модальный анализ)



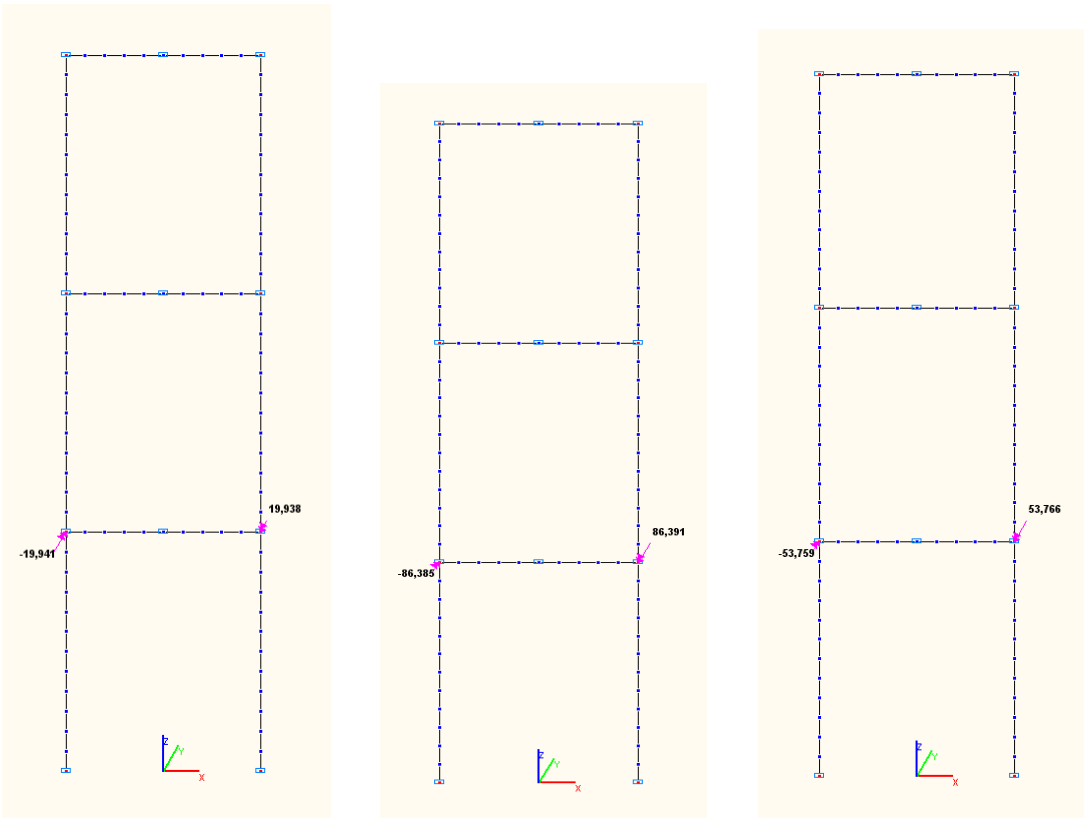
Эпюры изгибающих моментов при амплитудных значениях M_i (тс·м)
по 1-й, 2-й, 3-й собственным формам колебаний



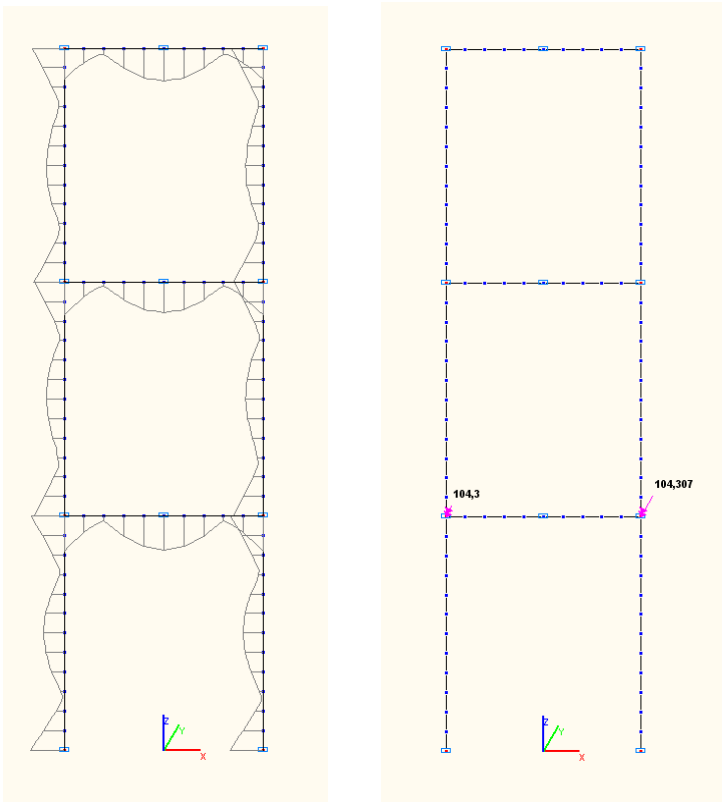
Эпюры изгибающих моментов при амплитудных значениях M_i (тс·м)
по 7-й, 8-й, 9-й собственным формам колебаний



Амплитудные значения изгибающих моментов M_i (тс·м)
в ригеле нижнего яруса по сечениям сопряжений со стойками
по 1-й, 2-й, 3-й собственным формам колебаний



Амплитудные значения изгибающих моментов M_i (тс·м)
в ригеле нижнего яруса по сечениям сопряжений со стойками
по 7-й, 8-й, 9-й собственным формам колебаний



Эпюра изгибающих моментов при амплитудных значениях М (тс·м)
от суммарной импульсной нагрузки

Амплитудные значения изгибающих моментов М (тс·м)
в ригеле нижнего яруса по сечениям сопряжений со стойками
от суммарной импульсной нагрузки

Сравнение решений:

Периоды собственных колебаний Т, с

Форма колебаний	Теория	SCAD	Отклонения, %
1	0.060607	0.060607	0.00
2	0.049785	0.049785	0.00
3	0.040435	0.040436	0.00
7	0.030924	0.030925	0.00
8	0.028903	0.028904	0.00
9	0.027787	0.027788	0.00

Амплитудные значения угловых перемещений UY_{ij} (рад)
в узлах сопряжений ригелей со стойками
по 1-й, 2-й, 3-й, 7-й, 8-й, 9-й собственным формам колебаний
(модальный анализ)

Форма колебаний	Ярус	Теория	SCAD	Отклонение, %
1	1	+0.583753	-0.279605 / -0.478978 = = +0.583753	0.00
1	2	-0.961520	+0.460547 / -0.478978 = = -0.961520	0.00
1	3	+1.000000	-0.478978 / -0.478978 = = +1.000000	0.00

2	1	-1.012550	-0.588135 / +0.580845 = = -1.012551	0.00
2	2	+0.112727	+0.065478 / +0.580845 = = +0.112729	0.00
2	3	+1.000000	+0.580845 / +0.580845 = = +1.000000	0.00
3	1	+0.775708	-0.319716 / -0.412155 = = +0.775718	0.00
3	2	+1.173640	-0.483726 / -0.412155 = = +1.173651	0.00
3	3	+1.000000	-0.412155 / -0.412155 = = +1.000000	0.00
7	1	+0.428722	+0.044730 / +0.104309 = = +0.428822	0.00
7	2	+0.782640	+0.081635 / +0.104309 = = +0.782627	0.00
7	3	+1.000000	+0.044730 / +0.104309 = = +1.000000	0.00
8	1	-1.342142	+0.172948 / -0.128856 = = -1.342180	0.00
8	2	-0,677645	+0.087323 / -0.128856 = = -0,677679	0.00
8	3	+1.000000	-0.128856 / -0.128856 = = +1.000000	0.00
9	1	+2.023786	+0.133206 / +0.065817 = = +2.023884	0.00
9	2	-2.473762	-0.162812 / +0.065817 = = -2.473707	0.00
9	3	+1.000000	+0.065817 / +0.065817 = = +1.000000	0.00

Амплитудные значения изгибающих моментов M_i (тс·м)
в ригеле нижнего яруса по сечению сопряжения с левой стойкой
по 1-й, 2-й, 3-й, 7-й, 8-й, 9-й собственным формам колебаний

Форма колебаний	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
1	+0.629	-0.629	0.00
2	-3.931	+3.930	0.03
3	-10.611	+10.610	0.01
7	+19.939	-19.941	0.01
8	+86.385	-86.385	0.00
9	+53.755	-53.759	0.01

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
Амплитудные значения изгибающего момента М в ригеле нижнего яруса по сечению сопряжения с левой стойкой от суммарной импульсной нагрузки, тс·м	+165.576 (+173.075)	+175.241	5.84 (1.25)

Теоретическое значение изгибающего момента в ригеле соответствует моменту времени t = 0.036 с от начала воздействия импульсной нагрузки;
В скобках приведено теоретическое значение изгибающего момента в ригеле, определенное с учетом сдвига фаз гармоник.

Замечания: При аналитическом решении периоды собственных колебаний Т, амплитудные значения угловых перемещений UY_{ij} в узлах сопряжений ригелей со стойками при модальном анализе, амплитудные значения изгибающих моментов в ригеле нижнего яруса по сечению

сопряжения с левой стойкой по собственным формам колебаний M_i и от суммарной импульсной нагрузки M определяются по формулам:

$$T_i = \frac{2\cdot\pi}{\omega_i}\,; \qquad \omega_i = \frac{\lambda_i^{\,2}}{h^2}\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I_1}{m_1}}\,;$$

λ_i – определяются из выражения:

$$\left\{ 4\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]^3-3\cdot[sh(\lambda)-\sin(\lambda)]^2\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]\right\}\Big/[1-ch(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]^3+$$
$$+\beta^2\cdot\alpha^2\cdot\left\{ 5\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]^2+\right.$$
$$+5\cdot[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]^2\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]-$$
$$\left.-10\cdot[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]\right\}/$$
$$\Big/\left\{ [1-ch(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]\cdot[1-ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]^2\right\}+$$
$$+\beta\cdot\alpha\cdot\left\{ 8\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]^2\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]-\right.$$
$$-8\cdot[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]\cdot[ch(\lambda)\cdot\sin(\lambda)-sh(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]^2-$$
$$\left.-2\cdot[sh(\lambda)-\sin(\lambda)]^2\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]+2\cdot[sh(\lambda)-\sin(\lambda)]^2\cdot[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]\right\}/$$
$$\Big/\left\{ [1-ch(\lambda)\cdot\cos(\lambda)]^2\cdot[1-ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]\right\}+$$
$$+\beta^3\cdot\alpha^3\cdot\left\{ [ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]^3+3\cdot[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]^2\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]-\right.$$
$$\left.-3\cdot[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\sin(\alpha\cdot\lambda)-sh(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]^2-[sh(\alpha\cdot\lambda)-\sin(\alpha\cdot\lambda)]^3\right\}\Big/$$
$$\Big/\left\{ [1-ch(\alpha\cdot\lambda)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)]^3\right\}=0\text{, где:}$$
$$\alpha=\frac{l}{h}\cdot\sqrt[4]{\frac{m_2\cdot I_1}{m_1\cdot I_2}}\,, \qquad \beta=\frac{h}{l}\cdot\frac{I_2}{I_1}\,;$$

$$UY_{i1}=\left\{ [ch(\lambda_i)\cdot\sin(\lambda_i)-sh(\lambda_i)\cdot\cos(\lambda_i)]\cdot[1-ch(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)_i]+\right.$$
$$\left.+\beta\cdot\alpha\cdot\left[\sin(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda_i)+1]-sh(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot[\cos(\alpha\cdot\lambda_i)+1]\right]\cdot[1-ch(\lambda_i)\cdot\cos(\lambda)_i]\right\}\cdot UY_{i3}/$$
$$\Big/\left\{ 2\cdot[ch(\lambda_i)\cdot\sin(\lambda_i)-sh(\lambda_i)\cdot\cos(\lambda_i)]\cdot[1-ch(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)_i]+\right.$$
$$\left.+\beta\cdot\alpha\cdot\left[\sin(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda_i)+1]-sh(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot[\cos(\alpha\cdot\lambda_i)+1]\right]\cdot[1-ch(\lambda_i)\cdot\cos(\lambda)_i]\right\},$$

$$UY_{i2}=-\left\{ [ch(\lambda_i)\cdot\sin(\lambda_i)-sh(\lambda_i)\cdot\cos(\lambda_i)]\cdot[1-ch(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)_i]+\right.$$
$$\left.+\beta\cdot\alpha\cdot\left[\sin(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot[ch(\alpha\cdot\lambda_i)+1]-sh(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot[\cos(\alpha\cdot\lambda_i)+1]\right]\cdot[1-ch(\lambda_i)\cdot\cos(\lambda)_i]\right\}\cdot UY_{i3}/$$
$$\Big/\left\{ [sh(\lambda_i)-\sin(\lambda_i)]\cdot[1-ch(\alpha\cdot\lambda_i)\cdot\cos(\alpha\cdot\lambda)_i]\right\},$$

$$UY_{i3} = 1.0\,;$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t)$$ - без учета сдвига фаз гармоник,

t – определяются из выражения:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \cdot M_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t) = 0\,,$$

$$M = \sum_{i=1}^{q-1} |M_i| \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \omega_i}{2 \cdot \omega_q}\right) + \sum_{i=q}^{N} |M_i|$$, при $|M_q| > |M_i|\,,\ (i \neq q)$ - с учетом сдвига фаз гармоник, где:

$$M_i = A_i \cdot M_{gi}\,, \quad A_i = \frac{A_{i1}}{A_{i2} \cdot \omega_i}\,,$$

$$A_{i1} = \frac{2 \cdot s \cdot UY_{i1}}{\lambda_i{}^2} \cdot \left\{ h^2 \cdot \frac{ch(\lambda_i) - \cos(\lambda_i) - sh(\lambda_i) \cdot \sin(\lambda_i)}{1 - ch(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)} - \frac{l^2}{\alpha^2} \cdot \frac{ch(\alpha \cdot \lambda_i) - \cos(\alpha \cdot \lambda_i) - sh(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \sin(\alpha \cdot \lambda_i)}{1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)} \right\},$$

$$A_{i2} = \frac{m_1 \cdot h^3}{\lambda_i{}^3} \cdot \left\{ \left(UY_{i1}{}^2 + UY_{i2}{}^2 + \frac{UY_{i3}{}^2}{2} \right) \cdot \left[\lambda_i \cdot \frac{[sh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)]^2}{[1 - ch(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)]^2} - \frac{ch(\lambda_i) \cdot \sin(\lambda_i) - sh(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)}{1 - ch(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)} \right] + \right.$$

$$\left. (UY_{i1} \cdot UY_{i2} + UY_{i2} \cdot UY_{i3}) \cdot \left[\lambda_i \cdot \frac{[sh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)] \cdot [ch(\lambda_i) \cdot \sin(\lambda_i) - sh(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)]}{[1 - ch(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)]^2} - \lambda_i \cdot \frac{ch(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)}{1 - ch(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)} - \frac{sh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)}{1 - ch(\lambda_i) \cdot \cos(\lambda_i)} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{m_2 \cdot l^3}{2 \cdot \alpha^3 \cdot \lambda_i{}^3} \cdot \left\{ \left(UY_{i1}{}^2 + UY_{i2}{}^2 + UY_{i3}{}^2 \right) \cdot \left[\alpha \cdot \lambda_i \cdot \frac{[sh(\alpha \cdot \lambda_i) - \sin(\alpha \cdot \lambda_i)]^2}{[1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)]^2} - \frac{ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \sin(\alpha \cdot \lambda_i) - sh(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)}{1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \alpha \cdot \lambda_i \cdot \frac{[sh(\alpha \cdot \lambda_i) - \sin(\alpha \cdot \lambda_i)] \cdot [ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \sin(\alpha \cdot \lambda_i) - sh(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)]}{[1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)]^2} + \alpha \cdot \lambda_i \cdot \frac{ch(\alpha \cdot \lambda_i) - \cos(\alpha \cdot \lambda_i)}{1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{sh(\alpha \cdot \lambda_i) - \sin(\alpha \cdot \lambda_i)}{1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)} \right] \right\}.$$

$$M_{gi} = \frac{E \cdot l_2}{l} \cdot \alpha \cdot \lambda_i \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot (ch(\alpha \cdot \lambda_i) + 1) - sh(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot (\cos(\alpha \cdot \lambda_i) + 1)}{1 - ch(\alpha \cdot \lambda_i) \cdot \cos(\alpha \cdot \lambda_i)} \cdot UY_{i2}$$

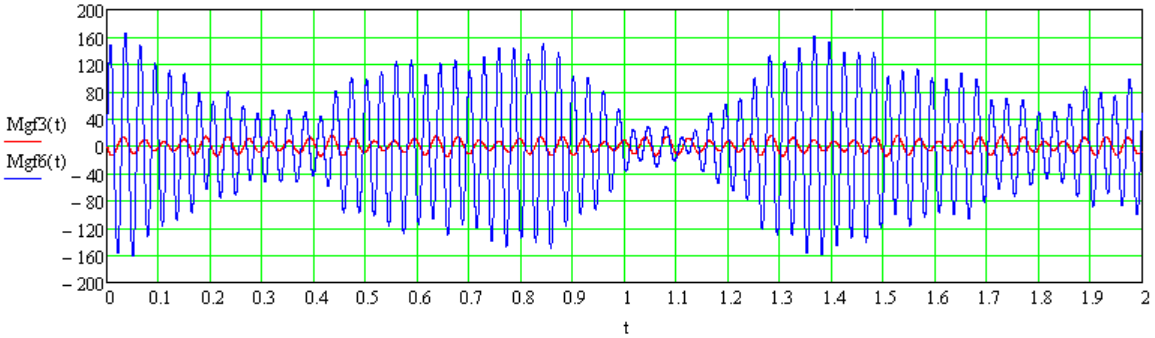
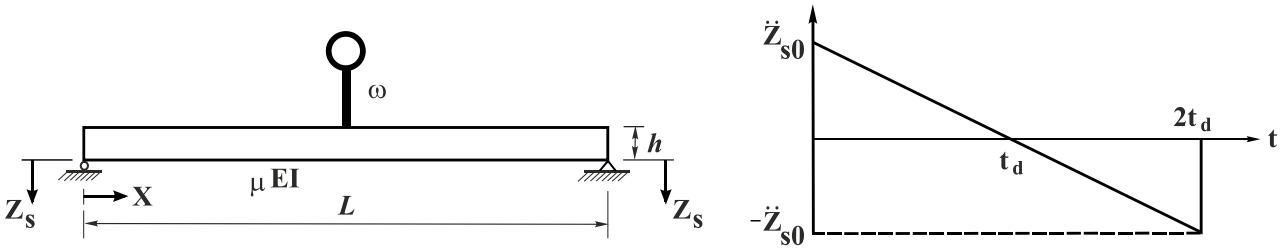


График изменения значений изгибающих моментов M (тс·м) во времени t (с)
в ригеле нижнего яруса по сечениям сопряжений со стойками
от суммарной импульсной нагрузки
с учетом по 3-х и 6-ти симметричных собственных форм колебаний

Существенное расхождение в результатах (>5%) в амплитудных значениях изгибающего момента связано с тем, что в источнике *Расчет сооружений на импульсные воздействия* суммирование по формам осуществляется без учета сдвига фаз. В более поздних рекомендациях уже есть требование учета сдвига фаз. В этом случае расхождение с теорией составляет 1.25%.

Сейсмический отклик балки по линейно-спектральной теории



Цель: Линейно-спектральная методика (определение отклика конструкции при сейсмическом воздействии, заданном акселерограммой)

***Имя файлов с исходными данными*: LinSpectral.SPR** - расчетная схема
DIN_B_RS.SPC - акселерограмма

Формулировка задачи: Свободно опертая балка постоянного сечения с равномерно распределенной массой μ подвергается воздействию кинематического возмущения опор по заданной акселерограмме:

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}_{s0} \cdot \left(1 - \frac{t}{t_d}\right).$$

Необходимо определить (по ЛСТ) сейсмические перемещения и соответствующее максимальное изгибное напряжение.

Ссылки: John M. Biggs, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Book Companies, New York, 1964, p.262;

Исходные данные:

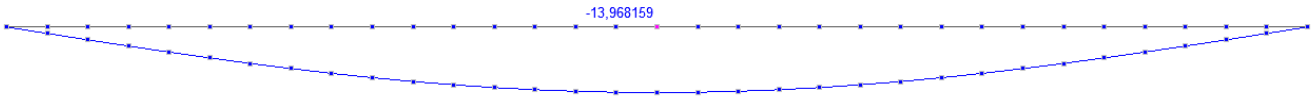
$E = 3.0 \cdot 10^7$ psi $= 2.1092 \cdot 10^7$ тс/м^2	- модуль упругости;
$I = 333.333$ in^4 $= 138.7448 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения балки.
h = 14 in = 0.3556 м	- высота поперечного сечения балки;
L = 240 in = 6.0960 м	- длина пролета балки;
$\mu = 0.2$ lb·sec^2/in^2 $= 0.1406$ тс·с^2/м^2	- значение равномерно распределенной массы балки;
$\ddot{z}_{s0} = \pm 386.2200$ in/sec^2 $= \pm 9.81$ м/с^2	- амплитудные значения ускорения опор по акселерограмме ;
$t_d = 0.10$ sec $= 0.10$ с	- полуинтервал воздействия кинематического возмущения опор;
g = 386.2200 in/sec^2 =9.81 м/с^2	- значение ускорения свободного падения;

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – 32 стержневых элемента типа 3. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы UX. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса балки μ·g.

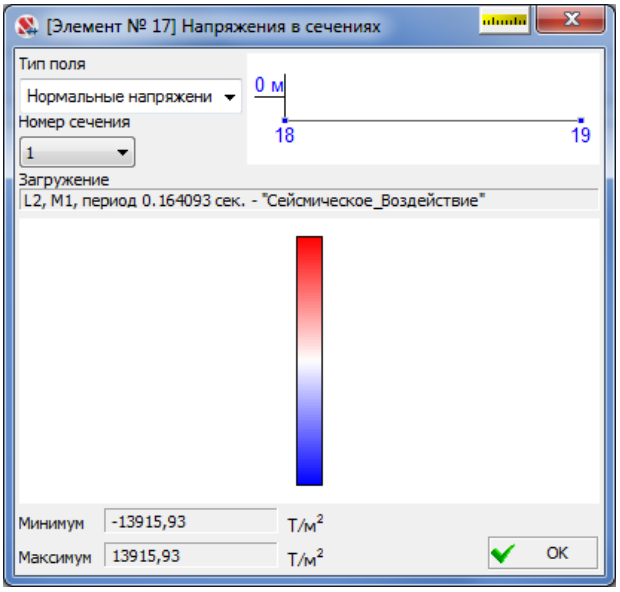
Кинематическое возмущение опор описывается графиком изменения ускорения во времени (акселерограммой) и задается в виде воздействия по оси Z общей системы координат (направляющие косинусы к осям X, Y, Z: 0.00, 0.00, 1.00) с масштабным множителем к значениям акселерограммы, равным 1.00. Высота конструкции балки на схеме сориентирована по оси Z общей системы координат. Коэффициент диссипации принят равным $\xi = 0.000001$. Интервалы между моментами времени графика ускорения во времени равны $\Delta t = 0.01$ с. При построении графика ускорение принимается со значениями $\ddot{z}(t) = \ddot{z}_{s0} \cdot (1 - n \cdot \Delta t / t_d)$ в моменты времени $n \cdot \Delta t$. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 1.000 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33. Определение собственных форм и частот выполнено методом итерации подпространств. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD

Результатом расчёта являются 1-я собственная частота и форма колебаний балки, изгибные сейсмические напряжения на нижней грани балки и перемещения.



Расчетная и деформированная схема



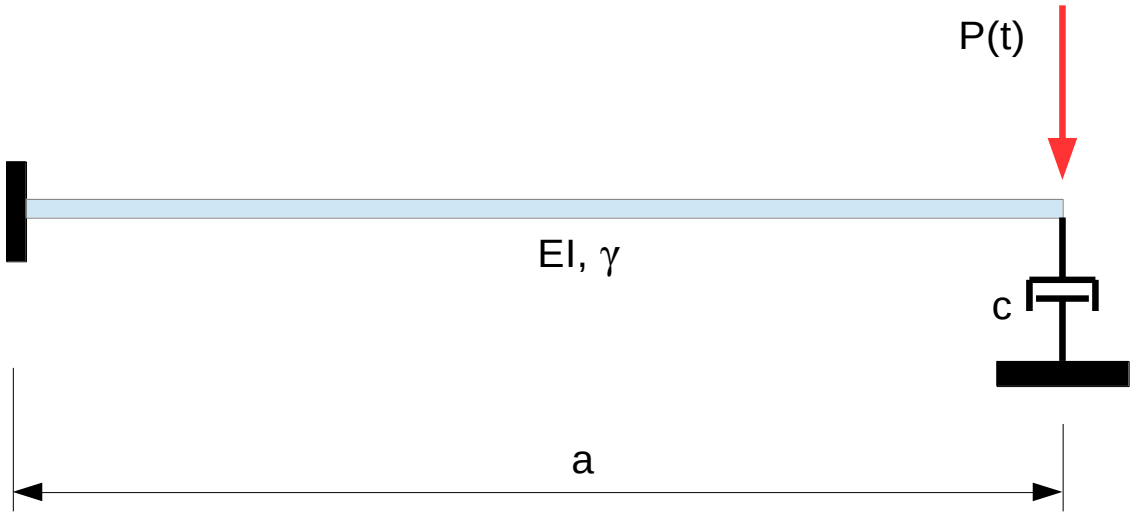
Нормальные напряжения в середине пролета

Сравнение решений:

	Источник	**SCAD**	**Отклонение**
1-я собственная частота (Гц)	6,0979	6.0941	0,06 %
Перемещение балки в середине пролета (м)	0,01422	0,01397	1.75 %
Максимальное нормальное напряжение (Т/м^2)	14172,70	13915,93	1.85 %

Неоднородное демпфирование. Возврат в положение статического равновесия

Цель: проверка того, что под воздействием кратковременных нагрузок и при наличии затухания механическая система после того, как нагрузка перестала изменяться во времени (назовем эту величину статической составляющей нагрузки), должна вернуться в положение статического равновесия, соответствующего статической составляющей нагрузки.



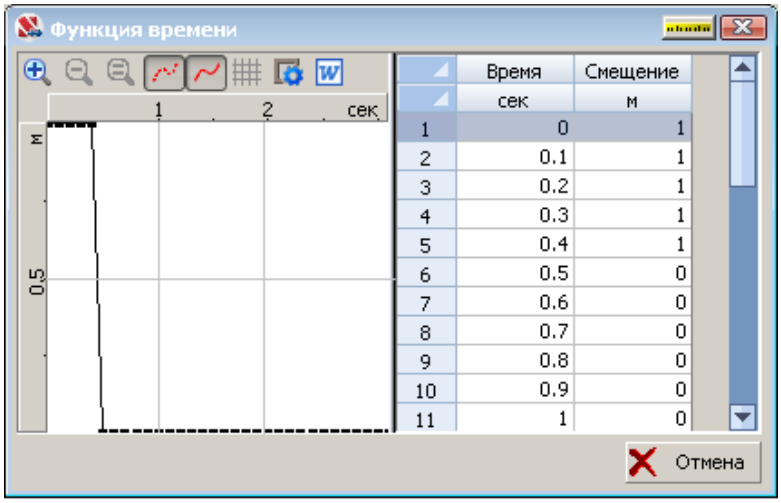
Консольно-защемленная балка с локальным демпфером

Имя файлов с исходными данными: **beam_local_damp_1.SPR** - расчетная схема
FileTimeFile.txt - функция времени

Формулировка задачи:

Рассматривается консольно-защемленная балка длиной a = 3 м с прямоугольным поперечным сечением 0.2 × 0.5 м и модулем упругости E = 23053.5 МН/м^2. Объемный вес равен γ = 0.0245 МН/м^3. Балка поделена на 3 конечных элемента. Используется матрица сосредоточенных масс. Максимальное значение силы P составляет 0.01 МН.

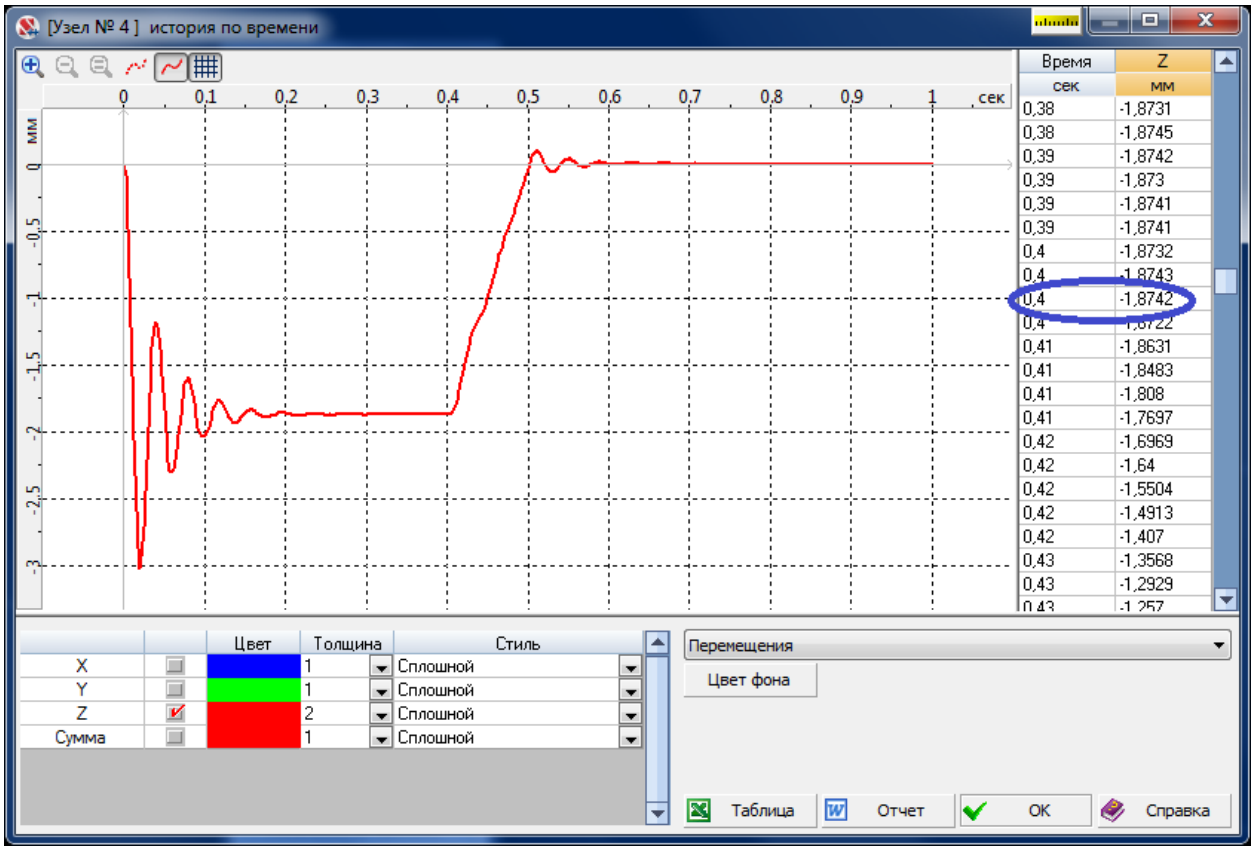
Зависимость нагрузки от времени приведена на рисунке:



Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 6 стержневых элементов общего вида (тип 5) и один одноузловой демпфер (тип 56). Количество узлов в расчетной схеме – 8. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Результаты решения в SCAD

На рисунке представлена зависимость вертикального перемещения края консоли от времени при c = 0.01 МН·с/м.



Вертикальное перемещение края консоли

Учитывается только демпфирование, обусловленное наличием локального демпфера. При внезапном приложении нагрузки возникают поперечные колебания балки, которые быстро затухают. На рисунке обведено значение прогиба, соответствующего состоянию статического равновесия при величине силы равной 0.01 МН. Точное решение соответствующей задачи статики равно $w_{st} = Pa^3/(3EI) = -0.0018739$ м. При решении задачи динамики методом Ньюмарка шаг интегрирования принимался равным 0.001 с. При этом верными получаются 3 значащих цифры. Это позволяет утверждать, что после затухания колебаний мы выходим на статическое решение данной задачи. При 0.4 с < t ≤ 0.5 с происходит уменьшение нагрузки до нуля. Снова возникают колебания, которые быстро затухают. При t = 1 с величина нормального прогиба равна $w = -1.533\cdot10^{-7}$ м, что по сравнению с максимальным по абсолютной величине прогибом $w_{max} = -3.024\cdot10^{-3}$ м является хорошим приближением нуля – точного значения статического прогиба при отсутствии нагрузки.

Таким образом, численное решение, полученное методом Ньюмарка, после затухания колебаний сходится к статическому решению данной задачи, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Неоднородное демпфирование

Цель: сравнение решения задачи (рис. 1) методом Ньюмарка (программный комплекс SCAD) с численным решением, полученном в MathCAD.

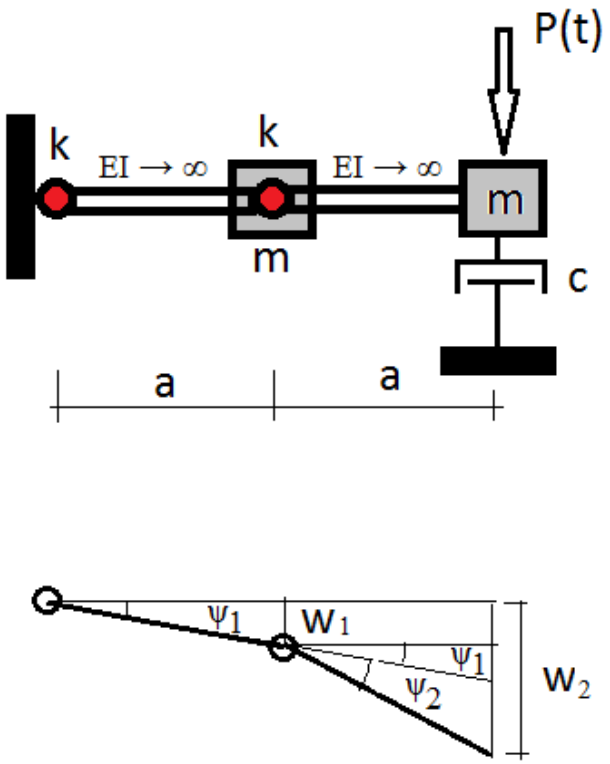


Рис. 1. Два абсолютно твердых невесомых тела соединены между собой и с жесткой опорой пружинами жесткостью *k*. Инерционные характеристики системы представлены сосредоточенными массами *m*. Локальный демпфер с коэффициентом демпфирования *c* соединяет крайнюю массу с опорой.

***Имя файлов с исходными данными*:** **Test_local_damping.SPR**- расчетная схема
TimeHist_1.txt - функция времени
local_damping.xmcd - файл MathCAD

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, два конечных элемента упругой связи (тип 55), два конечных элемента абсолютно твердого тела (тип 100) и один одноузловой демпфер (тип 56). Количество узлов в расчетной схеме – 5. При расчете используется матрица сосредоточенных масс.

Описание решения:

На рис. 1 (низ) представлена деформированная схема, из которой вытекают следующие кинематические соотношения:

$$\psi_1 = \frac{w_1}{a}; \quad \psi_2 = \frac{w_2 - w_1}{a} - \psi_1 = \frac{w_2 - 2w_1}{a}\ , \tag{1}$$

Здесь w_1, w_2 – нормальные прогибы, а ψ_1, ψ_2 – углы перекосов абсолютно жестких стержней. Полная потенциальная энергия системы представлена в виде

$$Э = П + W = \frac{1}{2}k\psi_1^2 + \frac{1}{2}k\psi_2^2 - P\,w_2\ , \tag{2}$$

где $П$ и W – потенциальная энергия упругих деформаций и изменение потенциала внешних сил. Кинетическая энергия системы T приведена ниже:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{w}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{w}_2^2 \ . \tag{3}$$

Применяя вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t1}^{t2} L dt = 0 \ , \tag{4}$$

где $L = T - Э$, и добавляя в полученные уравнения движения силы вязкого трения, приходим к следующим уравнениям движения:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}(t) \ , \tag{5}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{k}{a^2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ P(t) \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Система уравнений (5) решается с помощью MathCAD при использовании процедуры *rkfixed*, реализующей метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Функция $P(t)$ задается следующим алгоритмом:

$$\begin{aligned} P(t) := \ & p \leftarrow 1 \quad \text{if} \quad t \le 0.01 \\ & p \leftarrow -100 \cdot t + 2 \quad \text{if} \quad t > 0.01 \wedge t \le 0.02 \\ & p \leftarrow 0 \quad \text{if} \quad t > 0.02 \\ & \text{return } p \end{aligned} \ . \tag{7}$$

Интервал интегрирования принимается равным $t \in [0, 1]$, а = 1 м, k = 1000 МН·м/рад, $m = 10^6$ кг, c = 10 МН·с/м, а количество точек аппроксимации искомой функции npoint = 1000. Метод Рунге-Кутта относится к явным методам интегрирования, следовательно, он условно устойчив. При npoint = 10 наблюдается неустойчивое поведение решения, результаты при npoint = 100 и npoint = 1000 немного отличаются на правом конце интервала, а результаты при npoint = 1000 и npoint = 10000 практически совпадают. Поэтому мы считаем, что численное решение при npoint = 1000 приводит к практически точным результатам.

На рис. 2 изображена расчетная модель SCAD, а на рис. 4 показано сопоставление приведенного выше решения с результатами, полученными методом Ньюмарка (расчетный комплекс SCAD). При использовании метода Ньюмарка шаг интегрирования принимался равным $\Delta t = 0.0001$ с.

На рис. 3 представлена зависимость нагрузки от времени, соответствующая (7).

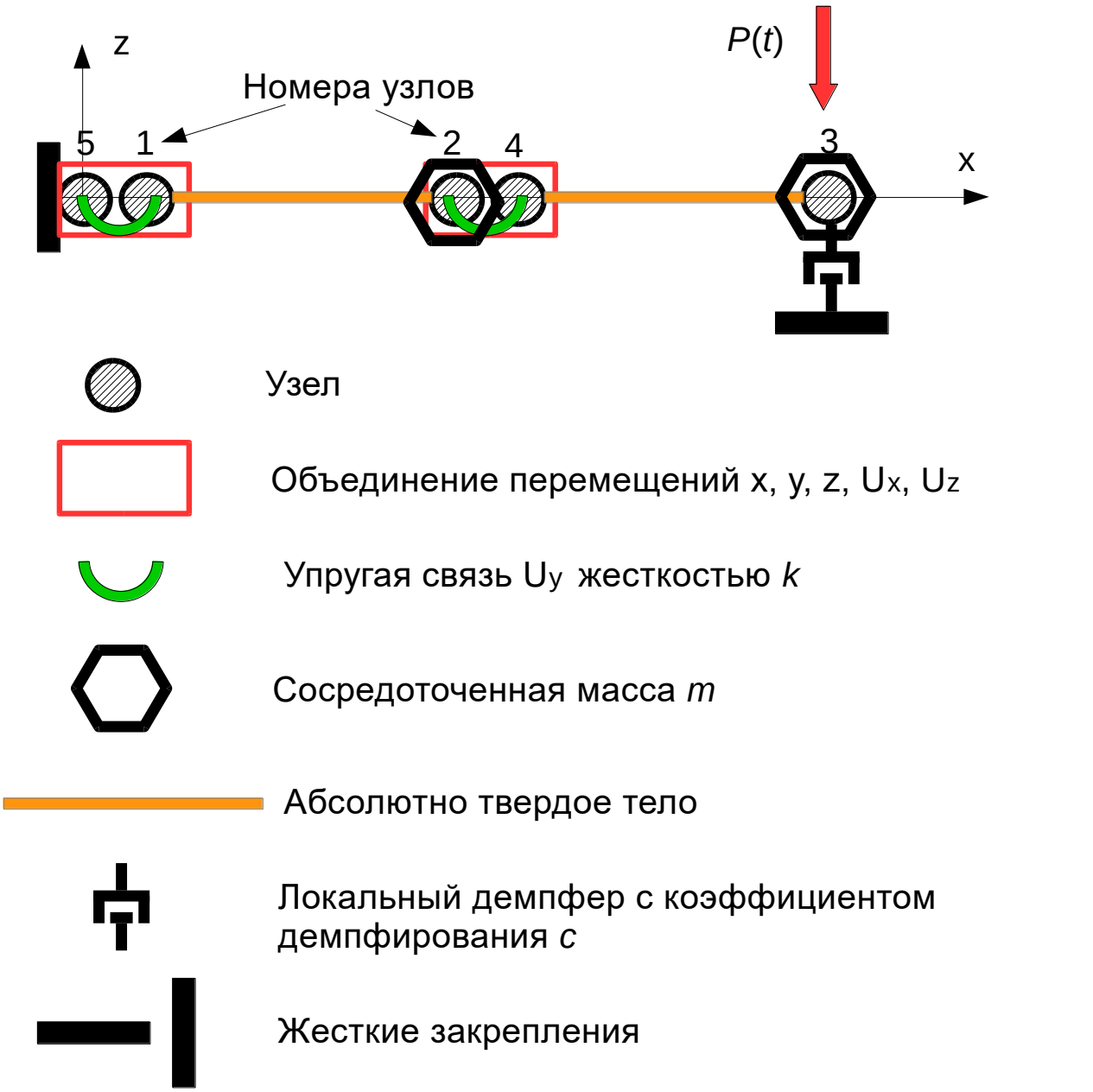


Рис. 2. Расчетная модель SCAD

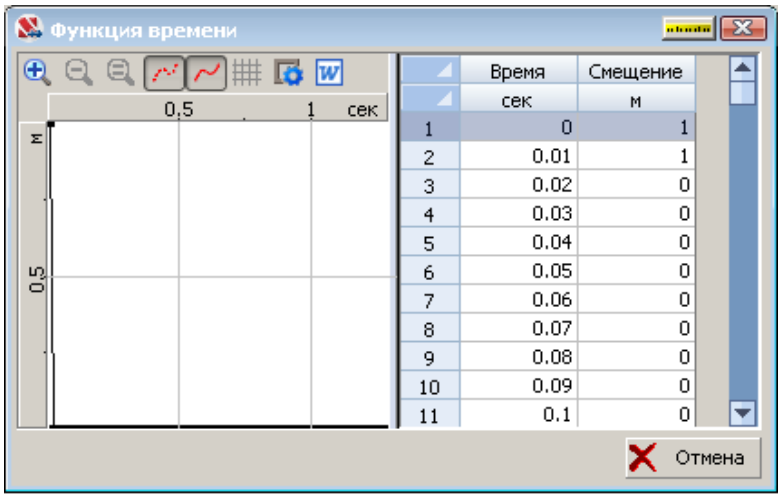


Рис. 3. Зависимость нагрузки от времени

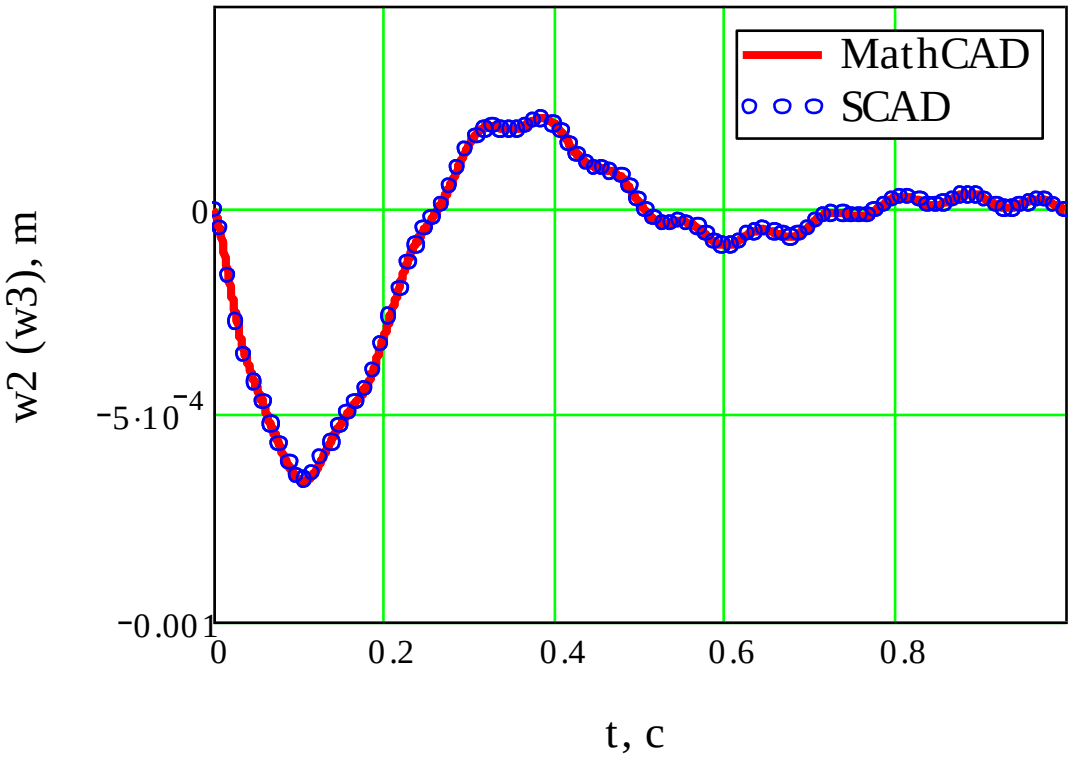


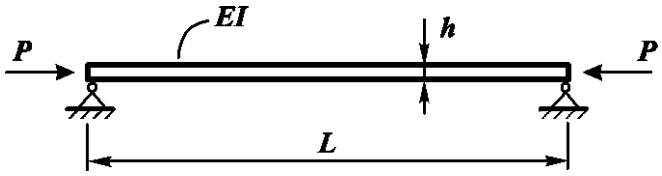
Рис. 4. Вертикальное перемещение края консоли

В момент времени t = 0.1 с перемещение края консоли достигает значения, близкого к наибольшему по абсолютной величине, причем перемещение, полученное по MathCAD, равно $w_2 = -6.5393 \cdot 10^{-4}$ (рис. 1), а перемещение, полученное методом Ньюмарка, равно $w_3 = -6.5170 \cdot 10^{-4}$ (рис. 3).

Таким образом, результаты численных решений, полученных в MathCAD и методом Ньюмарка (SCAD), практически совпадают, что подтверждает достоверность обеих представленных методов.

Линейная устойчивость

Устойчивость шарнирно-опертой балки под действием сосредоточенной продольной силы



Цель: Определение критического значения сосредоточенной продольной силы, действующей на шарнирно-опертую балку, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Имя файла с исходными данными: **CB01_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Балка квадратного поперечного сечения, шарнирно-опертая по двум торцам, подвергается воздействию сосредоточенной продольной силы *P*. Определить критическое значение сосредоточенной продольной силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости балки.

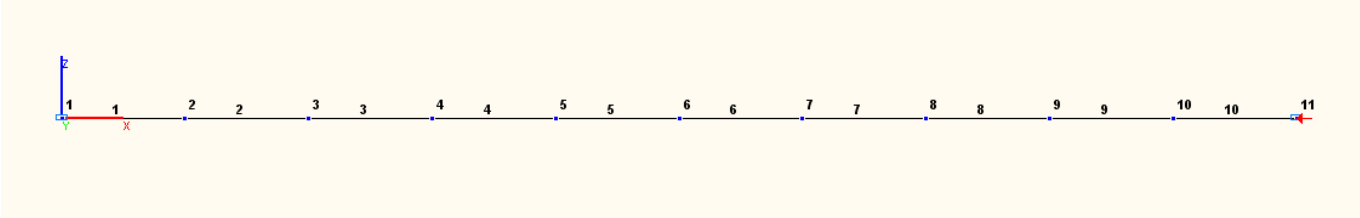
Ссылки: D.O. Brush and B.O. Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, New York, McGraw-Hill Co., 1975, p. 22.

Исходные данные:

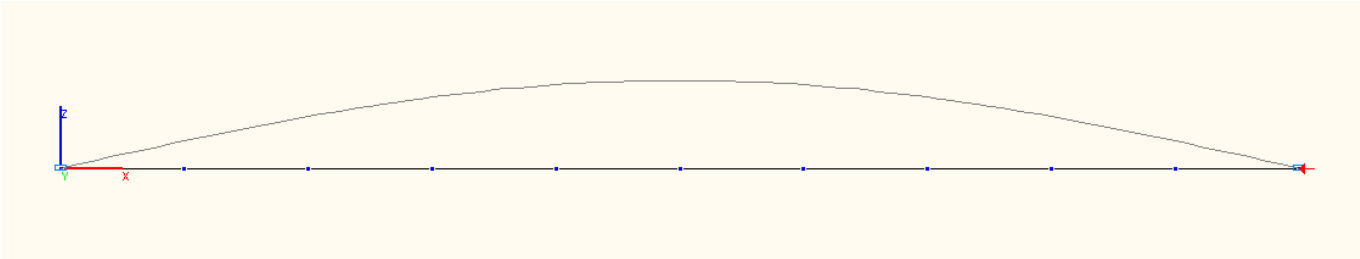
$E = 3.0 \cdot 10^7$ Па	- модуль упругости,
L = 50.0 м	- длина балки;
h = 1.0 м	- сторона поперечного сечения балки;
$P = 1.0 \cdot 10^3$ Н	- начальное значение сосредоточенной продольной силы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 10 элементов типа 10. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси (вдоль оси X общей системы координат) с шагом 5.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z на шарнирно-опертом (левом) торце и по направлению степени свободы Z на свободно-опертом (правом) торце. Воздействие с начальным значением сосредоточенной продольной силы *P* задается на свободно-опертом (правом) торце. Количество узлов в расчетной схеме – 11.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

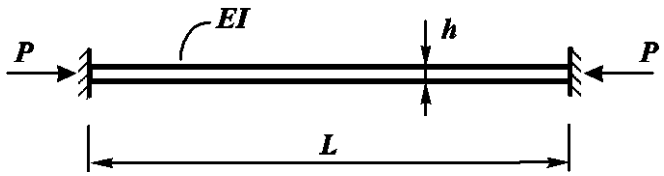
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Критическое значение сосредоточенной продольной силы P_{cr}, Н	9869.6	9.8696·1000 = = 9869.6	0.00

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной продольной силы P_{cr} определяется по следующей формуле:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}, \text{ где:} \qquad I = \frac{h^4}{12}.$$

Устойчивость балки, защемленной по двум торцам, под действием сосредоточенной продольной силы



***Цель*:** Определение критического значения сосредоточенной продольной силы, действующей на балку, защемленную по двум торцам, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Имя файла с исходными данными: **CB02_v11.3.SPR**

***Формулировка задачи*:** Балка квадратного поперечного сечения, защемленная по двум торцам, подвергается воздействию сосредоточенной продольной силы *P*. Определить критическое значение сосредоточенной продольной силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости балки.

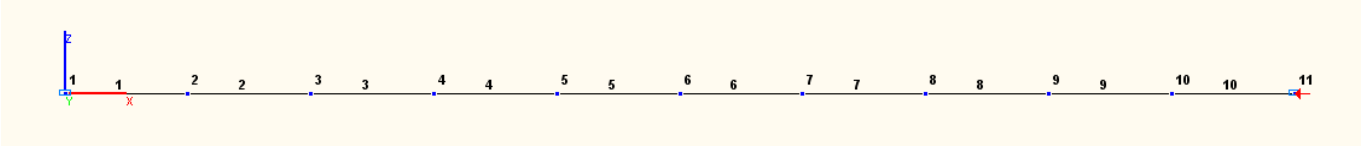
***Ссылки*:** D.O. Brush and B.O. Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, New York, McGraw-Hill Co., 1975, p. 22.

***Исходные данные*:**

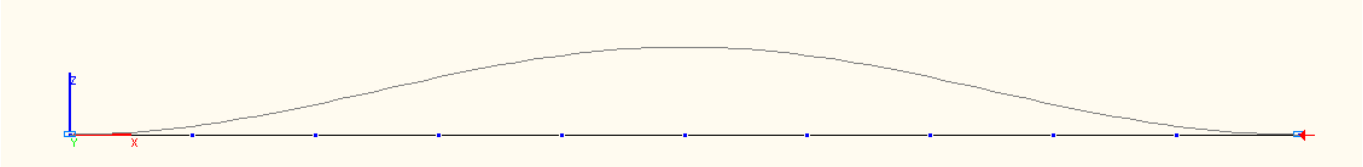
$E = 3.0 \cdot 10^7$ Па	- модуль упругости,
L = 50.0 м	- длина балки;
h = 1.0 м	- сторона поперечного сечения балки;
$P = 1.0 \cdot 10^4$ Н	- начальное значение сосредоточенной продольной силы.

***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – плоская рама, 10 элементов типа 10. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси (вдоль оси X общей системы координат) с шагом 5.0 м.
Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Z, UY на защемленном (левом) торце и по направлениям степеней свободы Z, UY на торце с плавающей вдоль оси балки заделкой (правом). Воздействие с начальным значением сосредоточенной продольной силы *P* задается на торце с плавающей вдоль оси балки заделкой (правом). Количество узлов в расчетной схеме – 11.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

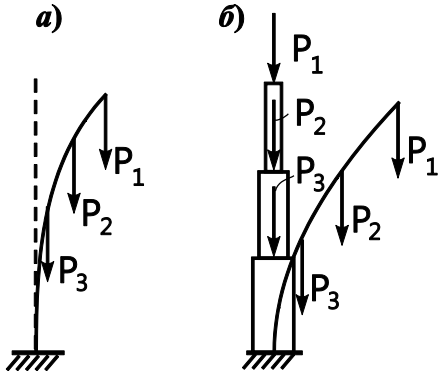
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Критическое значение сосредоточенной продольной силы P_{cr}, Н	39478.4	3.94783·1000 = =39478.3	0.00

***Замечания*:** При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной продольной силы P_{cr} определяется по следующей формуле:

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}, \text{ где: } \quad I = \frac{h^4}{12}.$$

Устойчивость консольной стойки со ступенчатым изменением поперечного сечения, нагруженной продольными сжимающими силами, приложенными к промежуточным и торцевым сечениям



Цель: Определение критических значений продольных сжимающих сил, приложенных к промежуточным и торцевым сечениям консольной стойки со ступенчатым изменением поперечного сечения, соответствующих моменту потери ее устойчивости. Определение свободных длин ступеней стойки.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Leg_of_varying_section_Beam.SPR	Расчетная схема из стержневых элементов
Leg_of_varying_section_Shell.SPR	Расчетная схема из оболочечных элементов

- ***Формулировка задачи:*** Консольная стойка со ступенчатым изменением поперечного сечения подвергается воздействию продольных сил P_i, приложенных к промежуточным и торцевым сечениям. Определить критические значения продольных сжимающих сил P_{cri}, соответствующих моменту потери устойчивости консольной стойки. Определить свободные длины ступеней стойки L_{0i}.

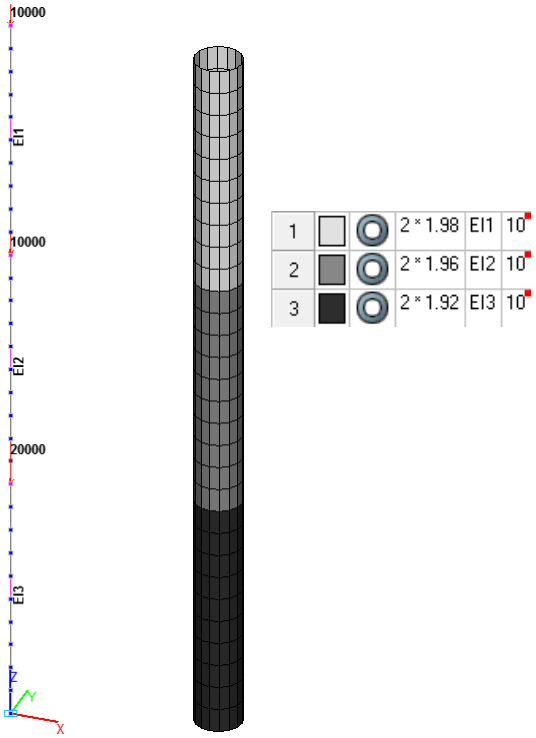
Ссылки: С.П. Тимошенко, Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр. 166.
С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев, Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть. Москва, Машгиз, 1952, стр. 543, 555.

Исходные данные:

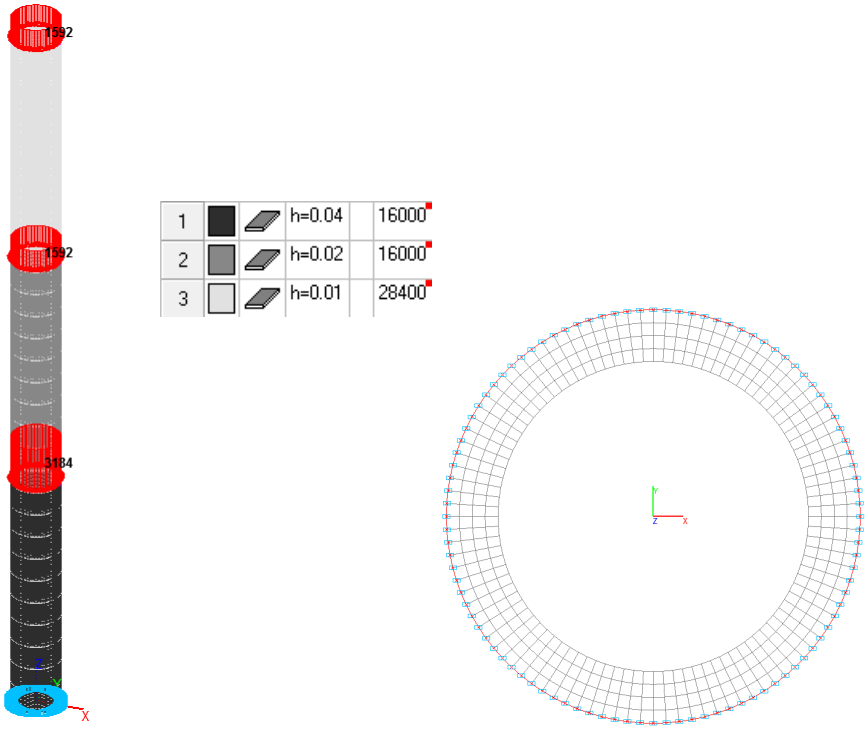
$L_1 = 10.0$ м — длина первой (верхней) ступени стойки;
$L_2 = 10.0$ м — длина второй (средней) ступени стойки;
$L_3 = 10.0$ м — длина третьей (нижней) ступени стойки;
$D_1 = 2.0$ м — наружный диаметр трубчатого поперечного сечения первой ступени стойки;
$D_2 = 2.0$ м — наружный диаметр трубчатого поперечного сечения второй ступени стойки;
$D_3 = 2.0$ м — наружный диаметр трубчатого поперечного сечения третьей ступени стойки;
$t_1 = 0.01$ м — толщина трубчатого поперечного сечения первой ступени стойки;
$t_2 = 0.02$ м — толщина трубчатого поперечного сечения второй ступени стойки;
$t_3 = 0.04$ м — толщина трубчатого поперечного сечения третьей ступени стойки;
$E = 2.06 \cdot 10^8$ кН/м^2 — модуль упругости материала стойки;
$\nu = 0.3$ — коэффициент Пуассона;
$P_1 = 1.0 \cdot 10^4$ кН/м^2 — начальное значение сжимающей продольной силы, приложенной к верхнему торцу первой ступени стойки;
$P_2 = 1.0 \cdot 10^4$ кН/м^2 — начальное значение сжимающей продольной силы, приложенной к верхнему торцу второй ступени стойки;
$P_3 = 2.0 \cdot 10^4$ кН/м^2 — начальное значение сжимающей продольной силы, приложенной к верхнему торцу третьей ступени стойки;

Конечно-элементная модель: Рассматриваются две расчетные модели:
Стержневая модель, расчетная схема – плоская рама, 30 стержневых элементов плоской рамы типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси стойки (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на защемленный узел стойки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. На узлах верхних торцов ступеней стойки задаются сосредоточенные силы с начальными значениями P_1, P_2, P_3. Количество узлов – 31.
Оболочечная модель, расчетная схема – система общего вида, 60400 четырехузловых элементов пологой оболочки с учетом сдвига типа 150. Сетка конечных элементов стойки разбита в кольцевом направлении (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 3.6°, по длине продольной оси (вдоль осей Y1 местных систем координат) с шагом 0.0625 м. В целях обеспечения условий против местной потери устойчивости оболочки стойки внутри нее установлены горизонтальные кольцевые ребра жесткости шириной 0.25 м и с шагом по высоте 1.00 м. Сетка конечных элементов ребер разбита в радиальном направлении (вдоль осей Y1 местных систем координат) с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. На узлах верхних торцов ступеней стойки задаются равномерно распределенные по линии нагрузки с начальными значениями $P_1/(\pi \cdot D_1)$, $P_2/(\pi \cdot D_2)$, $P_3/(\pi \cdot D_3)$. Количество узлов – 60500.

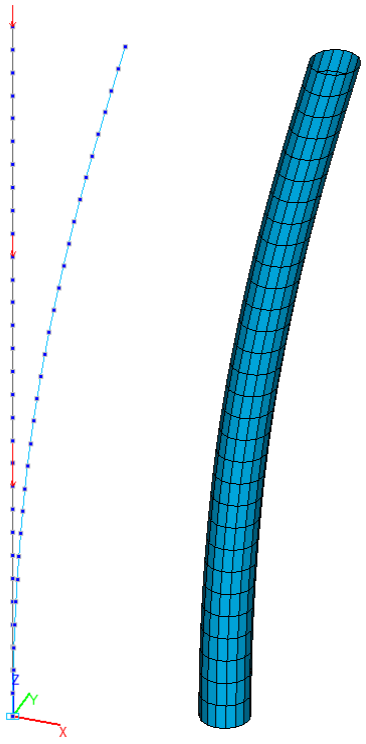
Результаты решения в SCAD



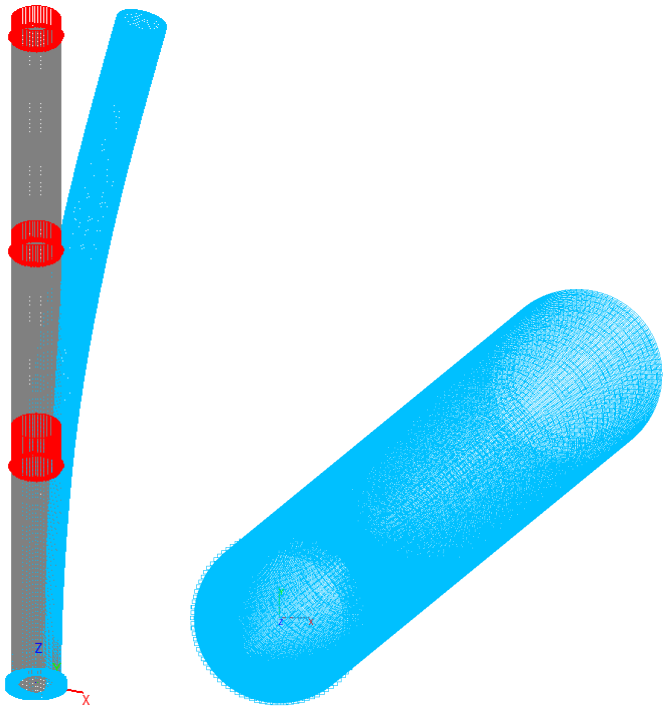
Расчетная схема стержневой модели



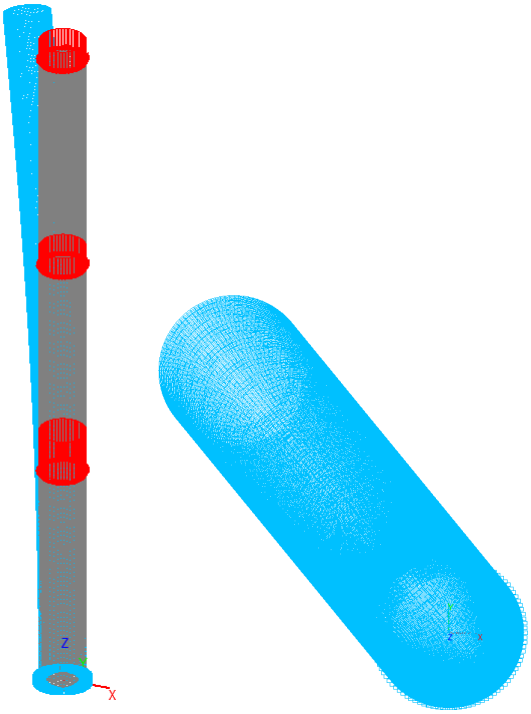
Расчетная схема оболочечной модели



1-я форма потери устойчивости для стержневой модели



1-я форма потери устойчивости для оболочечной модели



2-я форма потери устойчивости для оболочечной модели

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD			
		Стержневая модель	Отклонение, %	Оболочечная модель	Отклонение, %
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на верхнем торце первой ступени P_{cr1}, кН	32978	3.297920· ·10000 = = 32979	0.00	3.394470· ·10000 = = 33945	2.93
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на верхнем торце второй ступени P_{cr2}, кН	32978	3.297920· ·10000 = = 32979	0.00	3.394470· ·10000 = = 33945	2.93
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на верхнем торце третьей ступени P_{cr3}, кН	65957	3.297920· ·20000 = = 65958	0.00	3.394470· ·20000 = = 67890	2.93
Свободная длина первой ступени стойки L_{01}, м	43.680	43.681	0.00	—	—
Свободная длина второй ступени стойки L_{02}, м	43.353	43.353	0.00	—	—
Свободная длина третьей ступени стойки L_{03}, м	42.704	42.705	0.00	—	—

Замечания: При аналитическом решении критические значения продольных сжимающих сил P_{cri}, соответствующих моменту потери устойчивости консольной стойки и свободные длины ступеней стойки L_{0i} определяются по следующим формулам:

$$P_{cr1} = k \cdot P_1; \qquad P_{cr2} = k \cdot P_2; \qquad P_{cr3} = k \cdot P_3;$$

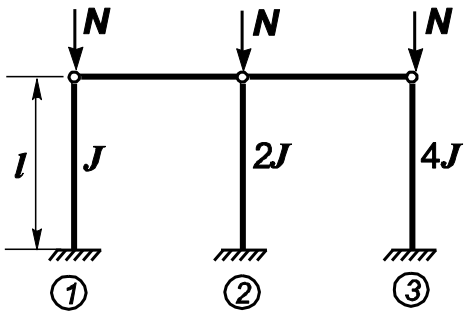
$$L_{01} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_1}{k \cdot P_1}}; \qquad L_{02} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_2}{k \cdot (P_1 + P_2)}}; \qquad L_{03} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_3}{k \cdot (P_1 + P_2 + P_3)}}, \text{ где}$$

k – коэффициент запаса устойчивости системы определяется из условия равенства нулю определителя системы разрешающих уравнений:

$$\begin{vmatrix}
\sin\left[\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot (L_1 + L_2 + L_3)\right] & \cos\left[\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot (L_1 + L_2 + L_3)\right] & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot (L_2 + L_3)\right] & \frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot (L_2 + L_3)\right] & -\sin\left[\sqrt{\frac{k \cdot (P_1 + P_2)}{E \cdot I_2}} \cdot (L_2 + L_3)\right] \\
\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot (L_2 + L_3)\right] & -\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{k \cdot P_1}{E \cdot I_1}} \cdot (L_2 + L_3)\right] & -\sqrt{\frac{k \cdot (P_1 + P_2)}{E \cdot I_2}} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{k \cdot (P_1 + P_2)}{E \cdot I_2}} \cdot (L_2 + L_3)\right] \\
0 & 0 & \frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{k \cdot (P_1 + P_2)}{E \cdot I_2}} \cdot L_3\right] \\
0 & 0 & \sqrt{\frac{k \cdot (P_1 + P_2)}{E \cdot I_2}} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{k \cdot (P_1 + P_2)}{E \cdot I_2}} \cdot L_3\right]
\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}} & 0 \\ -\cos\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2)}{E\cdot I_2}}\cdot(L_2+L_3)\right] & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2)}{E\cdot I_2}}\cdot\sin\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2)}{E\cdot I_2}}\cdot(L_2+L_3)\right] & 0 & 0 \\ \frac{P_1+P_2}{P_1+P_2+P_3}\cdot\cos\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2)}{E\cdot I_2}}\cdot L_3\right] & -\sin\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}}\cdot L_3\right] & -\cos\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}}\cdot L_3\right] \\ -\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2)}{E\cdot I_2}}\cdot\sin\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2)}{E\cdot I_2}}\cdot L_3\right] & -\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}}\cdot\cos\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}}\cdot L_3\right] & \sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}}\cdot\sin\left[\sqrt{\frac{k\cdot(P_1+P_2+P_3)}{E\cdot I_3}}\cdot L_3\right] \end{vmatrix} = 0$$

Устойчивость системы из трех одинаково нагруженных стоек разной жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями



Цель: Определение критического значения сосредоточенных продольных сил одинаковой величины, действующих на систему из трех стоек разной жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями, соответствующего моменту потери ее устойчивости. Определение свободных длин стоек.

Имя файла с исходными данными: **Frame_5a1.spr**

Формулировка задачи: Три стойки разной жесткости, заделанные в фундамент и шарнирно объединенные между собой в систему ригелями, подвергаются воздействию сосредоточенных продольных сил одинаковой величины N. Продольные жесткости ригелей и стоек принимаются значительной величины с целью исключения их влияния на решение задачи. Определить критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости системы. Определить свободные длины стоек H_0.

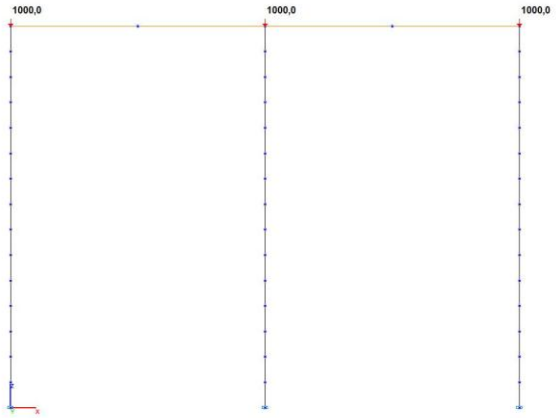
Ссылки: Н.П. Мельников, В.М. Вахуркин, Б.Г. Ложкин, Расчет стержневых систем на устойчивость. Справочные данные и примеры, Москва, Проектстальконструкция, Выпуск 1395, 1954, стр. 34.

Исходные данные:

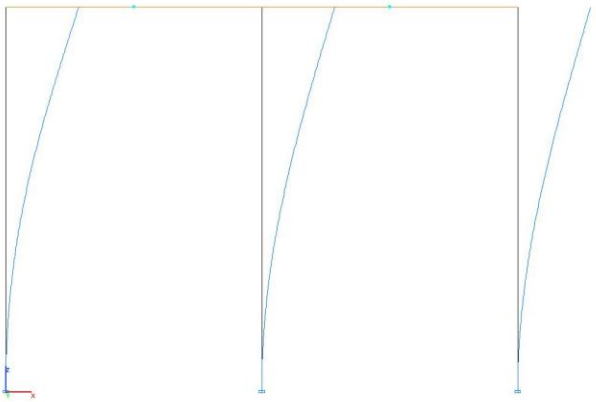
L = 5.0 м	- длина ригелей рамы;
H = 7.5 м	- высота стоек рамы;
$EA = 1.0 \cdot 10^9$ кН	- продольная жесткость стоек;
$EI_{C1} = 1.14 \cdot 10^4$ кН·м^2	- изгибная жесткость левой стойки;
$EI_{C2} = 2.28 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость средней стойки;
$EI_{C3} = 4.56 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость правой стойки;
$N = 1.0 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенных продольных сил на стойки системы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, стойки – 45 элементов типа 2 (сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей с шагом 0.5 м), ригели – 2 элемента типа 100 (трехузловые твердые тела со связями по направлениям X и Z, ведущими узлами на середине пролетов ригелей и ведомыми узлами на сопряженных стойках). Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы стоек по направлениям степеней свободы X, Z, UY. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных сил N задается на узлах сопряжения элементов ригелей с элементами стоек. Количество узлов в расчетной схеме – 50.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, кН	1159.2 (1166.8)	1.1591·1000 = = 1159.1	0.01 (0.66)
Свободная длина левой стойки (С1) H_0, м	9.8522 (9.8198)	9.8523	0.00 (0.33)
Свободная длина средней стойки (С2) H_0, м	13.9331 (13.8873)	13.9332	0.00 (0.33)
Свободная длина правой стойки (С3) H_0, м	19.7043 (19.6396)	19.7042	0.00 (0.33)

В скобках приведены значения приближенного решения по методу эквивалентных рам

Замечания: При точном аналитическом решении критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости системы, и свободные длины стоек H_0 определяются по следующим формулам:

$$N_{cr} = \nu^2 \cdot \frac{EI_{C1}}{H^2},$$

где ν (параметр критической нагрузки) определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$\left(tg\left(\nu\right)-\nu\right)\cdot\left(tg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\nu\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\nu\right)+\sqrt{2}\cdot\left(tg\left(\nu\right)-\nu\right)\cdot\left(tg\left(\frac{1}{2}\cdot\nu\right)-\frac{1}{2}\cdot\nu\right)+$$

$$2\cdot\left(tg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\nu\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\nu\right)\cdot\left(tg\left(\frac{1}{2}\cdot\nu\right)-\frac{1}{2}\cdot\nu\right)=0;$$

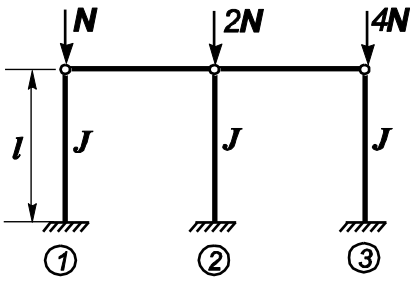
$$C1:\quad H_0=\frac{\pi\cdot H}{\nu};\quad C2:\quad H_0=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi\cdot H}{\nu};\quad C3:\quad H_0=2\cdot\frac{\pi\cdot H}{\nu}.$$

При приближенном аналитическом решении критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости системы, и свободные длины стоек H_0 определяются по следующим формулам:

$$N_{cr}=\frac{7}{3}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_{C1}}{\left(2\cdot H\right)^2};$$

$$C1:\quad H_0=\pi\cdot\sqrt{\frac{EI_{C1}}{N_{cr}}};\quad C2:\quad H_0=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{EI_{C1}}{N_{cr}}};\quad C3:\quad H_0=2\cdot\sqrt{\frac{EI_{C1}}{N_{cr}}}.$$

Устойчивость системы из трех различно нагруженных стоек одинаковой жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями



Цель: Определение критических значений сосредоточенных продольных сил различной величины, соответствующих моменту потери устойчивости системы в конструкции из трех стоек одинаковой жесткости, шарнирно связанных между собой ригелями. Определение свободных длин стоек.

Имя файла с исходными данными: **Frame_5a2.spr**

Формулировка задачи: Три стойки одинаковой жесткости, заделанные в фундамент и шарнирно объединенные между собой в систему ригелями, подвергаются воздействию сосредоточенных продольных сил различной величины k·N. Продольные жесткости ригелей и стоек принимаются значительной величины с целью исключения их влияния на решение задачи. Определить критические значения сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующих моменту потери устойчивости системы. Определить свободные длины стоек H_0.

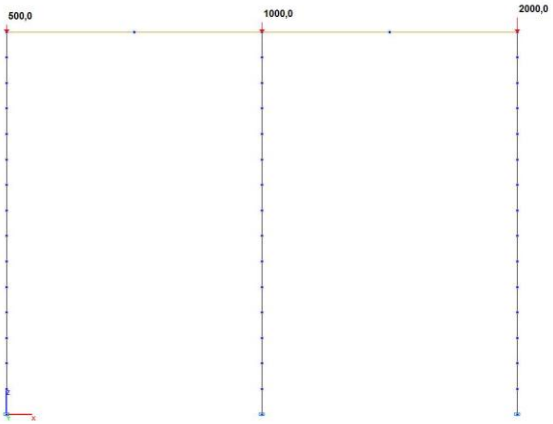
Ссылки: Н.П. Мельников, В.М. Вахуркин, Б.Г. Ложкин, Расчет стержневых систем на устойчивость. Справочные данные и примеры, Москва, Проектстальконструкция, Выпуск 1395, 1954, стр. 36.

Исходные данные:

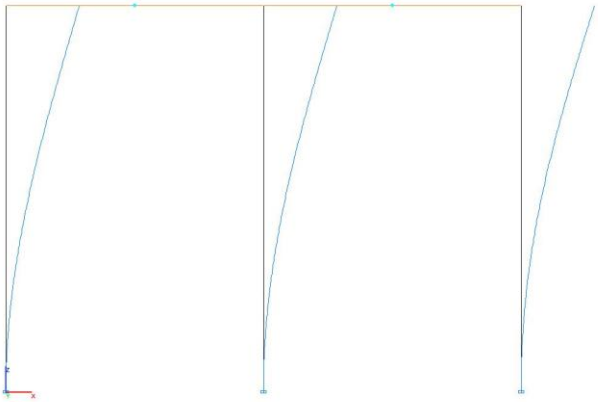
L = 5.0 м	- длина ригелей рамы;
H = 7.5 м	- высота стоек рамы;
$EA = 1.0 \cdot 10^9$ кН	- продольная жесткость стоек;
$EI_C = 2.28 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость стоек;
$1 \cdot N = 0.5 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной силы на левой стойке;
$2 \cdot N = 1.0 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной силы на средней стойке;
$4 \cdot N = 2.0 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной силы на правой стойке.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, стойки – 45 элементов типа 2 (сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей с шагом 0.5 м), ригели – 2 элемента типа 100 (трехузловые твердые тела со связями по направлениям X и Z, ведущими узлами на середине пролетов ригелей и ведомыми узлами на сопряженных стойках). Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы стоек по направлениям степеней свободы X, Z, UY. Воздействие с начальными значениями сосредоточенных продольных сил k·N задается на узлах сопряжения элементов ригелей с элементами стоек. Количество узлов в расчетной схеме – 50.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонение, %**
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на левой стойке (С1) N_{cr}, кН	426.6 (428.6)	0.853157·500 = = 426.6	0.00 (0.47)
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на средней стойке (С2) N_{cr}, кН	853.2 (857.2)	0.853157·1000 = = 853.2	0.00 (0.47)
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на правой стойке (С3) N_{cr}, кН	1706.3 (1714.5)	0.853157·2000 = = 1706.3	0.00 (0.48)
Свободная длина левой стойки (С1) H_0, м	22.9676 (22.9129)	22.9677	0.00 (0.24)
Свободная длина средней стойки (С2) H_0, м	16.2405 (16.2019)	16.2406	0.00 (0.24)
Свободная длина правой стойки (С3) H_0, м	11.4838 (11.4564)	11.4839	0.00 (0.24)

В скобках приведены значения приближенного решения по методу эквивалентных рам

Замечания: При точном аналитическом решении критические значения сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости системы, и свободные длины стоек H_0 определяются по следующим формулам:

$$C1: \quad N_{cr} = \nu^2 \cdot \frac{EI_C}{H^2} \quad C2: \quad N_{cr} = 2 \cdot \nu^2 \cdot \frac{EI_C}{H^2} \quad C3: \quad 4 \cdot \nu^2 \cdot \frac{EI_C}{H^2},$$

где ν (параметр критической нагрузки) определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$(tg(\nu)-\nu)\cdot\left(tg\left(\sqrt{2}\cdot\nu\right)-\sqrt{2}\cdot\nu\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(tg(\nu)-\nu)\cdot(tg(2\cdot\nu)-2\cdot\nu)+$$
$$+\frac{1}{8}\cdot\left(tg\left(\sqrt{2}\cdot\nu\right)-\sqrt{2}\cdot\nu\right)\cdot(tg(2\cdot\nu)-2\cdot\nu)=0;$$

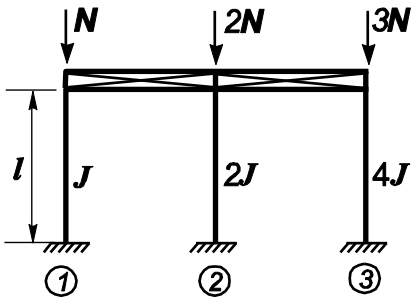
$$C1:\quad H_0=\frac{\pi\cdot H}{\nu};\quad C2:\quad H_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi\cdot H}{\nu};\quad C3:\quad H_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot H}{\nu}.$$

При приближенном аналитическом решении критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости системы, и свободные длины стоек H_0 определяются по следующим формулам:

$$C1:\quad N_{cr}=\frac{3}{7}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_C}{(2\cdot H)^2}\quad C2:\quad N_{cr}=\frac{6}{7}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_C}{(2\cdot H)^2}\quad C3:\quad N_{cr}=\frac{12}{7}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_C}{(2\cdot H)^2};$$

$$H_0=\pi\cdot\sqrt{\frac{EI_C}{N_{cr}}}.$$

Устойчивость системы из трех различно нагруженных стоек разной жесткости, связанных между собой бесконечно жесткими на изгиб ригелями



Цель: Определение критических значений сосредоточенных продольных сил различной величины, действующих на систему из трех стоек разной жесткости, связанных между собой бесконечно жесткими на изгиб ригелями, соответствующих моменту потери ее устойчивости. Определение свободных длин стоек.

Имя файла с исходными данными: **Frame_5б.spr**

Формулировка задачи: Три стойки разной жесткости, заделанные в фундамент и объединенные между собой в систему бесконечно жесткими на изгиб ригелями, подвергаются воздействию сосредоточенных продольных сил различной величины k·N. Продольные жесткости ригелей и стоек принимаются значительной величины с целью исключения их влияния на решение задачи. Определить критические значения сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующих моменту потери устойчивости системы. Определить свободные длины стоек H_0.

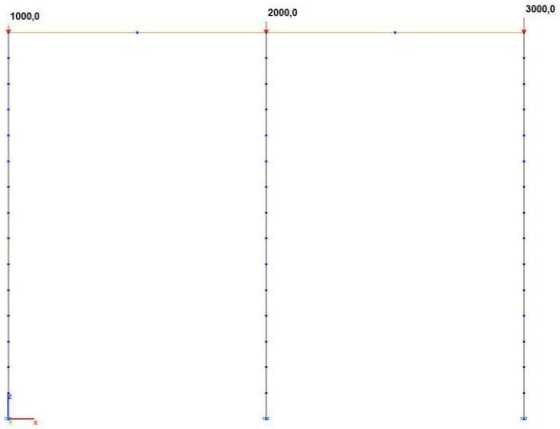
Ссылки: Н.П. Мельников, В.М. Вахуркин, Б.Г. Ложкин, Расчет стержневых систем на устойчивость. Справочные данные и примеры, Москва, Проектстальконструкция, Выпуск 1395, 1954, стр. 37.

Исходные данные:

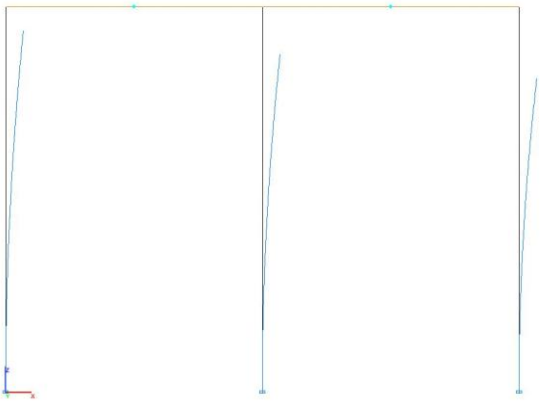
L = 5.0 м	- длина ригелей рамы;
H = 7.5 м	- высота стоек рамы;
$EA = 1.0 \cdot 10^9$ кН	- продольная жесткость стоек;
$EI_{C1} = 1.14 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость левой стойки;
$EI_{C2} = 2.28 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость средней стойки;
$EI_{C3} = 4.56 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость правой стойки;
$1 \cdot N = 1.0 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной силы на левой стойке;
$2 \cdot N = 2.0 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной силы на средней стойке;
$3 \cdot N = 3.0 \cdot 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной силы на правой стойке.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, стойки – 45 элементов типа 2 (сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей с шагом 0.5 м), ригели – 2 элемента типа 100 (трехузловые твердые тела со связями по направлениям X, Z и UY, ведущими узлами на середине пролетов ригелей и ведомыми узлами на сопряженных стойках). Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы стоек по направлениям степеней свободы X, Z, UY. Воздействие с начальными значениями сосредоточенных продольных сил k·N задается на узлах сопряжения элементов ригелей с элементами стоек. Количество узлов в расчетной схеме – 50.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонение, %**
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на левой стойке (С1) N_{cr}, кН	2332.8 (2333.6)	2.332764·1000 = = 2332.7	0.00 (0.04)
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на средней стойке (С2) N_{cr}, кН	4665.6 (4667.2)	2.332764·2000 = = 4665.5	0.00 (0.04)
Критическое значение сосредоточенной продольной силы на правой стойке (С3) N_{cr}, кН	6998.5 (7000.8)	2.332764·3000 = = 6998.3	0.00 (0.04)
Свободная длина левой стойки (С1) H_0, м	6.9448 (6.9437)	6.9449	0.00 (0.02)
Свободная длина средней стойки (С2) H_0, м	6.9448 (6.9437)	6.9449	0.00 (0.02)
Свободная длина правой стойки (С3) H_0, м	8.0192 (8.0178)	8.0193	0.00 (0.02)

В скобках приведены значения приближенного решения по методу эквивалентных рам

Замечания: При точном аналитическом решении критические значения сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующие моменту потери устойчивости системы, и свободные длины стоек H_0 определяются по следующим формулам:

$$C1: \quad N_{cr} = \nu^2 \cdot \frac{EI_{C1}}{H^2} \quad C2: \quad N_{cr} = 2 \cdot \nu^2 \cdot \frac{EI_{C1}}{H^2} \quad C3: \quad 3 \cdot \nu^2 \cdot \frac{EI_{C1}}{H^2},$$

где ν (параметр критической нагрузки) определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$6\cdot\nu\cdot\left(\frac{tg\left(\frac{\nu}{2}\right)}{2\cdot tg\left(\frac{\nu}{2}\right)-\nu}+\frac{2\cdot tg\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\nu}{4}\right)}{4\cdot tg\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\nu}{4}\right)-\sqrt{3}\cdot\nu}\right)=0;$$

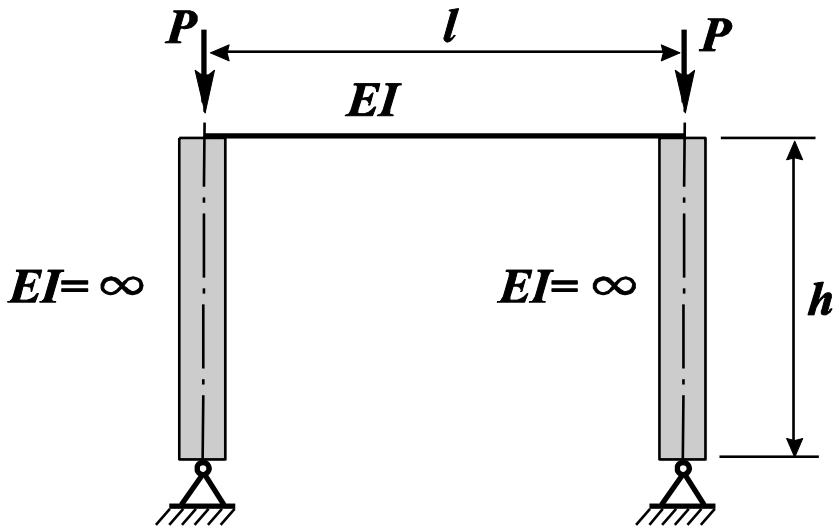
$$C1:\quad H_0=\frac{\pi\cdot H}{\nu};\quad C2:\quad H_0=\frac{\pi\cdot H}{\nu};\quad C3:\quad H_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi\cdot H}{\nu}.$$

При приближенном аналитическом решении критические значения сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующие моменту потери устойчивости системы, и свободные длины стоек H_0 определяются по следующим формулам:

$$C1:\quad N_{cr}=\frac{7}{6}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_{C1}}{H^2}\quad C2:\quad N_{cr}=\frac{7}{3}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_{C1}}{H^2}\quad C3:\quad N_{cr}=\frac{7}{2}\cdot\frac{\pi^2\cdot EI_{C1}}{H^2};$$

$$C1:\quad H_0=\sqrt{\frac{6}{7}}\cdot H\quad C2:\quad H_0=\sqrt{\frac{6}{7}}\cdot H\quad C3:\quad H_0=\sqrt{\frac{8}{7}}\cdot H.$$

Устойчивость рамы из двух шарнирно опертых одинаково нагруженных абсолютно жестких стоек, жестко связанных между собой ригелем



Цель: Определение критического значения сосредоточенных продольных сил одинаковой величины, действующих на две шарнирно опертые одинаково нагруженные абсолютно жесткие стойки рамы, жестко связанные между собой ригелем, соответствующего моменту потери устойчивости рамы.

Имя файла с исходными данными:: Frame_leg_hard.SPR

Формулировка задачи: Две шарнирно опертые абсолютно жесткие стойки рамы, жестко связанные между собой ригелем, подвергаются воздействию сосредоточенных продольных сил одинаковой величины N. Продольная жесткость ригеля принимается значительной величины с целью исключения ее влияния на решение задачи. Определить критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости рамы.

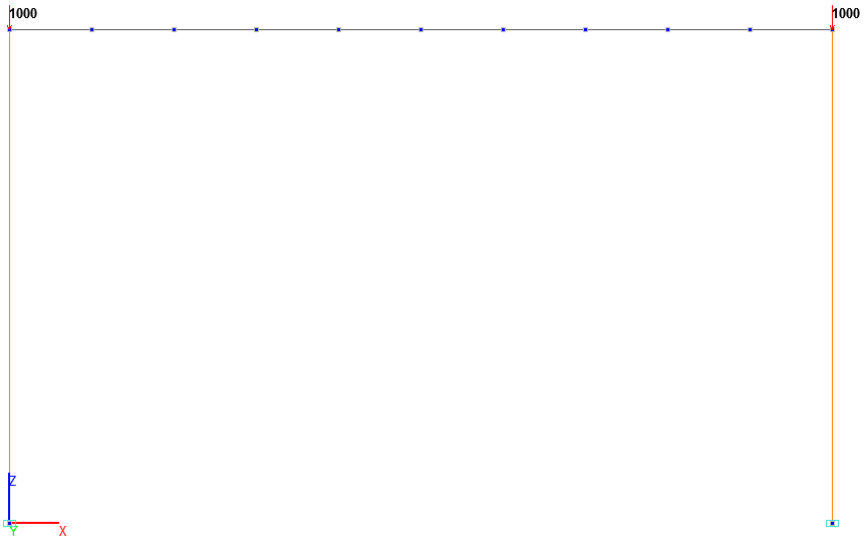
Ссылки: А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер, Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 2. Устойчивость упруго деформируемых механических систем, Москва, СКАД СОФТ, 2010, стр. 173.

Исходные данные:

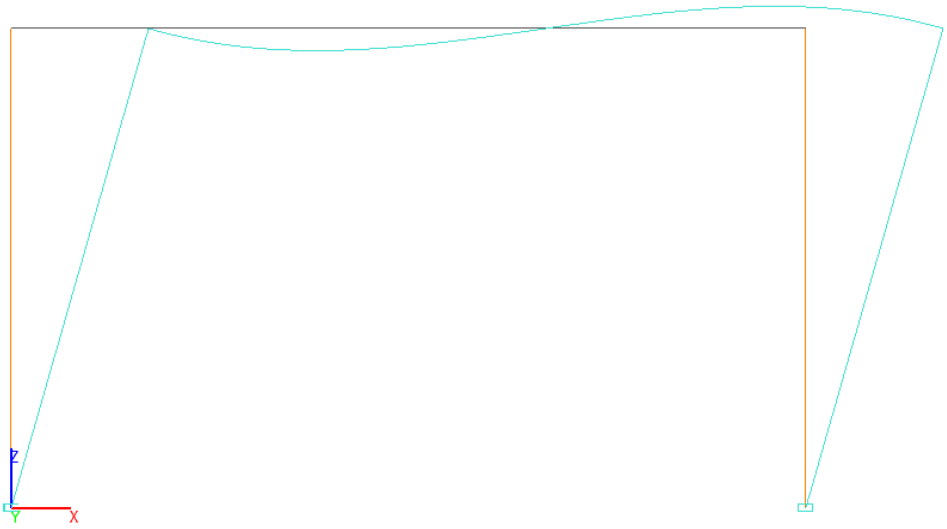
L = 10.0 м	- длина ригеля рамы;
H = 6.0 м	- высота стоек рамы;
EA = $1.0 \cdot 10^8$ т	- продольная жесткость ригеля;
EI = $1.0 \cdot 10^4$ т·м^2	- изгибная жесткость ригеля;
N = $1.0 \cdot 10^3$ т	- начальное значение сосредоточенных продольных сил на стойки рамы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, стойки – 2 элемента типа 100 (двухузловые твердые тела со связями по направлениям X, Z, UY, ведущими опорными узлами и ведомыми узлами на сопряженном ригеле), ригель – 10 элемента типа 2 (сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей с шагом 1.0 м). Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы стоек по направлениям степеней свободы X и Z. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных сил N задается на узлах сопряжения элементов ригеля с элементами стоек. Количество узлов в расчетной схеме – 13.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

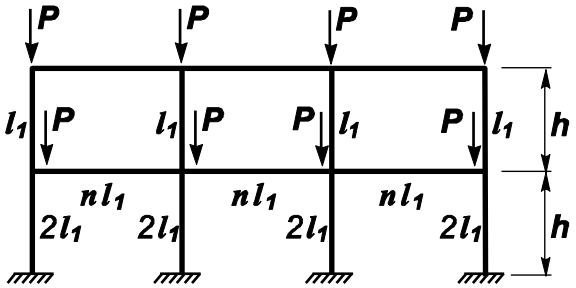
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, т	1000	0.999975·1000 = = 1000	0.00

Замечания: При точном аналитическом решении критическое значение сосредоточенных продольных сил N_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости рамы, определяется по следующей формуле:

$$N_{cr} = \frac{6 \cdot EI}{L \cdot H}.$$

Устойчивость трехпролетной двухэтажной рамы под действием сосредоточенных продольных сил на стойки в узлах сопряжения с ригелями



Цель: Определение критического значения сосредоточенных продольных сил, действующих на стойки трехпролетной двухэтажной рамы в узлах сопряжения с ригелями, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Имя файла с исходными данными: **6.1.spr**

Формулировка задачи: Трехпролетная двухэтажная рама подвергается воздействию сосредоточенных продольных сил P на стойки в узлах сопряжения с ригелями. Узлы сопряжения ригелей со стойками и узлы опирания на фундамент являются жесткими. Продольные жесткости ригелей и стоек принимаются значительной величины с целью исключения их влияния на решение задачи. Определить критическое значение сосредоточенных продольных сил P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости рамы.

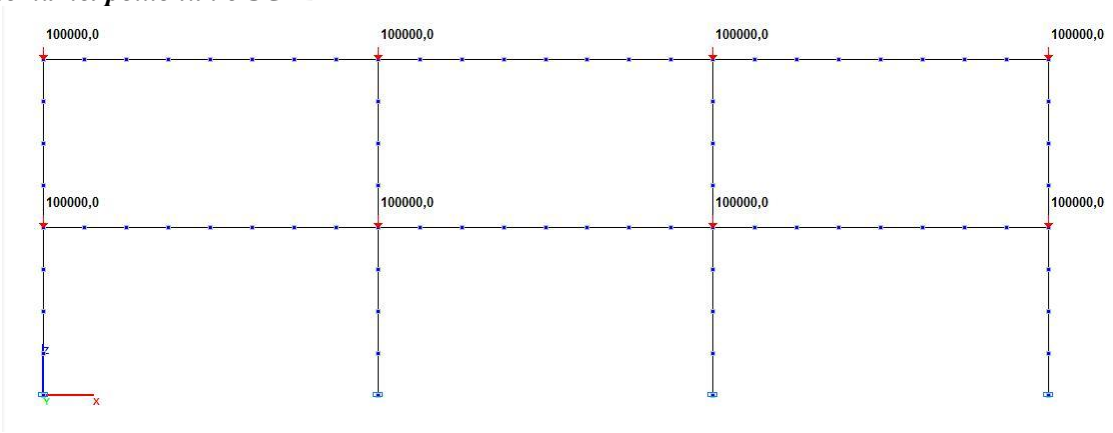
Ссылки: Н.В. Корноухов, Прочность и устойчивость стержневых систем, Москва, Стройиздат, 1949, стр. 259.

Исходные данные:

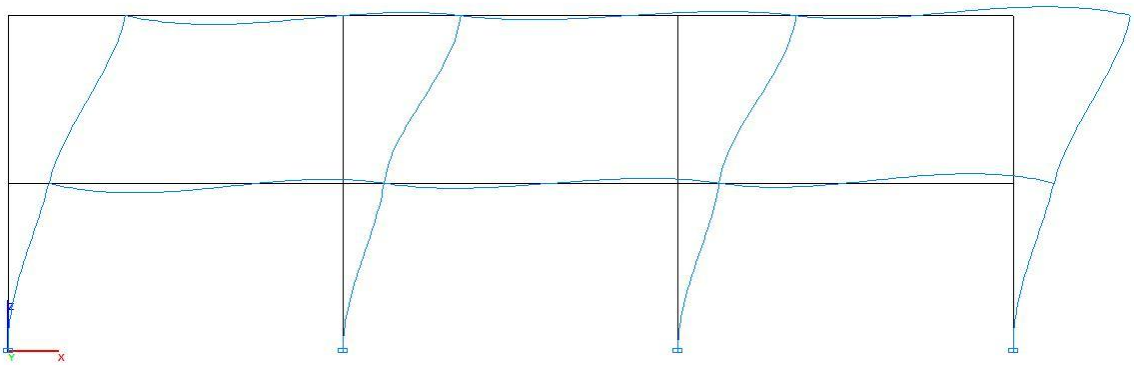
L = 8.0 м	- длина ригелей рамы;
H = 4.0 м	- высота стоек рамы;
$EA = 1.0 \cdot 10^{10}$ кН	- продольная жесткость конструктивных элементов рамы;
$EI_{C1} = 8.00 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость стоек первого этажа;
$i_{C1} = EI_{C1}/H = 2.0 \cdot 10^5$ кН·м	- погонная изгибная жесткость стоек первого этажа;
$EI_{C2} = 4.00 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость стоек второго этажа;
$i_{C2} = EI_{C2}/H = 1.00 \cdot 10^5$ кН·м	- погонная изгибная жесткость стоек второго этажа;
$EI_{P1} = 13.28 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость ригелей первого этажа;
$i_{P1} = EI_{P1}/L = 1.66 \cdot 10^5$ кН·м	- погонная изгибная жесткость ригелей первого этажа;
$EI_{P2} = 8.00 \cdot 10^5$ кН·м^2	- изгибная жесткость ригелей второго этажа;
$i_{P2} = EI_{P2}/L = 1.00 \cdot 10^5$ кН·м	- погонная изгибная жесткость ригелей второго этажа;
$P = 1.0 \cdot 10^5$ кН	- начальное значение сосредоточенных продольных сил на стойки рамы в узлах сопряжения с ригелями.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 80 элементов типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей конструктивных элементов (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы рамы по направлениям степеней свободы X, Z, UY. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных сил P задается на узлах сопряжения элементов ригелей с элементами стоек. Количество узлов в расчетной схеме – 78.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Форма потери устойчивости

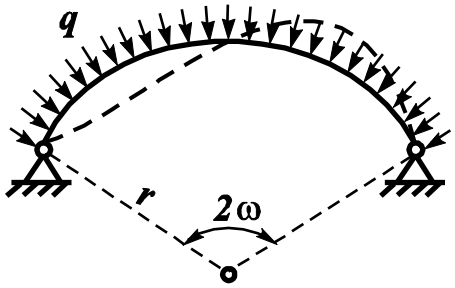
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Критическое значение сосредоточенных продольных сил P_{cr}, кН	156250	1.5625·100000 = = 156250	0.00

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенных продольных сил P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости рамы, определяется по следующей формуле:

$$P_{cr} = 2.5000^2 \cdot \frac{i_{C1}}{H}.$$

Устойчивость круговой двухшарнирной арки постоянного сечения при гидростатическом давлении



Цель: Определение критического значения гидростатического давления, действующего на свод круговой двухшарнирной арки постоянного сечения, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Arch_hinged_alfa_30.SPR	Расчетная схема с центральным углом дуги арки 2·ω = 2·30 °
Arch_hinged_alfa_90.SPR	Расчетная схема с центральным углом дуги арки 2·ω = 2·90 °

Формулировка задачи: Круговая двухшарнирная арка постоянного сечения подвергается воздействию равномерно распределенной радиальной нагрузки q. Определить критическое значение равномерно распределенной радиальной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости арки. Принять, что при потере устойчивости элементы нагрузки следуют за осью арки, сохраняя параллельность своим прежним направлениям, благодаря чему происходит перемещение линии давления при потере устойчивости арки. Сравнить результат расчета с решением (С. П. Тимошенко), когда элементы нагрузки при искривлении оси арки сохраняют линии своего действия и линия давления при потере устойчивости арки не перемещается.

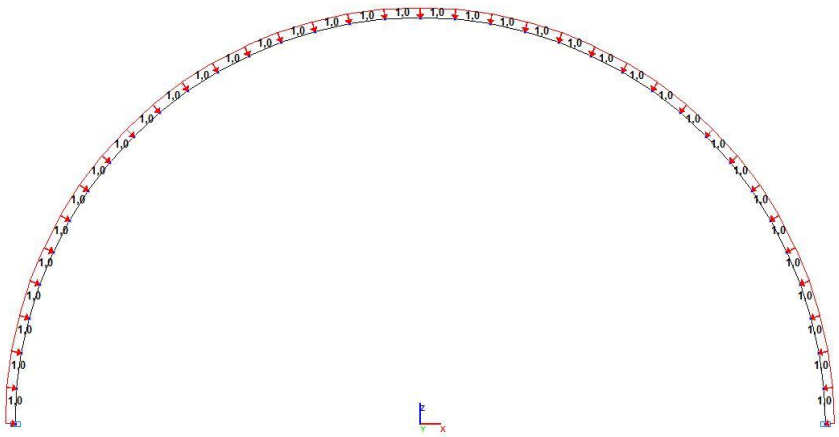
Ссылки: Н.В. Корноухов, Прочность и устойчивость стержневых систем, Москва, Стройиздат, 1949, стр. 212.

Исходные данные:

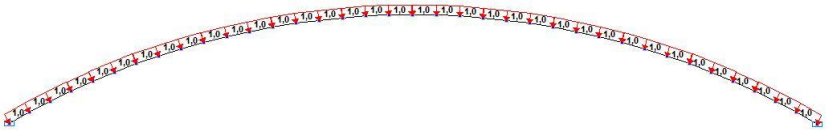
R = 60.0 м (120.0 м) - радиус продольной оси арки;
2·ω = 2·90 ° (2·30 °) - центральный угол дуги арки;
EA = $2.16 \cdot 10^6$ кН - продольная жесткость арки;
EI = $2.592 \cdot 10^5$ кН·м^2 - изгибная жесткость арки;
q = 1.0 кН/м - начальное значение равномерно распределенной радиальной нагрузки на арку.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 36 элементов типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси арки (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом центрального угла 5.0 ° (1.667 °). Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы арки по направлениям степеней свободы X, Z. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной радиальной нагрузки q задается по направлениям против осей Z1 местных систем координат элементов. Количество узлов в расчетной схеме – 37.

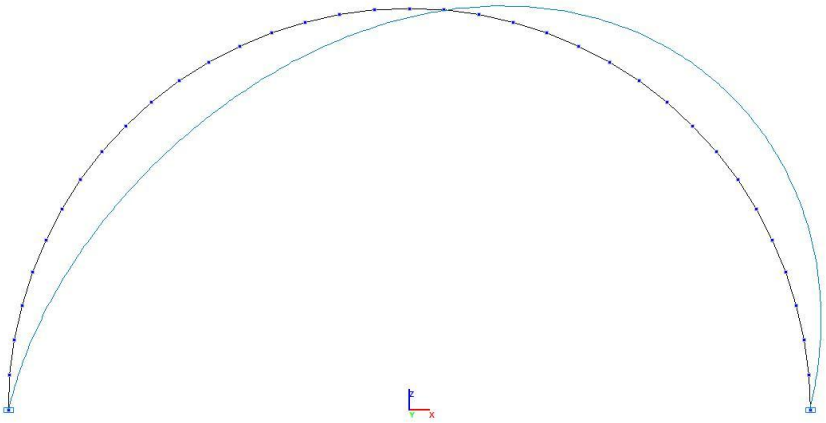
Результаты решения в SCAD



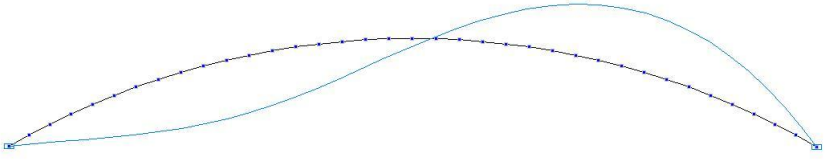
Расчетная схема с центральным углом дуги арки 2·90 °



Расчетная схема с центральным углом дуги арки 2·30 °



Форма потери устойчивости для схемы с центральным углом дуги арки 2·90 °



Форма потери устойчивости для схемы с центральным углом дуги арки 2·30 °

Сравнение решений:

Критическое значение равномерно распределенной радиальной нагрузки на арку q_{cr}, кН/м

Расчетная схема	Теория	SCAD	Отклонение, %
с центральным углом дуги арки 2·90 °	3.925 (3.600) [3.932]	3.933914·1.0 = = 3.934	0.23 (9.28) [0.05]
с центральным углом дуги арки 2·30 °	5.391 (5.250) [5.392]	5.393093·1.0 = = 5.393	0.04 (2.72) [0.02]

Без скобок указаны теоретические значения, посчитанные по условиям данного примера (по Н. В. Корноухову);
В круглых скобках указаны теоретические значения, посчитанные по условиям решения С. П. Тимошенко;
В квадратных скобках указаны теоретические значения, посчитанные для двухшарнирной рамы, составленной из 2·m=36 равных хорд, вписанных в дугу окружности, и подверженной действию равных радиальных сил во всех ее узлах.

Замечания: При аналитическом решении по условиям Н. В. Корноухова критическое значение равномерно распределенной радиальной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости арки определяется по следующей формуле:

$$q_{cr} = \eta^2 \cdot \frac{EI}{R^3},$$

где η (параметр критической нагрузки) определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$\frac{1}{\left(\eta^2-1\right)^2}\cdot\left[\eta^3\cdot\left(\omega+\frac{1}{2}\cdot sin\left(2\cdot\omega\right)\right)-\eta\cdot\left(\omega+\frac{3}{2}\cdot sin\left(2\cdot\omega\right)\right)+\frac{1-cos\left(2\cdot\omega\right)}{tg\left(\eta\cdot\omega\right)}\right]=0.$$

При аналитическом решении по условиям С. П. Тимошенко критическое значение равномерно распределенной радиальной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости арки определяется по следующей формуле:

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3}\cdot\left(\frac{\pi^2}{\omega^2}-1\right).$$

При аналитическом решении для двухшарнирной рамы, составленной из равных хорд, вписанных в дугу окружности, критическое значение равномерно распределенной радиальной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери ее устойчивости определяется по следующей формуле:

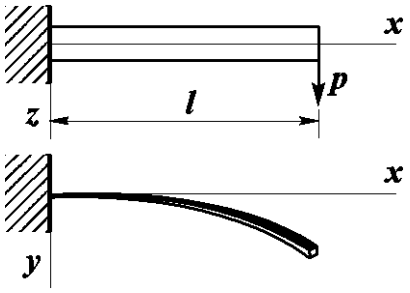
$$q_{cr} = 2\cdot\upsilon^2\cdot\frac{EI}{L^3}\cdot sin\left(\frac{A}{2}\right),$$

где υ (параметр критической нагрузки) определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$\left(1-\frac{sin\left(\upsilon\right)}{\upsilon}\cdot\frac{1-cos\left(A\right)}{cos\left(\upsilon\right)-cos\left(A\right)}\right)\cdot\left(m+\frac{sin\left(2\cdot m\cdot A\right)}{2\cdot sin\left(A\right)}\right)+\left(\frac{2\cdot sin\left(\frac{A}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}{cos\left(\upsilon\right)-cos\left(A\right)}\cdot\frac{sin\left(\upsilon\right)}{\upsilon}\cdot\frac{sin\left(m\cdot A\right)}{sin\left(m\cdot\upsilon\right)}\right)\cdot\left(\frac{sin\left(m\cdot\left(A+\upsilon\right)\right)}{2\cdot sin\left(\frac{A+\upsilon}{2}\right)}+\frac{sin\left(m\cdot\left(A-\upsilon\right)\right)}{2\cdot sin\left(\frac{A-\upsilon}{2}\right)}\right)=0.$$

2·m - число хорд рамы,
A - центральный угол одной хорды рамы,
L - длина одной хорды рамы:
$L = R\cdot\sqrt{2\cdot\left(1-cos\left(A\right)\right)}$.

Устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы прямоугольного поперечного сечения поперечной силой, приложенной на свободном торце (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной силы, действующей на свободном торце консольной полосы прямоугольного поперечного сечения, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.2_O_P_b_0.01.SPR	Толщина поперечного сечения консольной полосы – 0.01 м
6.2_O_P_b_0.1.SPR	Толщина поперечного сечения консольной полосы – 0.10 м
6.2_O_P_b_1.0.SPR	Толщина поперечного сечения консольной полосы – 1.00 м

Формулировка задачи: Консольная полоса прямоугольного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной силы P, действующей на ее свободном торце. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольной полосы.

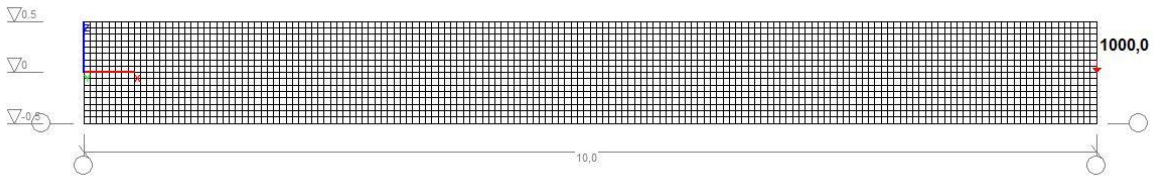
Ссылки: С.П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — Москва. — Наука. — 1971. — стр. 291.
А.С. Вольмир. Устойчивость деформируемых систем. — Москва. — Наука. — 1967. — стр.211;
А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. — Том 1. — Москва. — СКАД СОФТ. — 2010. — стр. 465;
А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. — Том 2. — Москва. — СКАД СОФТ. — 2010. — стр. 17.

Исходные данные:

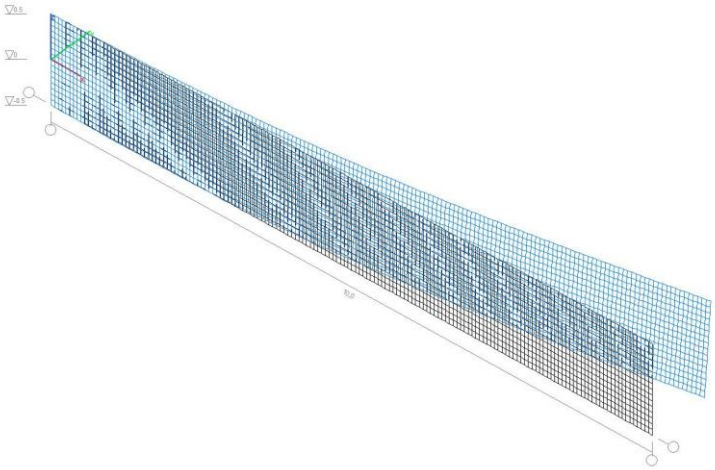
L = 10.0 м	- длина консольной полосы;
h = 1.0 м	- высота поперечного сечения консольной полосы;
b = 0.01; 0.10; 1.00 м	- толщина поперечного сечения консольной полосы;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала консольной полосы;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$P_1 = 1.0; 1.0 \cdot 10^3; 1.0 \cdot 10^5$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной силы, действующей на свободном торце в плоскости полосы;
$P = 1.0; 1.0 \cdot 10^3; 1.0 \cdot 10^5$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной силы, действующей на свободном торце из плоскости полосы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина, 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте полосы с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца полосы по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной силы P задается в узле продольной оси полосы, расположенном на свободном торце. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.
Устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы проверяется при действии поперечной силы на свободном торце в плоскости полосы.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной силы P_{1cr} (кН), действующей на свободном торце в плоскости полосы

Расчетная модель		Теория	SCAD	Отклонение, %
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	b = 0.01 м	0.12901 (0.12901)	0.134811·1 = 0.13481	4.50 (4.50)
	b = 0.10 м	125.28 (124.66)	0.130559·1000 = 130.56	4.21 (4.73)
	b = 1.00 м	84048 (59431)	0.821978·100000 = 82198	2.20 (38.31)

В скобках указаны теоретические значения, посчитанные с учетом влияния изгибной жесткости в плоскости действия поперечной силы

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольной полосы определяется по следующим формулам:

без учета влияния изгибной жесткости в плоскости действия поперечной силы

$$P_{cr} = \frac{4.01}{l^2} \cdot \sqrt{B \cdot C}$$

с учетом влияния изгибной жесткости в плоскости действия поперечной силы

$$P_{cr} = \frac{4.01}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{B \cdot C \cdot B_1}{B + B_1}} = \frac{k}{l^2} \cdot \sqrt{B \cdot C}$$, где:

$$k = \frac{4.01}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2}}.$$

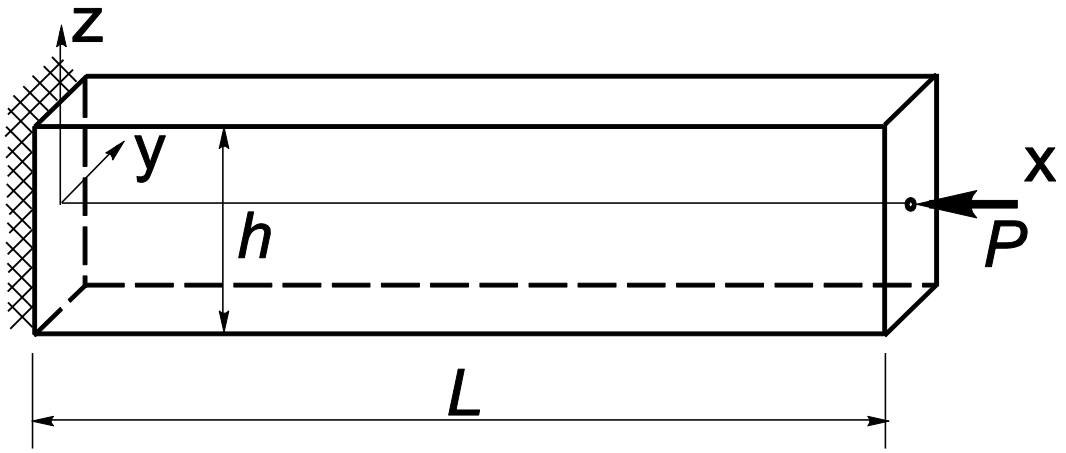
$B = E \cdot \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьшая жесткость изгиба (из плоскости действия момента);

$B_1 = E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольшая жесткость изгиба (в плоскости действия момента);

$C = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot k_f \cdot h \cdot b^3$ – жесткость свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}.$$

Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной продольной сжимающей силы, центрально приложенной на свободном торце (центральное сжатие)



Цель: Определение первых двух критических значений сосредоточенной продольной сжимающей силы, действующей центрально на свободном торце консольного бруса квадратного поперечного сечения, соответствующих моментам потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_1_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_1_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель
Stability_Bar_1_Solid.SPR	Объемная расчетная модель

Формулировка задачи: Консольный брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной продольной сжимающей силы P, центрально действующей на его свободном торце. Определить первые два критические значения сосредоточенной продольной сжимающей силы P_{cr1} и P_{cr2}, соответствующие моментам потери устойчивости консольного бруса.

Ссылки: А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.23, 193;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина консольного бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения консольного бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала консольного бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^5$ кН	- начальное значение сосредоточенной продольной сжимающей силы, центрально действующей на свободном торце бруса.

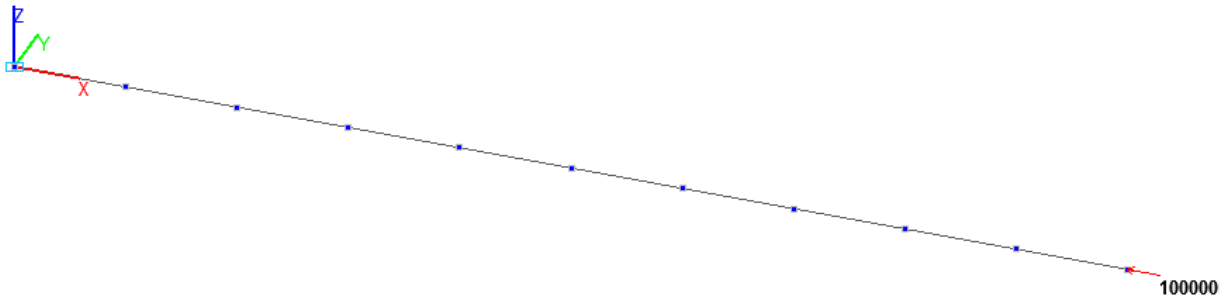
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узел защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной продольной сжимающей силы P задается в узле свободного торца бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

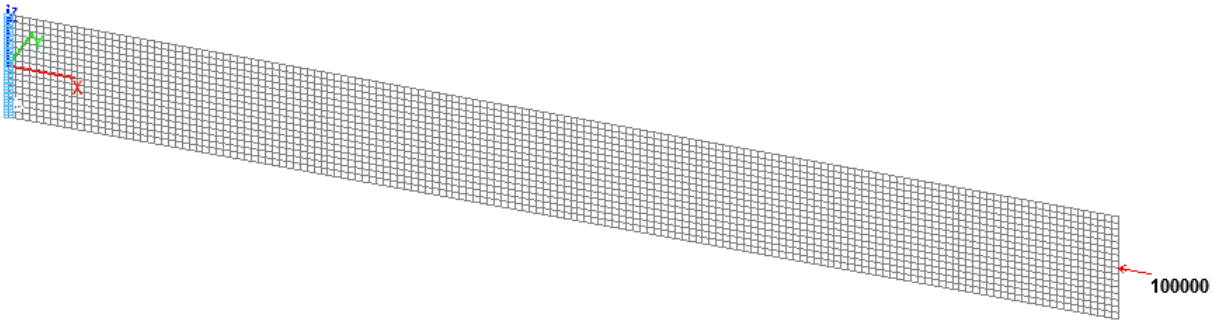
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной продольной сжимающей силы P задается в узле продольной оси бруса, расположенном на свободном торце. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

Объемная модель (O), 5120 двадцатиузловых элементов типа 37, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси, ширине и высоте бруса с шагом 0.125 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной продольной сжимающей силы P задается в виде равномерно распределенной нагрузки по наружным граням элементов торца бруса p = P/(h·b). Количество узлов в расчетной схеме – 24705.

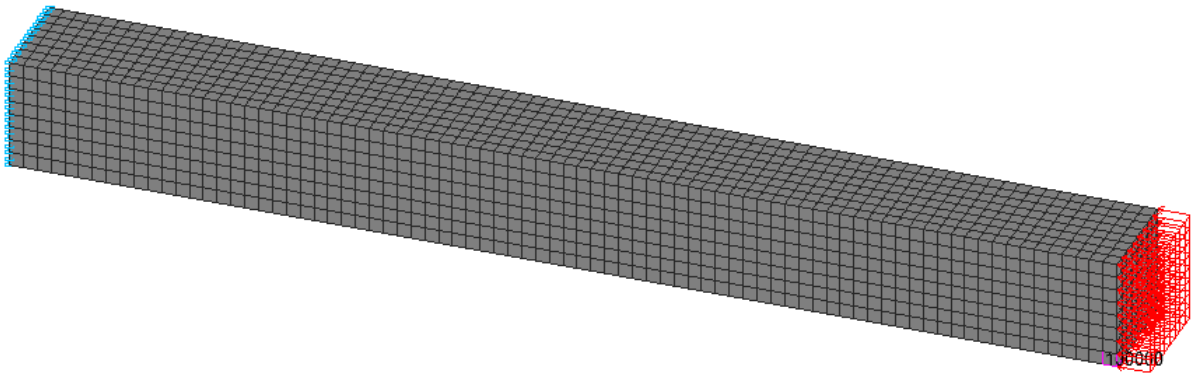
Результаты решения в SCAD



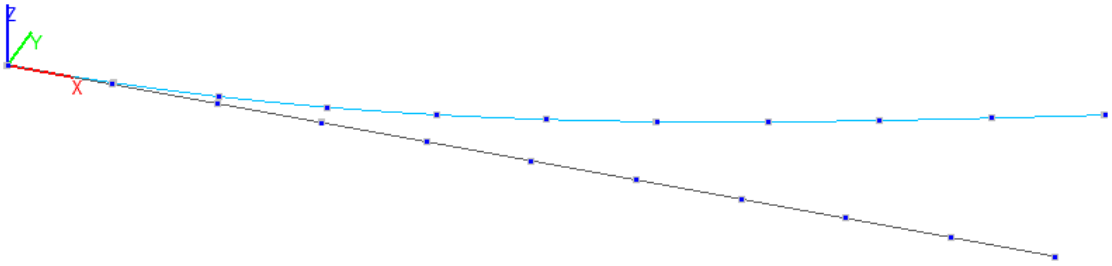
Расчетная схема. Стержневая модель



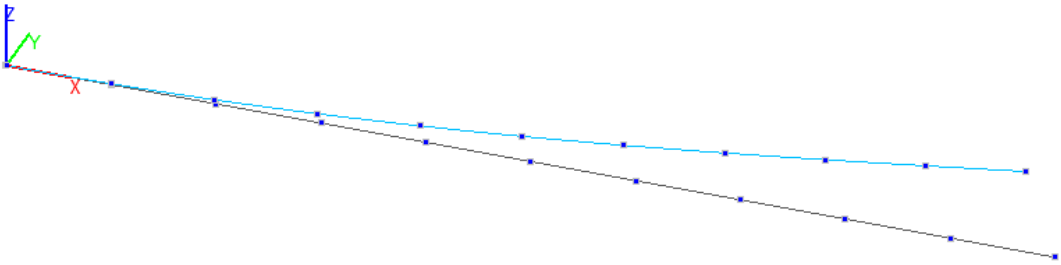
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



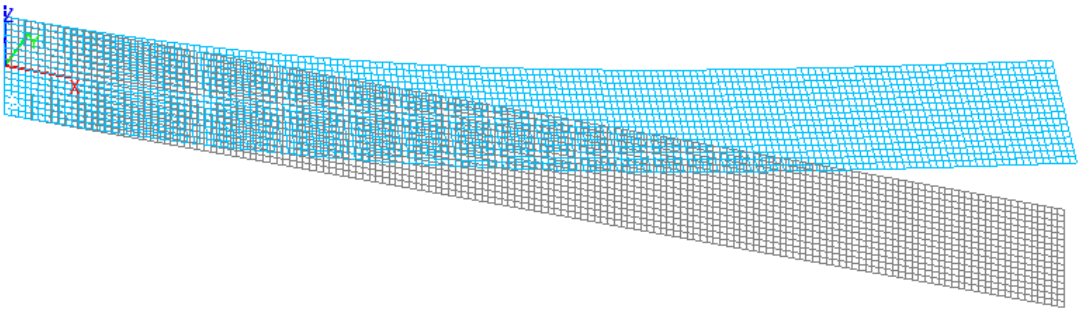
Расчетная схема. Объемная модель



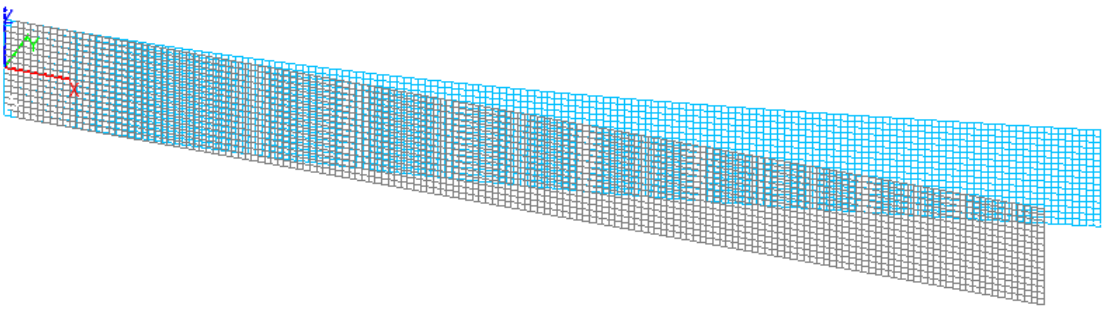
1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



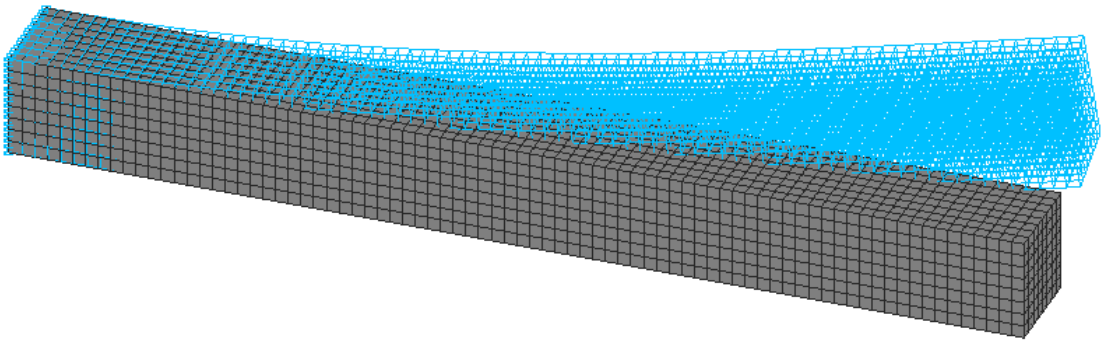
2-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



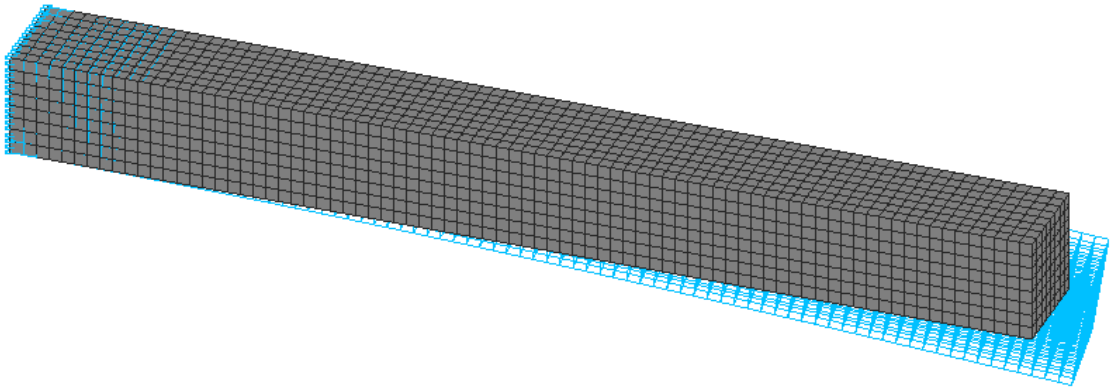
1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



2-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Объемная модель



2-ая Форма потери устойчивости. Объемная модель

Сравнение решений:

Критические значения сосредоточенной продольной сжимающей силы P_{cr1} и P_{cr2} (кН), действующей центрально на свободном торце бруса

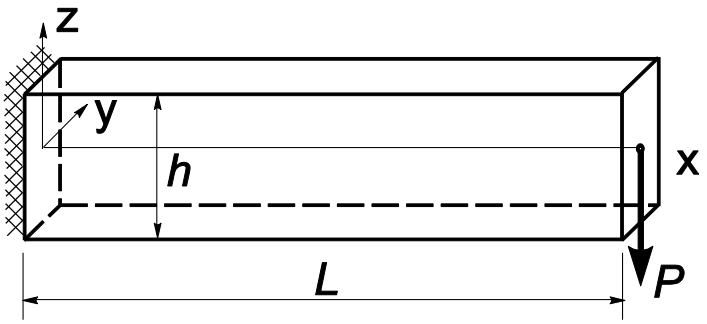
Расчетная модель	Форма потери устойчивости	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	1-ая	61685	0,616821·100000=61682	0,01
	2-ая	61685	0,616821·100000= 61682	0,01
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	1-ая	61685	0,613922·100000=61392	0,48
	2-ая	61685	0,617533·100000=61753	0,11
Объемная	1-ая	61685	0,613281·100000=61328	0,58
	2-ая	61685	0,613281·100000=61328	0,58

Замечания: При аналитическом решении критические значения сосредоточенной продольной сжимающей силы P_{cr1} и P_{cr2}, соответствующие моментам потери устойчивости консольного бруса определяются по следующим формулам:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{4 \cdot L^2} \qquad P_{cr2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{4 \cdot L^2}$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, центрально приложенной на свободном торце (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей центрально на свободном торце консольного бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_2_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_2_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель
Stability_Bar_2_Solid.SPR	Объемная расчетная модель

Формулировка задачи: Консольный брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, центрально действующей на его свободном торце. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса.

Ссылки: А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.214;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина консольного бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения консольного бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала консольного бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^5$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы, центрально действующей на свободном торце бруса.

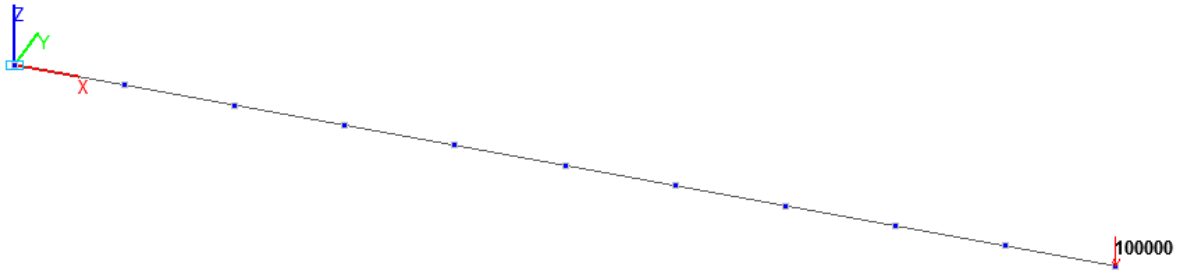
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узел защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле свободного торца бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

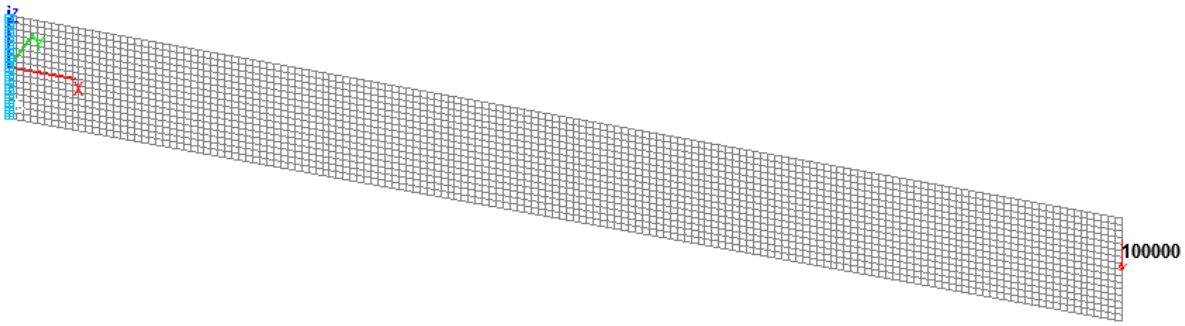
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле продольной оси бруса, расположенном на свободном торце. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

Объемная модель (О), 5120 двадцатиузловых элементов типа 37, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси, ширине и высоте бруса с шагом 0.125 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в виде равномерно распределенной нагрузки по наружным граням элементов торца бруса p = P/(h·b). Количество узлов в расчетной схеме – 24705.

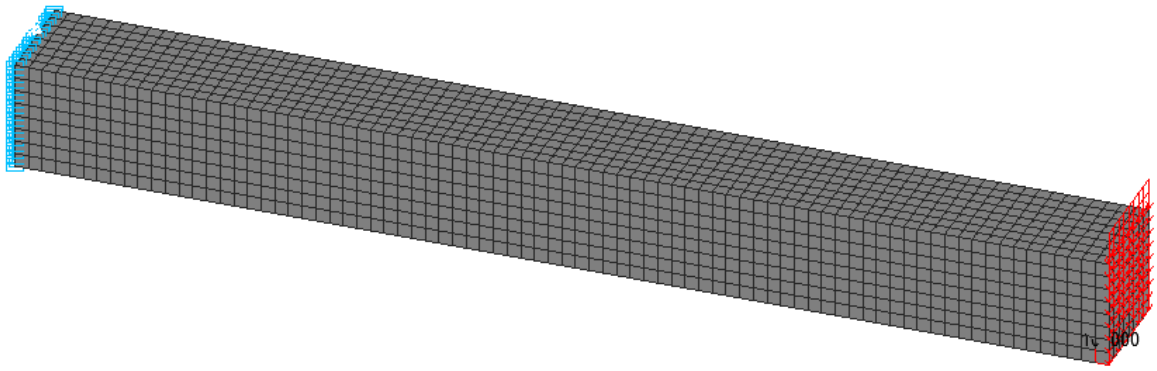
Результаты решения в SCAD



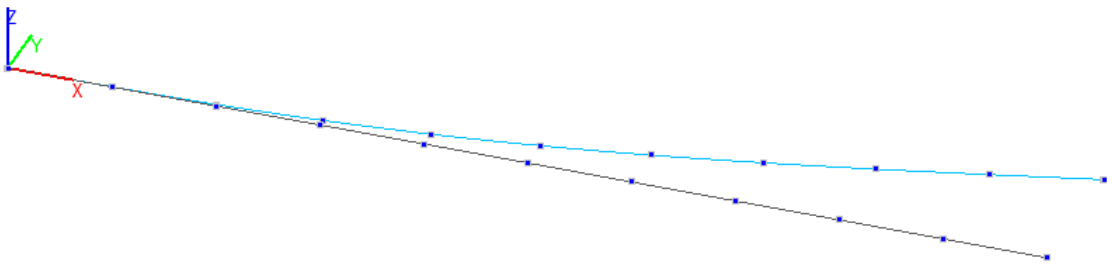
Расчетная схема. Стержневая модель



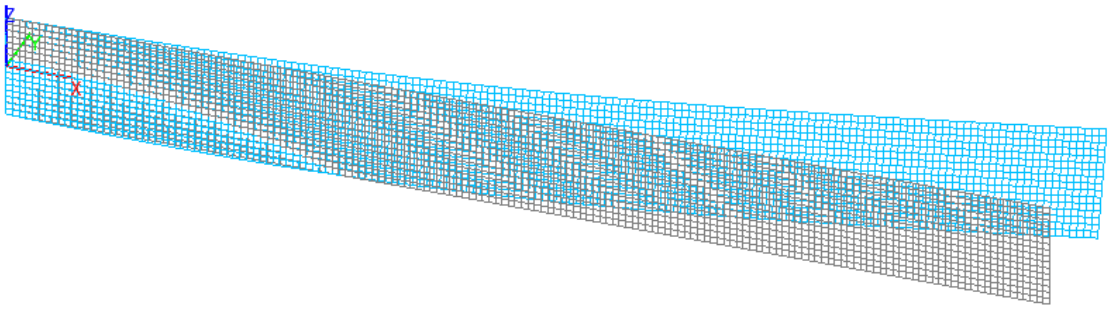
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



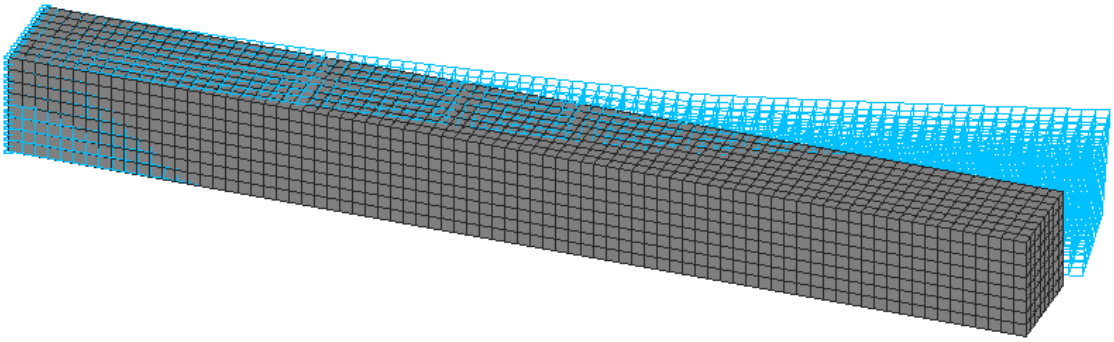
Расчетная схема. Объемная модель



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Объемная модель

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr} (кН), действующей центрально на свободном торце бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	84111	0,834694·100000=83469	0,76
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	84111	0,821972·100000=82197	2,28
Объемная	84111	0,843750·100000=84375	0,31

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса определяется по следующей формуле:

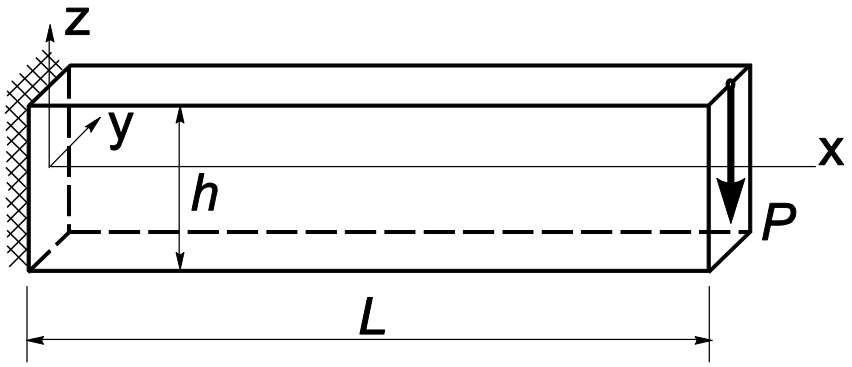
$$P = \frac{4,01 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^2} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\}$$

Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной к верхнему ребру свободного торца (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей на верхнем ребре свободного торца консольного бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_3_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_3_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель
Stability_Bar_3_Solid.SPR	Объемная расчетная модель

Формулировка задачи: Консольный брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, действующей на верхнем ребре его свободного торца. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса.

Ссылки: А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.216;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина консольного бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения консольного бруса;
h/2 = 0.5 м	- высота точки приложения сосредоточенной поперечной изгибающей силы относительно продольной оси бруса (ось X общей системы координат);
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала консольного бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^5$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей на верхнем ребре свободного торца бруса.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:

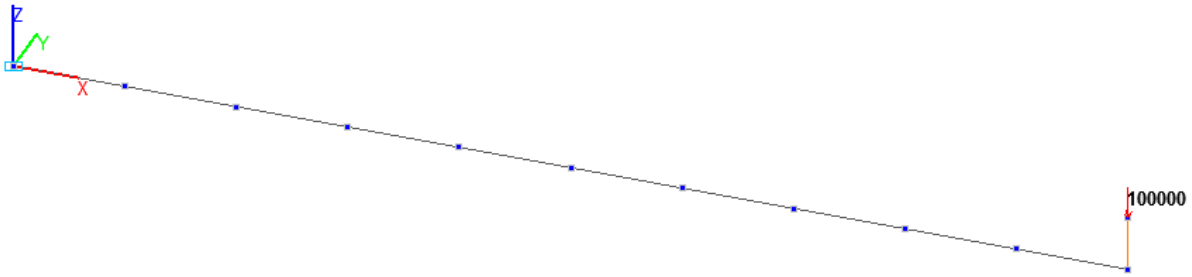
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узел защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. К узлу свободного торца бруса примыкает 1 двухузловой элемент типа 100 (трехмерное твердое тело), расположенный вертикально вверх с длиной, равной h/2. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в свободном узле элемента твердого тела (повышенная точка приложения). Количество узлов в расчетной схеме – 12;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле, расположенном на свободном

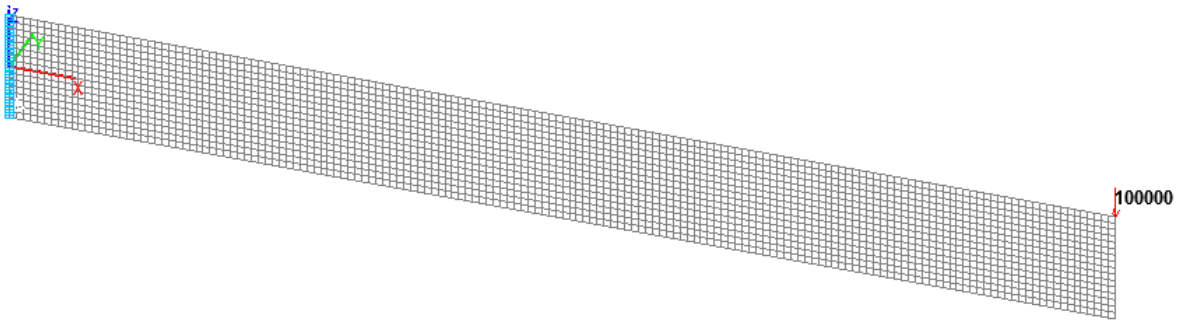
торце и отстоящем по высоте от продольной оси бруса на h/2. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

Объемная модель (O), 5120 двадцатиузловых элементов типа 37, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси, ширине и высоте бруса с шагом 0.125 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в виде группы узловых сил на верхнем ребре свободного торца бруса P_i = P·0.0625/1.0 = 6250 кН (3125 кН для угловых узлов). Количество узлов в расчетной схеме – 24705.

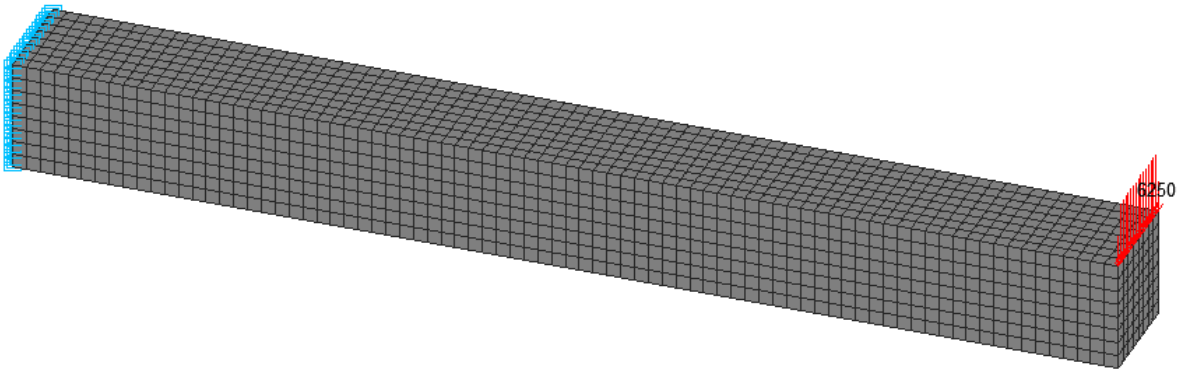
Результаты решения в SCAD



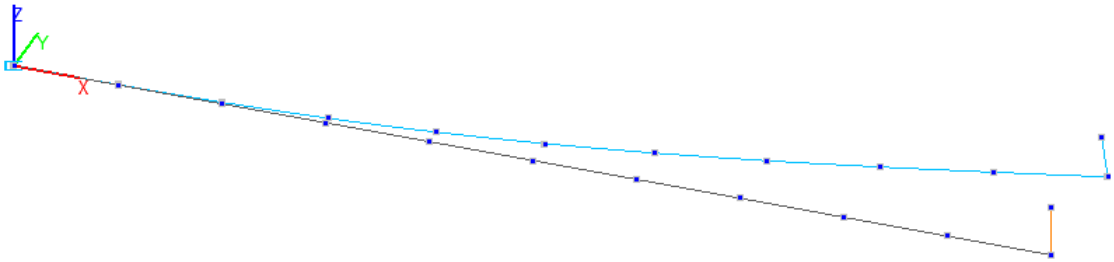
Расчетная схема. Стержневая модель



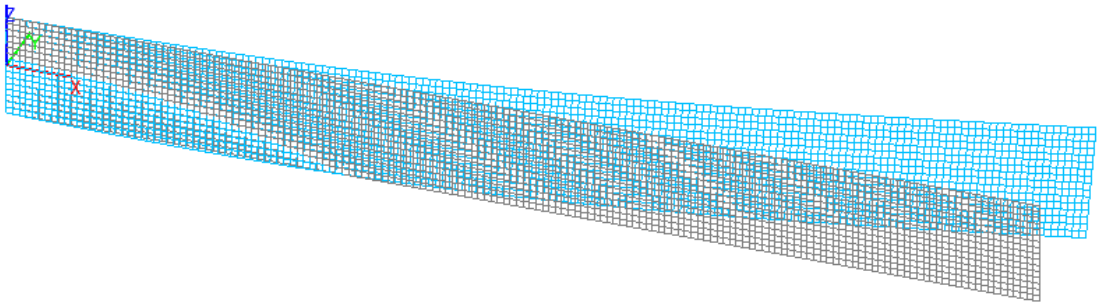
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



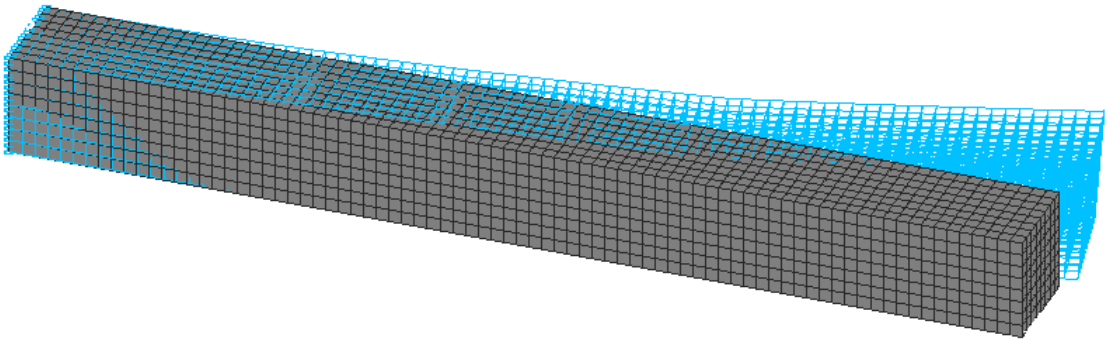
Расчетная схема. Объемная модель



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Объемная модель

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr} (кН), действующей на верхнем ребре свободного торца бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	78305	0,778008·100000=77801	0,64
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	78305	0,768958·100000=76896	1,80
Объемная	78305	0,816406·100000=81641	4,26

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса определяется по следующей формуле:

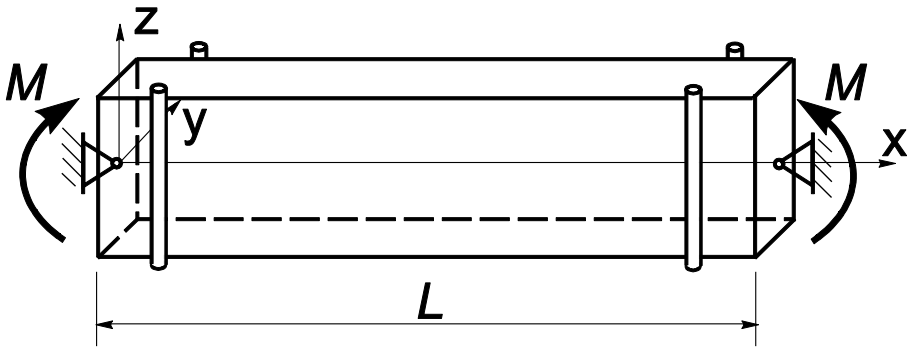
$$P = \frac{4{,}01 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^2} \cdot k_h \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \qquad k_h = f\left(\frac{h}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{G \cdot I_x}}\right)$$

$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)\right]\right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенных изгибающих моментов, равных по значению и действующих на торцах шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_4_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_4_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенных изгибающих моментов M, равных по значению и действующих на его торцах. Определить критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.204, 213;

Исходные данные:

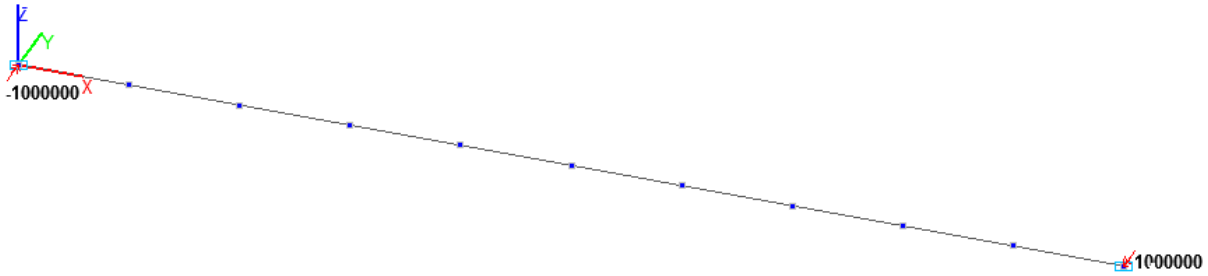
L = 10.0 м	- длина шарнирно опертого бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$M = 10^6$ кН·м	- начальное значение сосредоточенных изгибающих моментов, действующих на торцах бруса.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

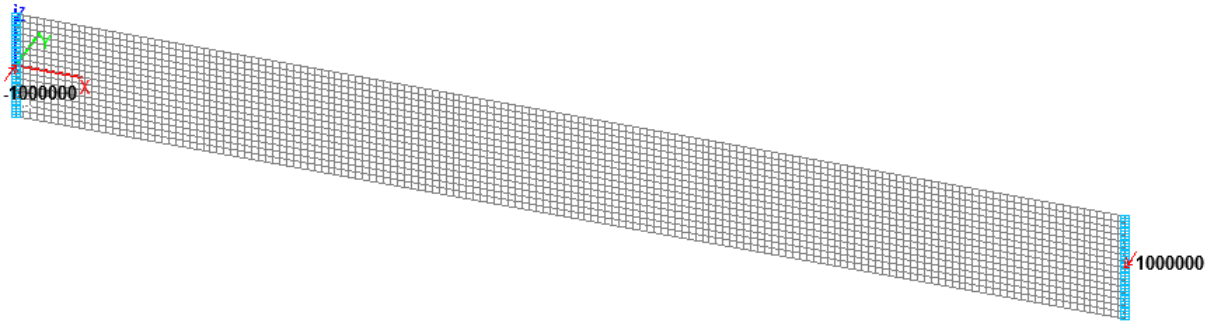
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. Воздействие с начальным значением сосредоточенных изгибающих моментов M задается в узлах торцов бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости (h = b = 1.0 м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; ν = 0.2), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z и на все остальные узлы торцов бруса по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением сосредоточенных изгибающих моментов M задается на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

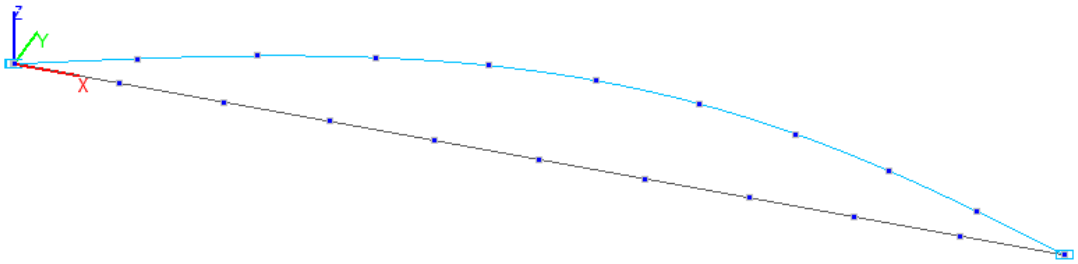
Результаты решения в SCAD



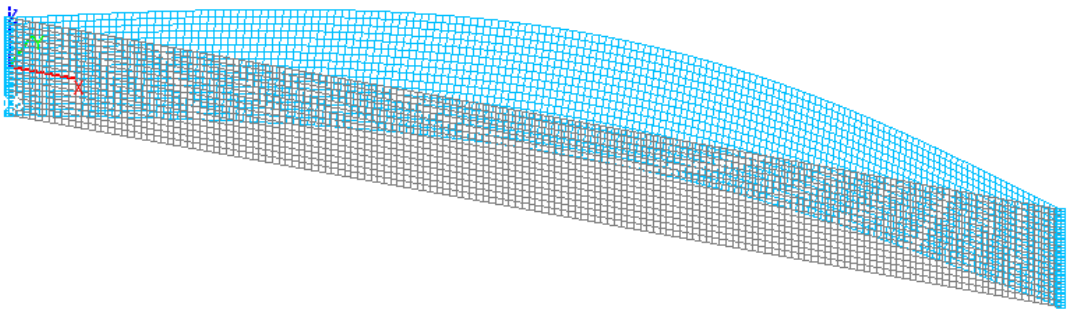
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr} (кН·м), действующих на торцах шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	658464	0,654602·1000000=54602	0,59
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	658464	0,650024·1000000=650024	1,28

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса, определяется по следующей формуле:

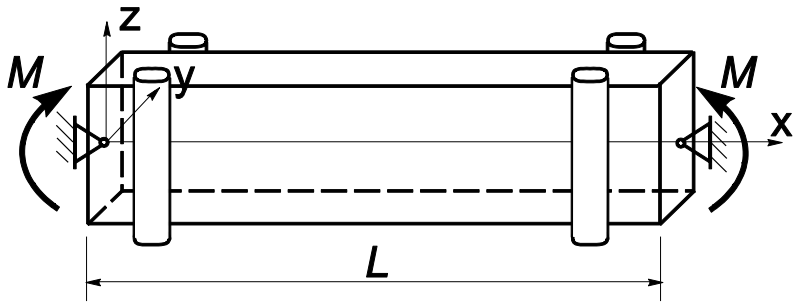
$$M = \frac{\pi \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенных изгибающих моментов, равных по значению и действующих на торцах шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_5_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_5_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и защемленный из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенных изгибающих моментов M, равных по значению и действующих на его торцах. Определить критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: Биргер И.А., Пановко Я.Г., Прочность. Устойчивость. Колебания, Справочник в трех томах, Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр.68;

Исходные данные:

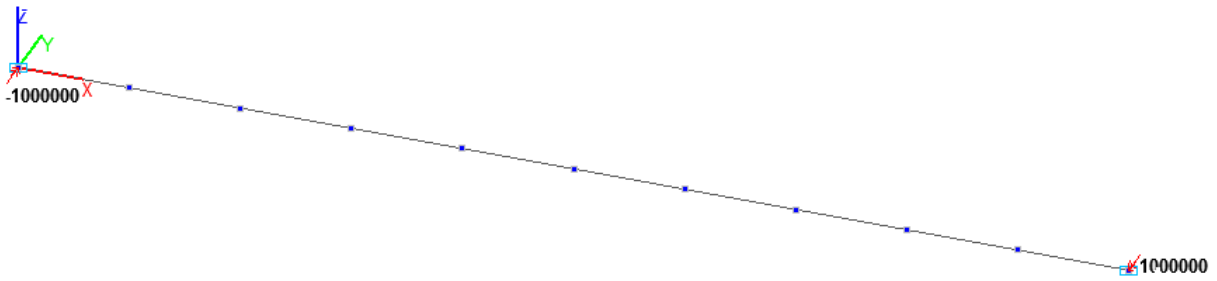
L = 10.0 м	- длина шарнирно опертого бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$M = 10^6$ кН·м	- начальное значение сосредоточенных изгибающих моментов, действующих на торцах бруса.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

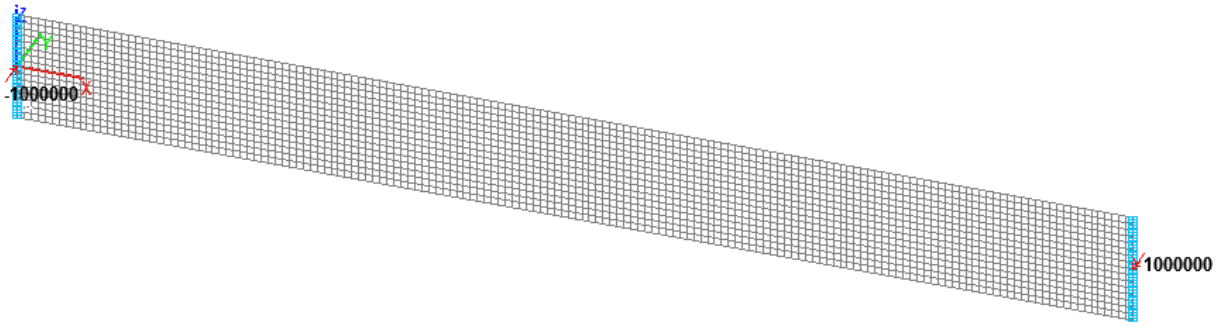
Стержневая модель (C), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенных изгибающих моментов M задается в узлах торцов бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости (h = b = 1.0 м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; ν = 0.2), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UZ, и на все остальные узлы торцов бруса по направлениям степеней свободы Y, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенных изгибающих моментов M задается на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

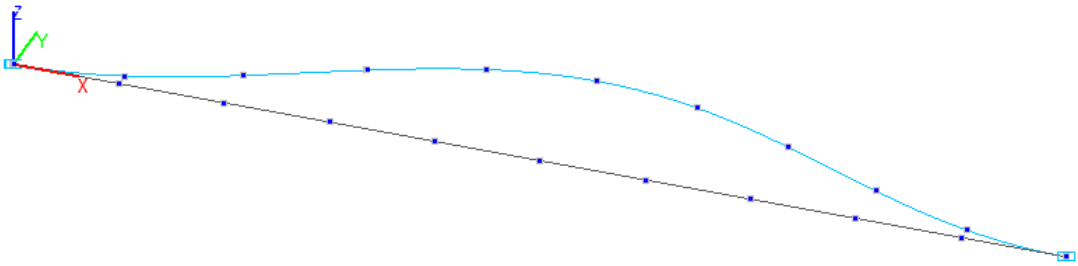
Результаты решения в SCAD



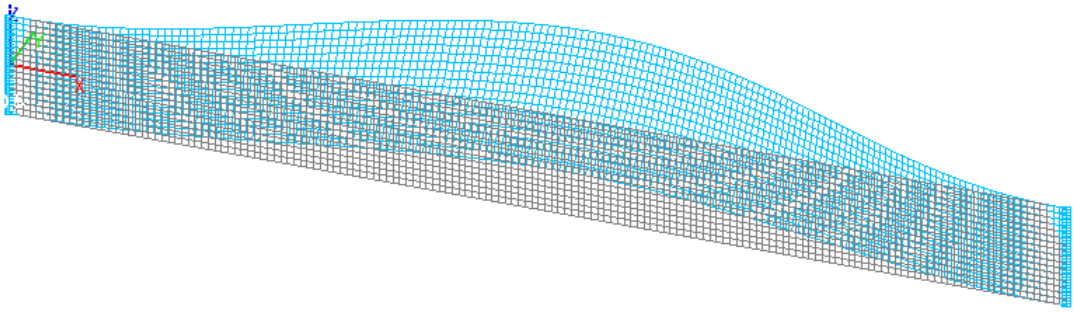
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr} (кН·м), действующих на торцах шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	1316928	1,325369·1000000=1325369	0,64
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	1316928	1,246357·1000000=1246357	5,36

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса определяется по следующей формуле:

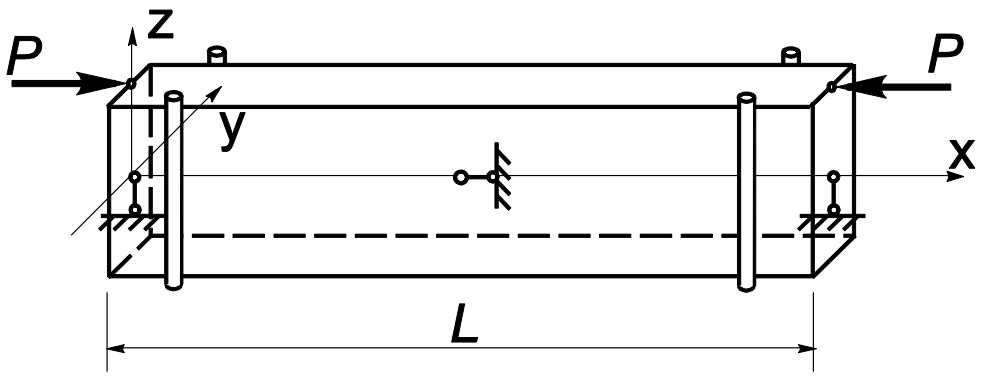
$$M = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\}$$

Устойчивость свободно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных продольных изгибающих сил, приложенных к верхним ребрам торцов и равных по значению (продольный изгиб)



Цель: Определение первых двух критических значений сосредоточенных продольных изгибающих сил, равных по значению и действующих на верхних ребрах торцов свободно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_6_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_6_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Свободно опертый в плоскости и из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенных продольных изгибающих сил P, равных по значению и действующих на верхних ребрах его торцов. Определить первые два критические значения сосредоточенных продольных изгибающих сил P_{cr1} и P_{cr2}, соответствующие моменту потери устойчивости свободно опертого бруса.

Ссылки: Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр.291

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина свободно опертого бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения свободно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала свободно опертого бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^6$ кН	- начальное значение сосредоточенных продольных изгибающих сил, действующих на верхних ребрах торцов бруса.

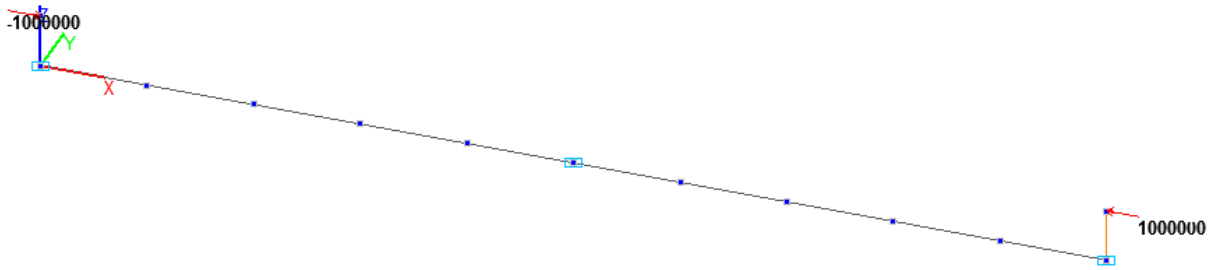
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы свободно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы Y, Z. В целях обеспечения геометрической неизменяемости на узел середины пролета бруса накладываются связи по направлениям степеней свободы X, UX. К узлам торцов бруса примыкают 2 двухузловых элемента типа 100 (трехмерное твердое тело), расположенных вертикально вверх с длиной, равной h/2. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных изгибающих сил P задается в свободных узлах элементов твердых тел (повышенные точки приложения). Количество узлов в расчетной схеме – 13;

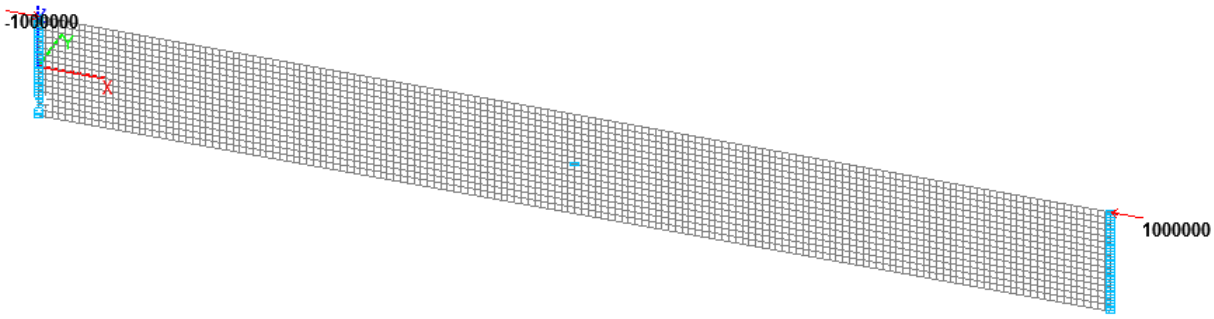
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости (h = b = 1.0

м; E = $3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; ν = 0.2), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы Y, Z и на все остальные узлы торцов бруса по направлению степени свободы Y. В целях обеспечения геометрической неизменяемости на узел середины пролета бруса по его продольной оси накладывается связь по направлению степени свободы X. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных изгибающих сил P задается в узлах, расположенных на торцах и отстоящих по высоте от продольной оси бруса на h/2. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

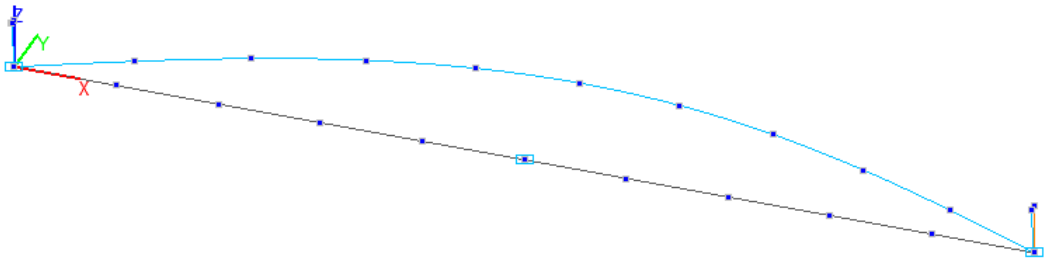
Результаты решения в SCAD



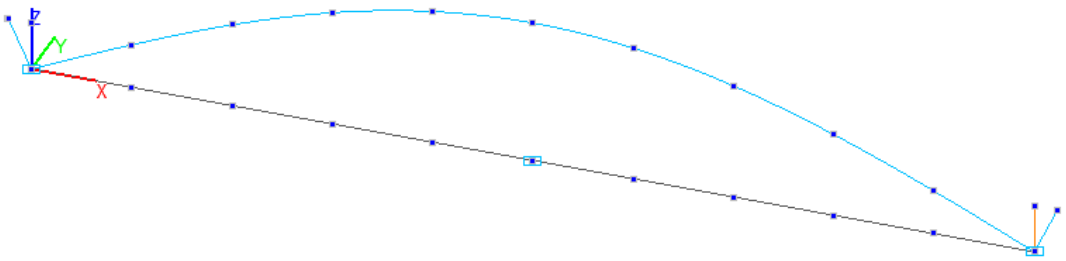
Расчетная схема. Стержневая модель



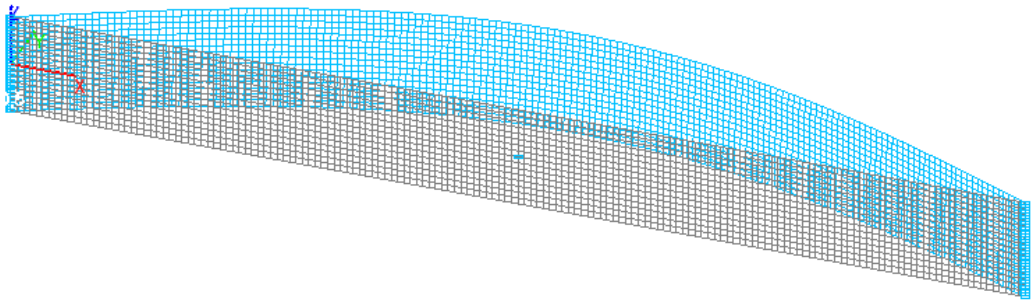
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



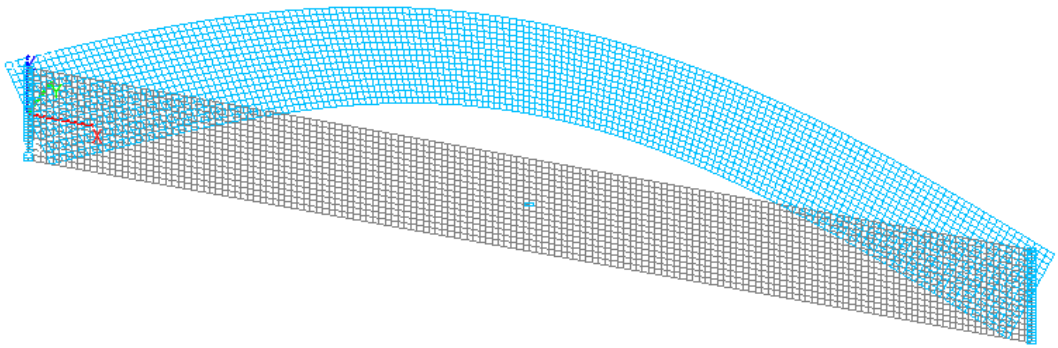
1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



2-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



2-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критические значения сосредоточенных продольных изгибающих сил P_{cr1} и P_{cr2} (кН), действующих на верхних ребрах торцов свободно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Форма потери устойчивости	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	1-ая	61685	0,616821·100000=61682	0,01
	2-ая	61685	0,616821·100000=61682	0,01
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	1-ая	61685	0,613922·100000=61392	0,48
	2-ая	61685	0,617533·100000=61753	0,11

Замечания: При аналитическом решении критические значения сосредоточенных продольных изгибающих сил P_{cr1} и P_{cr2}, соответствующих моментам потери устойчивости свободно опертого бруса, определяются по следующим формулам:

$$P_1 = \frac{2 \cdot G \cdot I_x}{h^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I_z}{G \cdot I_x}} \right) \qquad P_2 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

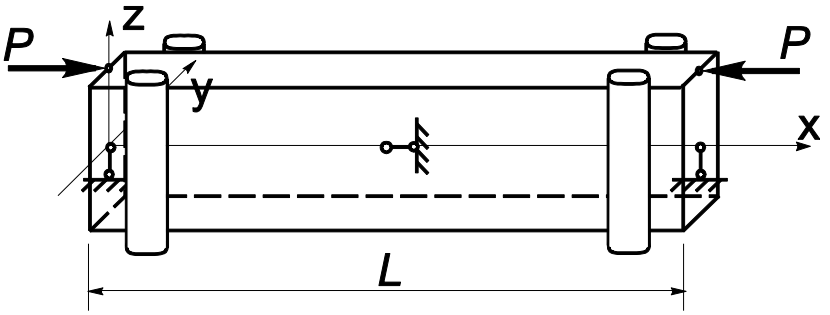
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\}$$

Устойчивость свободно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенных продольных изгибающих сил, приложенных к верхним ребрам торцов и равных по значению (продольный изгиб)



Цель: Определение первых двух критических значений сосредоточенных продольных изгибающих сил, равных по значению и действующих на верхних ребрах торцов свободно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_7_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_7_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Свободно опертый в плоскости и защемленный из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенных продольных изгибающих сил P, равных по значению и действующих на верхних ребрах его торцов. Определить первые два критические значения сосредоточенных продольных изгибающих сил P_{cr1} и P_{cr2}, соответствующие моменту потери устойчивости свободно опертого бруса.

Ссылки: Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр.291

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина свободно опертого бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения свободно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала свободно опертого бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^6$ кН	- начальное значение сосредоточенных продольных изгибающих сил, действующих на верхних ребрах торцов бруса.

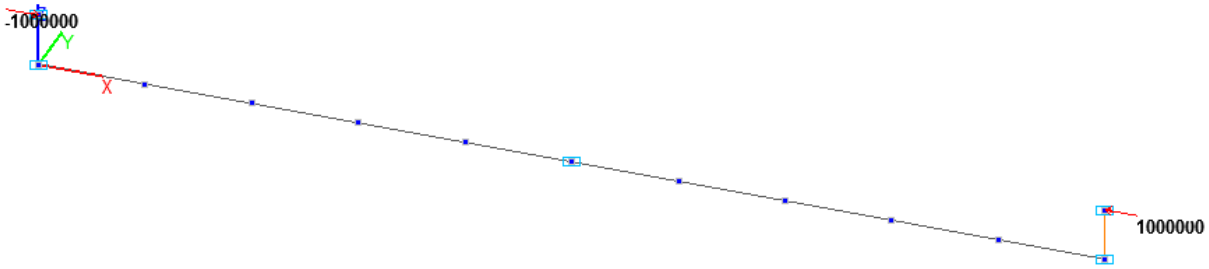
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы свободно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы Y, Z, UZ. В целях обеспечения геометрической неизменяемости на узел середины пролета бруса накладываются связи по направлениям степеней свободы X, UX. К узлам торцов бруса примыкают 2 двухузловых элемента типа 100 (трехмерное твердое тело), расположенных вертикально вверх с длиной, равной h/2. На верхние узлы элементов твердых тел накладывается связь по направлению UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных изгибающих сил P задается в верхних узлах элементов твердых тел (повышенные точки приложения). Количество узлов в расчетной схеме – 13;

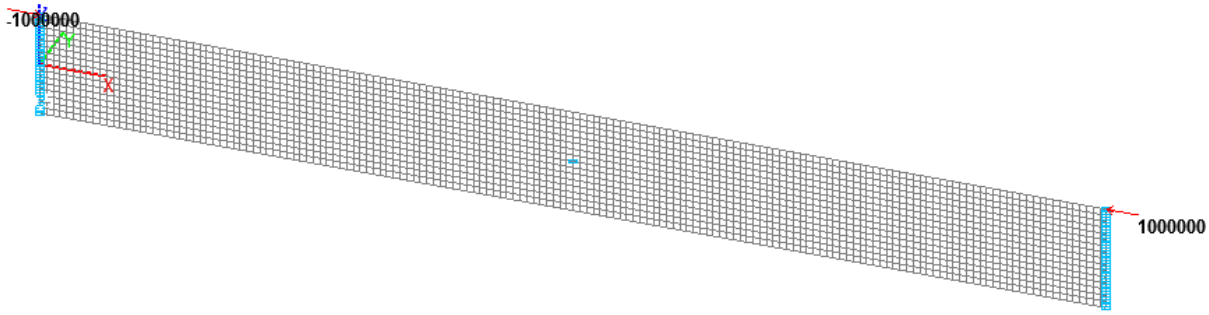
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости (h = b = 1.0 м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; ν = 0.2), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям

степеней свободы Y, Z, UZ и на все остальные узлы торцов бруса по направлениям степеней свободы Y, UZ. В целях обеспечения геометрической неизменяемости на узел середины пролета бруса по его продольной оси накладывается связь по направлению степени свободы X. Воздействие с начальным значением сосредоточенных продольных изгибающих сил P задается в узлах, расположенных на торцах и отстоящих по высоте от продольной оси бруса на h/2. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

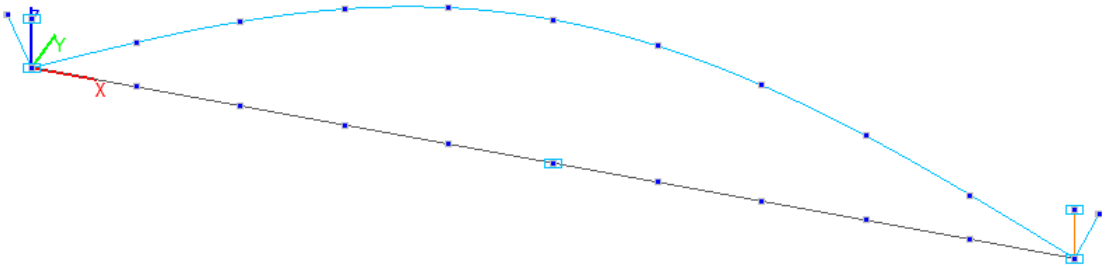
Результаты решения в SCAD



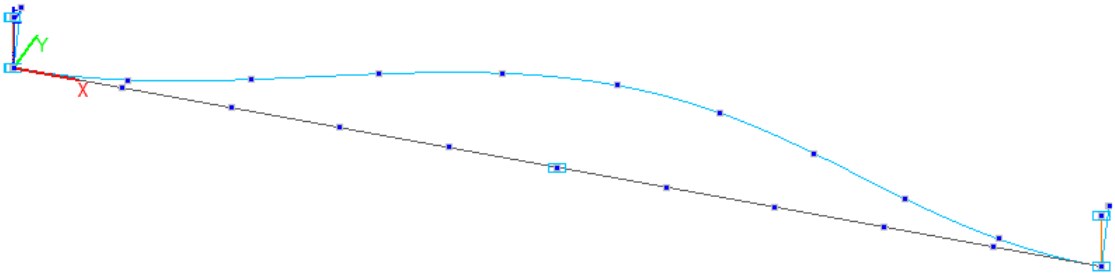
Расчетная схема. Стержневая модель



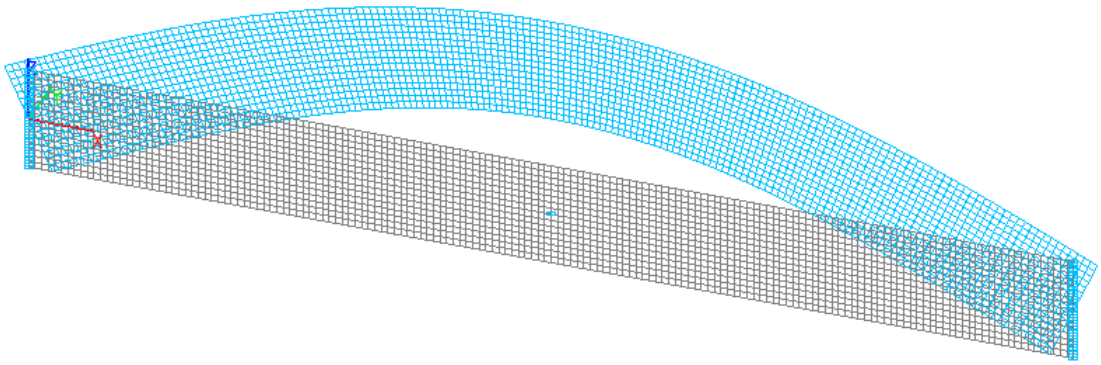
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



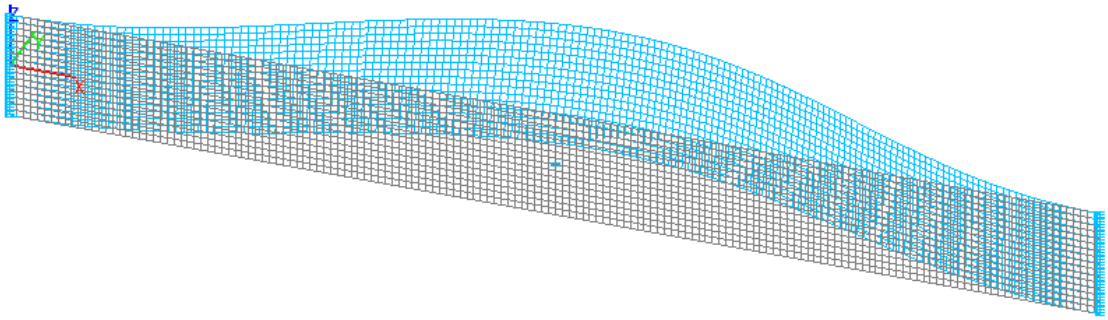
1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



2-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



2-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критические значения сосредоточенных продольных изгибающих сил P_{cr1} и P_{cr2} (кН), действующих на верхних ребрах торцов свободно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Форма потери устойчивости	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	1-ая	246741	0,246740·1000000=246740	0,00
	2-ая	877429	0,877630·1000000=877630	0,02
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	1-ая	246741	0,241230·1000000=241230	2,23
	2-ая	877429	0,805670·1000000=61753	8,18

Замечания: При аналитическом решении критические значения сосредоточенных продольных изгибающих сил P_{cr1} и P_{cr2}, соответствующих моментам потери устойчивости свободно опертого бруса, определяются по следующим формулам:

$$P_1 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} \qquad P_2 = \frac{2 \cdot G \cdot I_x}{h^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot h^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I_z}{G \cdot I_x}}\right) \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

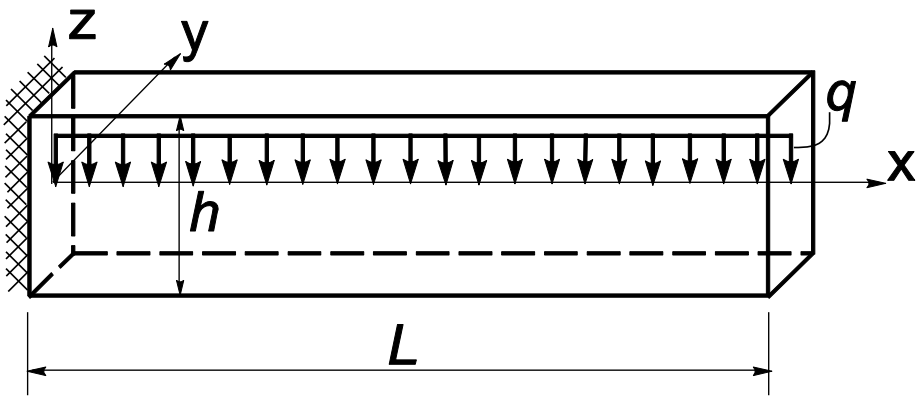
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)\right]\right\}$$

Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения равномерно распределенной нагрузки, действующей по продольной оси консольного бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_8_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_8_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель
Stability_Bar_8_Solid.SPR	Объемная расчетная модель

Формулировка задачи: Консольный брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию равномерно распределенной нагрузки q, действующей по его продольной оси. Определить критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса.

Ссылки: А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.217;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина консольного бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения консольного бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала консольного бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$q = 10^5$ кН/м	- начальное значение равномерно распределенной нагрузки, действующей по продольной оси бруса.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:

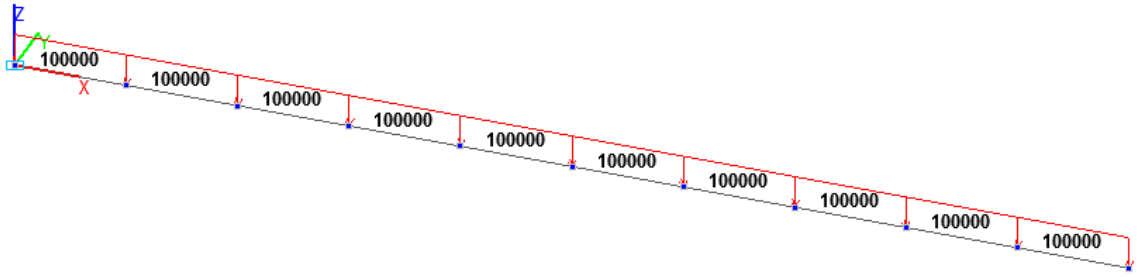
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узел защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной нагрузки q задается на всех элементах бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной по линии нагрузки q задается на верхних сторонах всех элементов бруса, расположенных под его продольной осью. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

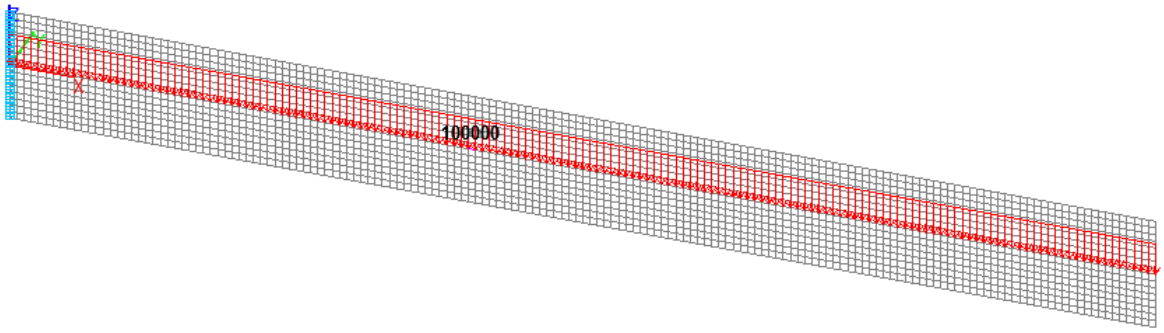
Объемная модель (О), 5120 двадцатиузловых элементов типа 37, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси, ширине и высоте бруса с шагом 0.125 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной по

грани нагрузки q_A = q/ b задается на верхних гранях всех элементов бруса, расположенных под его продольной осью. Количество узлов в расчетной схеме – 24705.

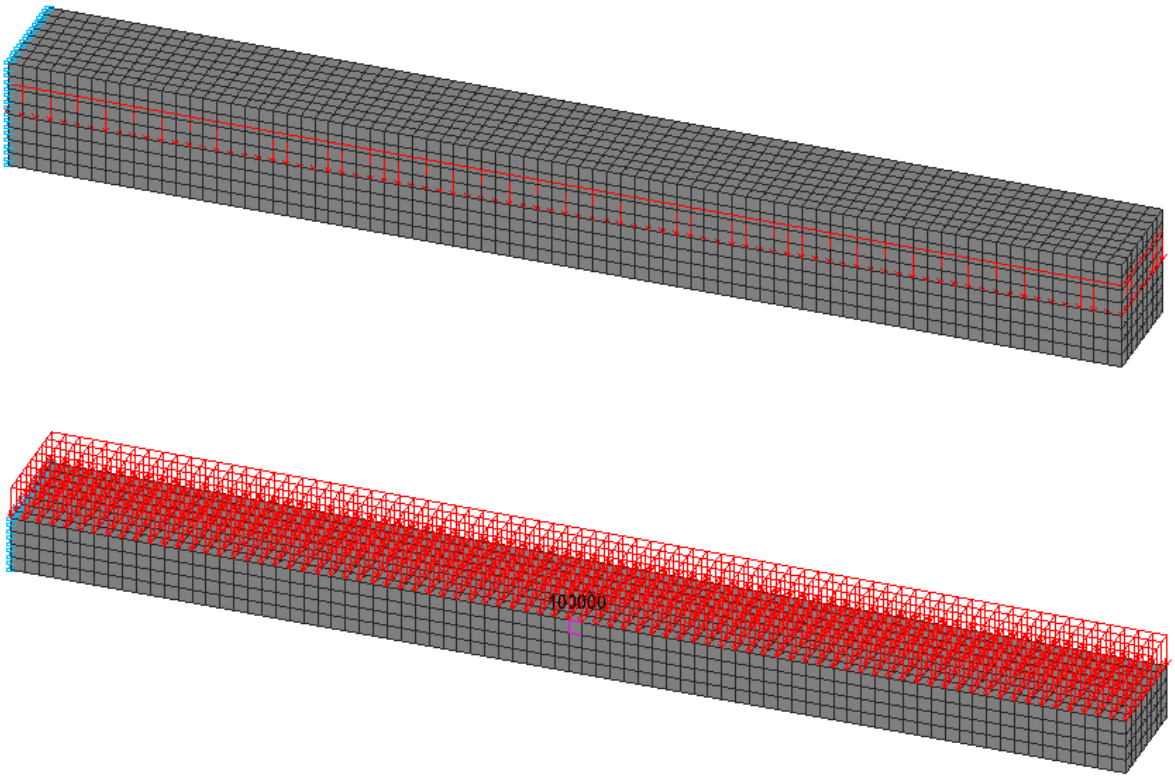
Результаты решения в SCAD



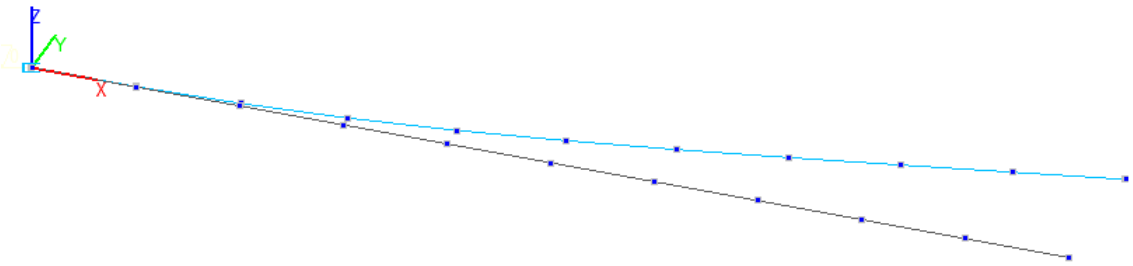
Расчетная схема. Стержневая модель



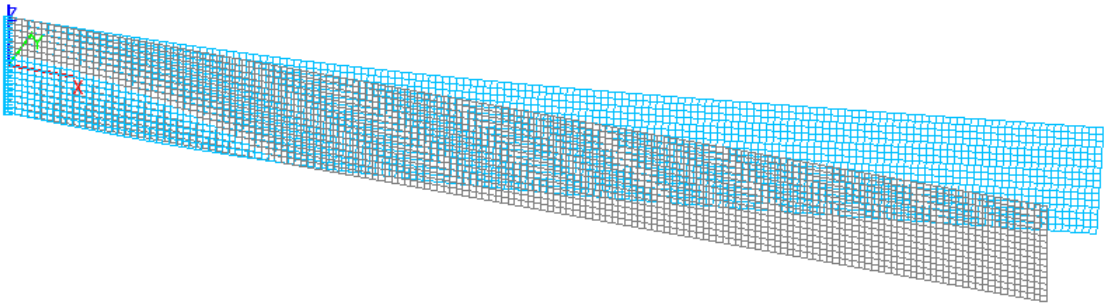
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



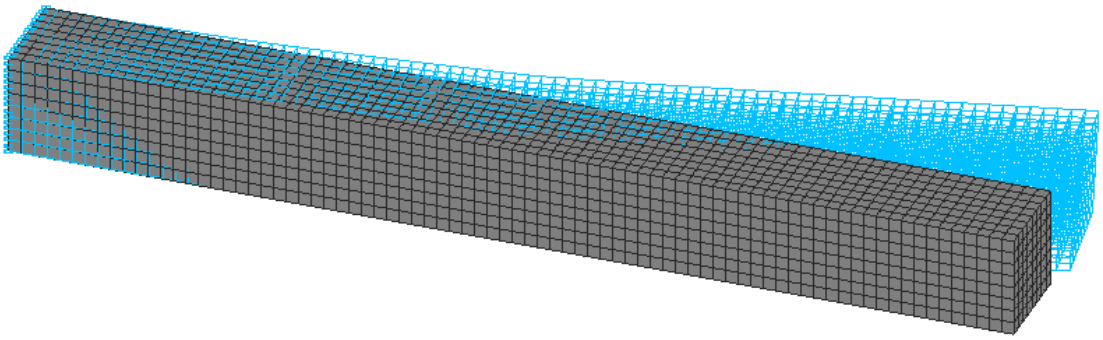
Расчетная схема. Объемная модель



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Объемная модель

Сравнение решений:

Критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, действующей по продольной оси консольного бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	26933	0,268111·100000=26811	0,45
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	26933	0,260448·100000=26045	3,30
Объемная	26933	0,253906·100000=25391	5,73

Замечания: При аналитическом решении критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса определяется по следующей формуле:

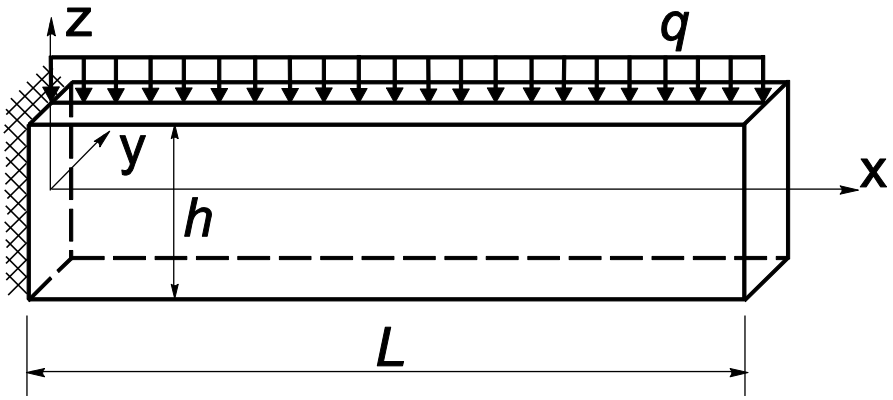
$$q = \frac{12{,}85 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^3} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\}$$

Устойчивость консольного бруса квадратного поперечного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки по продольной оси его верхней грани (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения равномерно распределенной нагрузки, действующей по продольной оси верхней грани консольного бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_9_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_9_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель
Stability_Bar_9_Solid.SPR	Объемная расчетная модель

Формулировка задачи: Консольный брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию равномерно распределенной нагрузки q, действующей по продольной оси его верхней грани. Определить критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса.

Ссылки: Тимошенко С.П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр.303

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина консольного бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения консольного бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала консольного бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$q = 10^5$ кН/м	- начальное значение равномерно распределенной нагрузки, действующей по продольной оси верхней грани бруса.

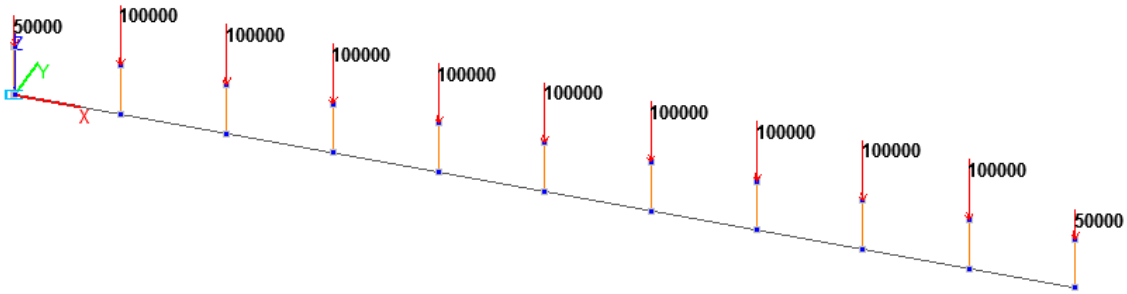
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются три расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узел защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. К узлам бруса примыкают 11 двухузловых элементов типа 100 (трехмерное твердое тело), расположенных вертикально вверх с длиной, равной h/2. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной нагрузки q задается в свободных узлах элементов твердого тела (повышенная точка приложения) в виде сосредоточенных сил $P = q \cdot b \cdot 1.0 = 10^5$ кН ($0.5 \cdot 10^5$ кН для крайних узлов). Количество узлов в расчетной схеме – 22;

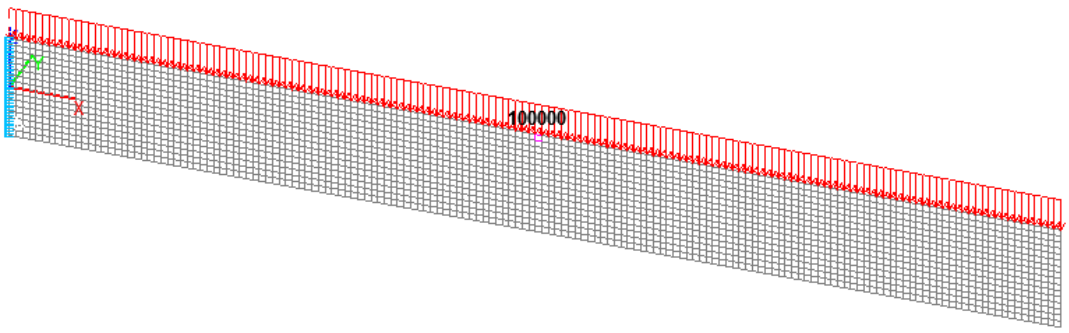
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной по линии нагрузки q задается на верхних сторонах всех элементов бруса, расположенных под его верхней гранью. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

Объемная модель (О), 5120 двадцатиузловых элементов типа 37, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси, ширине и высоте бруса с шагом 0.125 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы защемленного торца бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной по грани нагрузки q_A = q/ b задается на верхних гранях всех элементов бруса, расположенных под его верхней гранью. Количество узлов в расчетной схеме – 24705.

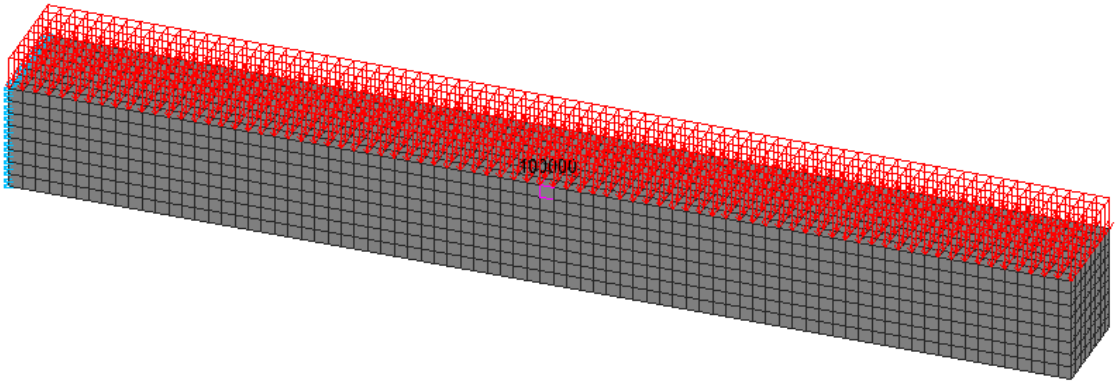
Результаты решения в SCAD



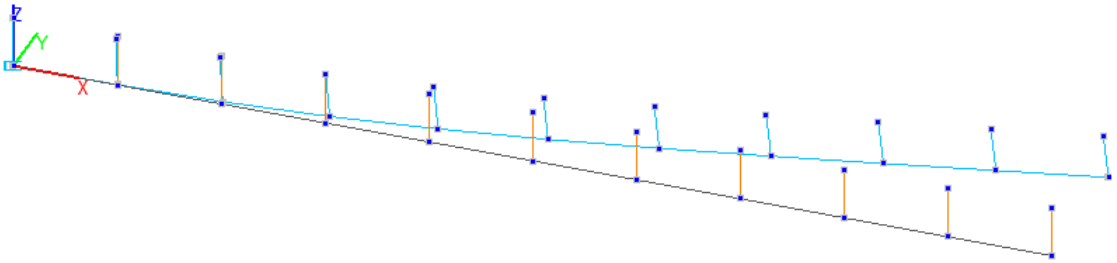
Расчетная схема. Стержневая модель



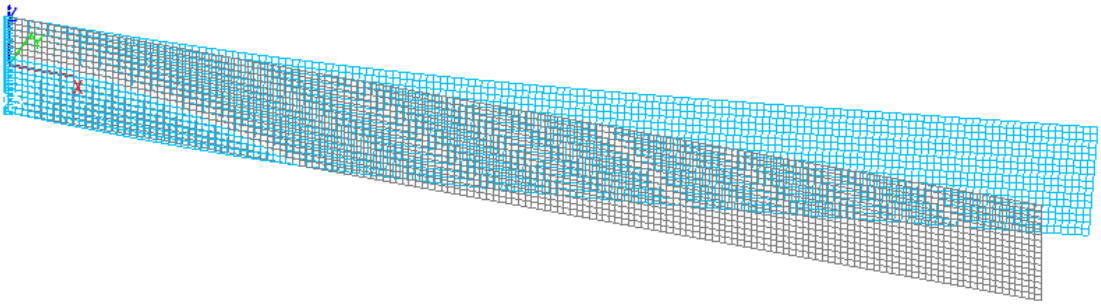
Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



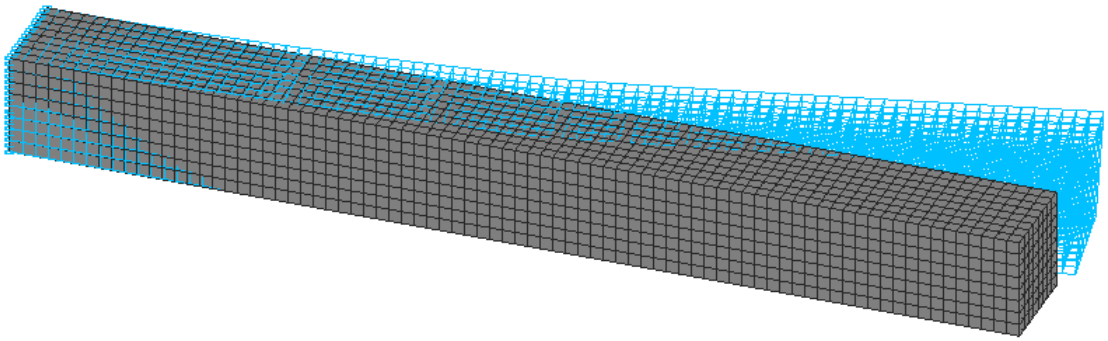
Расчетная схема. Объемная модель



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Объемная модель

Сравнение решений:

Критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, действующей по продольной оси верхней грани консольного бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	23737	0,236895·100000=23690	0,20
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	23737	0,233316·100000=23332	1,71
Объемная	23737	0,246094·100000=24609	3,67

Замечания: При аналитическом решении критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости консольного бруса определяется по следующей формуле:

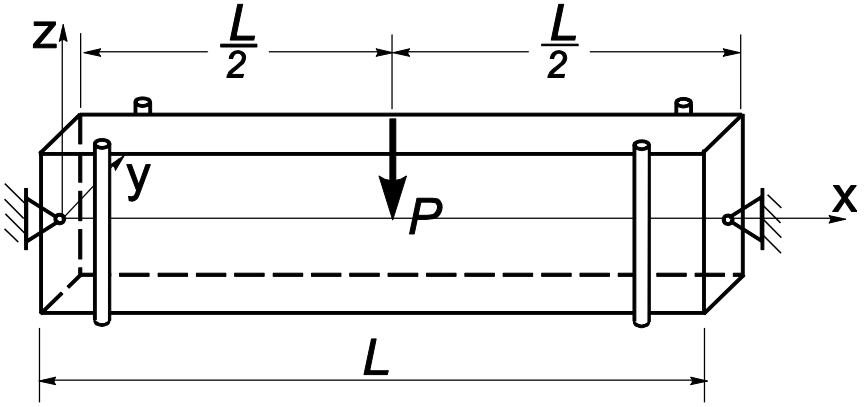
$$q = \frac{12{,}85 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^3} \cdot k_h \qquad k_h = f\left(\frac{h}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{G \cdot I_x}}\right) \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_10_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_10_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, действующей в середине его пролета в уровне продольной оси. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.218

Исходные данные:

$L = 10.0$ м	- длина шарнирно опертого бруса;
$h = b = 1.0$ м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^6$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси бруса.

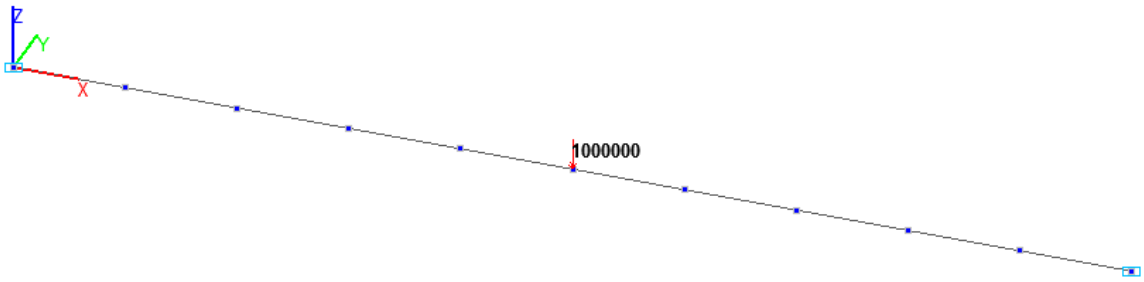
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле середины пролета бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

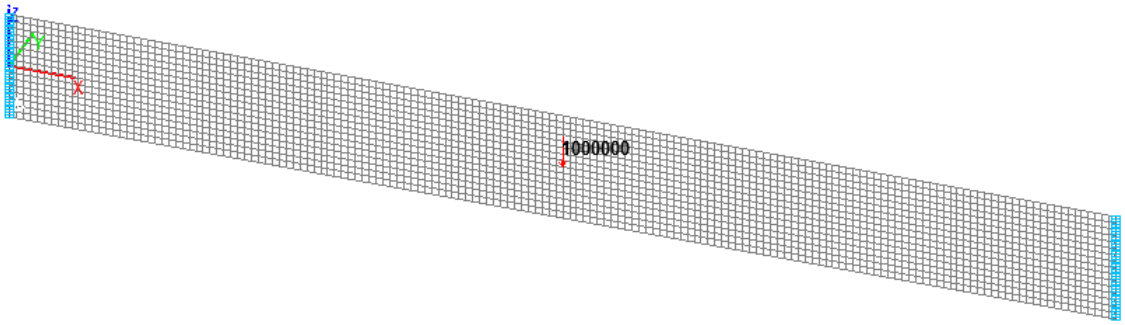
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости ($h = b = 1.0$ м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; $\nu = 0.2$), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z и на все остальные узлы торцов бруса по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в

узле, расположенном в середине пролета в уровне продольной оси бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

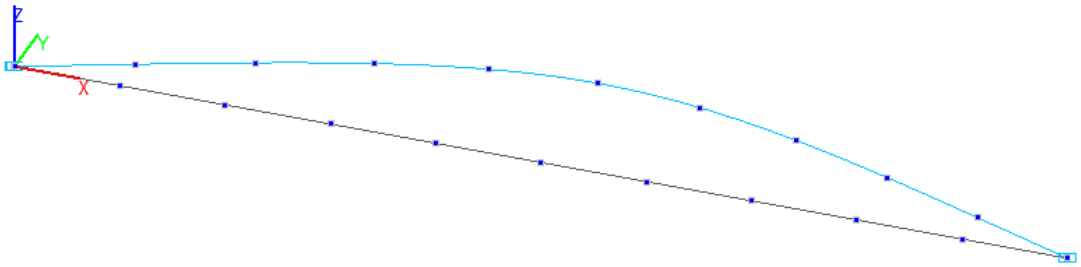
Результаты решения в SCAD



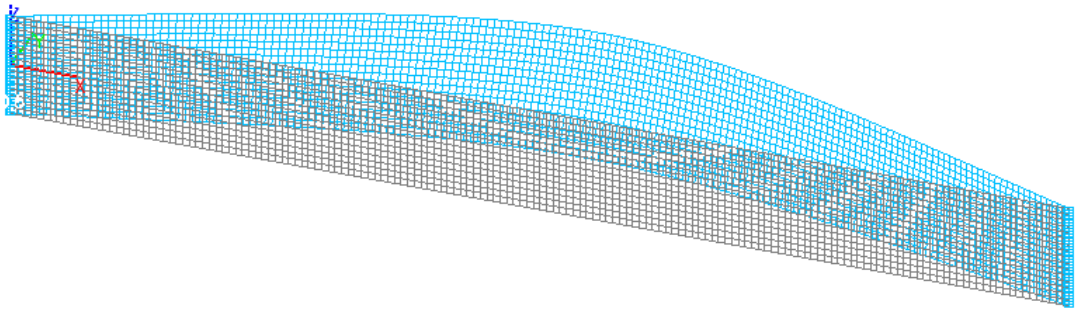
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr} (кН), действующей в середине пролета в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	355055	0,353193·1000000=353193	0,52
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	355055	0,344706·1000000=344706	2,91

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса, определяется по следующей формуле:

$$P = \frac{16{,}94 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^2} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

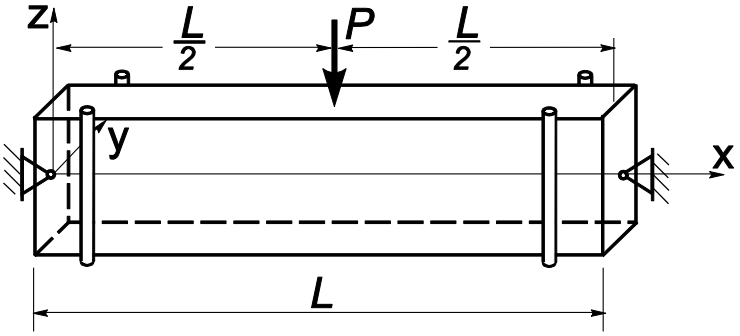
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси верхней грани (поперечный изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси верхней грани шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_11_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_11_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, действующей в середине его пролета в уровне продольной оси верхней грани. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.219

Исходные данные:

$L = 10.0$ м	- длина шарнирно опертого бруса;
$h = b = 1.0$ м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^6$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси верхней грани бруса.

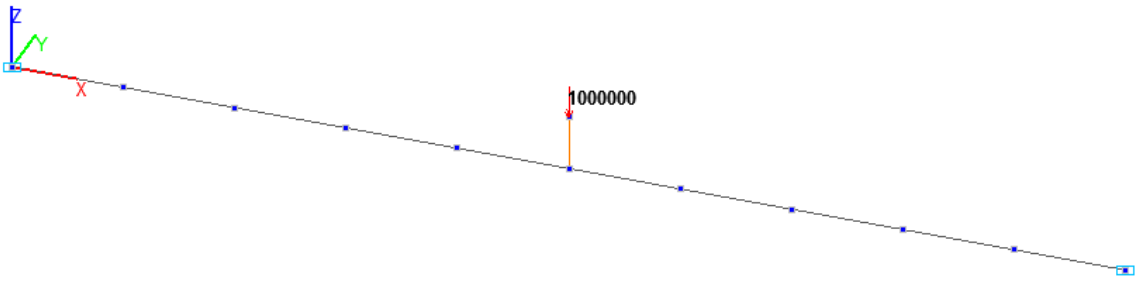
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. К узлу середины пролета бруса примыкает 1 двухузловой элемент типа 100 (трехмерное твердое тело), расположенный вертикально вверх с длиной, равной h/2. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в свободном узле элемента твердого тела (повышенная точка приложения). Количество узлов в расчетной схеме – 12;

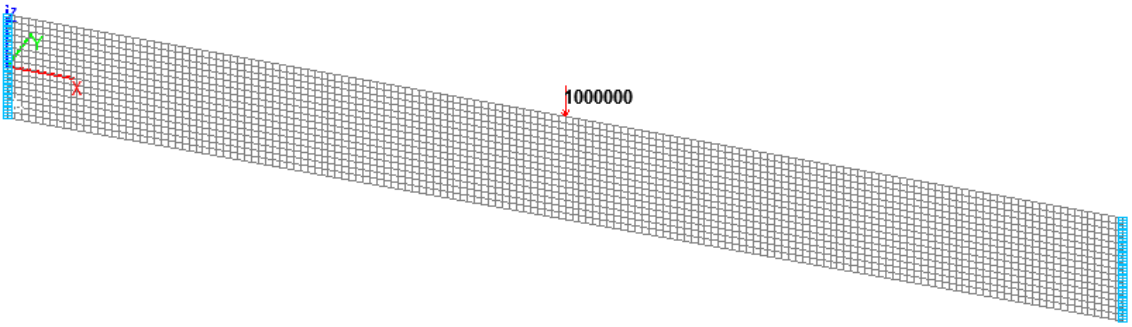
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости ($h = b = 1.0$ м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; $\nu = 0.2$), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z и на все остальные узлы торцов бруса по направлению степени свободы

Y. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле, расположенном в середине пролета бруса и отстоящем по высоте от продольной оси бруса на h/2. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

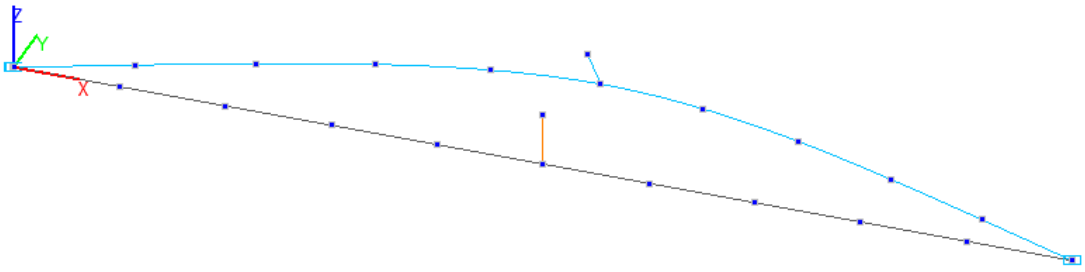
Результаты решения в SCAD



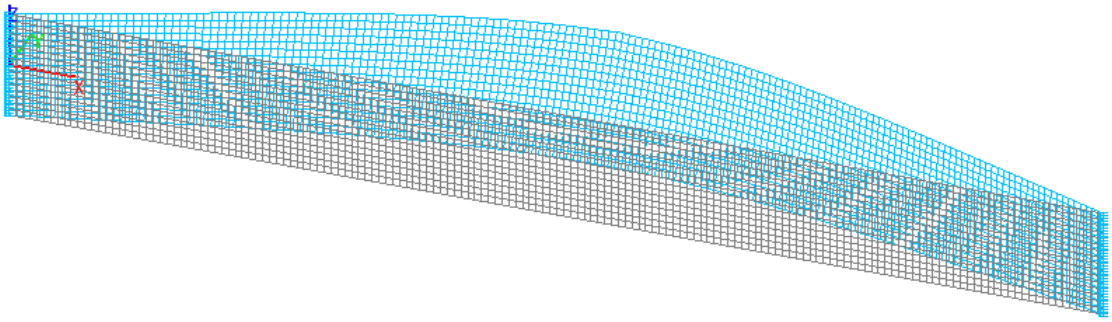
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr} (кН), действующей в середине пролета в уровне продольной оси верхней грани шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	317747	0,313904·1000000=313904	1,21
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	317747	0,304932·1000000=304932	4,03

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса, определяется по следующей формуле:

$$P = \frac{16{,}94 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^2} \cdot k_h \qquad k_h = f\left(\frac{h}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{G \cdot I_x}}\right) \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

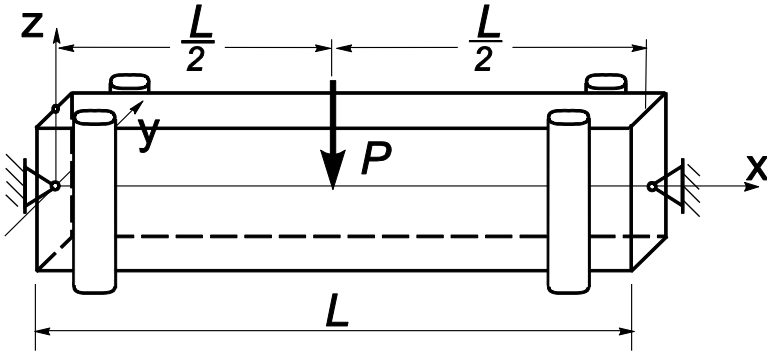
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)\right]\right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_12_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_12_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и защемленный из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, действующей в середине его пролета в уровне продольной оси. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.220

Исходные данные:

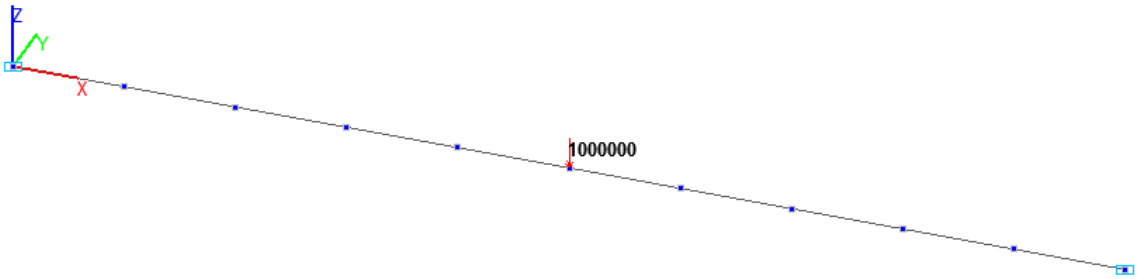
$L = 10.0$ м	- длина шарнирно опертого бруса;
$h = b = 1.0$ м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$P = 10^6$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси бруса.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

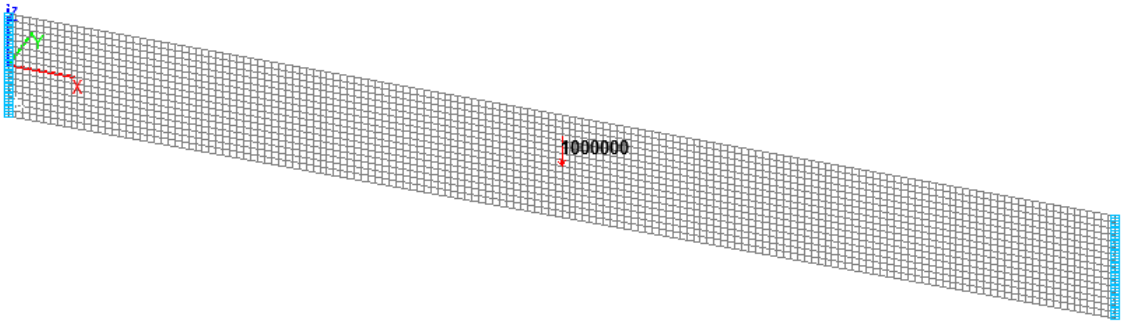
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле середины пролета бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости ($h = b = 1.0$ м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; $\nu = 0.2$), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z , UZ и на все остальные узлы торцов бруса по направлениям степеней свободы Y, UZ. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле, расположенном в середине пролета в уровне продольной оси бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

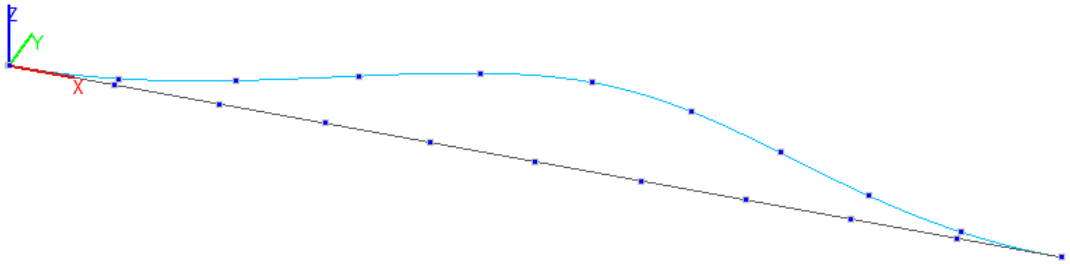
Результаты решения в SCAD



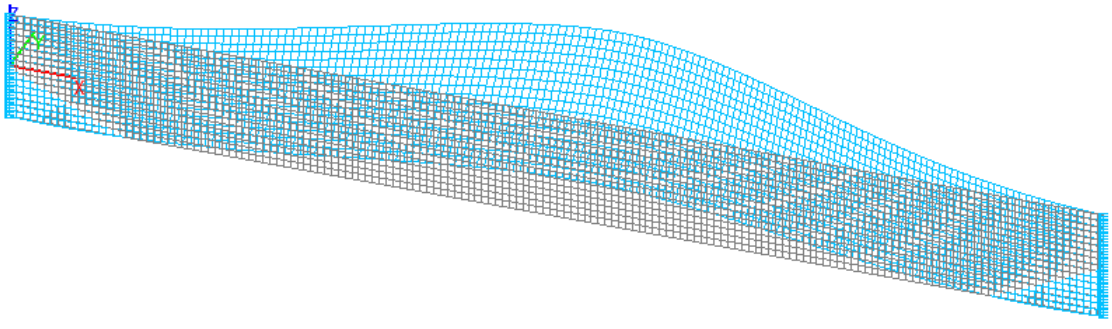
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr} (кН), действующей в середине пролета в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	559620	0,541779·1000000=541779	3,19
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	559620	0,506897·1000000=506897	9,42

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса, определяется по следующей формуле:

$$P = \frac{2670 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^2} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

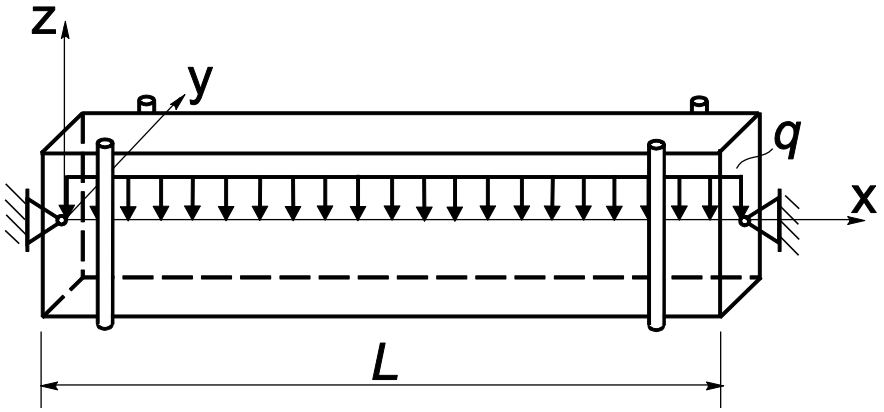
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_13_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_13_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию поперечной равномерно распределенной нагрузки q, действующей в уровне его продольной оси. Определить критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.220

Исходные данные:

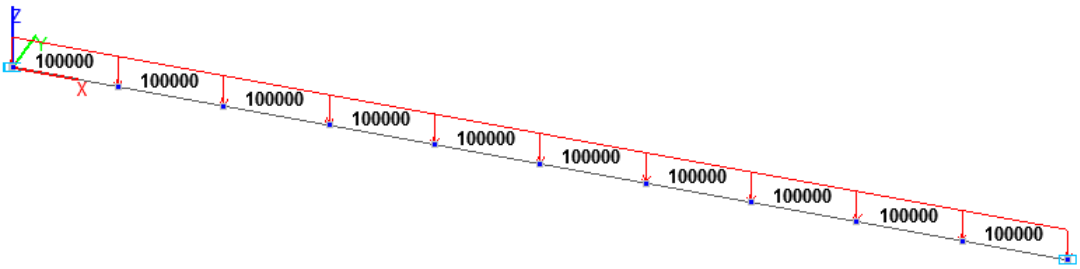
L = 10.0 м	- длина шарнирно опертого бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$q = 10^5$ кН/м	- начальное значение поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей в уровне продольной оси бруса.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

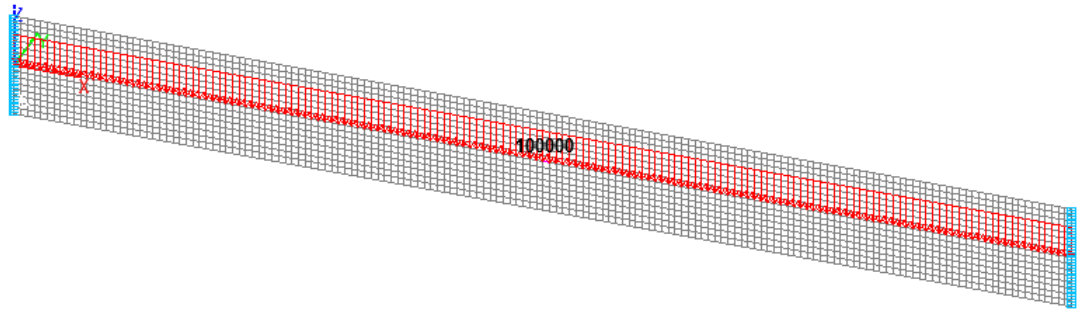
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. Воздействие с начальным значением поперечной равномерно распределенной нагрузки q задается на всех элементах бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости (h = b = 1.0 м; $E = 3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; ν = 0.2), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z и на все остальные узлы торцов бруса по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением поперечной равномерно распределенной по линии нагрузки q задается на нижних сторонах всех элементов бруса, расположенных над его продольной осью. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

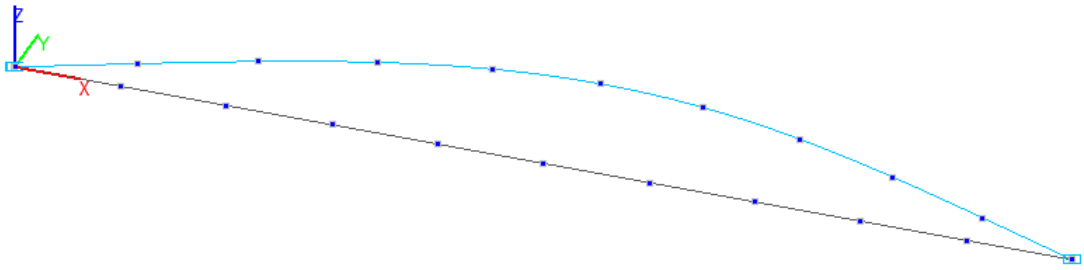
Результаты решения в SCAD



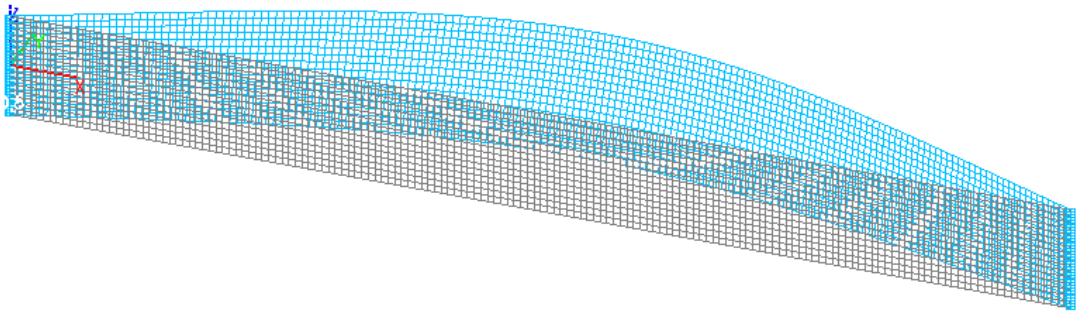
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr} (кН/м), действующей в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	59337	0,590213·100000=59021	0,53
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	59337	0,578880·100000=57888	2,44

Замечания: При аналитическом решении критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса, определяется по следующей формуле:

$$q = \frac{28{,}31 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^3} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

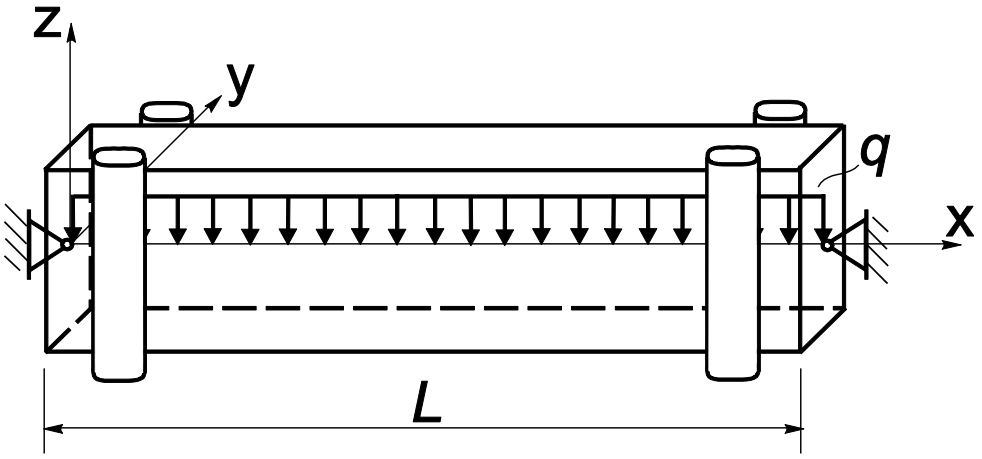
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по его продольной оси нагрузки (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса квадратного поперечного сечения, соответствующего моменту потери его устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Bar_14_Bar.SPR	Стержневая расчетная модель
Stability_Bar_14_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертый в плоскости и защемленный из плоскости изгиба брус квадратного поперечного сечения подвергается воздействию поперечной равномерно распределенной нагрузки q, действующей в уровне его продольной оси. Определить критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса.

Ссылки: Биргер И.А., Пановко Я.Г., Прочность. Устойчивость. Колебания, Справочник в трех томах,
Том 3, Москва, Машиностроение, 1968, стр.72

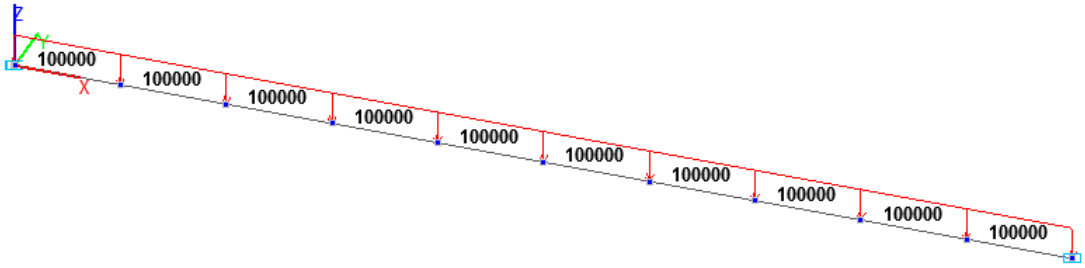
Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина шарнирно опертого бруса;
h = b = 1.0 м	- сторона квадратного поперечного сечения шарнирно опертого бруса;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертого бруса;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$q = 10^5$ кН/м	- начальное значение поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей в уровне продольной оси бруса.

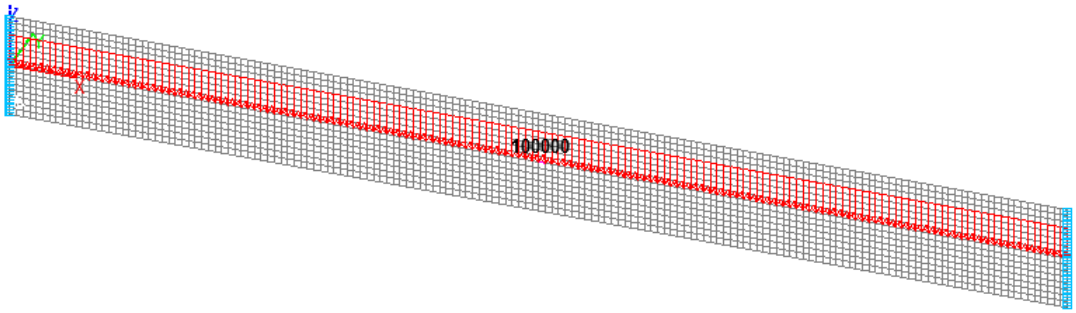
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси с шагом 1.0 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов бруса по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UZ. Воздействие с начальным значением поперечной равномерно распределенной нагрузки q задается на всех элементах бруса. Количество узлов в расчетной схеме – 11;
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте бруса с шагом 0.0625 м. Опирание оболочки производится через вертикальные стержни повышенной жесткости (h = b = 1.0

м; E = $3.0 \cdot 10^9$ кН/м^2; ν = 0.2), 64 элемента типа 5. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов бруса, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UZ и на все остальные узлы торцов бруса по направлениям степеней свободы Y, UZ. Воздействие с начальным значением поперечной равномерно распределенной по линии нагрузки q задается на нижних сторонах всех элементов бруса, расположенных над его продольной осью. Количество узлов в расчетной схеме – 8033.

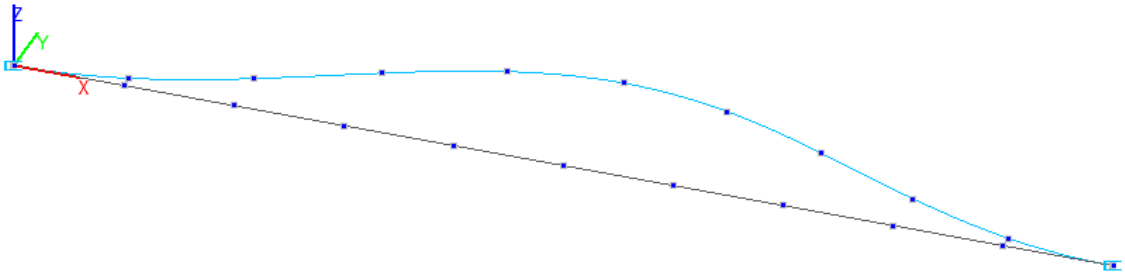
Результаты решения в SCAD



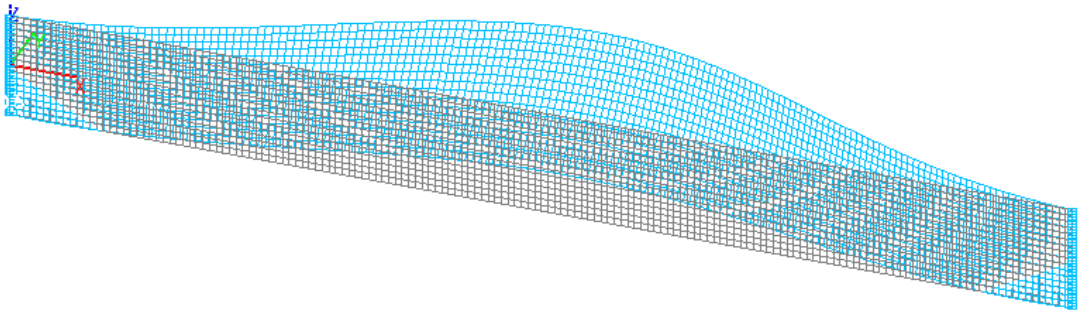
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr} (кН/м), действующей в уровне продольной оси шарнирно опертого в плоскости и защемленного из плоскости изгиба бруса

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	101863	0,995488·100000 = 99549	2,27
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	101863	0,944805·100000= 94481	7,25

Замечания: При аналитическом решении критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертого бруса, определяется по следующей формуле:

$$q = \frac{48{,}60 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^3} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

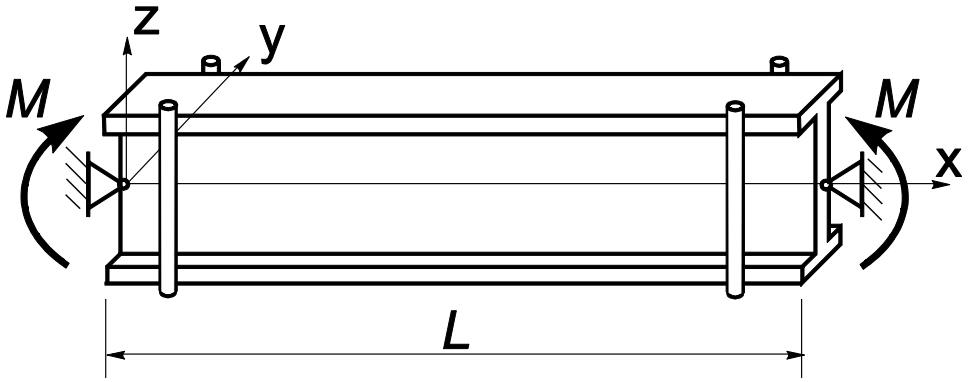
$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ – наибольший момент инерции изгиба (в плоскости действия момента);

$I_x = k_f \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к торцам и равных по значению (чистый изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенных изгибающих моментов, равных по значению и действующих на торцах шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	**Описание файла расчета**
Stability_Flanged_Beam_1_Bar.SPR Flanged_Beam.tns	Стержневая расчетная модель Тонкостенное поперечное сечение балки
Stability_Flanged_Beam_1_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертая в плоскости и из плоскости изгиба балка двутаврового поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенных изгибающих моментов M, равных по значению и действующих на ее торцах. Определить критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.222;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина шарнирно опертой балки;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертой балки;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$b = b_f = 0.5$ м	- ширина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t = t_f = 0.04$ м	- толщина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$h_w = 1.0$ м	- высота стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t_w = 0.02$ м	- толщина стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$M = 10^3$ кН·м	- начальное значение сосредоточенных изгибающих моментов, действующих на торцах балки.

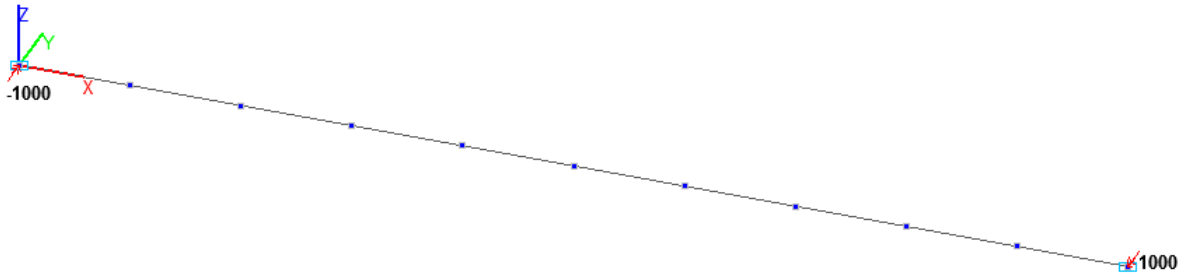
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси балки с шагом 1.0 м. Приведенная жесткость поперечного сечения на свободное кручение шарнирно опертой балки с учетом влияния депланации вычисляется по формуле: $G \cdot I_{x_red} = G \cdot I_x + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I_\omega$. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. Воздействие с начальным значением сосредоточенных изгибающих моментов M задается в узлах торцов балки. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

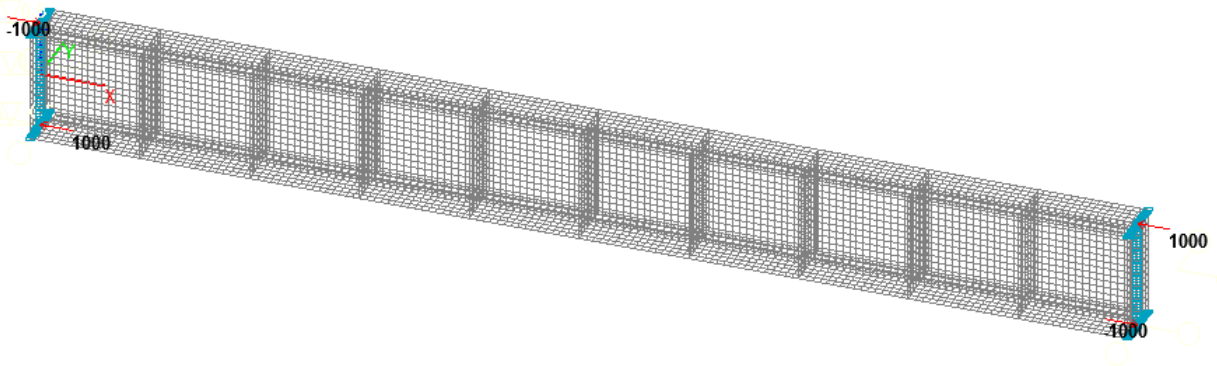
Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов балки типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте балки с шагом 0.0625 м.

Во избежание местной потери устойчивости стенки и полок балки с шагом 1.0 м по длине поставлены вертикальные ребра жесткости (h_w = 1.0 м; b_w = 0.5 м; t_w = 0.02 м; E = $3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2; ν = 0.2), 3968 элементов типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов балки, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z, и на все остальные узлы торцов балки по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением сосредоточенных изгибающих моментов M задается в виде пар сил P = M/h_w = 10^3 кН на узлы торцов балки, находящиеся на продольных осях ее полок. Количество узлов в расчетной схеме – 19793.

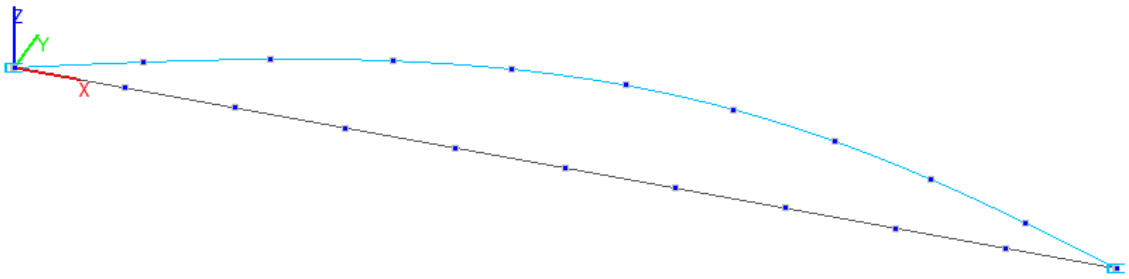
Результаты решения в SCAD



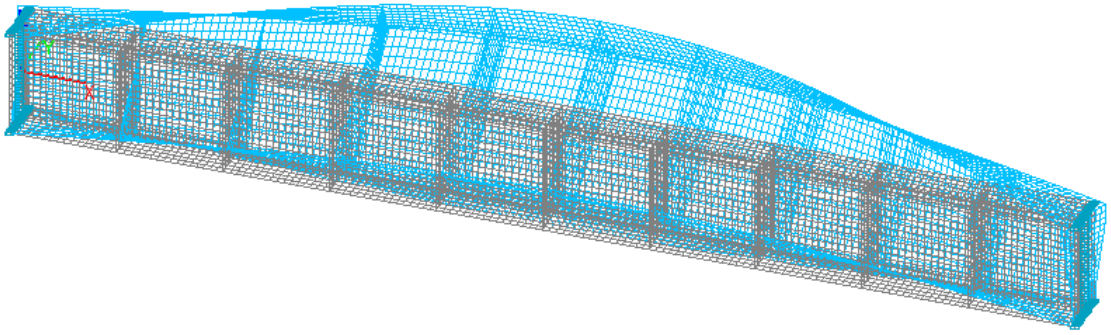
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr} (кН·м), действующих на торцах шарнирно опертой в плоскости из плоскости изгиба балки

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	1493	1,510993·1000= 1511	1,19
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	1493	1, 545837·1000= 1546	3,52

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенных изгибающих моментов M_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки определяется по следующей формуле:

$$M = \frac{\pi \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L} \cdot \chi \qquad \chi = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_x}} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$I_z = \frac{h_w \cdot {t_w}^3}{12} + 2 \cdot \frac{{b_f}^3 \cdot t_f}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

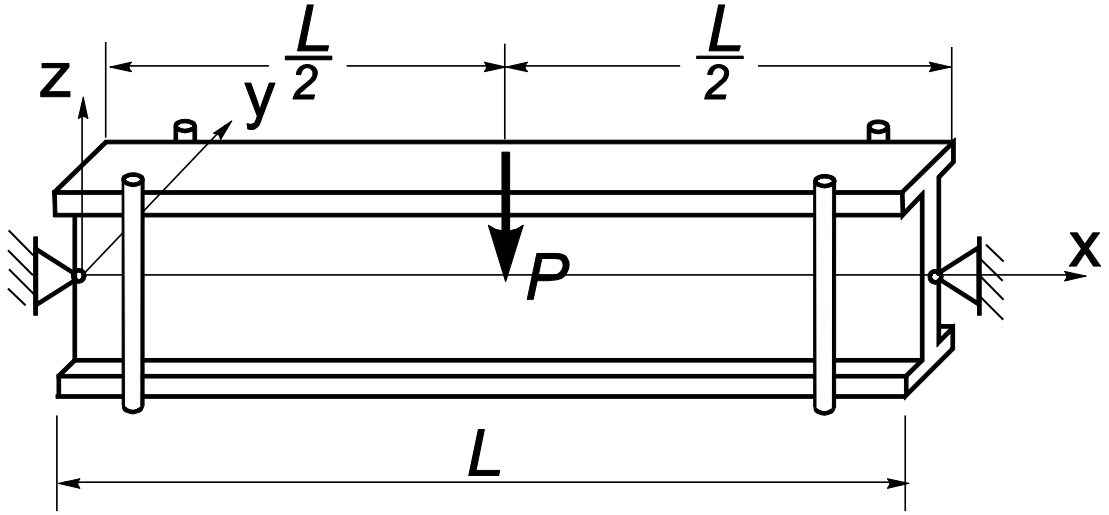
$I_\omega = \frac{{h_w}^2 \cdot {b_f}^3 \cdot t_f}{24}$ – секториальный момент инерции стесненного кручения;

$I_x = 2 \cdot k_f \cdot b_f \cdot {t_f}^3 + k_w \cdot h_w \cdot {t_w}^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_f}{b_f} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\},$$

$$k_w = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_w}{h_w} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием сосредоточенной поперечной изгибающей силы, приложенной в середине пролета в уровне продольной оси (поперечный изгиб)



Цель: Определение критического значения сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Flanged_Beam_2_Bar.SPR Flanged_Beam.tns	Стержневая расчетная модель Тонкостенное поперечное сечение балки
Stability_Flanged_Beam_2_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертая в плоскости и из плоскости изгиба балка двутаврового поперечного сечения подвергается воздействию сосредоточенной поперечной изгибающей силы P, действующей в середине его пролета в уровне продольной оси. Определить критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.222;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина шарнирно опертой балки;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертой балки;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$b = b_f = 0.5$ м	- ширина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t = t_f = 0.04$ м	- толщина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$h_w = 1.0$ м	- высота стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t_w = 0.02$ м	- толщина стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$P = 10^3$ кН	- начальное значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы, действующей в середине пролета в уровне продольной оси балки.

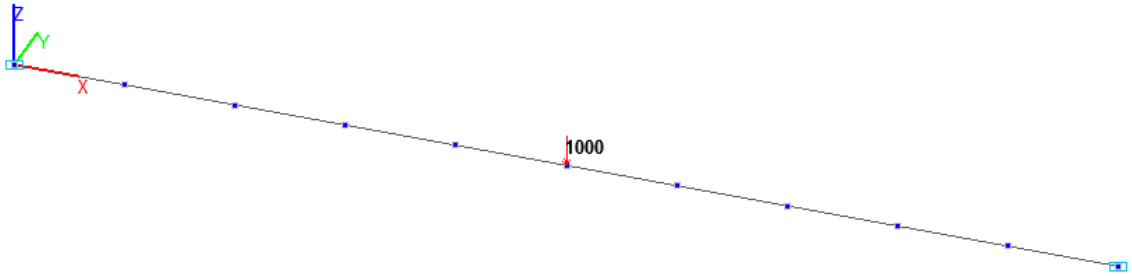
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси балки с шагом 1.0 м. Приведенная жесткость поперечного сечения на свободное кручение шарнирно опертой балки с учетом влияния депланации вычисляется по формуле: $G \cdot I_{x_red} = G \cdot I_x + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I_\omega$. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на

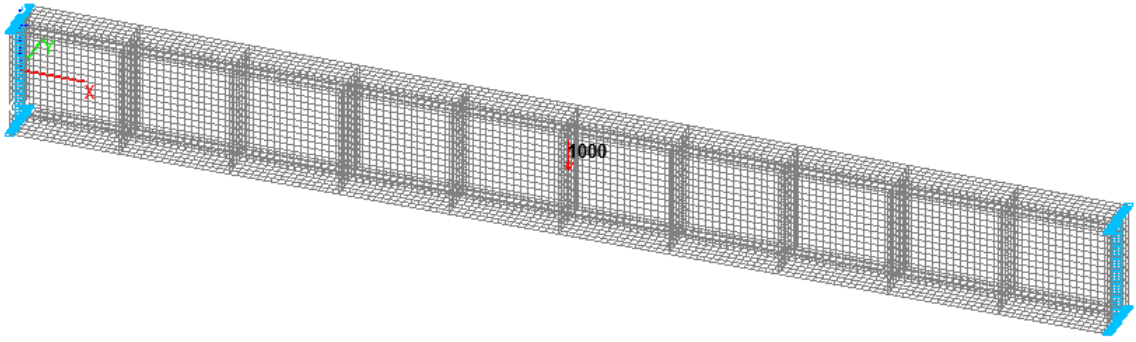
узлы шарнирно опертых торцов балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле середины пролета балки. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов балки типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте балки с шагом 0.0625 м. Во избежание местной потери устойчивости стенки и полок балки с шагом 1.0 м по длине поставлены вертикальные ребра жесткости (h_w = 1.0 м; b_w = 0.5 м; t_w = 0.02 м; E = $3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2; ν = 0.2), 3968 элементов типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов балки, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z, и на все остальные узлы торцов балки по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением сосредоточенной поперечной изгибающей силы P задается в узле, расположенном в середине пролета в уровне продольной оси балки. Количество узлов в расчетной схеме – 19793.

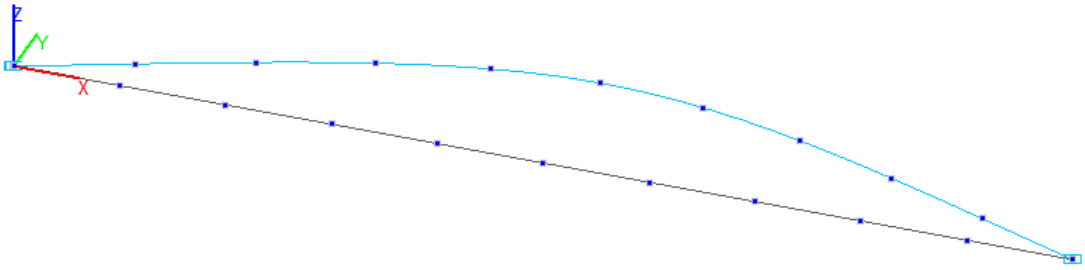
Результаты решения в SCAD



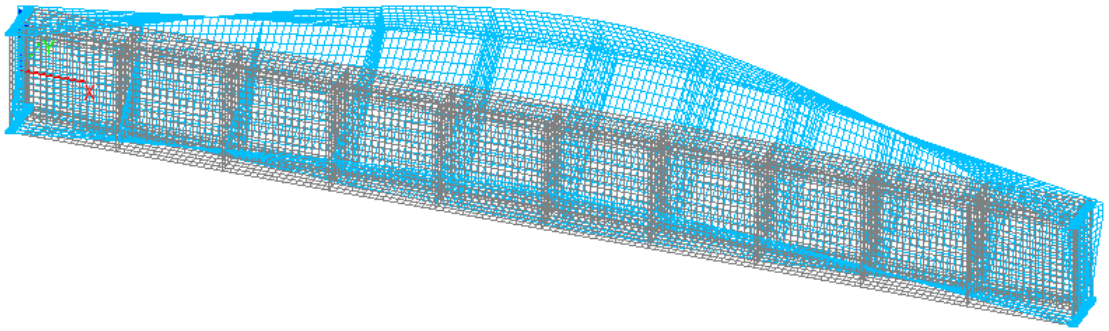
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr} (кН), действующей в середине пролета в уровне продольной оси шарнирно опертой в плоскости из плоскости изгиба балки

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	804	0,815304·1000= 815	1,38
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	804	0,817535·1000= 818	1,65

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сосредоточенной поперечной изгибающей силы P_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки определяется по следующей формуле:

$$P = \frac{16{,}92 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^2} \cdot \chi \qquad \chi = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_x}} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$I_z = \frac{h_w \cdot {t_w}^3}{12} + 2 \cdot \frac{{b_f}^3 \cdot t_f}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

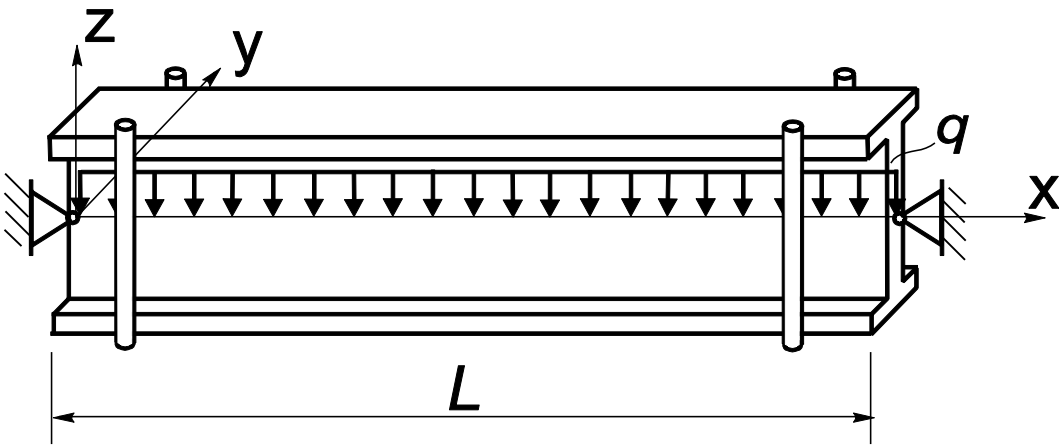
$I_\omega = \frac{{h_w}^2 \cdot {b_f}^3 \cdot t_f}{24}$ – секториальный момент инерции стесненного кручения;

$I_x = 2 \cdot k_f \cdot b_f \cdot {t_f}^3 + k_w \cdot h_w \cdot {t_w}^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_f}{b_f} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\},$$

$$k_w = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_w}{h_w} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием поперечной равномерно распределенной по ее продольной оси нагрузки (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей в уровне продольной оси шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Flanged_Beam_3_Bar.SPR Flanged_Beam.tns	Стержневая расчетная модель Тонкостенное поперечное сечение балки
Stability_Flanged_Beam_3_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертая в плоскости и из плоскости изгиба балка двутаврового поперечного сечения подвергается воздействию поперечной равномерно распределенной нагрузки q, действующей в уровне ее продольной оси. Определить критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.222;

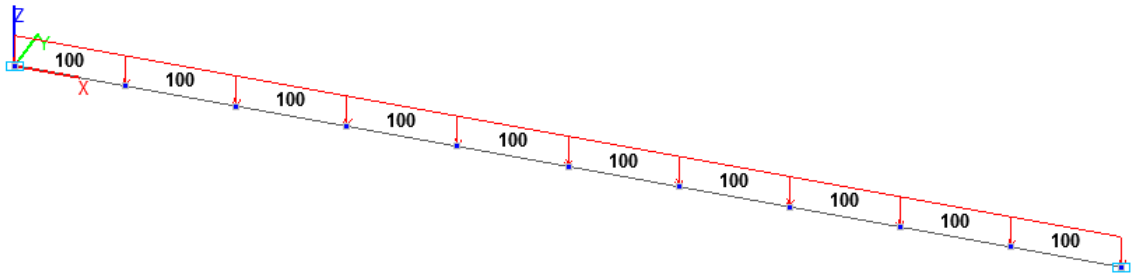
Исходные данные:

$L = 10.0$ м	- длина шарнирно опертой балки;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертой балки;
$\nu = 0.2$	- коэффициент Пуассона;
$b = b_f = 0.5$ м	- ширина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t = t_f = 0.04$ м	- толщина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$h_w = 1.0$ м	- высота стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t_w = 0.02$ м	- толщина стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$q = 10^2$ кН/м	- начальное значение поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей в уровне продольной оси балки.

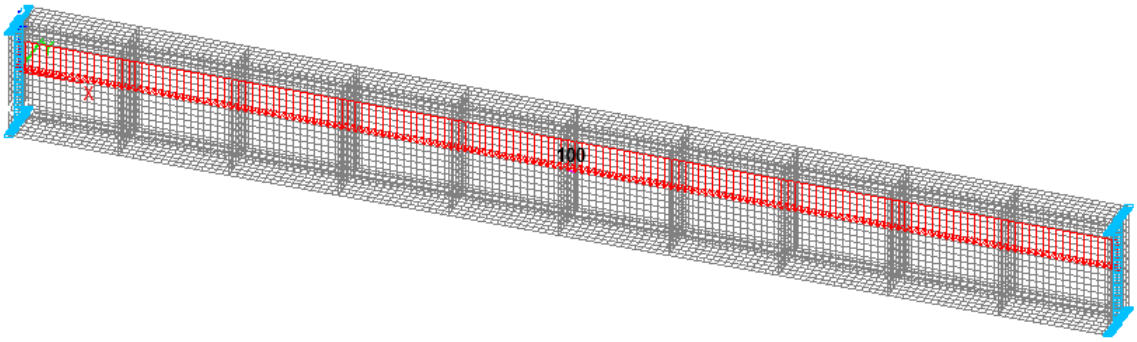
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:
Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси балки с шагом 1.0 м. Приведенная жесткость поперечного сечения на свободное кручение шарнирно опертой балки с учетом влияния депланации вычисляется по формуле: $G \cdot I_{x_red} = G \cdot I_x + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I_\omega$. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. Воздействие с начальным значением поперечной равномерно распределенной нагрузки q задается на всех элементах балки. Количество узлов в расчетной схеме – 11;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов балки типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте балки с шагом 0.0625 м. Во избежание местной потери устойчивости стенки и полок балки с шагом 1.0 м по длине поставлены вертикальные ребра жесткости (h_w = 1.0 м; b_w = 0.5 м; t_w = 0.02 м; E = $3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2; ν = 0.2), 3968 элементов типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов балки, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z, и на все остальные узлы торцов балки по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением поперечной равномерно распределенной по линии нагрузки q задается на нижних сторонах всех элементов балки, расположенных над ее продольной осью. Количество узлов в расчетной схеме – 19793.

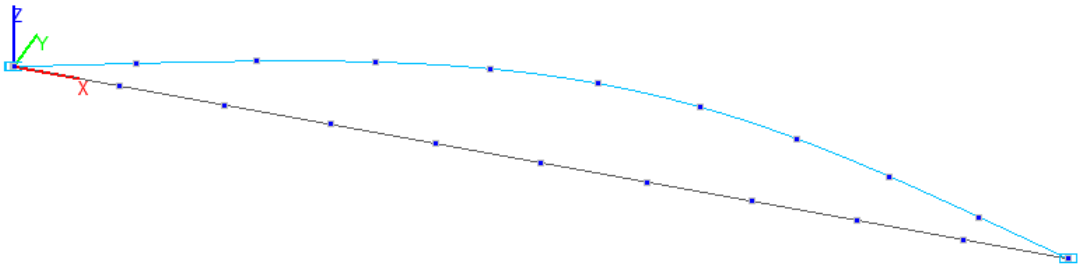
Результаты решения в SCAD



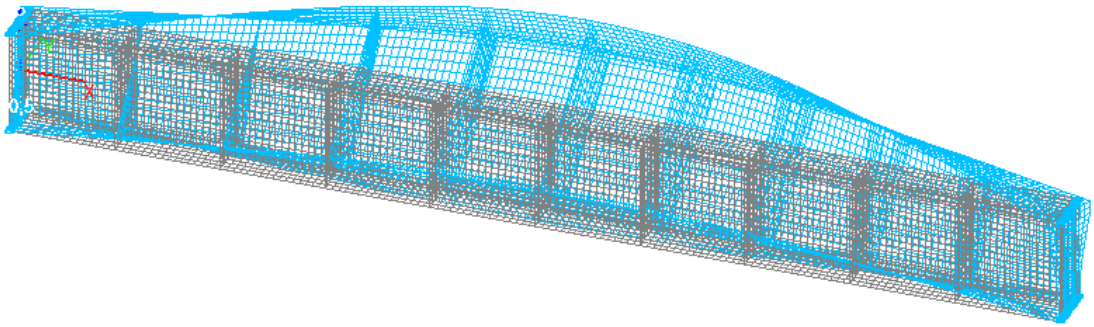
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



Сравнение решений:

Критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr} (кН/м), действующей в уровне продольной оси шарнирно опертой в плоскости из плоскости изгиба балки

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	135	1,362356·100= 136	1,21
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	135	1,359283·100= 136	0,98

Замечания: При аналитическом решении критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки определяется по следующей формуле:

$$q = \frac{28{,}32 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^3} \cdot \chi \qquad \chi = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_x}} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$I_z = \frac{h_w \cdot t_w^{\,3}}{12} + 2 \cdot \frac{b_f^{\,3} \cdot t_f}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

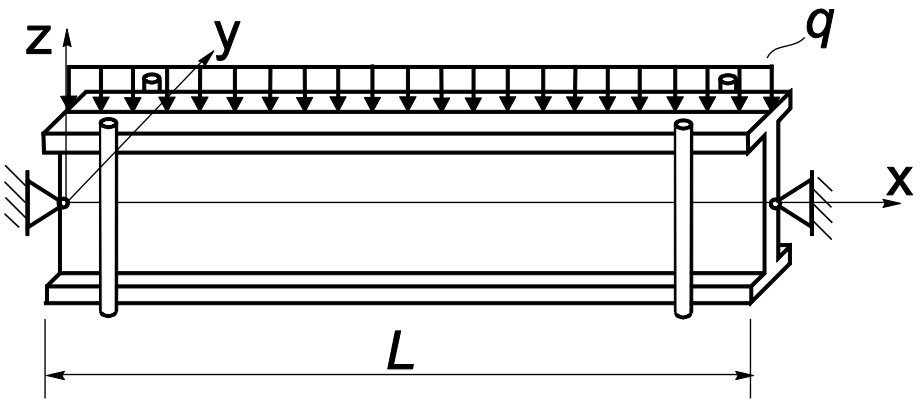
$I_\omega = \frac{h_w^{\,2} \cdot b_f^{\,3} \cdot t_f}{24}$ – секториальный момент инерции стесненного кручения;

$I_x = 2 \cdot k_f \cdot b_f \cdot t_f^{\,3} + k_w \cdot h_w \cdot t_w^{\,3}$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_f}{b_f} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\},$$

$$k_w = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_w}{h_w} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right) \right] \right\}$$

Устойчивость шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения под действием равномерно распределенной нагрузки по продольной оси ее верхней полки (прямой изгиб)



Цель: Определение критического значения равномерно распределенной нагрузки, действующей по продольной оси верхней полки шарнирно опертой в плоскости и из плоскости изгиба балки двутаврового поперечного сечения, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Stability_Flanged_Beam_4_Bar.SPR Flanged_Beam.tns	Стержневая расчетная модель Тонкостенное поперечное сечение балки
Stability_Flanged_Beam_4_Shell.SPR	Оболочечная расчетная модель

Формулировка задачи: Шарнирно опертая в плоскости и из плоскости изгиба балка двутаврового поперечного сечения подвергается воздействию равномерно распределенной нагрузки q, действующей по продольной оси ее верхней полки. Определить критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки.

Ссылки: Вольмир А.С., Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр.222;

Исходные данные:

L = 10.0 м	- длина шарнирно опертой балки;
$E = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала шарнирно опертой балки;
ν = 0.2	- коэффициент Пуассона;
$b = b_f = 0.5$ м	- ширина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t = t_f = 0.04$ м	- толщина полок поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$h_w = 1.0$ м	- высота стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$t_w = 0.02$ м	- толщина стенки поперечного сечения шарнирно опертой балки;
$q = 10^2$ кН/м	- начальное значение поперечной равномерно распределенной нагрузки, действующей по продольной оси верхней полки балки.

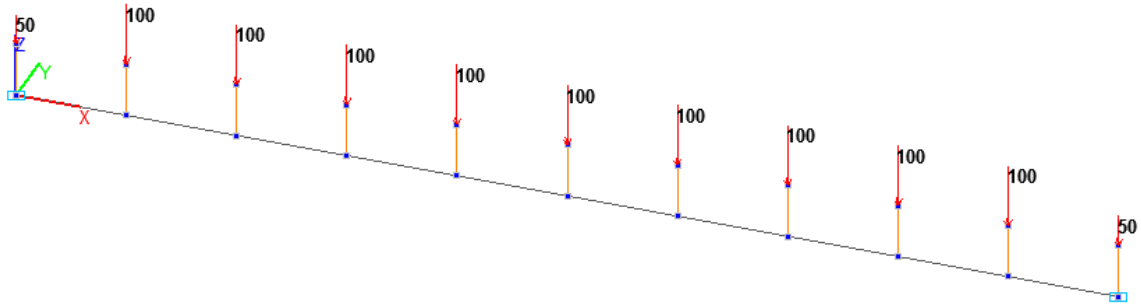
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели:

Стержневая модель (С), 10 элементов типа 5, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси балки с шагом 1.0 м. Приведенная жесткость поперечного сечения на свободное кручение шарнирно опертой балки с учетом влияния депланации вычисляется по формуле: $G \cdot I_{x_red} = G \cdot I_x + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I_\omega$. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы шарнирно опертых торцов балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX. К узлам бруса примыкают 11 двухузловых элементов типа 100 (трехмерное твердое тело), расположенных вертикально вверх с длиной, равной h/2. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной нагрузки q задается в свободных узлах элементов твердого тела (повышенная точка

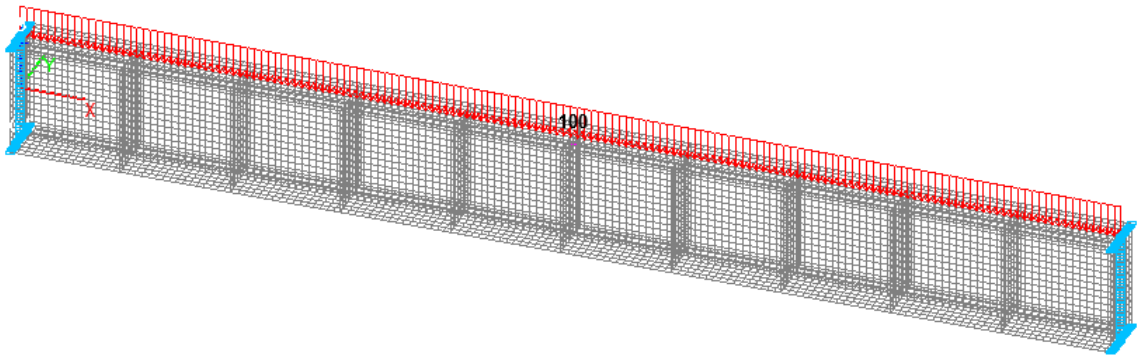
приложения) в виде сосредоточенных сил P = q·1.0 = 10^2 кН ($0.5\cdot10^2$ кН для крайних узлов). Количество узлов в расчетной схеме – 22;

Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина (П), 2560 восьмиузловых элементов балки типа 150, сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси и высоте балки с шагом 0.0625 м. Во избежание местной потери устойчивости стенки и полок балки с шагом 1.0 м по длине поставлены вертикальные ребра жесткости (h_w = 1.0 м; b_w = 0.5 м; t_w = 0.02 м; E = $3.0\cdot10^7$ кН/м^2; ν = 0.2), 3968 элементов типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы торцов балки, находящиеся на его продольной оси, по направлениям степеней свободы X, Y, Z, и на все остальные узлы торцов балки по направлению степени свободы Y. Воздействие с начальным значением равномерно распределенной по линии нагрузки q задается на верхних сторонах всех элементов стенки балки, расположенных под ее верхней полкой. Количество узлов в расчетной схеме – 19793.

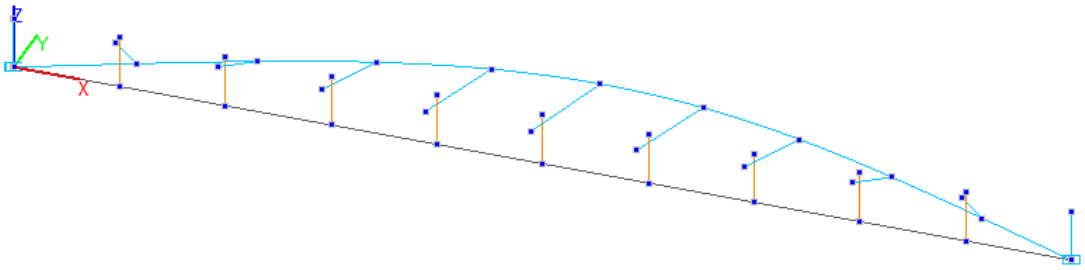
Результаты решения в SCAD



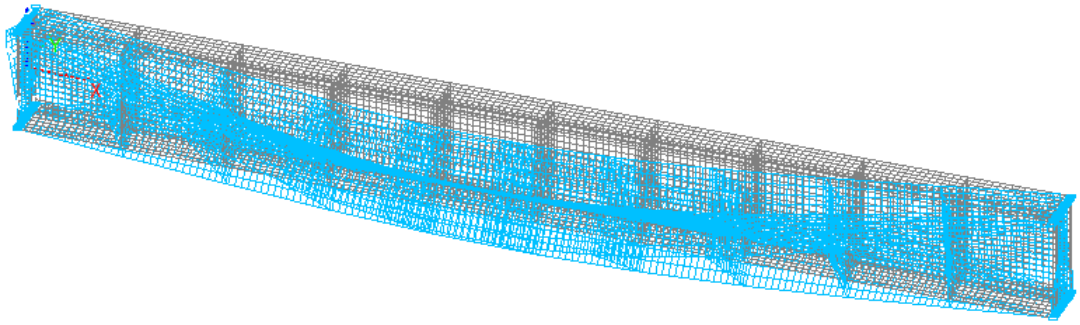
Расчетная схема. Стержневая модель



Расчетная схема. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина



1-ая Форма потери устойчивости. Стержневая модель



1-ая Форма потери устойчивости. Оболочечная модель теории Рейсснера-Миндлина

Сравнение решений:

Критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr} (кН/м), действующей по продольной оси верхней полки шарнирно опертой в плоскости из плоскости изгиба балки

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Стержневая	93	0,943201·100= 94	1,54
Оболочечная теории Рейсснера-Миндлина	93	0,949310·100= 95	1,87

Замечания: При аналитическом решении критическое значение поперечной равномерно распределенной нагрузки q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости шарнирно опертой балки определяется по следующей формуле:

$$q = \frac{28{,}32 \cdot \sqrt{E \cdot I_z \cdot G \cdot I_x}}{L^3} \cdot \chi \cdot k_h \qquad \chi = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_x}} \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$k_h = \sqrt{1 + \frac{20{,}32}{\pi^2} \cdot \frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_x \cdot L^2 + \pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}} - \frac{4{,}50}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_x \cdot L^2 + \pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}}$$

$I_z = \frac{h_w \cdot {t_w}^3}{12} + 2 \cdot \frac{{b_f}^3 \cdot t_f}{12}$ – наименьший момент инерции изгиба (из плоскости действия момента);

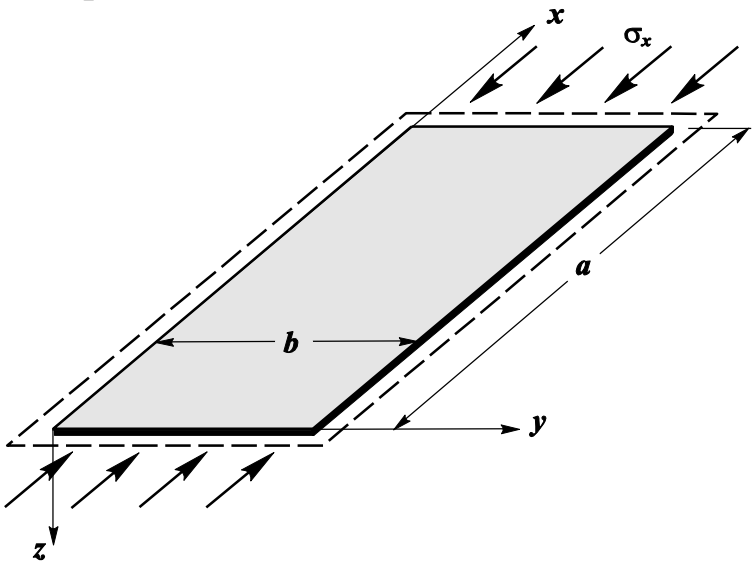
$I_\omega = \frac{{h_w}^2 \cdot {b_f}^3 \cdot t_f}{24}$ – секториальный момент инерции стесненного кручения;

$I_x = 2 \cdot k_f \cdot b_f \cdot {t_f}^3 + k_w \cdot h_w \cdot {t_w}^3$ – момент инерции свободного кручения, где:

$$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_f}{b_f} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\},$$

$$k_w = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{t_w}{h_w} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}$$

Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластинки равномерно сжатой в одном направлении



Цель: Определение критического значения сжимающих усилий, равномерно распределенных по двум противоположным сторонам прямоугольной свободно опертой пластинки, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.6_a_4_n_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 0.5 с моделью из четырехузловых элементов оболочки типа 44
6.6_a_4_n_8.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 0.5 с моделью из восьмиузловых элементов оболочки типа 50
6.6_a_8_n_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0 с моделью из четырехузловых элементов оболочки типа 44
6.6_a_8_n_8.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0 с моделью из восьмиузловых элементов оболочки типа 50
6.6_a_12_n_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.5 с моделью из четырехузловых элементов оболочки типа 44
6.6_a_12_n_8.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.5 с моделью из восьмиузловых элементов оболочки типа 50

Формулировка задачи: Прямоугольная свободно опертая пластина подвергается воздействию сжимающих усилий σ, равномерно распределенных по двум противоположным сторонам. Определить критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной пластины.

Ссылки:

С.П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — Москва. Наука. — 1971. — стр. 621.

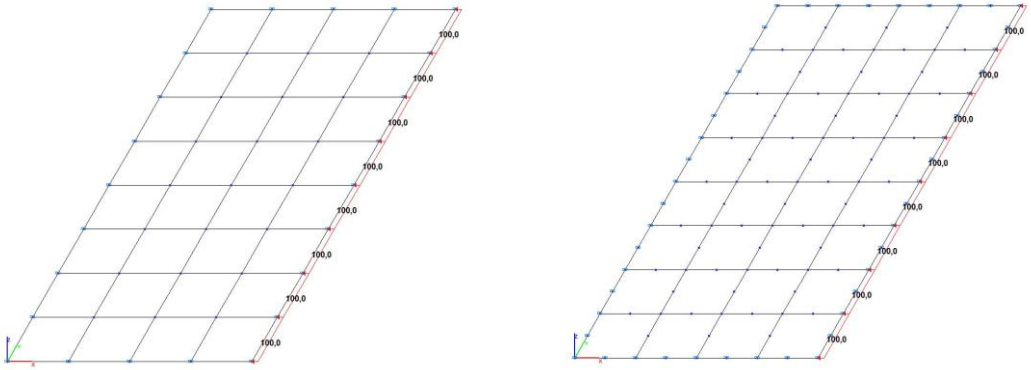
А.С. Вольмир. Устойчивость деформируемых систем. — Москва. — Наука. — 1967. — стр. 328.

Исходные данные:

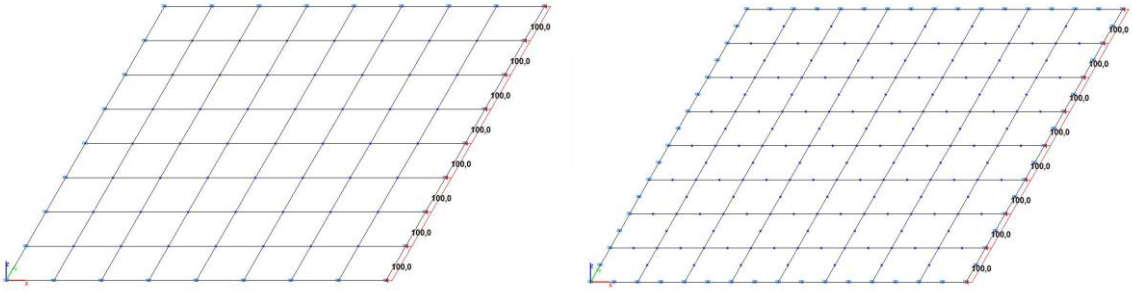
a = 4.0; 8.0; 12.0 м	- размер стороны прямоугольной пластины, свободной от воздействий (вдоль оси X общей системы координат);
b = 8.0 м	- размер стороны прямоугольной пластины, подверженной воздействию сжимающих усилий (вдоль оси Y общей системы координат);
h = 0.08 м	- толщина прямоугольной пластины;
$E = 1.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала прямоугольной пластины;
ν = 1/3	- коэффициент Пуассона;
$\sigma = 1.25 \cdot 10^3$ кН/м^2	- начальное значение сжимающих усилий.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Для трех расчетных схем с соотношениями сторон пластины a/b = 0.5; 1.0; 1.5 рассматриваются две расчетные модели с четырехузловыми элементами оболочки типа 44 и с восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 1.0 м. Количество элементов по схемам – 32; 64; 96. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлениям степени свободы Z. На одной из двух противоположных сторон пластины, подверженных воздействию сжимающих усилий, задается равномерно распределенная по линии нагрузка с начальным значением p = σ·h = 100 кН/м, а на узлы другой накладываются связи по соответствующему направлению (вдоль оси X общей системы координат). В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узлы одной из двух противоположных сторон пластины, свободных от воздействий, накладываются связи по нормальному к ней направлению (вдоль оси Y общей системы координат). В этих же целях на узел одного из углов пластины накладываются связи по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по схемам (моделям) – 45 (121); 81 (225); 117 (329).

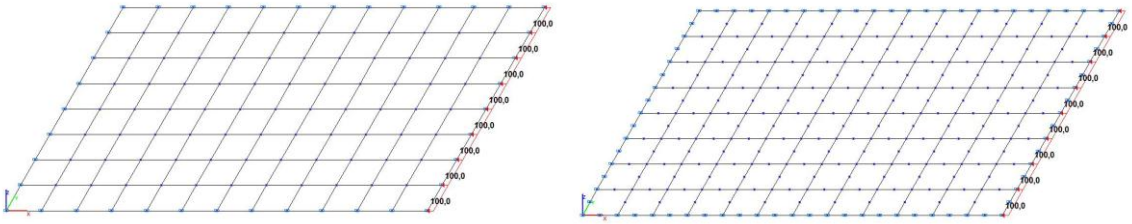
Результаты решения в SCAD



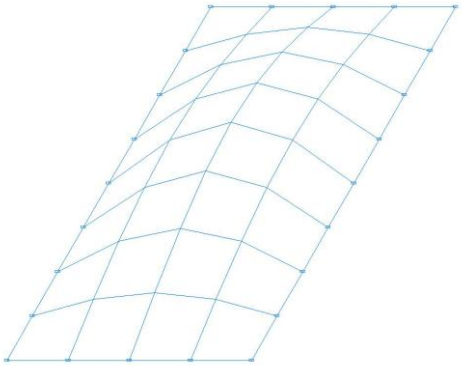
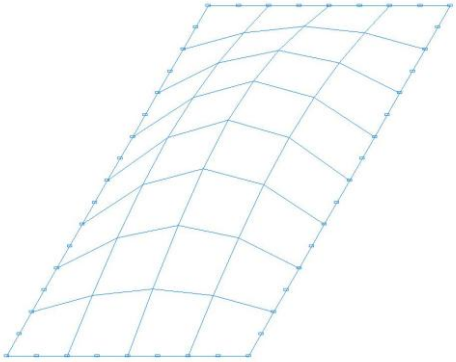
Расчетные модели для схем с соотношением сторон пластины a/b = 0.5



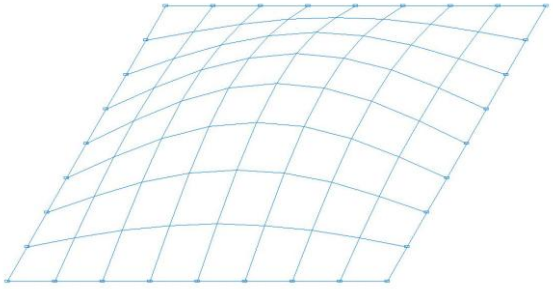
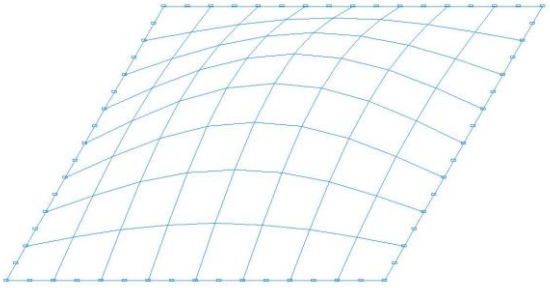
Расчетные модели для схем с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



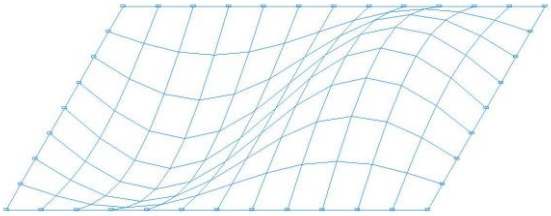
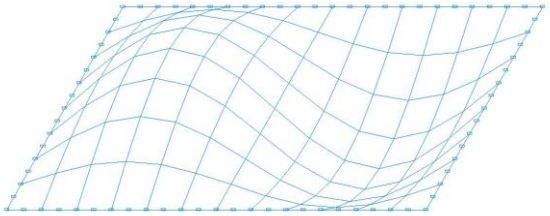
Расчетные модели для схем с соотношением сторон пластины a/b = 1.5

Формы потери устойчивости расчетных моделей для схем с соотношением сторон пластины a/b = 0.5

Формы потери устойчивости расчетных моделей для схем с соотношением сторон пластины a/b = 1.0

Формы потери устойчивости расчетных моделей для схем с соотношением сторон пластины a/b = 1.5

Сравнение решений:

Критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, кН/м^2

Расчетная схема	Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
a/b = 0.5	Тип элемента 44 n = 4 узла	5783	4.716991·100/0.08 = = 5896	1.95
	Тип элемента 50 n = 8 узлов		4.626558·100/0.08 = = 5783	0.00
a/b = 1.0	Тип элемента 44 n = 4 узла	3701	2.998497·100/0.08 = = 3748	1.27
	Тип элемента 50 n = 8 узлов		2.960899·100/0.08 = = 3701	0.00
a/b = 1.5	Тип элемента 44 n = 4 узла	4016	3.264680·100/0.08 = = 4081	1.62
	Тип элемента 50 n = 8 узлов		3.212803·100/0.08 = = 4016	0.00

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной пластины определяется по следующей формуле:

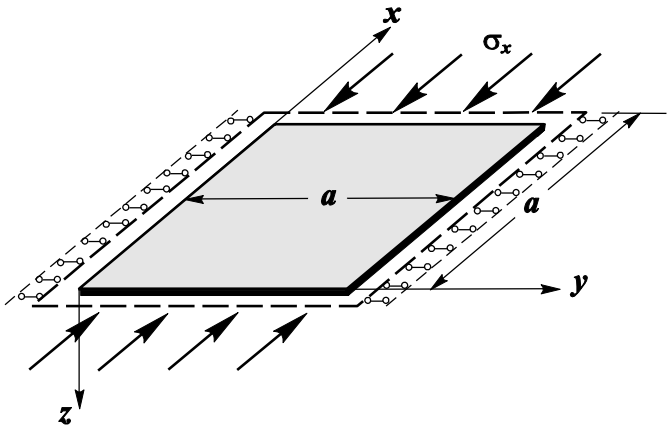
$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot h},$$ где:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}, \qquad k = \left(\frac{m \cdot b}{a} + \frac{a}{m \cdot b} \right)^2,$$

m = 1, 2, 3 … – число полуволн формы потери устойчивости в направлении сжатия пластины, минимальное значение которого определяется из выражения:

$$\frac{a}{b} \le \sqrt{m \cdot (m+1)}.$$

Устойчивость квадратной шарнирно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении



Цель: Определение критического значения сжимающих усилий, равномерно распределенных по двум противоположным сторонам квадратной шарнирно опертой пластины, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.7_n_4.SPR	Расчетная модель с четырехузловыми элементами оболочки типа 44
6.7_n_8.SPR	Расчетная модель с восьмиузловыми элементами оболочки типа 50

Формулировка задачи: Квадратная пластина подвергается воздействию сжимающих усилий σ, равномерно распределенных по двум противоположным сторонам, имеющим шарнирно-подвижное (свободное) опирание. Две другие противоположные стороны пластины, свободные от воздействий, имеют шарнирно-неподвижное опирание. Определить критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости квадратной пластины.

Ссылки:

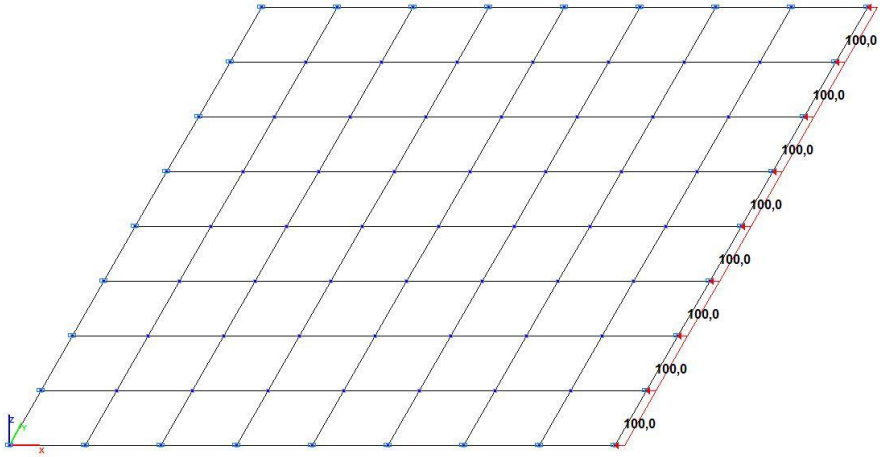
J.H. Argyris, P.C. Dunne, G.A. Malejannakis, E. Schelkle. A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems. Computer methods in applied mechanics and engineering, 11. — 1977.— p. 97-131.
S.P. Timoshenko, J.M. Gere. Theory of elastic stability. McGraw-Hill. — New York. — 1963. — p. 356.

Исходные данные:

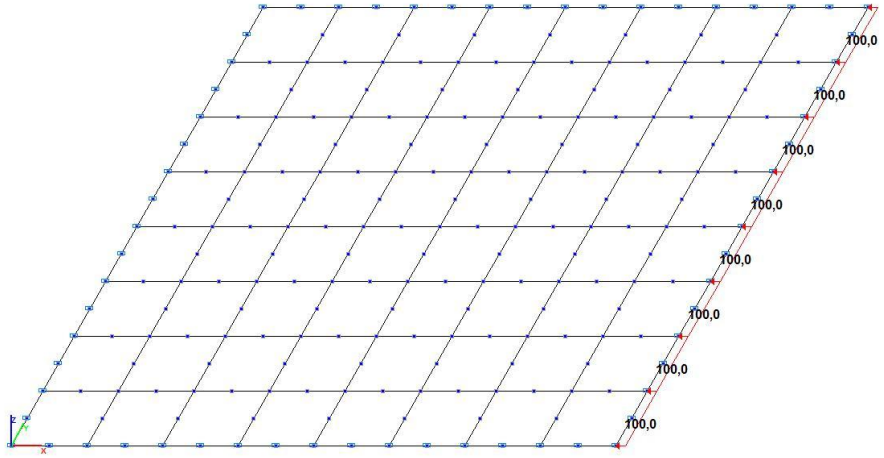
a = 8.0 м	- размер стороны квадратной пластины;
h = 0.08 м	- толщина квадратной пластины;
$E = 1.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала квадратной пластины;
ν = 1/3	- коэффициент Пуассона;
$\sigma = 1.25 \cdot 10^3$ кН/м^2	- начальное значение сжимающих усилий.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели с четырехузловыми элементами оболочки типа 44 и с восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 1.0 м. Количество элементов в схеме – 64. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z, а также за счет наложения связей на узлы двух противоположных сторон пластины, свободных от воздействий по нормальному к ним направлению вдоль оси Y общей системы координат. На одной из двух противоположных сторон пластины, подверженных воздействию сжимающих усилий, задается равномерно распределенная по линии нагрузка с начальным значением p = σ·h = 100 кН/м, а на узлы другой накладываются связи по соответствующему направлению (вдоль оси X общей системы координат). В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на один узел контура опирания пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по моделям – 81; 225.

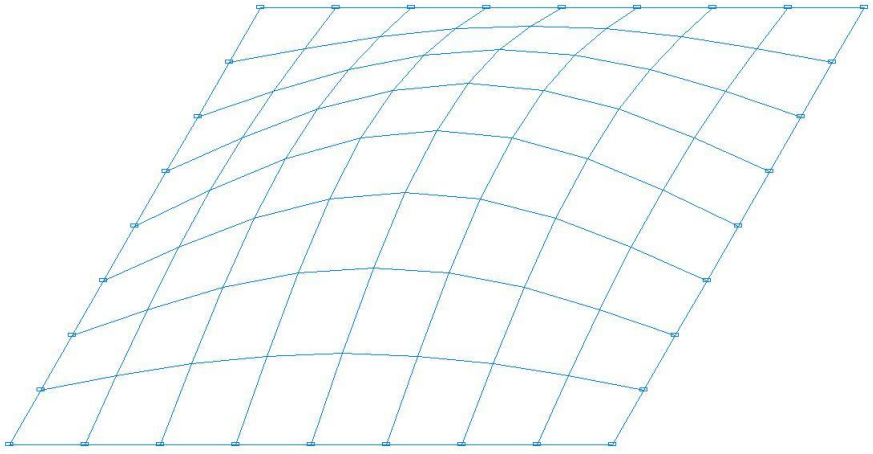
Результаты решения в SCAD



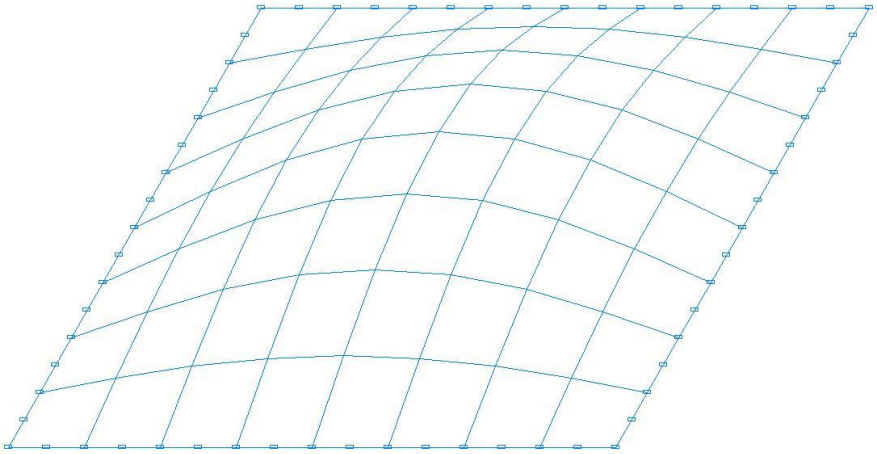
Расчетная схема. Модель с четырехузловыми элементами оболочки



Расчетная схема. Модель с восьмиузловыми элементами оболочки



Форма потери устойчивости. Модель с четырехузловыми элементами оболочки



Форма потери устойчивости. Модель с восьмиузловыми элементами оболочки

Сравнение решений:

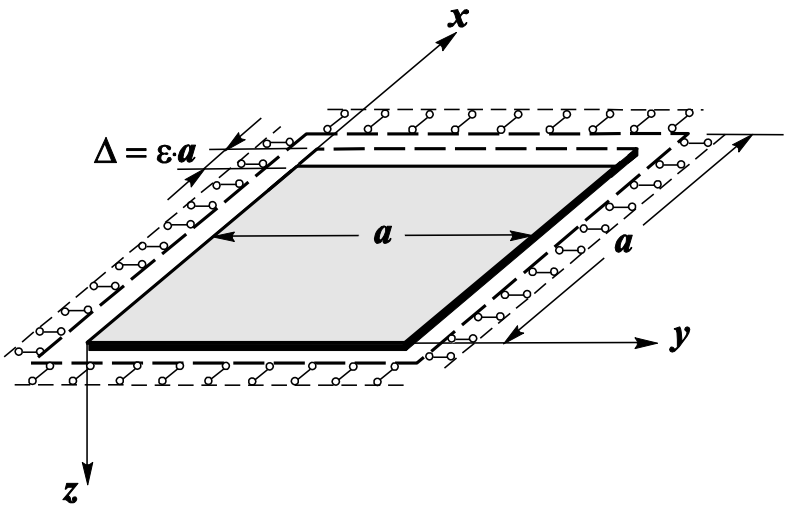
Критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, кН/м^2

Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
Тип элемента 44 n = 4 узла	2776	2.248923·100/0.08 = = 2811	1.26
Тип элемента 50 n = 8 узлов		2.220676·100/0.08 = = 2776	0.00

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости квадратной пластины определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{cr} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot D}{(1+\nu) \cdot a^2 \cdot h}, \text{ где:} \qquad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}.$$

Устойчивость квадратной шарнирно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении при кинематическом воздействии



Цель: Определение критического значения сближения двух противоположных сторон квадратной шарнирно опертой пластины, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.8_n_4.SPR	Расчетная модель с четырехузловыми элементами оболочки типа 44
6.8_n_8.SPR	Расчетная модель с восьмиузловыми элементами оболочки типа 50

Формулировка задачи: Квадратная пластина подвергается воздействию сближения Δ двух противоположных сторон, имеющих шарнирно-подвижное (свободное) опирание. Две другие противоположные стороны пластины, свободные от воздействий, имеют шарнирно-неподвижное опирание. Определить критическое значение сближения Δ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости квадратной пластины.

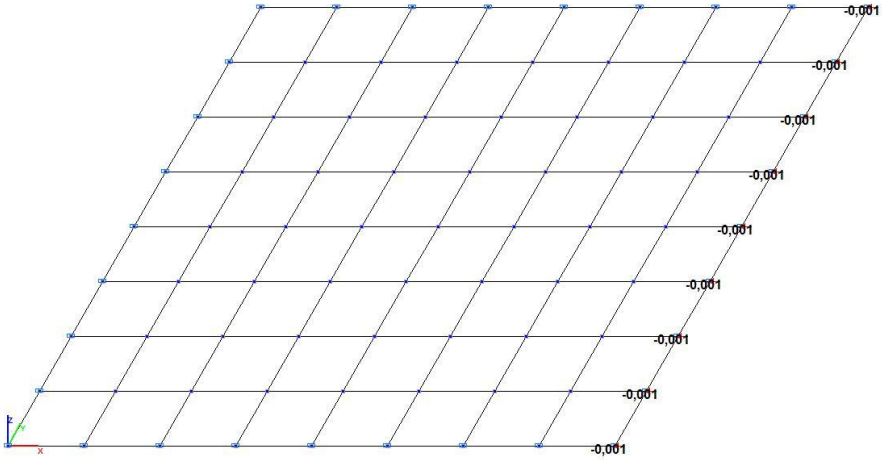
Ссылки: J.H. Argyris, P.C. Dunne, G.A. Malejannakis, E. Schelkle, A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems, Computer methods in applied mechanics and engineering, 11 (1977), p. 97-131.
S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, 1963, p. 356.

Исходные данные:

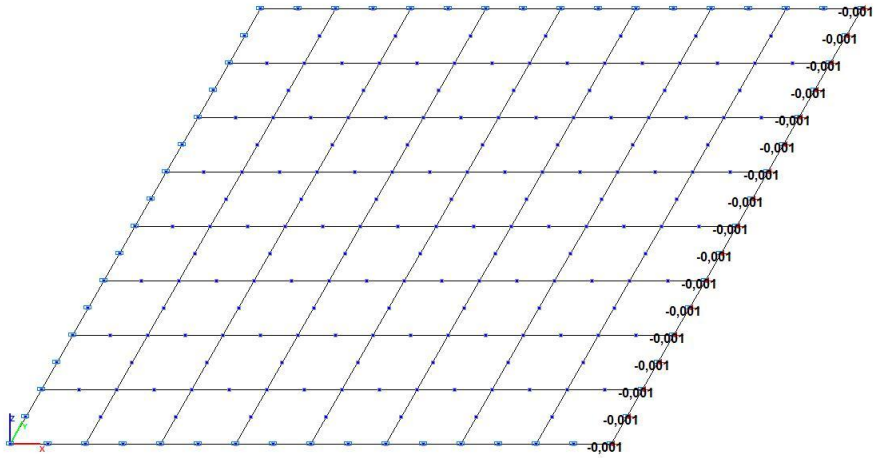
$a = 8.0$ м	- размер стороны квадратной пластины;
$h = 0.08$ м	- толщина квадратной пластины;
$E = 1.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала квадратной пластины;
$\nu = 1/3$	- коэффициент Пуассона;
$\Delta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ м	- начальное значение сближения.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные модели с четырехузловыми элементами оболочки типа 44 и с восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 1.0 м. Количество элементов в схеме – 64. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z, а также за счет наложения связей на узлы двух противоположных сторон пластины, свободных от воздействий по нормальному к ним направлению вдоль оси Y общей системы координат. На узлы двух противоположных сторон пластины, подверженных кинематическому воздействию, накладываются связи по соответствующему направлению (вдоль оси X общей системы координат). Воздействие задается смещением связей одной из этих сторон с начальным значением $\Delta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ м. В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на один узел контура опирания пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по моделям – 81; 225.

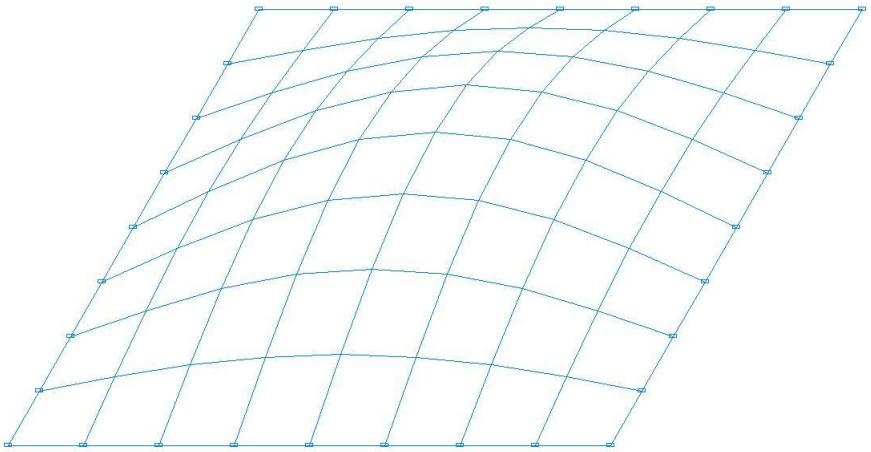
Результаты решения в SCAD



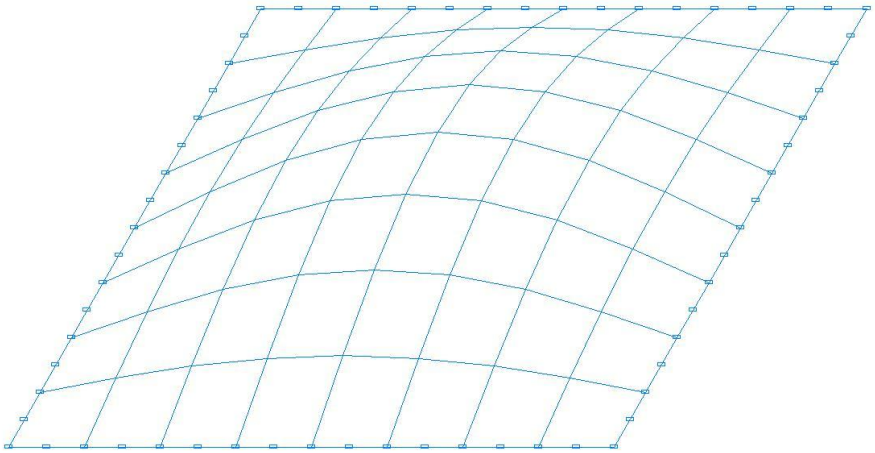
Расчетная схема. Модель с четырехузловыми элементами оболочки



Расчетная схема. Модель с восьмиузловыми элементами оболочки



Форма потери устойчивости. Модель с четырехузловыми элементами оболочки



Форма потери устойчивости. Модель с восьмиузловыми элементами оболочки

Сравнение решений:

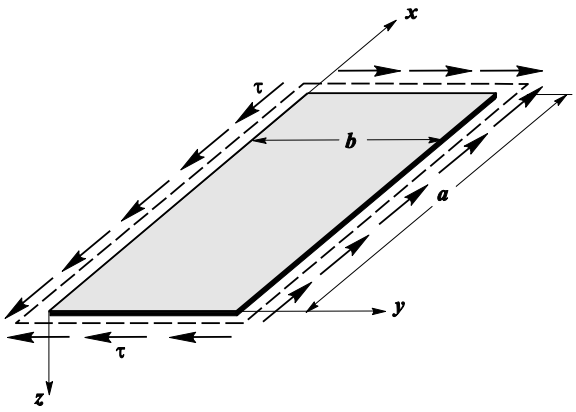
Критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, кН/м^2

Расчетная модель	**Теория**	**SCAD**	**Отклонение, %**
Тип элемента 44 n = 4 узла	$1.974 \cdot 10^{-3}$	$1.999043 \cdot 1.0 \cdot 10^{-3} = 1.999 \cdot 10^{-3}$	1.27
Тип элемента 50 n = 8 узлов		$1.973935 \cdot 1.0 \cdot 10^{-3} = 1.974 \cdot 10^{-3}$	0.00

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сближения Δ_{cr} двух противоположных сторон квадратной шарнирно опертой пластины, соответствующее моменту потери устойчивости квадратной пластины определяется по следующей формуле:

$$\Delta_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot h^2}{3 \cdot (1+\nu) \cdot a}.$$

Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины при чистом сдвиге



Цель: Определение критического значения сдвигающих усилий, равномерно распределенных по противоположным сторонам прямоугольной свободно опертой пластины, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.9_a_8_n_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0 с моделью из четырехузловых элементов оболочки типа 44
6.9_a_8_n_8.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0 с моделью из восьмиузловых элементов оболочки типа 50
6.9_a_16_n_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 2.0 с моделью из четырехузловых элементов оболочки типа 44
6.9_a_16_n_8.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 2.0 с моделью из восьмиузловых элементов оболочки типа 50

Формулировка задачи: Прямоугольная свободно опертая пластина подвергается воздействию сдвигающих усилий τ, равномерно распределенных по противоположным сторонам. Определить критическое значение сжимающих усилий τ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной пластины.

Ссылки: С.П. Тимошенко, Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр. 626.
А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр. 344.

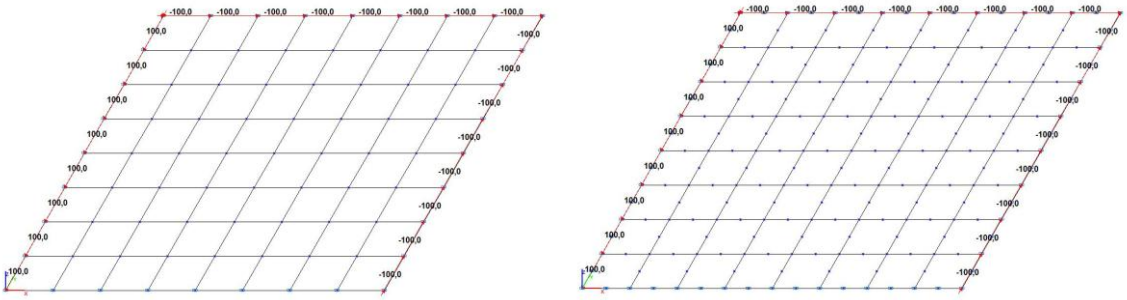
Исходные данные:

a = 8.0; 16.0 м	- размер стороны прямоугольной пластины вдоль оси X общей системы координат;
b = 8.0 м	- размер стороны прямоугольной пластины вдоль оси Y общей системы координат;
h = 0.08 м	- толщина прямоугольной пластины;
$E = 1.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала прямоугольной пластины;
ν = 1/3	- коэффициент Пуассона;
$\sigma = 1.25 \cdot 10^3$ кН/м^2	- начальное значение сдвигающих усилий.

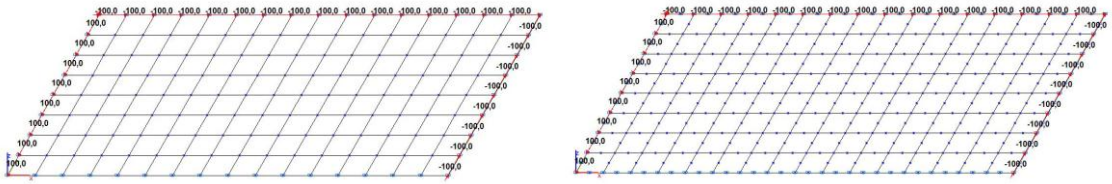
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Для двух расчетных схем с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0; 2.0 рассматриваются две расчетные модели с четырехузловыми элементами оболочки типа 44 и с восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 1.0 м. Количество элементов по схемам – 64; 128. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z. На одной из двух противоположных сторон пластины, расположенных вдоль оси X общей системы координат, задается равномерно распределенная по линии нагрузка с

начальным значением p = -τ·h = -100 кН/м, а на узлы другой (расположенной на оси X) накладываются связи по направлениям степеней свободы X и Y. На одной из двух противоположных сторон пластины, расположенных вдоль оси Y общей системы координат, задается равномерно распределенная по линии нагрузка с начальным значением p = -τ·h = -100 кН/м, а на другой (расположенной на оси Y) задается равномерно распределенная по линии нагрузка с начальным значением p = τ·h = 100 кН/м. В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узел одного из углов пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по схемам (моделям) – 81 (225); 153 (433).

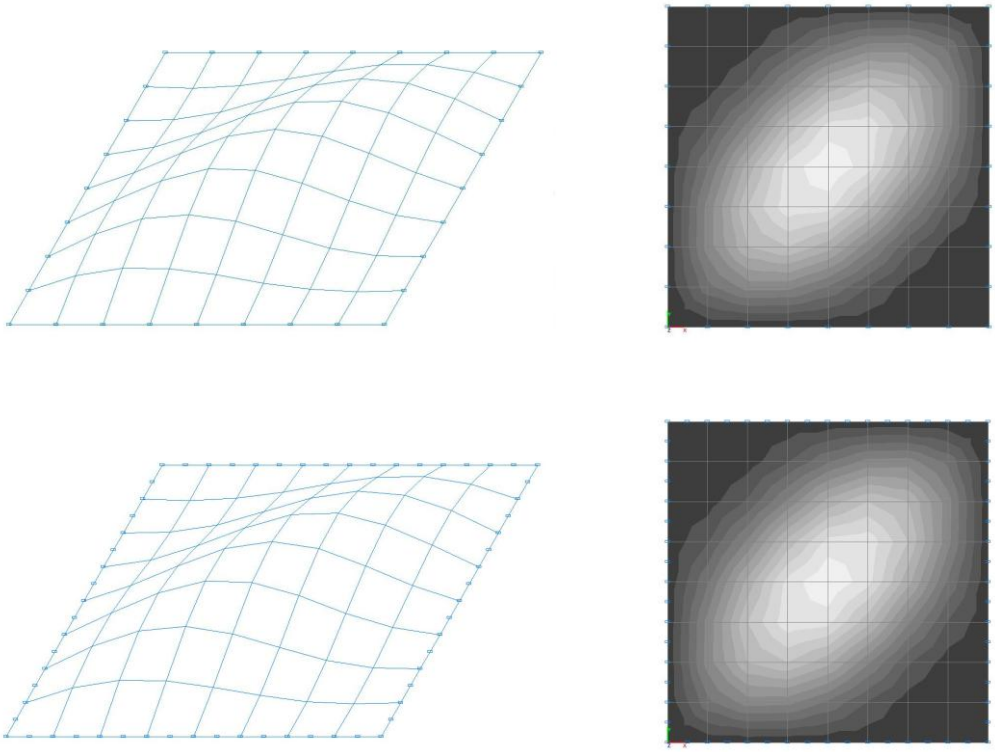
Результаты решения в SCAD



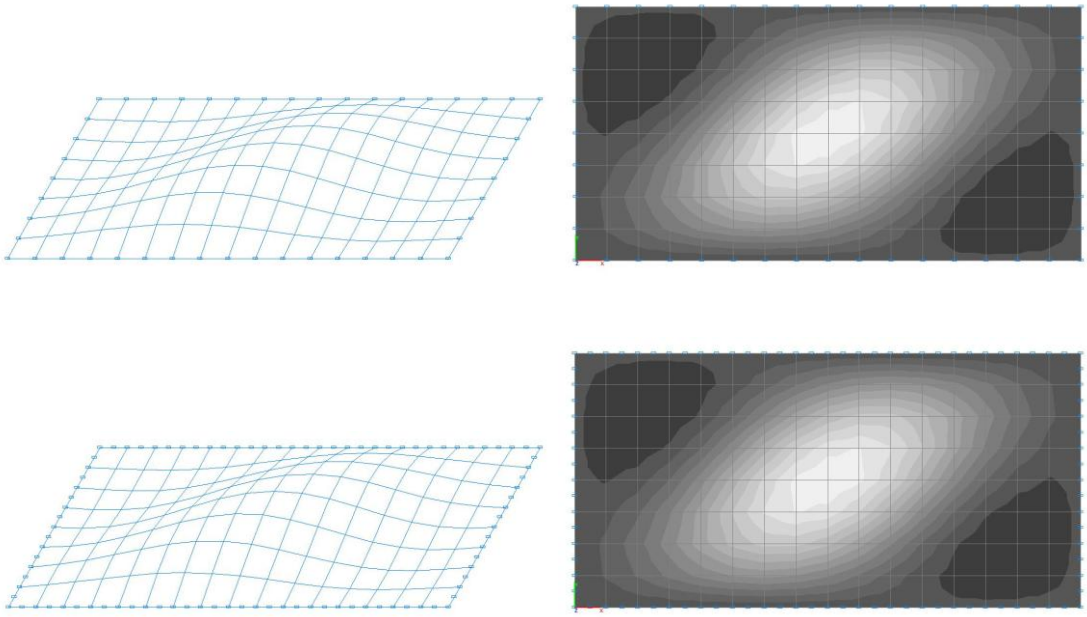
Расчетные модели для схем с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



Расчетные модели для схем с соотношением сторон пластины a/b = 2.0



Формы потери устойчивости расчетных моделей для схем с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



Формы потери устойчивости расчетных моделей для схем с соотношением сторон пластины a/b = 2.0

Сравнение решений:

Критическое значение сдвигающих усилий τ_{cr}, кН/м^2

Расчетная схема	Расчетная модель	Теория	SCAD	Отклонение, %
a/b = 1.0	Тип элемента 44 n = 4 узла	8631	7.129409·100/0.08 = = 8912	3.26
	Тип элемента 50 n = 8 узлов		6.903095·100/0.08 = = 8629	0.02
a/b = 2.0	Тип элемента 44 n = 4 узла	6060	4.930113·100/0.08 = = 6163	1.70
	Тип элемента 50 n = 8 узлов		4.845765·100/0.08 = = 6057	0.05

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сдвигающих усилий τ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной пластины определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot h}, \text{ где:}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}, \qquad k = \frac{\pi^2}{32 \cdot \alpha^3 \cdot \lambda}, \qquad \alpha = \frac{a}{b}.$$

Параметр λ вычисляется из условия равенства нулю определителя системы уравнений:

$$\lambda \cdot \left(m^2 + \alpha^2 \cdot n^2\right) \cdot A_{mn} - \sum_i \sum_j \frac{m \cdot n \cdot i \cdot j}{\left(m^2 - i^2\right) \cdot \left(n^2 - j^2\right)} \cdot A_{ij} = 0,$$

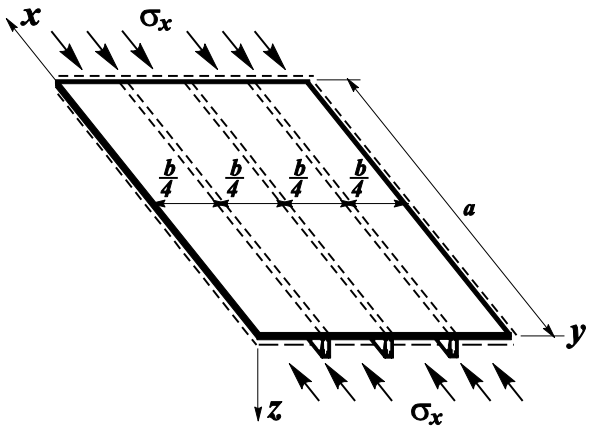
в которых принимаются следующие сочетания индексов:

$$m+i \quad \textit{нечетные}$$
$$n+j \quad \textit{нечетные}$$
$$m+n \quad \textit{четные}.$$

При m, n, i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (определитель имеет размерность 32·32) имеем:

$$\frac{a}{b}=1.0 \quad k=9.328$$
$$\frac{a}{b}=2.0 \quad k=6.549.$$

Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, равномерно сжатой в продольном направлении (модель 1)



Цель: Определение критического значения сжимающих усилий, равномерно распределенных по двум противоположным поперечным торцам прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.10_shell_beam_lambda_1.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0
6.10_shell_beam_lambda_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 4.0

Формулировка задачи: Прямоугольная свободно опертая пластина, подкрепленная продольными ребрами, подвергается воздействию сжимающих усилий σ, равномерно распределенных по двум противоположным поперечным торцам. Определить критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной подкрепленной пластины при учете следующих допущений, принятых при выводе аналитического решения:

- Ребра стоят симметрично относительно срединной плоскости усиливаемой пластины;
- Не учитывается жесткость ребер на кручение;
- Ребра и пластина испытывают равномерное сжатие.

Ссылки: С.П. Тимошенко, Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр. 507.
А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр. 377.

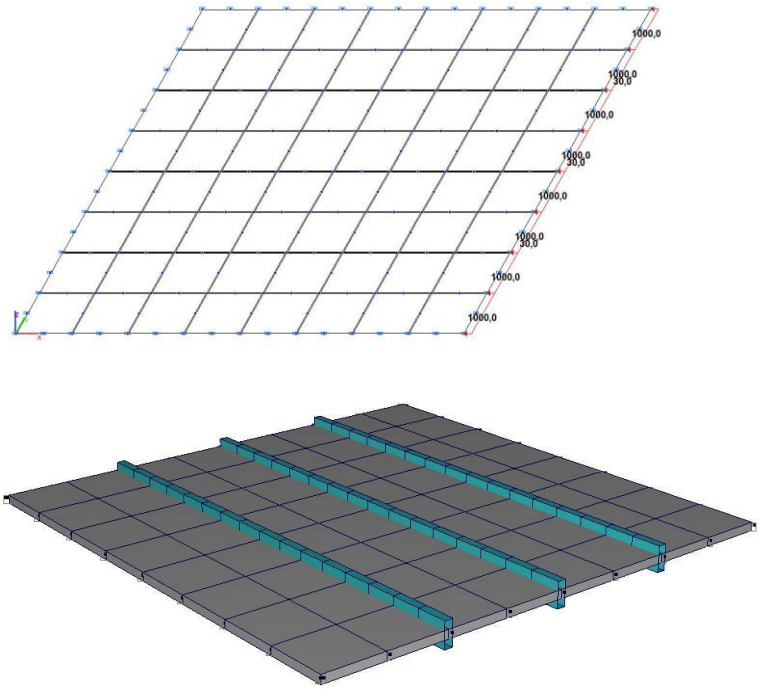
Исходные данные:

a = 0.6; 2.4 м	- размер стороны прямоугольной пластины, свободной от воздействий (вдоль оси X общей системы координат);
b = 0.6 м	- размер стороны прямоугольной пластины, подверженной воздействию сжимающих усилий (вдоль оси Y общей системы координат);
h = 0.01 м	- толщина прямоугольной пластины;
$F = 0.01 \cdot 0.03 = 3 \cdot 10^{-4}$ м^2	- площадь поперечного сечения ребер;
$I = 0.01 \cdot 0.03^3/12 = 2.25 \cdot 10^{-8}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения ребер;
s = 3	- количество ребер, равномерно расставленных по ширине пластины;
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кН/м^2	- модуль упругости материала пластины и ребер;
ν = 0.3	- коэффициент Пуассона;
$\sigma = 1.0 \cdot 10^5$ кН/м^2	- начальное значение сжимающих усилий.

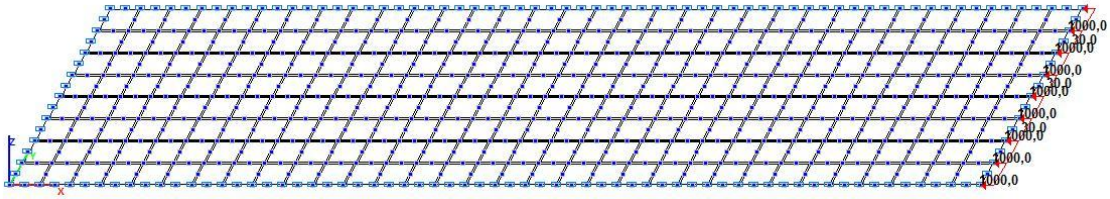
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные схемы с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0; 4.0. Пластина моделируется восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам

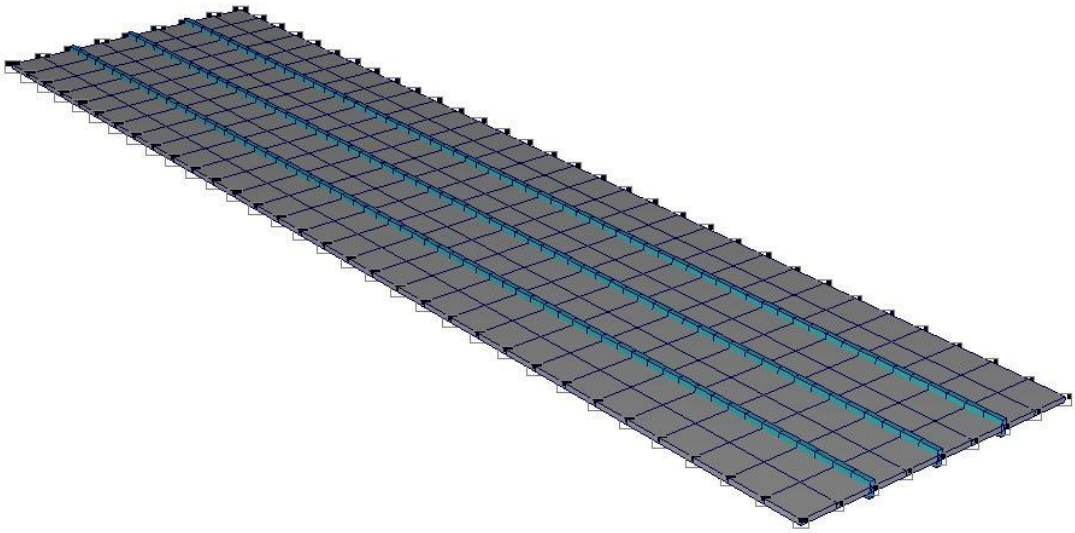
пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 0.075 м. Количество элементов пластины по схемам – 64; 256. Ребра моделируются пространственными стержневыми элементами типа 5. Сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей ребер (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 0.0375 м. Количество элементов ребер по схемам – 48; 192. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z. На одном из двух противоположных поперечных торцов пластины, подверженных воздействию сжимающих усилий, задаются равномерно распределенная по линии нагрузка на собственно пластину с начальным значением p = σ·h = 1000 кН/м и узловые нагрузки на ребра с начальным значением P = σ·F = 30 кН, а на узлы другого накладываются связи по соответствующему направлению (вдоль оси X общей системы координат). В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узлы одного из двух противоположных продольных торцов пластины, свободных от воздействий, накладываются связи по нормальному к нему направлению (вдоль оси Y общей системы координат). В этих же целях на узел одного из углов пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по схемам – 225; 849.

Результаты решения в SCAD

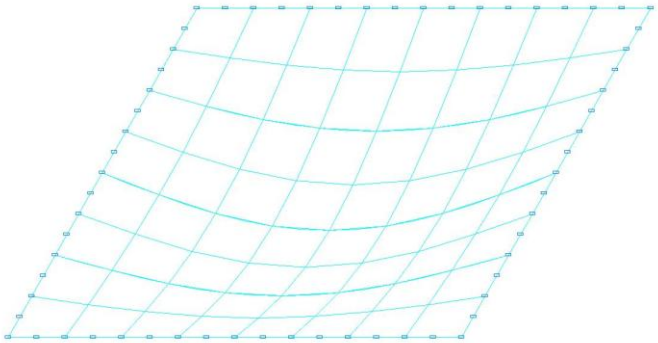


Расчетная схема с соотношением сторон пластины a/b = 1.0

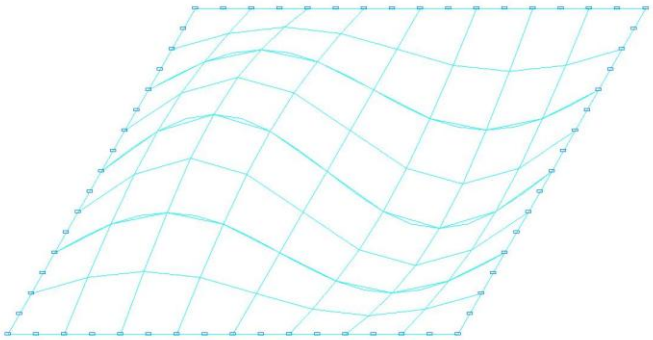




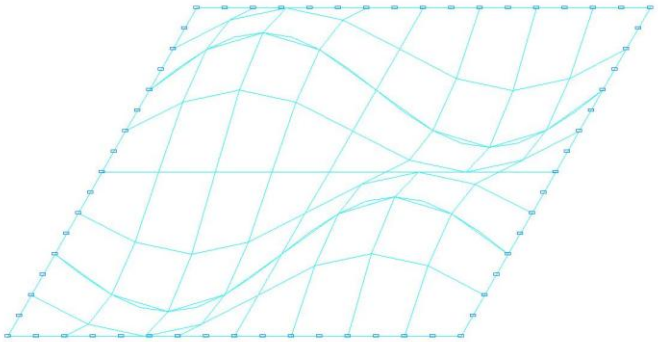
Расчетная схема с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



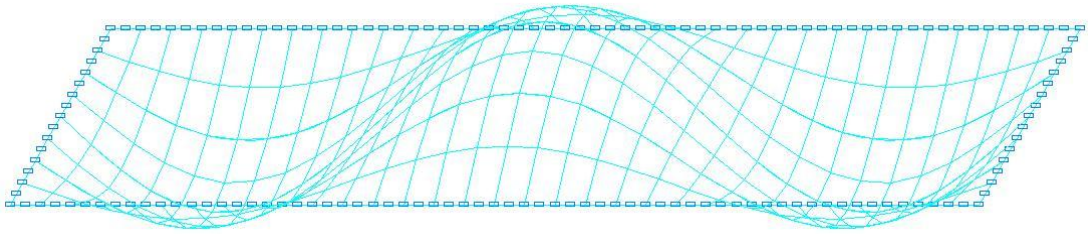
1-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



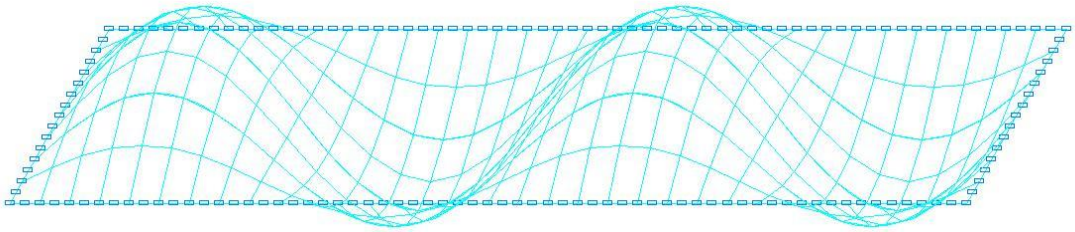
2-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



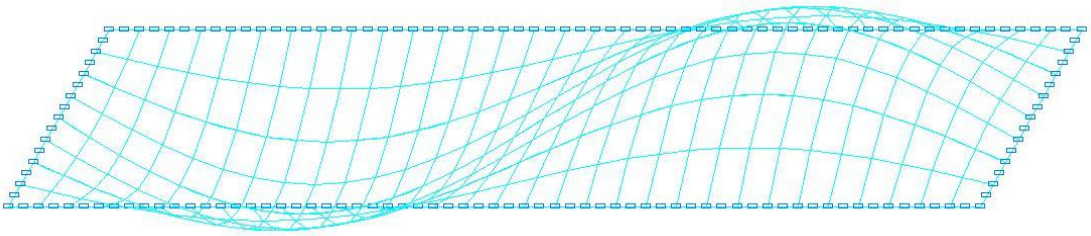
3-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



1-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



2-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



3-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0

Сравнение решений:

Критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, кН/м^2

Расчетная схема	**Форма потери устойчивости**	**Количество полуволн в поперечном n и продольном m направлениях**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонение, %**
a/b = 1.0	1	1; 1	235900 (235911)	2.359001·1000/0.01 = = 235900	0.00
	2	1; 2	533934 (535675)	5.339341·1000/0.01 = = 533934	0.01
	3	2; 2	942681 (943645)	9.426809·1000/0.01 = = 942681	0.10
a/b = 4.0	1	1; 3	220165 (220164)	2.201645·1000/0.01 = = 220165	0.00

Расчетная схема	Форма потери устойчивости	Количество полуволн в поперечном n и продольном m направлениях	Теория	SCAD	Отклонение, %
	2	1; 4	235900 (235911)	2.359002·1000/0.01 = = 235900	0.00
	3	1; 2	278652 (278654)	2.786517·1000/0.01 = = 278652	0.00

Без скобок указаны теоретические значения, посчитанные в четвертом приближении;
В скобках указаны теоретические значения, посчитанные в первом приближении

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr1} в первом приближении, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной подкрепленной пластины, определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{cr1}=\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\frac{\left[1+\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+2\cdot\gamma\cdot\sum_{i=1}^{s}sin^2\left(\frac{\pi\cdot i}{s+1}\right)}{1+2\cdot\delta\cdot\sum_{i=1}^{s}sin^2\left(\frac{\pi\cdot i}{s+1}\right)},$$

при s =3 $$\sigma_{cr1}=\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\frac{\left[1+\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma}{1+4\cdot\delta},$$ где:

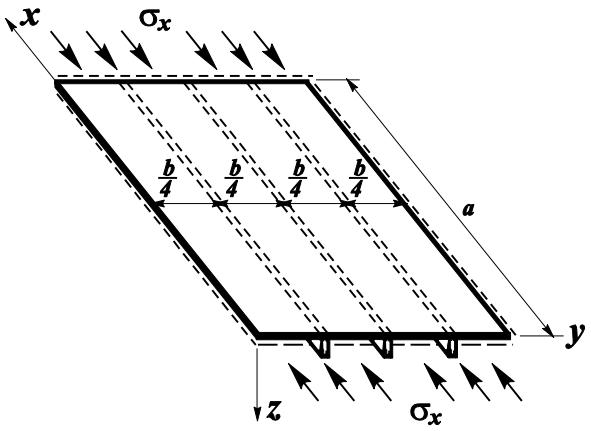
$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)},\quad \lambda=\frac{a}{b},\qquad \gamma=\frac{E\cdot I}{b\cdot D},\qquad \delta=\frac{F}{b\cdot h},$$

n, m = 1, 2, 3 … – число полуволн формы потери устойчивости в направлениях поперечном и продольном относительно сжатия пластины.

При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr1} в четвертом приближении, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной подкрепленной пластины, определяется из условия равенства нулю определителя системы разрешающих уравнений:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right]-\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta) & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta \\
-\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+49\cdot\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right]-\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta) & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta \\
\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+81\cdot\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right]-\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta) & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta \\
-\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+225\cdot\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right]-\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta)
\end{vmatrix}=0$$

Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, равномерно сжатой в продольном направлении (модель 2)



Цель: Определение критического значения сжимающих усилий, равномерно распределенных по двум противоположным поперечным торцам прямоугольной свободно опертой пластины, подкрепленной продольными ребрами, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.10_shell_shell_lambda_1.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0
6.10_shell_shell_lambda_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 4.0

Формулировка задачи: Прямоугольная свободно опертая пластина, подкрепленная продольными ребрами, подвергается воздействию сжимающих усилий σ, равномерно распределенных по двум противоположным поперечным торцам. Определить критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной подкрепленной пластины при учете следующих допущений, принятых при выводе аналитического решения:

- Ребра стоят симметрично относительно срединной плоскости усиливаемой пластины;
- Не учитывается жесткость ребер на кручение;
- Ребра и пластина испытывают равномерное сжатие.

Ссылки: С.П. Тимошенко, Устойчивость стержней, пластин и оболочек, Москва, Наука, 1971, стр. 507.
А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр. 377.

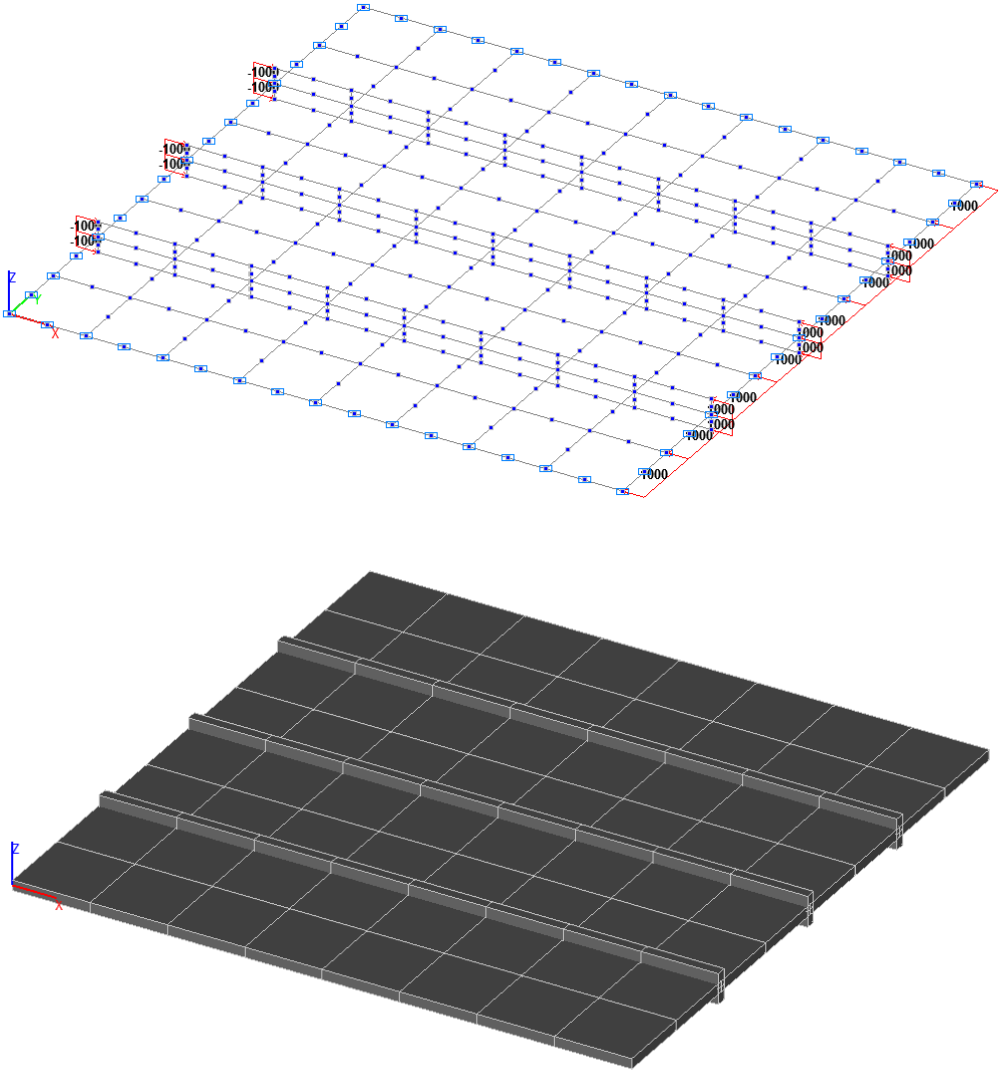
Исходные данные:

a = 0.6; 2.4 м	- размер стороны прямоугольной пластины, свободной от воздействий (вдоль оси X общей системы координат);
b = 0.6 м	- размер стороны прямоугольной пластины, подверженной воздействию сжимающих усилий (вдоль оси Y общей системы координат);
h = 0.01 м	- толщина прямоугольной пластины;
$F = 0.01 \cdot 0.03 = 3 \cdot 10^{-4}$ м^2	- площадь поперечного сечения ребер;
$I = 0.01 \cdot 0.03^3/12 = 2.25 \cdot 10^{-8}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения ребер;
s = 3	- количество ребер, равномерно расставленных по ширине пластины;
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кН/м^2	- модуль упругости материала пластины и ребер;
ν = 0.3	- коэффициент Пуассона;
$\sigma = 1.0 \cdot 10^5$ кН/м^2	- начальное значение сжимающих усилий.

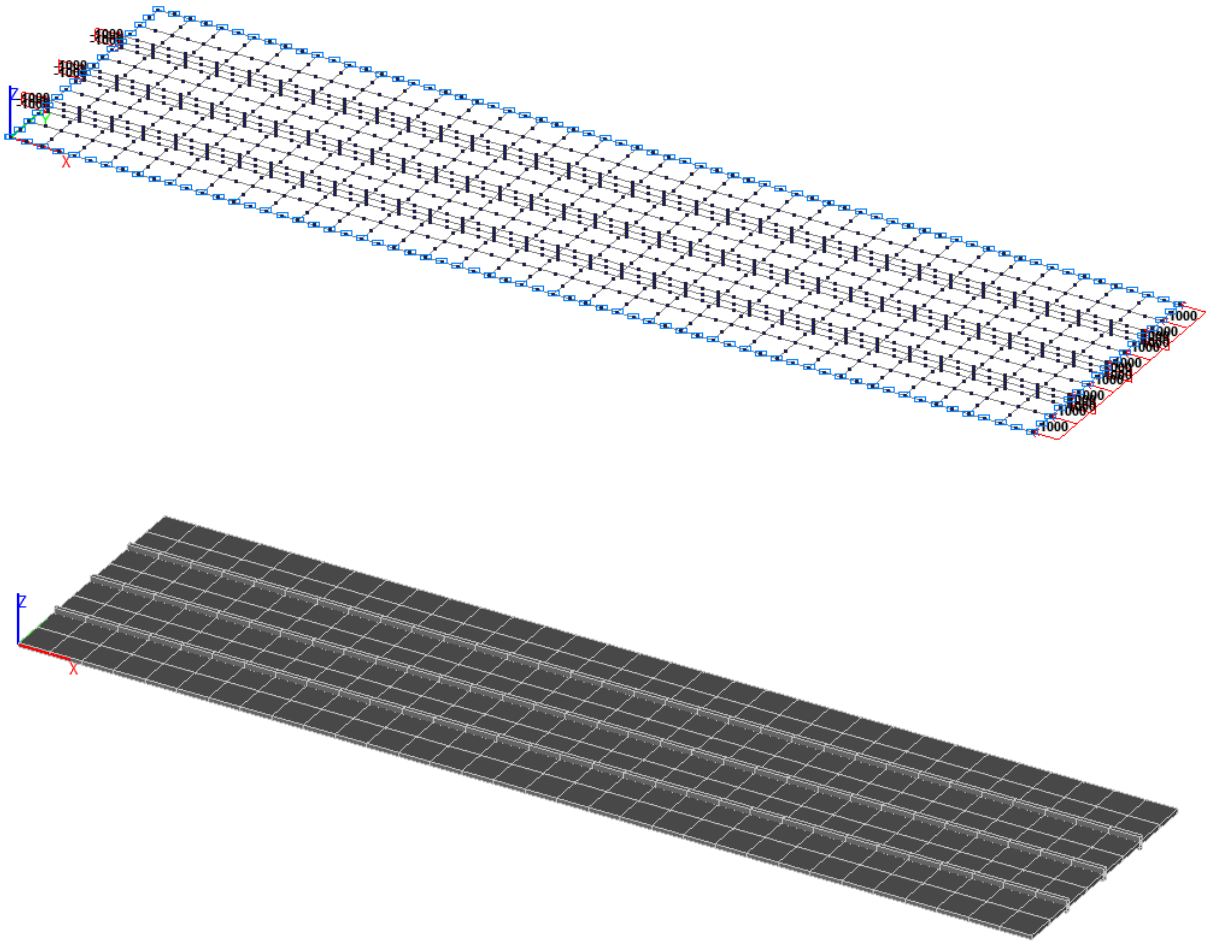
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные схемы с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0; 4.0. Пластина моделируется восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам

пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 0.075 м. Количество элементов пластины по схемам – 64; 256. Ребра моделируются восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по длинам продольных осей ребер (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 0.075 м, по высоте ребер (вдоль осей Y1 местных систем координат) с шагом 0.015 м. Количество элементов ребер по схемам – 48; 192. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z. На одном из двух противоположных поперечных торцов пластины, подверженных воздействию сжимающих усилий, задается равномерно распределенная по линии нагрузка на собственно пластину и на ребра с начальным значением p = σ·h = 1000 кН/м, а на узлы другого накладываются связи по соответствующему направлению на собственно пластину (вдоль оси X общей системы координат) и задается равномерно распределенная по линии нагрузка на ребра с начальным значением p = σ·h = 1000 кН/м. В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узлы одного из двух противоположных продольных торцов пластины, свободных от воздействий, накладываются связи по нормальному к нему направлению (вдоль оси Y общей системы координат). В этих же целях на узел одного из углов пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по схемам – 381; 1437.

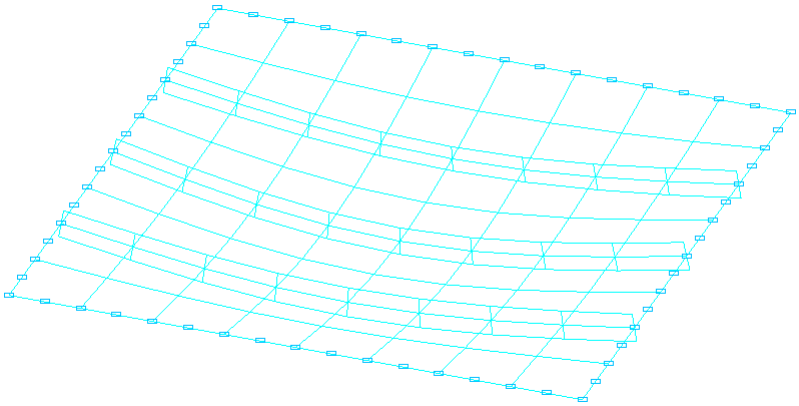
Результаты решения в SCAD



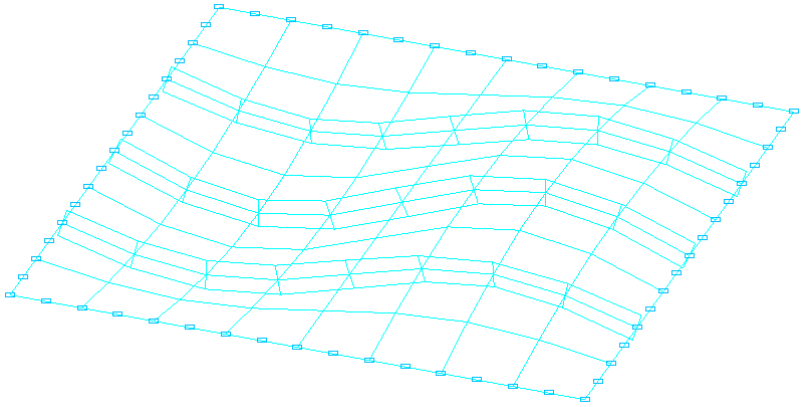
Расчетная схема с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



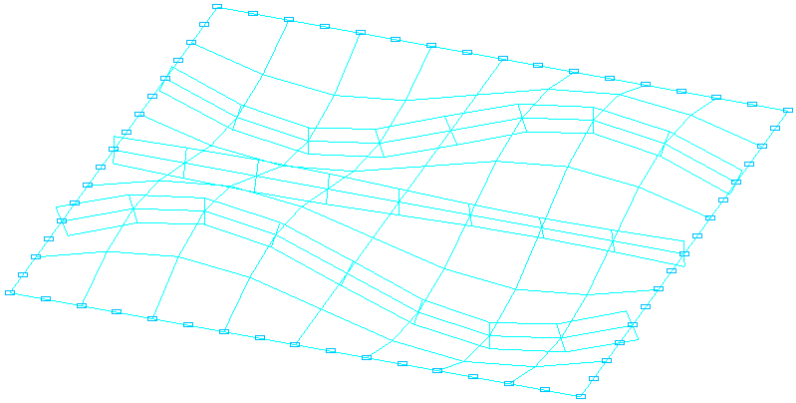
Расчетная схема с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



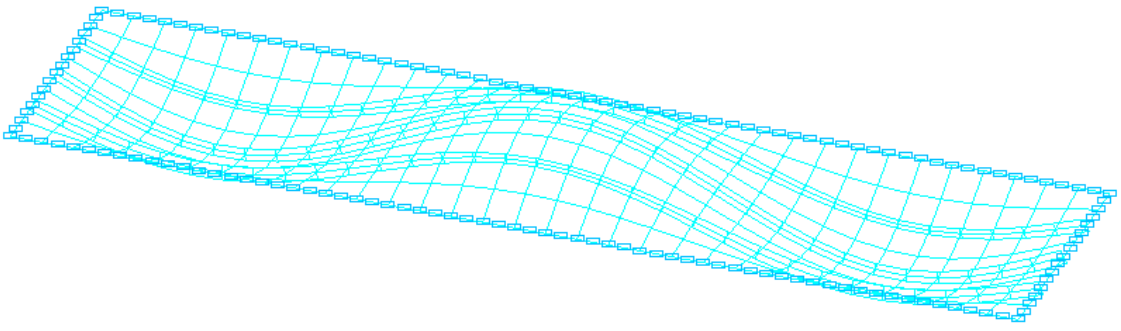
1-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



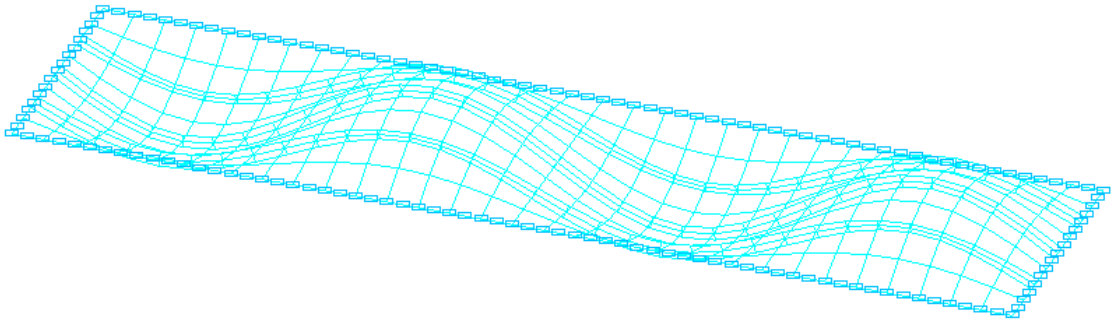
2-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



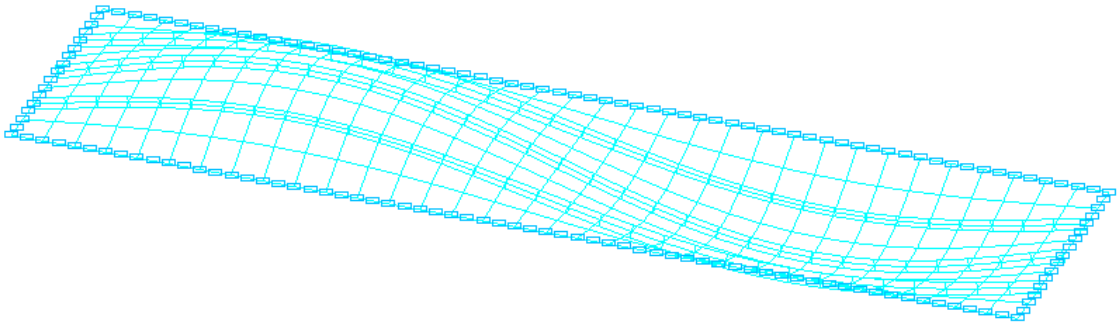
3-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



1-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



2-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



3-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0

Сравнение решений:

Критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, кН/м^2

Расчетная схема	Форма потери устойчивости	Количество полуволн в поперечном n и продольном m направлениях	Теория	SCAD	Отклонение, %
a/b = 1.0	1	1; 1	235900 (235911)	2.410318·1000/0.01 = = 241032	2.18
	2	1; 2	533934 (535675)	5.369516·1000/0.01 = = 536952	0.57
	3	2; 2	942681 (943645)	9.604025·1000/0.01 = = 960403	1.88
a/b = 4.0	1	1; 3	220165 (220164)	2.257856·1000/0.01 = = 225786	2.55
	2	1; 4	235900 (235911)	2.414278·1000/0.01 = = 241428	2.34
	3	1; 2	278652 (278654)	2.842984·1000/0.01 = = 284298	2.03

Без скобок указаны теоретические значения, посчитанные в четвертом приближении;
В скобках указаны теоретические значения, посчитанные в первом приближении

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr1} в первом приближении, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной подкрепленной пластины, определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{cr1}=\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\frac{\left[1+\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+2\cdot\gamma\cdot\sum_{i=1}^{s}sin^2\left(\frac{\pi\cdot i}{s+1}\right)}{1+2\cdot\delta\cdot\sum_{i=1}^{s}sin^2\left(\frac{\pi\cdot i}{s+1}\right)},$$

при s =3 $$\sigma_{cr1}=\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\frac{\left[1+\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma}{1+4\cdot\delta},$$ где:

$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)},\quad \lambda=\frac{a}{b},\quad \gamma=\frac{E\cdot I}{b\cdot D},\quad \delta=\frac{F}{b\cdot h},$$

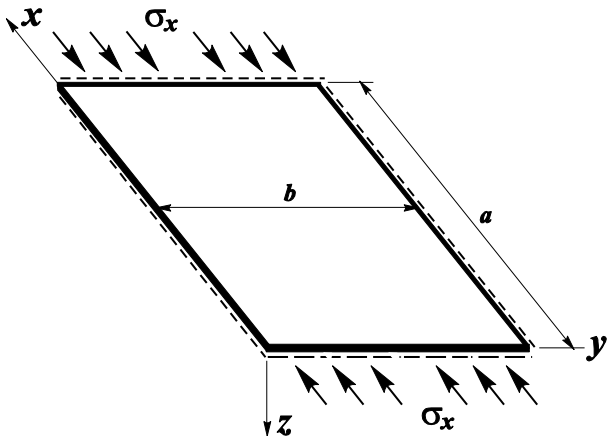
n, *m* = 1, 2, 3 … – число полуволн формы потери устойчивости в направлениях поперечном и продольном относительно сжатия пластины.

При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr1} в четвертом приближении, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной подкрепленной

пластины, определяется из условия равенства нулю определителя системы разрешающих уравнений:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right] & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta \\
-\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta) & & & \\
-\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+49\cdot\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right] & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta \\
 & -\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta) & & \\
\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+81\cdot\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right] & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta \\
 & & -\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta) & \\
-\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma-\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & -\frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot 4\cdot\gamma+\sigma_{cr4}\cdot 4\cdot\delta & \frac{\pi^2\cdot D\cdot m^2}{b^2\cdot h\cdot\lambda^2}\cdot\left[\left[1+225\cdot\left(\frac{n\cdot\lambda}{m}\right)^2\right]^2+4\cdot\gamma\right] \\
 & & & -\sigma_{cr4}\cdot(1+4\cdot\delta)
\end{vmatrix}=0$$

Устойчивость прямоугольной ортотропной свободно опертой пластины равномерно сжатой в одном направлении



Цель: Определение критического значения сжимающих усилий, равномерно распределенных по двум противоположным поперечным торцам прямоугольной ортотропной свободно опертой пластины, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
6.10_shell_orthotropic_lambda_1.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0
6.10_shell_orthotropic_lambda_4.SPR	Расчетная схема с соотношениями сторон пластины a/b = 4.0

Формулировка задачи: Прямоугольная ортотропная свободно опертая пластина подвергается воздействию сжимающих усилий σ, равномерно распределенных по двум противоположным поперечным торцам. Определить критическое значение сжимающих усилий σ_{crort}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной ортотропной пластины.

Ссылки: А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр. 374.

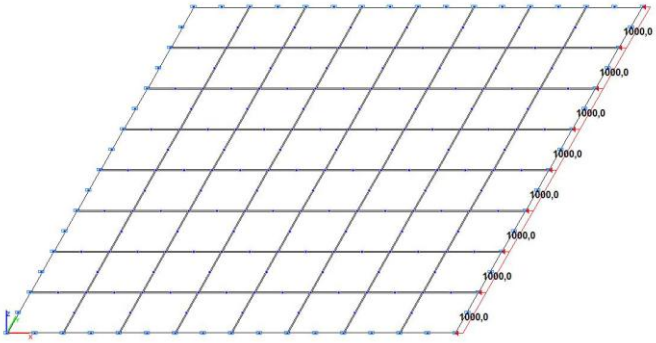
Исходные данные:

a = 0.6; 2.4 м	- размер стороны прямоугольной пластины, свободной от воздействий (вдоль оси X общей системы координат);
b = 0.6 м	- размер стороны прямоугольной пластины, подверженной воздействию сжимающих усилий (вдоль оси Y общей системы координат);
h = 0.01 м	- толщина прямоугольной пластины;
$E_x = 5.600 \cdot 10^8$ кН/м^2	- модуль упругости материала пластины, отвечающий продольным деформациям по оси X общей системы координат;
$\nu_{yx} = 0.300$	- коэффициент Пуассона, отвечающий поперечным деформациям по оси Y общей системы координат;
$E_y = 2.123 \cdot 10^8$ кН/м^2	- модуль упругости материала пластины, отвечающий продольным деформациям по оси Y общей системы координат;
$\nu_{xy} = 0.114$	- коэффициент Пуассона, отвечающий поперечным деформациям по оси X общей системы координат;
$G_{xy} = 0.769 \cdot 10^8$ кН/м^2	- модуль сдвига материала пластины;
$\sigma = 1.0 \cdot 10^5$ кН/м^2	- начальное значение сжимающих усилий.

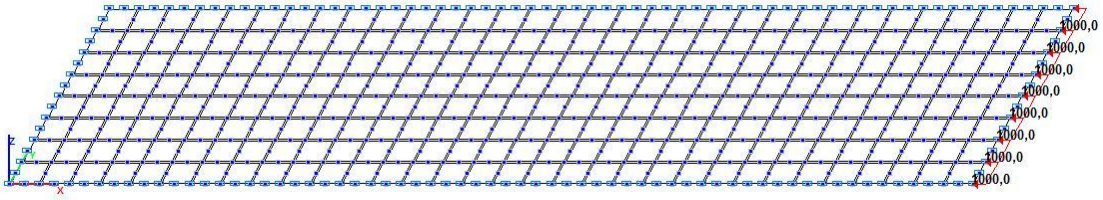
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются две расчетные схемы с соотношениями сторон пластины a/b = 1.0; 4.0. Пластина моделируется восьмиузловыми элементами оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита по сторонам пластины (вдоль осей X и Y общей системы координат) с шагом 0.075 м. Количество элементов пластины по схемам – 64; 256. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z. На одном из двух противоположных поперечных торцов пластины, подверженных воздействию сжимающих усилий,

задается равномерно распределенная по линии нагрузка с начальным значением p = σ·h = 1000 кН/м, а на узлы другого накладываются связи по соответствующему направлению (вдоль оси X общей системы координат). В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узлы одного из двух противоположных продольных торцов пластины, свободных от воздействий, накладываются связи по нормальному к нему направлению (вдоль оси Y общей системы координат). В этих же целях на узел одного из углов пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Количество узлов по схемам – 225; 849.

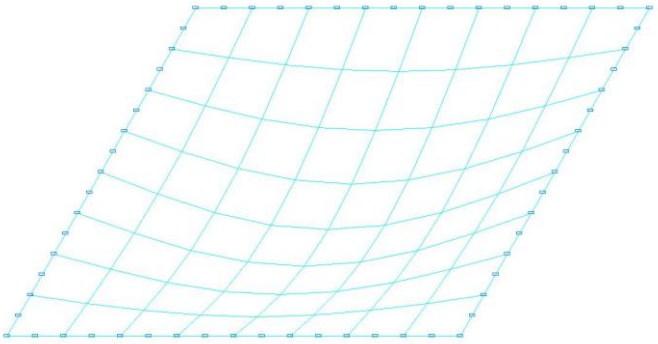
Результаты решения в SCAD



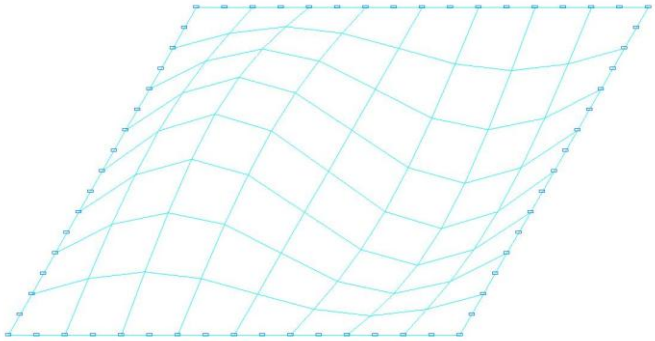
Расчетная схема с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



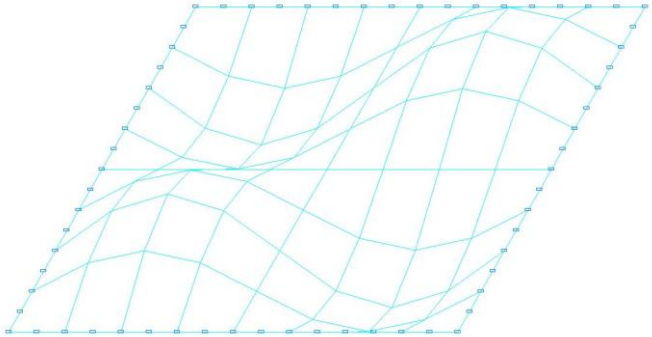
Расчетная схема с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



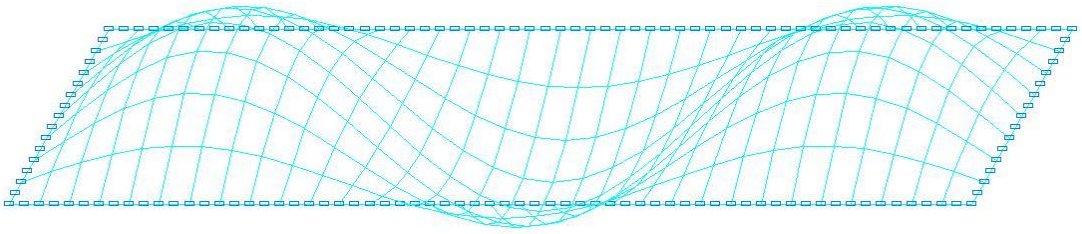
1-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



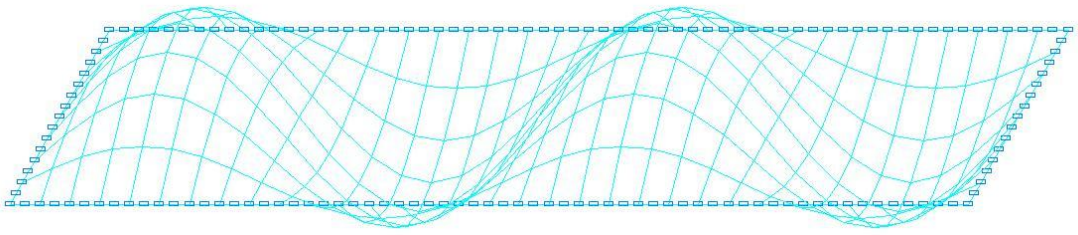
2-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



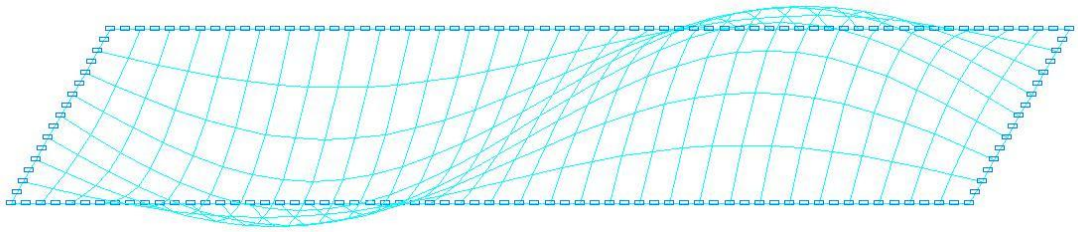
3-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 1.0



1-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



2-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0



3-я форма потери устойчивости для расчетной схемы с соотношением сторон пластины a/b = 4.0

Сравнение решений:

Критическое значение сжимающих усилий σ_{crort}, кН/м^2

Расчетная схема	Форма потери устойчивости	Количество полуволн в поперечном n и продольном m направлениях	Теория	SCAD	Отклонение, %
a/b = 1.0	1	1; 1	283093	2.831349 ·1000/0.01 = = 283135	0.01
	2	1; 2	642810	6.428985 ·1000/0.01 = = 642899	0.01
	3	2; 2	1132373	11.326625 ·1000/0.01= = 1132663	0.03
a/b = 4.0	1	1; 3	264196	2.642394 ·1000/0.01 = = 264239	0.02
	2	1; 4	283093	2.831351 ·1000/0.01 = = 283135	0.01
	3	1; 2	334385	3.344432 ·1000/0.01 = = 334443	0.02

Замечания: При аналитическом решении критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости прямоугольной ортотропной пластины, определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{crort} = \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{D_1 \cdot D_2}}{b^2 \cdot h} \cdot \left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \cdot \left(\frac{m \cdot b}{a} \right)^2 + \frac{2 \cdot D_3 \cdot n^2}{\sqrt{D_1 \cdot D_2}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \cdot \left(\frac{n^2 \cdot a}{m \cdot b} \right)^2 \right], \text{ где:}$$

$$D_1 = \frac{E_x \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu_{yx} \cdot \nu_{xy}\right)}, \qquad D_2 = \frac{E_y \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu_{yx} \cdot \nu_{xy}\right)},$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(D_1 \cdot \nu_{xy} + D_2 \cdot \nu_{yx} + 4 \cdot D_t\right), \qquad D_t = \frac{G_{xy} \cdot h^3}{12},$$

n, *m* = 1, 2, 3 … – число полуволн формы потери устойчивости в направлениях поперечном и продольном относительно сжатия пластины.

Жесткостные характеристики ортотропной пластины принимались из условий эквивалентности жесткостным характеристикам подкрепленной пластины из примера 6.10 а:

$$D_1 = \frac{E \cdot I}{\frac{b}{s+1}} + \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}, \qquad D_2 = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}, \qquad D_3 = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)},$$

и определялись по следующим формулам:

$$E_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[\frac{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right) \cdot I}{h^3 \cdot \frac{b}{s+1}} + 1 \right] \cdot \left[1 - \frac{\nu^2}{\frac{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right) \cdot I}{h^3 \cdot \frac{b}{s+1}} + 1} \right], \qquad E_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[1 - \frac{\nu^2}{\frac{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right) \cdot I}{h^3 \cdot \frac{b}{s+1}} + 1} \right],$$

$$\nu_{yx} = \nu, \qquad \nu_{xy} = \frac{\nu}{\frac{12\cdot\left(1-\nu^2\right)\cdot I}{h^3\cdot\frac{b}{s+1}}+1}, \qquad G_{xy} = \frac{E}{2\cdot\left(1+\nu\right)}.$$

Критические значения сжимающих усилий σ_{cr} для подкрепленной пластины должны быть уменьшены с коэффициентом k относительно критических значений сжимающих усилий σ_{cr} для ортотропной пластины, так как при определении последних не учитывается составляющая, действующая на ребра первой:

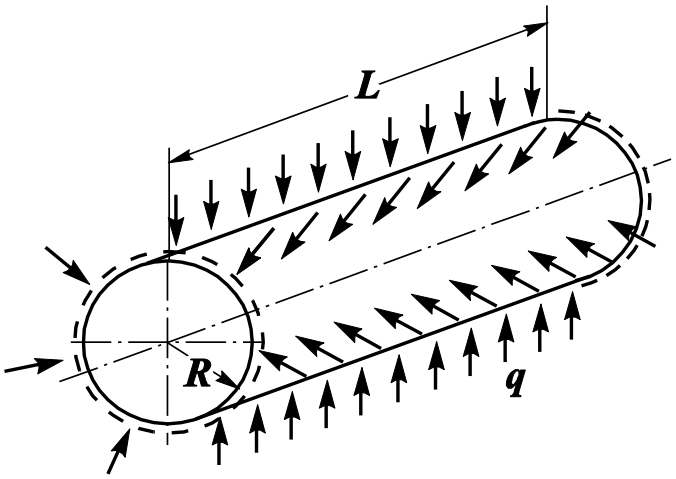
$$k = \frac{b\cdot h}{b\cdot h + F\cdot s} = 0.869565,$$

где F — площадь ребра жесткости, s — число ребер.

Критическое значение сжимающих усилий σ_{cr}, кН/м^2

Расчетная схема	Форма потери устойчивости	Количество полуволн в поперечном n и продольном m направлениях	Теория	SCAD	Отклонение, %
a/b = 1.0	1	1; 1	235900	283135·0.869565 = = 246204	4.37
	2	1; 2	533934	642899·0.869565 = = 559043	4.70
	3	2; 2	942681	1132663·0.869565 = = 984924	4.48
a/b = 4.0	1	1; 3	220165	264239·0.869565 = = 229773	4.36
	2	1; 4	235900	283135·0.869565 = = 246204	4.37
	3	1; 2	278652	334443·0.869565 = = 290820	4.37

Устойчивость цилиндрической тонкостенной оболочки со свободно опертыми торцами под равномерным внешним давлением



Цель: Определение критического значения внешнего давления, равномерно распределенного по боковой поверхности цилиндрической тонкостенной оболочки, свободно опертой по торцам, соответствующего моменту потери ее устойчивости.

Имя файла с исходными данными: **6.11_S.SPR**

Формулировка задачи: Цилиндрическая тонкостенная оболочка, свободно опертая по торцам, находится под воздействием внешнего равномерного давления q. Определить критическое значение внешнего равномерного давления q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости цилиндрической тонкостенной оболочки.

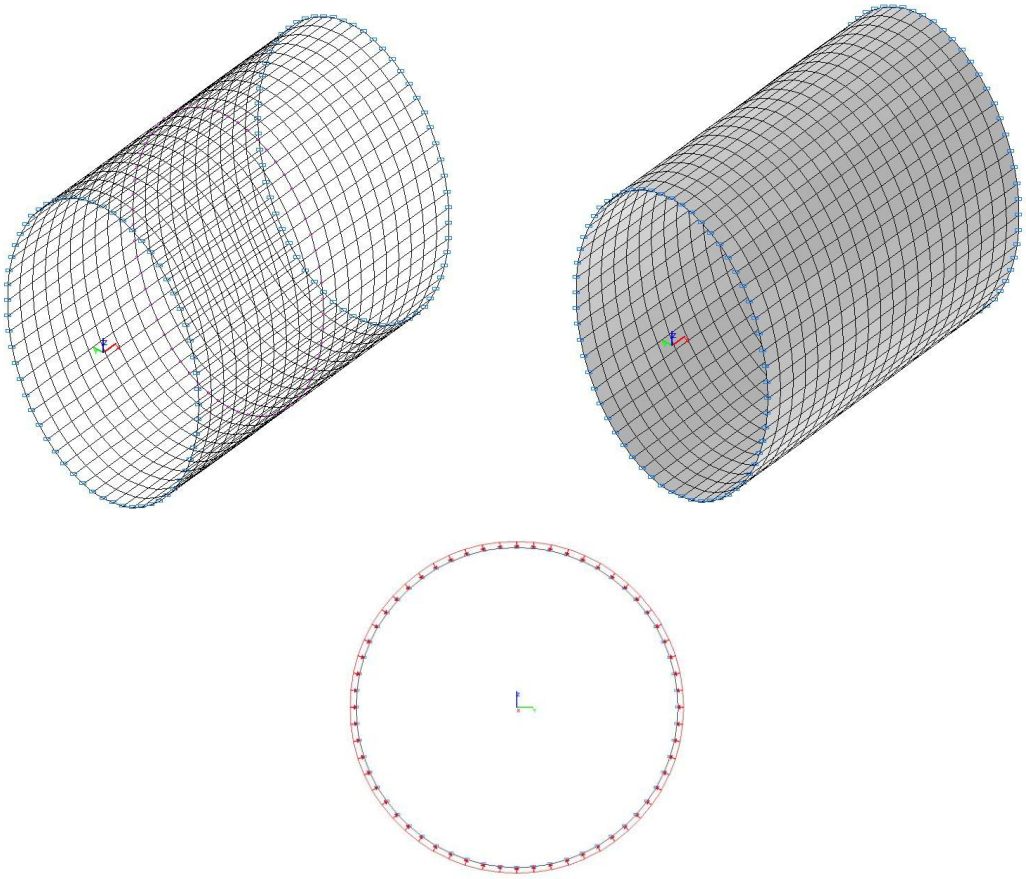
Ссылки: Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов, Устойчивость оболочек, Москва, Наука, 1978, стр. 137.
А.С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, Москва, Наука, 1967, стр. 545.

Исходные данные:

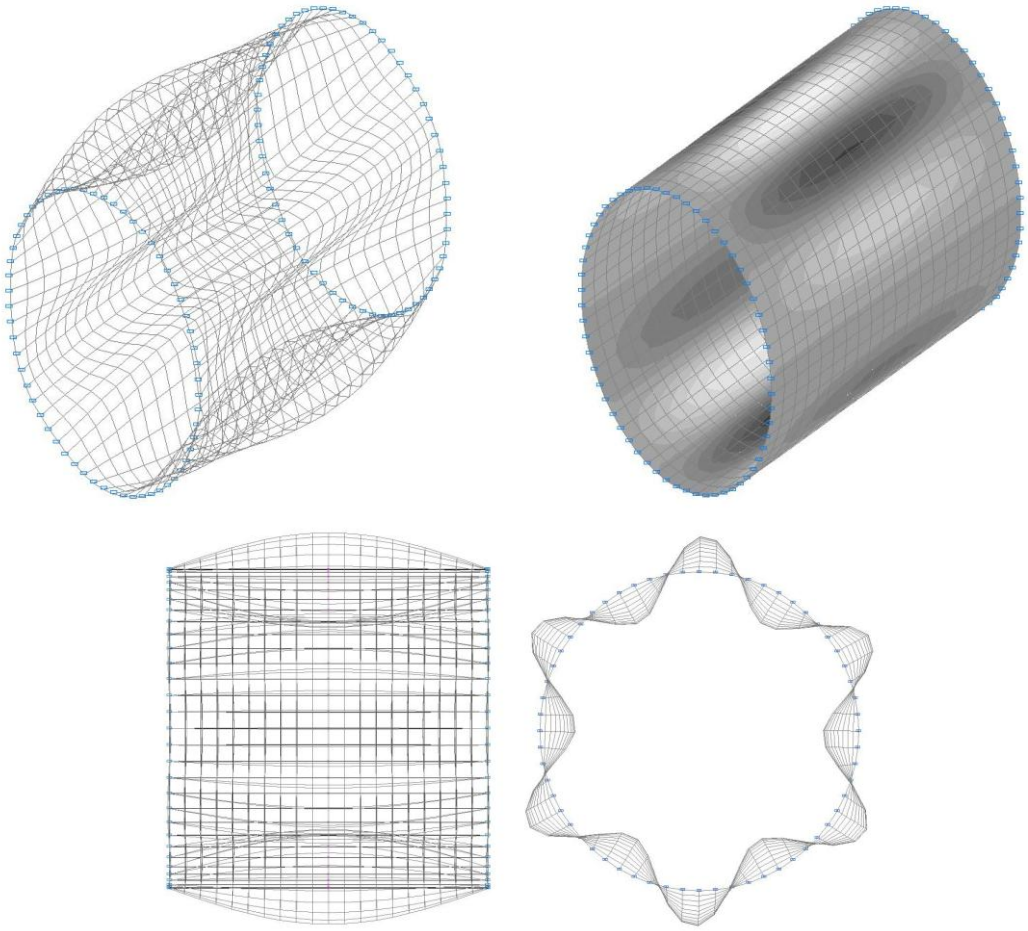
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости материала оболочки;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$h = 0.005$ м	- толщина оболочки;
$R = 0.5$ м	- радиус срединной поверхности оболочки;
$L = 1.0$ м	- длина оболочки;
$q = 1.0 \cdot 10^3$ кПа	- начальное значение внешнего давления.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 1200 четырехузловых элементов оболочки типа 50. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.05 м в меридиональном направлении (20 элементов) и с шагом 6.0º в окружном направлении (60 элементов). Обеспечение граничных условий на свободно опертых торцах достигается за счет наложения связей по направлениям линейных перемещений в их плоскости (степени свободы Y, Z). Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связей конечной жесткости (60 элементов типа 51) в узлах поперечного сечения плоскости симметрии цилиндрической оболочки в меридиональном направлении (k_x = 1.0 кН/м). На боковой поверхности цилиндрической оболочки задается равномерно распределенная нагрузка (по оси Z1 местной системы координат) с начальным значением $q = 1.0 \cdot 10^3$ кПа. Количество узлов в расчетной схеме – 1260.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



1-я форма потери устойчивости

Сравнение решений:

Критическое значение внешнего равномерного давления q_{cr}, кПа

Форма потери устойчивости	**Количество полуволн в меридианальном направлении m и волн в окружном n направлении**	**Теория**	**SCAD**	**Отклонение, %**
1	1; 6	981 (917)	0.999898 ·1000 = = 1000	1.94 (9.05)

Без скобок указаны теоретические значения, посчитанные по теории пологих оболочек для безмоментного исходного состояния;

В круглых скобках указаны теоретические значения, посчитанные по общей теории оболочек для безмоментного исходного состояния.

Замечания: При аналитическом решении критическое значение внешнего равномерного давления q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости цилиндрической тонкостенной оболочки, определяется в соответствии с теорией пологих оболочек по следующей формуле:

$$q_{cr} = \frac{E \cdot h}{R \cdot n^2} \cdot \frac{\left(\frac{m \cdot \pi \cdot R}{L}\right)^4}{\left[\left(\frac{m \cdot \pi \cdot R}{L}\right)^2 + n^2\right]^2} + \frac{D}{R^3 \cdot n^2} \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi \cdot R}{L}\right)^2 + n^2\right]^2,$$ где:

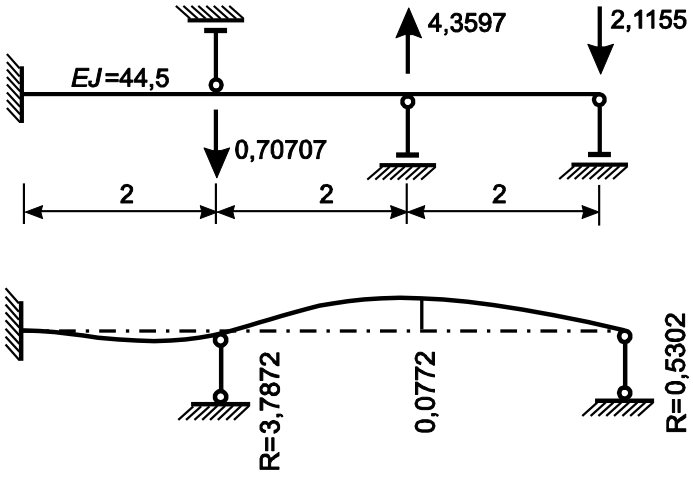
$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}.$$

При аналитическом решении критическое значение внешнего равномерного давления q_{cr}, соответствующее моменту потери устойчивости цилиндрической тонкостенной оболочки, определяется в соответствии с общей теорией оболочек из условия равенства нулю определителя системы разрешающих уравнений:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)^2+\frac{1-\nu}{2}\cdot n^2+\frac{(1-\nu)^2\cdot R}{E\cdot h}\cdot n^2\cdot q_{cr} & \frac{1+\nu}{2}\cdot\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)\cdot n & \nu\cdot\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right) \\ \frac{1+\nu}{2}\cdot\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)\cdot n & \left(1+\frac{h^2}{12\cdot R^2}\right)\cdot\left(\frac{1-\nu}{2}\cdot\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right)-\frac{(1-\nu)^2\cdot R}{E\cdot h}\cdot n^2\cdot q_{cr} & \left(1+\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left(\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right)\right)\cdot n \\ \nu\cdot\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right) & \left(1+\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left(\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right)\right)\cdot n & 1+\frac{h^2}{12\cdot R^2}\cdot\left(\left(\frac{\pi\cdot R}{L}\right)^2+n^2\right)^2-\frac{(1-\nu)^2\cdot R}{E\cdot h}\cdot n^2\cdot q_{cr} \end{vmatrix}=0$$

Нелинейная статика

Трехпролетная балка с заделкой одного торца и тремя жесткими односторонними опорами под действием сосредоточенных сил над ними



Цель: Определение реакций односторонних опор трехпролетной балки или прогибов балки по направлению установки опор в конструктивно нелинейной постановке.

Имя файла с исходными данными: **Contact_1.SPR**

Формулировка задачи: Трехпролетная балка с заделкой одного торца и тремя жесткими односторонними опорами, работающими на сжатие, подвергается воздействию сосредоточенных поперечных сил, расположенных над опорами.
Определить реакции односторонних опор R_i или прогибы балки Z_i по направлению установки опор.

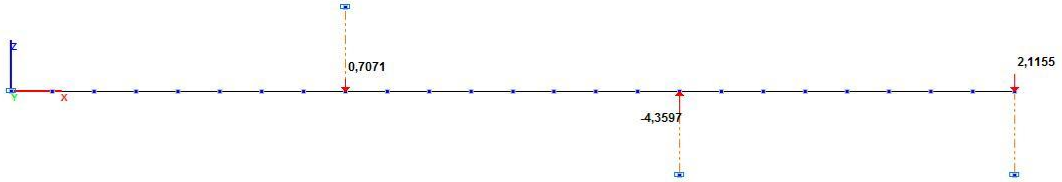
Ссылки: А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер, Расчетные модели сооружений и возможность их анализа, Москва, СКАД СОФТ, 2011, стр. 146

Исходные данные:

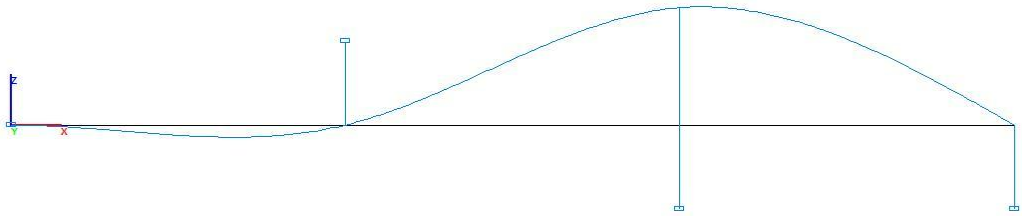
$EF = 1.00 \cdot 10^8$ кН	- продольная жесткость поперечного сечения балки;
$EI = 44.50$ кН·м^2	- изгибная жесткость поперечного сечения балки;
$L = 2.00$ м	- длина пролетов балки;
$k = 1.00 \cdot 10^6$ кН/м	- продольная жесткость односторонних опор;
$P_1 = 0.7071$ кН	- значение сосредоточенной силы, расположенной над первой от заделки промежуточной односторонней опорой и растягивающей ее;
$P_2 = 4.3597$ кН	- значение сосредоточенной силы, расположенной над второй от заделки промежуточной односторонней опорой и растягивающей ее;
$P_3 = 2.1155$ кН	- значение сосредоточенной силы, расположенной над третьей от заделки крайней односторонней опорой и сжимающей ее;

***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – плоская рама. Элементы балки – 24 стержневых элемента типа 2. Сетка конечных элементов разбита по длине балки (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 0.25 м. Элементы односторонних опор – 3 элемента односторонних двухузловых связей типа 352. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорный узел заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Z, UY и на опорные узлы односторонних опор по направлениям степеней свободы X, Z. Воздействия задаются в виде поперечных узловых нагрузок P (по направлению оси Z общей системы координат). Нелинейное загружение формировалось для шагово-итерационного метода с коэффициентом загружения - 1, количеством шагов - 1, количеством итераций - 10 для линейного загружения P. Количество узлов в расчетной схеме – 28.

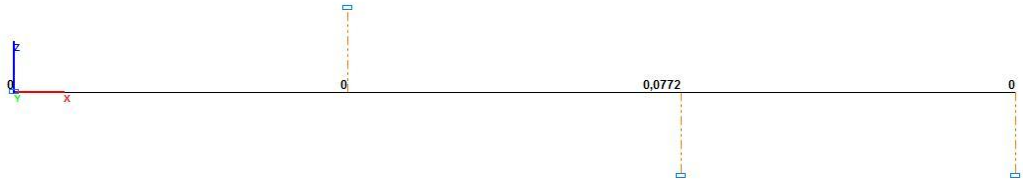
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Деформированная схема



Значения прогибов балки Z_i, м

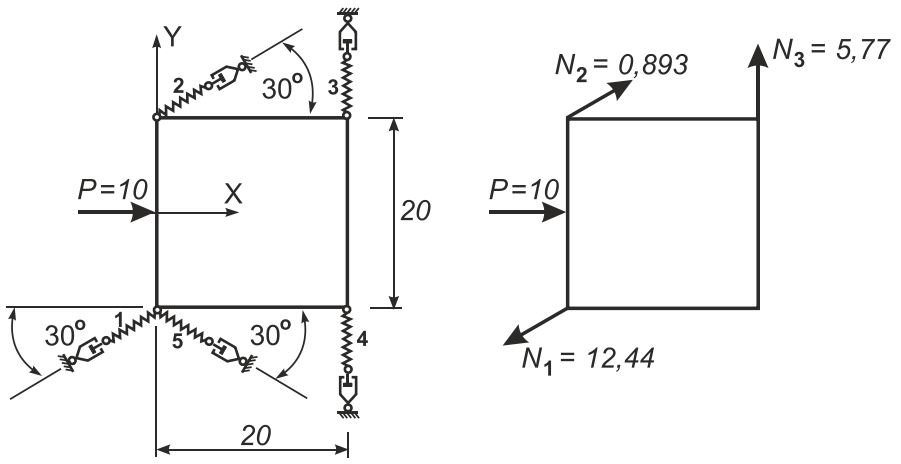
Значения реакций односторонних опор, кН

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
R_1, кН	3.7872	3.8506	1.67
R_3, кН	0.5302	0.5301	0.02
Z_2, м	0.0772	0.0772	0.00

Замечания: При аналитическом решении реакции односторонних опор R_i или прогибы балки Z_i по направлению установки опор определяются методом квадратичного программирования.

Абсолютно твердое тело, раскрепленное пятью пружинами одинаковой жесткости, работающими только на растяжение, под воздействием сосредоточенной силы



Цель: Определение реакций пружин одинаковой жесткости, работающих только на растяжение и раскрепляющих абсолютно твердое тело от воздействия на него сосредоточенной силы в конструктивно нелинейной постановке.

***Имя файла с исходными данными*: Contact_2.SPR**

***Формулировка задачи*:** Абсолютно твердое тело в форме квадрата со сторонами расположенными вдоль осей координат раскрепляется по углам пятью пружинами одинаковой жесткости, работающими только на растяжение, следующим образом:
в нижнем левом углу квадрата устанавливаются две пружины (1 и 5), продольные оси которых составляют с нижней стороной квадрата углы 150° и 30° с внешней стороны;
в верхнем левом углу квадрата устанавливается одна пружина (2), продольная ось которой составляет с верхней стороной квадрата угол 30° с внешней стороны;
в нижнем правом и в верхнем правом углах квадрата устанавливаются по одной пружине (4 и 3), продольные оси которых составляют соответственно с нижней и с верхней сторонами квадрата углы 90° с внешней стороны.
Перпендикулярно середине левой стороны квадрата абсолютно твердого тела прикладывается сосредоточенная сила P.
Определить реакции в пружинах R_i.

***Ссылки*:** А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер, Расчетные модели сооружений и возможность их анализа, Москва, СКАД СОФТ, 2011, стр. 147

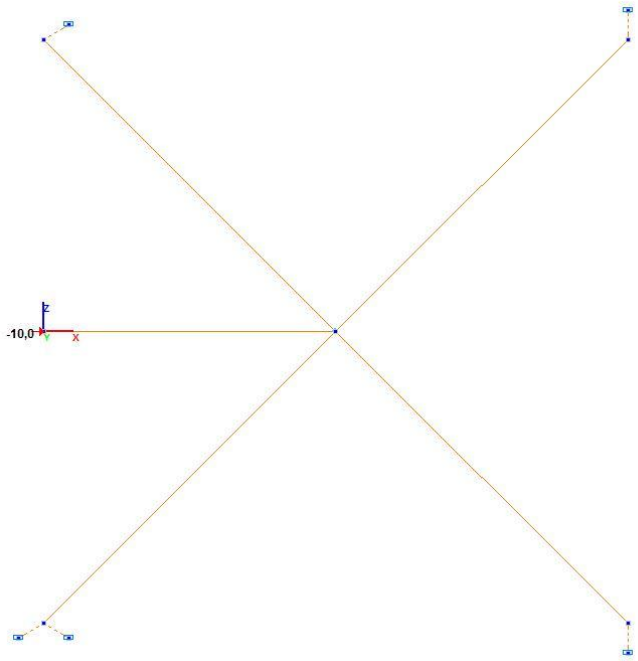
***Исходные данные*:**

L = 20 м	- сторона квадрата абсолютно твердого тела;
$\alpha_1 = 150°$	- угол наклона оси пружины 1 к нижней стороне квадрата с внешней стороны;
$\alpha_2 = 30°$	- угол наклона оси пружины 2 к верхней стороне квадрата с внешней стороны;
$\alpha_3 = 90°$	- угол наклона оси пружины 3 к верхней стороне квадрата с внешней стороны;
$\alpha_4 = 90°$	- угол наклона оси пружины 4 к нижней стороне квадрата с внешней стороны;
$\alpha_5 = 30°$	- угол наклона оси пружины 5 к нижней стороне квадрата с внешней стороны;
$k = 1.00 \cdot 10^6$ кН/м	- продольная жесткость пружин;
P = 10.0 кН	- значение сосредоточенной силы, действующей перпендикулярно середине левой стороны квадрата.

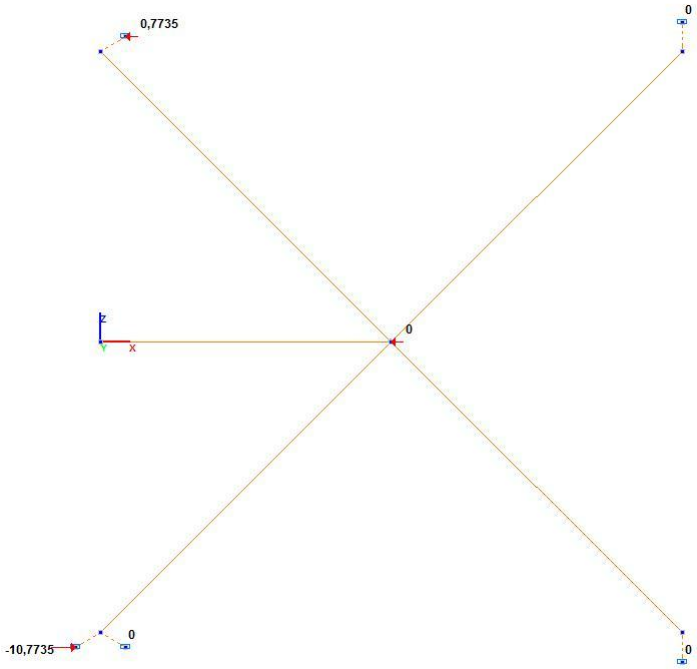
***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – плоская рама. Элемент абсолютно твердого тела – 1 элемент трехмерного шестиузлового твердого тела типа 100 (один ведущий узел, расположенный на пересечении диагоналей квадрата, четыре ведомых узла, расположенных по углам квадрата, один

ведомый узел, расположенный на середине левой стороны квадрата). Элементы пружин – 5 элементов односторонних двухузловых связей типа 352. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы пружин по направлениям степеней свободы X, Z. Для обеспечения геометрической неизменяемости системы в ходе нелинейного расчета в ведущий узел твердого тела вводится элемент связи конечной жесткости (типа 51) малого значения 0.001 кН/м по направлению оси X общей системы координат. Правильность результатов расчета контролируется отсутствием реакции в этой связи. Воздействие задается в виде узловой нагрузки P (по направлению оси X общей системы координат). Нелинейное загружение формировалось для шагово-итерационного метода с коэффициентом загружения - 1, количеством шагов - 1, количеством итераций - 10 для линейного загружения P. Количество узлов в расчетной схеме – 17.

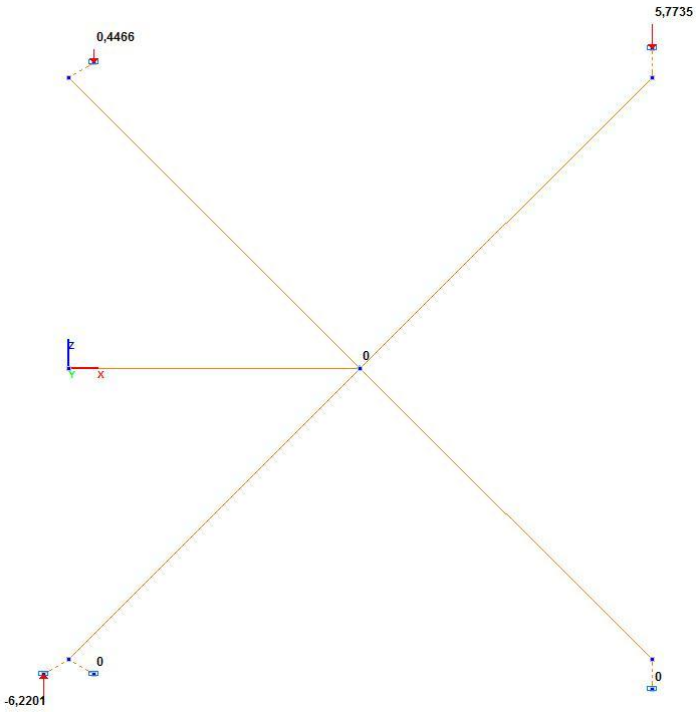
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема



Значения реакций в опорных узлах пружин вдоль оси X общей системы координат R_x, кН



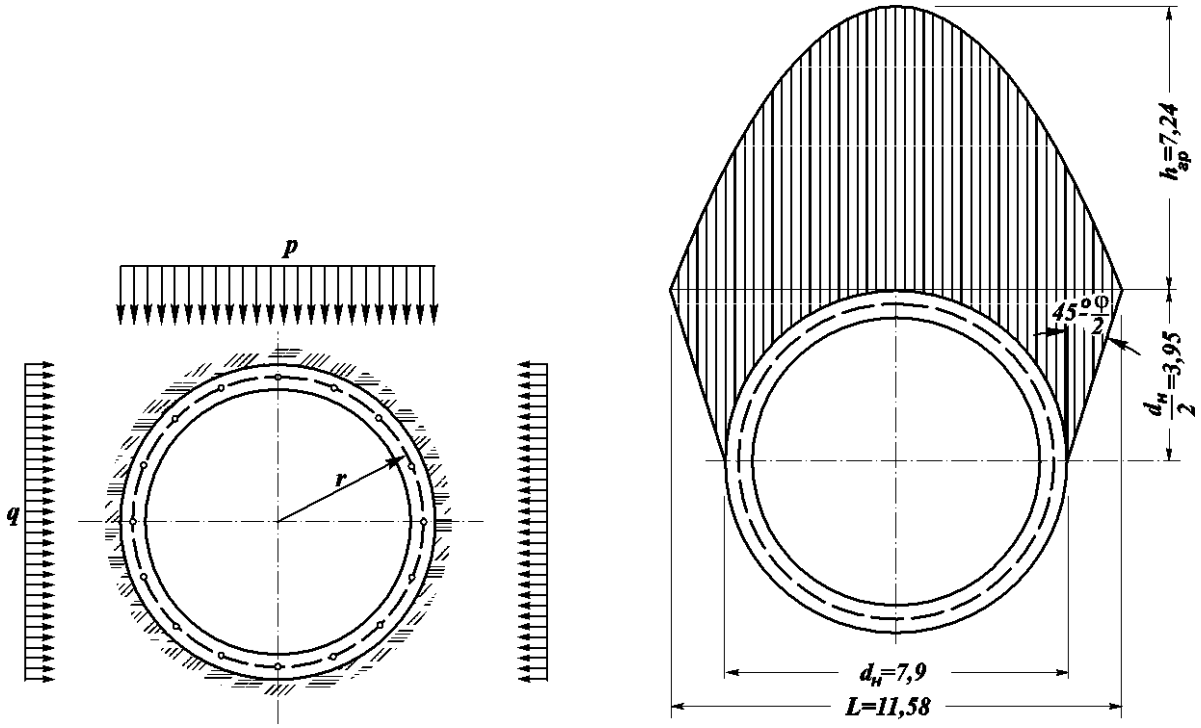
Значения реакций в опорных узлах пружин вдоль оси Z общей системы координат R_z, кН

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
R_1, кН	12.440	-10.7735·cos150° + 6.2201·sin150° = 12.440	0.00
R_2, кН	0.893	0.7735·cos30° + 0.4466·sin30° = 0.893	0.00
R_3, кН	5.770	5.7735·sin90° = 5.774	0.07
R_4, кН	0.000	0.000	0.00
R_5, кН	0.000	0.000	0.00

Замечания: При аналитическом решении реакции в пружинах R_i определяются методом квадратичного программирования.

Круговая тоннельная обделка под действием заданного активного вертикального и горизонтального давления грунта и пассивного давления упругого отпора грунта в зоне контакта



Цель: Определение внутренних усилий в конструкции круговой тоннельной обделки и упругих реакций грунта в зоне контакта от действия заданного вертикального и горизонтального давления грунта в конструктивно нелинейной постановке.

Имя файла с исходными данными: **Tunnel_lining.SPR**

Формулировка задачи: Круговая тоннельная обделка подвергается воздействию заданного активного вертикального *p* и горизонтального *q* давления грунта от сводообразования и пассивного давления упругого отпора грунта в зоне контакта. Определить внутренние усилия (продольные силы *N* и изгибающие моменты *M*) в конструкции круговой тоннельной обделки и упругие реакции грунта *R* в зоне контакта.

Ссылки: М.М. Архангельский, Д.И. Джинчарадзе, А.С. Курисько, Расчет тоннельных обделок, Москва, ТРАНСЖЕЛДОРИЗДАТ, 1960, стр. 217

Исходные данные:

$E = 3.4 \cdot 10^6$ т/м^2 - модуль упругости материала тоннельной обделки;
$\gamma_b = 2.6$ т/м^3 - объемный вес материала тоннельной обделки;
$d_{int} = 7.1$ м - внутренний диаметр кольца тоннельной обделки;
$h = 0.4$ - толщина прямоугольного поперечного сечения тоннельной обделки;
$b = 1.0$ - ширина прямоугольного поперечного сечения тоннельной обделки;
$\alpha = \pi/8$ рад - центральный угол стороны правильного многоугольника рамы, заменяющей окружность расчетного радиуса r тоннельной обделки;
$k = 5.0 \cdot 10^3$ т/м^3 - коэффициент упругого отпора грунта в зоне контакта с тоннельной обделкой;
$f = 0.8$ - коэффициент крепости грунта по Протодьяконову;
$\varphi = 2 \cdot \pi/9$ рад - угол внутреннего трения грунта;
$\gamma_g = 1.9$ т/м^3 - объемный вес грунта.
$d_{ext} = d_{int} + 2 \cdot h = 7.9$ м - наружный диаметр кольца тоннельной обделки;
$r = (d_{ext} + d_{int})/4 = 3.75$ м - расчетный радиус тоннельной обделки;

$S = 2 \cdot r \cdot \sin(0.5 \cdot \alpha) = 1.463177$ м - сторона правильного многоугольника заменяющей рамы;

$I = b \cdot h^3/12 = 0.005333$ м^4 - момент инерции поперечного сечения тоннельной обделки;

$F = b \cdot h = 0.4$ м^2 - площадь поперечного сечения тоннельной обделки;

$D = k \cdot S \cdot b = 7315.887$ т/м - жесткость, радиально расположенных у вершин многоугольника заменяющей рамы упругих опор, моделирующих отпор грунта;

$L_{arch} = d_{ext} \cdot (1 + \operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi/2)) = 11.584$ м - пролет свода давления грунта;

$H_{arch} = L_{arch}/(2 \cdot f) = 7.240$ м - высота свода давления грунта над шелыгой выработки;

$p = H_{arch} \cdot \gamma_g + h \cdot \gamma_b = 14.796$ т/м^2 - интенсивность вертикального равномерно распределенного активного давления грунта;

$q = (H_{arch} + d_{ext}/2) \cdot \gamma_g \cdot \operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi/2) = 4.623$ т/м^2 - интенсивность горизонтального равномерно распределенного активного давления грунта.

Вертикальные сосредоточенные силы в узлах многоугольника рамы, заменяющие распределенную нагрузку

$P_1 = (S/2) \cdot p \cdot (\cos(-0.5 \cdot \alpha) + \cos(0.5 \cdot \alpha)) = 21.2329$ т; $P_2 = (S/2) \cdot p \cdot (\cos(0.5 \cdot \alpha) + \cos(1.5 \cdot \alpha)) = 19.6166$ т;

$P_3 = (S/2) \cdot p \cdot (\cos(1.5 \cdot \alpha) + \cos(2.5 \cdot \alpha)) = 15.0139$ т; $P_4 = (S/2) \cdot p \cdot (\cos(2.5 \cdot \alpha) + \cos(3.5 \cdot \alpha)) = 8.1255$ т;

$P_5 = (S/2) \cdot p \cdot \cos(3.5 \cdot \alpha) = 2.1117$ т.

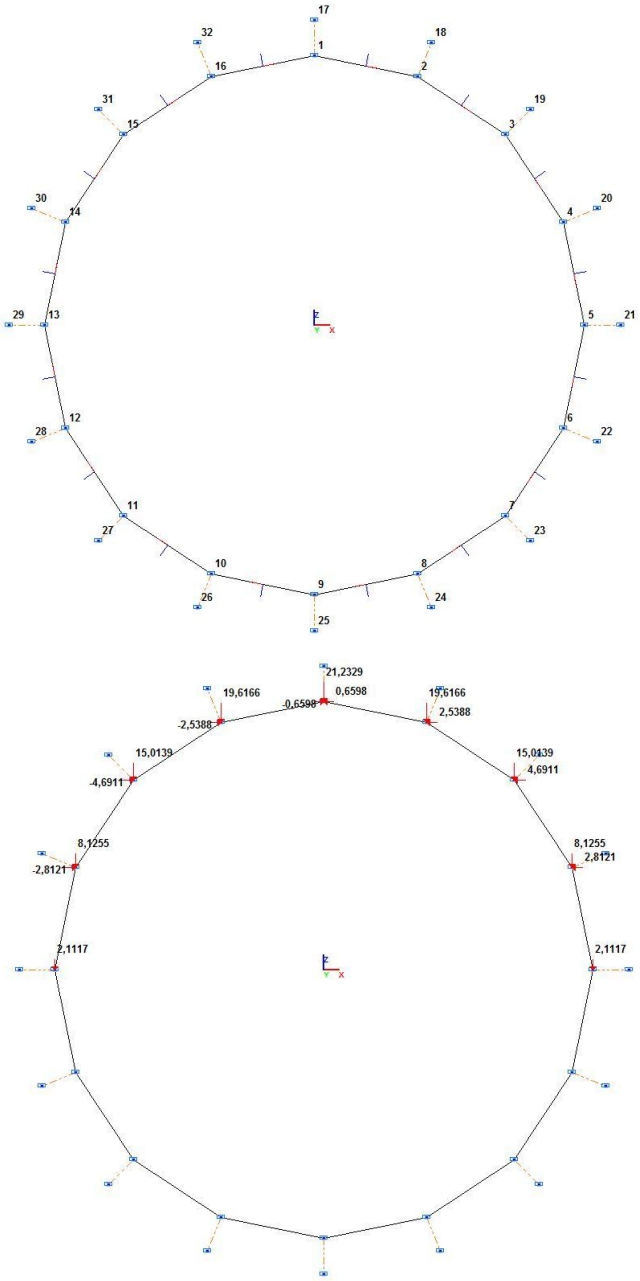
Горизонтальные сосредоточенные силы в узлах многоугольника рамы, заменяющие распределенную нагрузку

$Q_1 = (S/2) \cdot q \cdot \sin(0.5 \cdot \alpha) = 0.6598$ т; $Q_2 = (S/2) \cdot q \cdot (\sin(0.5 \cdot \alpha) + \sin(1.5 \cdot \alpha)) = 2.5388$ т;

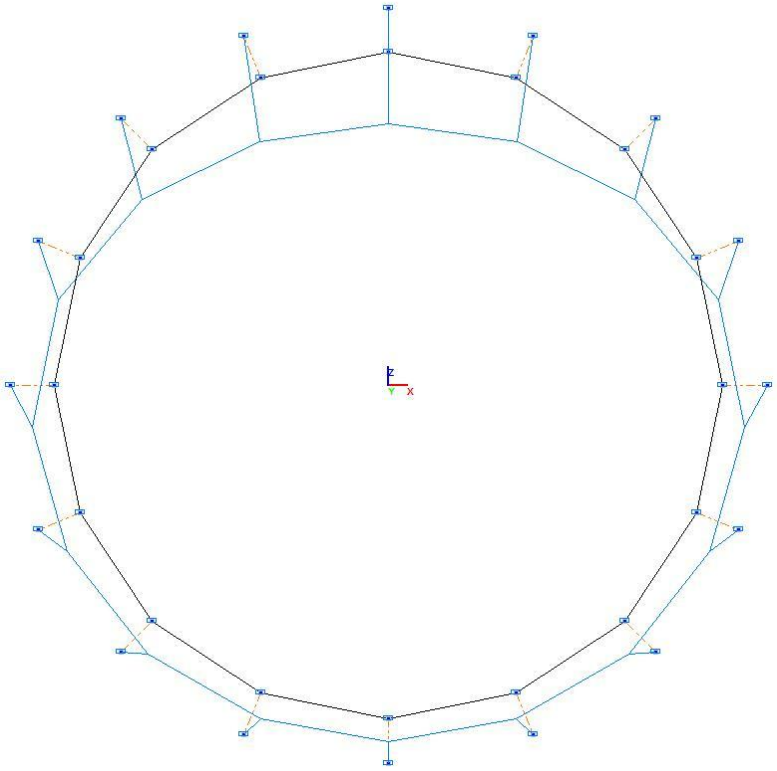
$Q_3 = (S/2) \cdot q \cdot (\sin(1.5 \cdot \alpha) + \sin(2.5 \cdot \alpha)) = 4.6911$ т; $Q_4 = (S/2) \cdot q \cdot \sin(2.5 \cdot \alpha) = 2.8121$ т.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Элементы тоннельной обделки – 16 стержневых элементов типа 5. Сетка конечных элементов разбита по окружности радиуса r = 3.75 м, расположенной в плоскости XOZ общей системы координат, с шагом центрального угла $\alpha = \pi/8$ рад. Начало общей системы координат находится в центре окружности. Оси X1 местных систем координат элементов направлены по хордам окружности в направлении обхода по часовой стрелке вокруг оси Y общей системы координат, если смотреть от начала координат. Оси Z1 местных систем координат элементов направлены от центра окружности. Элементы, моделирующие упругий отпор грунта – 16 элементов односторонних двухузловых связей, работающих на сжатие, типа 352. Конечные элементы сориентированы по радиусам окружности от центра и примыкают к узлам сопряжения элементов тоннельной обделки. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы элементов упругого отпора грунта по направлениям степеней свободы X, Y, Z, а также на узлы элементов тоннельной обделки по направлению степени свободы Y. Для обеспечения геометрической неизменяемости системы на узлы элементов тоннельной обделки, расположенные по вертикальной оси симметрии, вводятся связи по направлению степени свободы X. Воздействие активного вертикального и горизонтального давления грунта задается в виде вертикальных P_i и горизонтальных Q_i сосредоточенных сил в узлах сопряжения элементов тоннельной обделки. Нелинейное загружение формировалось простым шаговым методом с коэффициентом загружения – 0.01 и количеством шагов – 100 для линейного загружения. Количество узлов в расчетной схеме – 32.

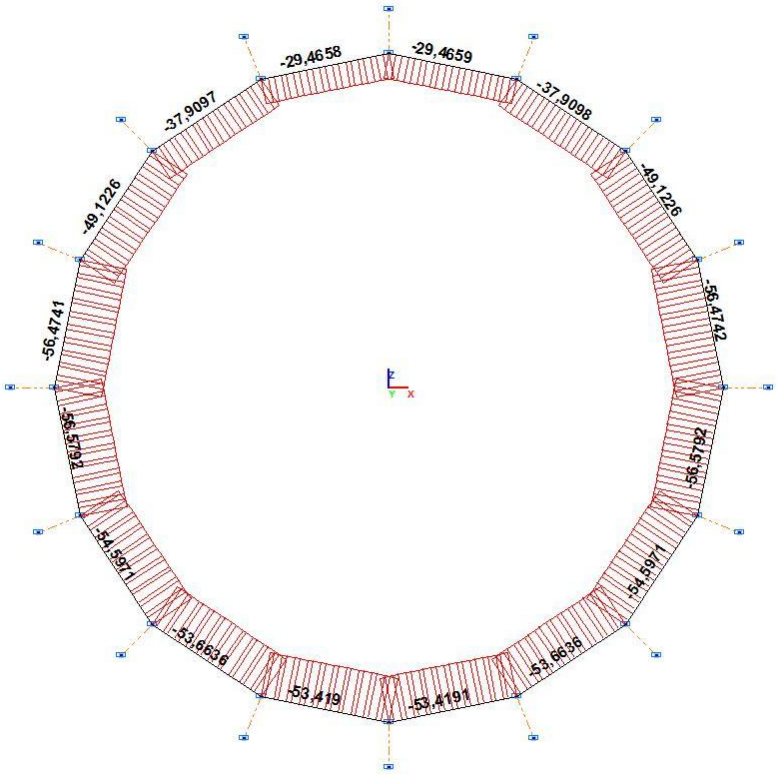
Результаты решения в SCAD



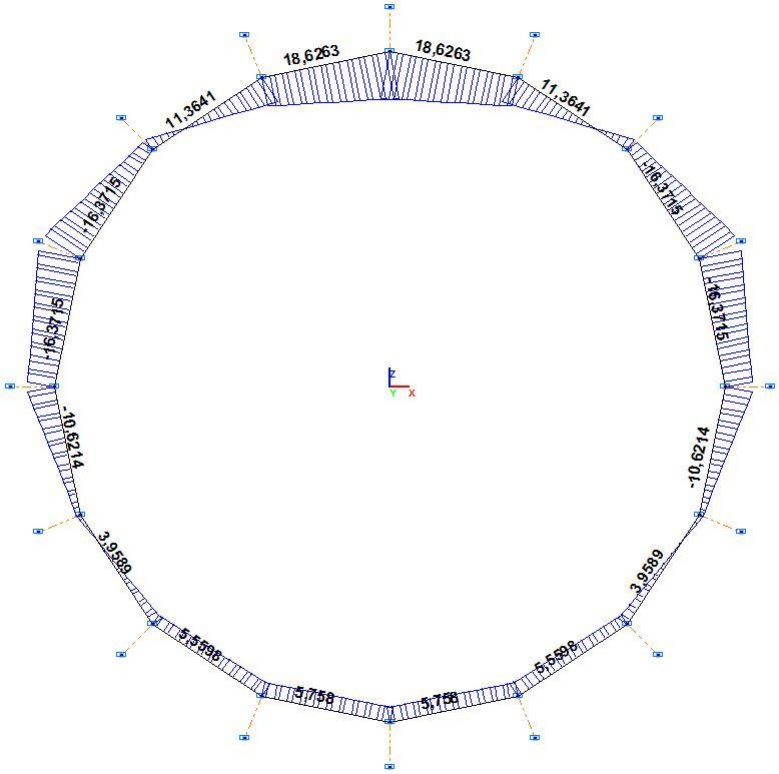
Расчетная схема



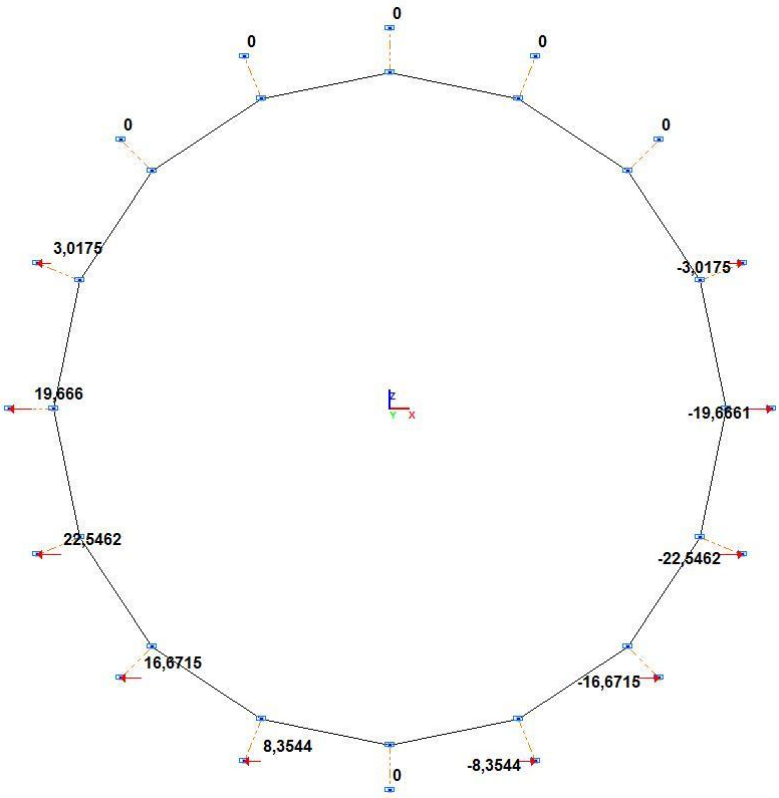
Деформированная схема



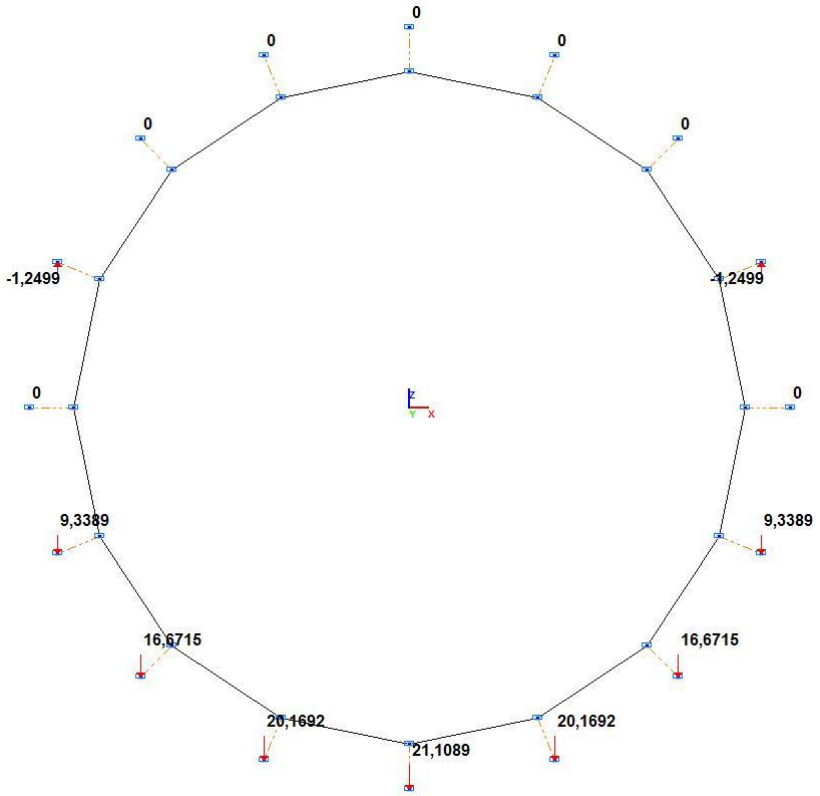
Эпюра продольных сил N, т



Эпюра изгибающих моментов M, т·м



Значения реакций в опорных узлах вдоль оси X общей системы координат R_x, т



Значения реакций в опорных узлах вдоль оси Z общей системы координат R_z, т

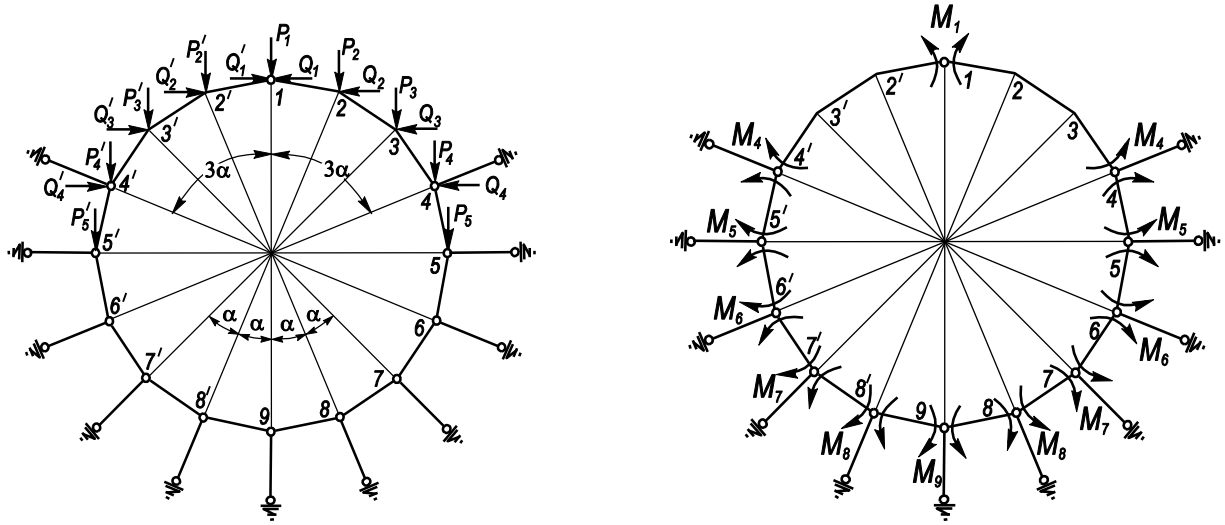
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
N_{12}, т	-29.4660	-29.4659	0.00
N_{23}, т	-37.9098	-37.9098	0.00
N_{34}, т	-49.1226	-49.1226	0.00
N_{45}, т	-56.4742	-56.4742	0.00
N_{56}, т	-56.5793	-56.5792	0.00
N_{67}, т	-54.5971	-54.5971	0.00
N_{78}, т	-53.6637	-53.6636	0.00
N_{89}, т	-53.4191	-53.4191	0.00
M_1, т·м	18.6263	18.6263	0.00
M_2, т·м	11.3641	11.3641	0.00
M_3, т·м	-4.7755	-4.7755	0.00
M_4, т·м	-16.3715	-16.3715	0.00
M_5, т·м	-10.6215	-10.6214	0.00
M_6, т·м	-1.3066	-1.3065	0.01
M_7, т·м	3.9589	3.9589	0.00
M_8, т·м	5.5598	5.5598	0.00
M_9, т·м	5.7581	5.7580	0.00
R_1, т	0.0000	0.0000	0.00
R_2, т	0.0000	0.0000	0.00
R_3, т	0.0000	0.0000	0.00
R_4, т	-3.2661	$-3.0175\cdot\cos(\pi/8) - 1.2499\cdot\sin(\pi/8) = -3.2661$	0.00
R_5, т	-19.6660	-19.6661	0.00
R_6, т	-24.4038	$-22.5462\cdot\cos(\pi/8) - 9.3389\cdot\sin(\pi/8) = -24.4038$	0.00
R_7, т	-23.5771	$-16.6715\cdot\cos(\pi/4) – 16.6715\cdot\sin(\pi/4) = -23.5770$	0.00
R_8, т	-21.8310	$-8.3544\cdot\cos(3\cdot\pi/8) - 20.1692\cdot\sin(3\cdot\pi/8) = -21.8310$	0.00
R_9, т	-21.1089	-21.1089	0.00

Замечания: В аналитическом решении применяется метод расчета тоннельных обделок, предложенный Метропроектом, в котором учитывается зависимость напряженного состояния конструкции от упругих свойств среды. Порядок расчета следующий:

- Предварительно задается зона контакта конструкции с грунтом; окружность контура обделки заменяется правильным многоугольником; вычисляются все приведенные к узловым активные нагрузки и необходимые геометрические характеристики.
- Принимается основная система метода сил в виде многоугольника с шарнирами во всех углах где имеются упругие опоры, а также в центральном угле зоны отлипания, благодаря чему верхняя часть многоугольника превращается в трехшарнирную арку; за неизвестные принимаются моменты, которые необходимо приложить в шарнирах, чтобы устранить возможность относительного поворота сторон многоугольника; прикладываются единичные моменты во всех шарнирах (для симметричной системы рассматривается действие парных неизвестных, действующих в симметричных узлах); последовательно вырезая узлы и проектируя силы на направления стержней, а также на биссектрису угла, находятся усилия в элементах шарнирной цепи и реакции упругих опор во всех единичных состояниях.
- Верхняя часть многоугольника в зоне отлипания рассматривается как трехшарнирная арка, и определяются ее опорные вертикальные и горизонтальные давления от внешней нагрузки на остальную часть шарнирного многоугольника; под действием опорных сил, а также непосредственно приложенных в остальных узлах активных нагрузок путем последовательного вырезания узлов находятся усилия для всех элементов шарнирной цепи и реакции упругих опор.
- Определяются единичные и грузовые перемещения по формулам Максвелла-Мора, прибегая к способам приближенного суммирования.
- Для определения лишних неизвестных составляется и решается при помощи алгоритма Гаусса система канонических уравнений;
- Находятся продольные силы, изгибающие моменты и реакции упругих опор.
- По значениям реакций упругих опор проверяется правильность задания зоны контакта конструкции с грунтом.

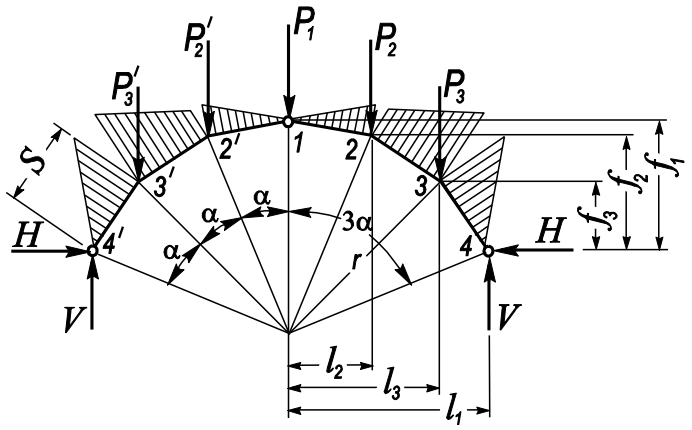
Ниже приводятся формулы последовательности расчета.



Основная система метода сил

Определение усилий в основной системе от внешних нагрузок

Определение усилий в трехшарнирной арке от вертикальных нагрузок



Расчетная схема определения усилий в трехшарнирной арке от вертикальных нагрузок

$$L_1 = r \cdot \sin(3 \cdot \alpha); \qquad L_2 = r \cdot \sin(\alpha); \qquad L_3 = r \cdot \sin(2 \cdot \alpha);$$

$$F_1 = r \cdot (1 - \cos(3 \cdot \alpha)); \qquad F_2 = r \cdot (\cos(\alpha) - \cos(3 \cdot \alpha)); \qquad F_3 = r \cdot (\cos(2 \cdot \alpha) - \cos(3 \cdot \alpha));$$

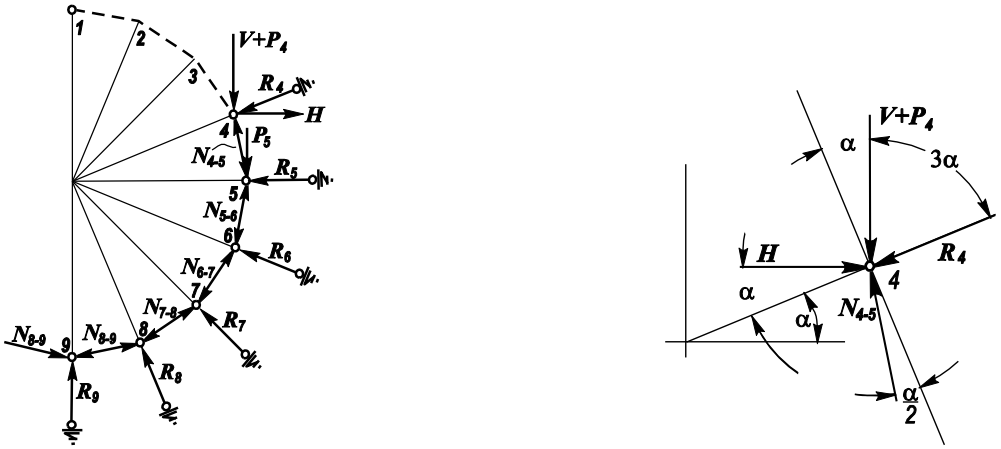
$$V = 0.5 \cdot P_1 + P_2 + P_3; \qquad H = \frac{V \cdot L_1 - P_2 \cdot L_2 - P_3 \cdot L_3}{F_1};$$

$$M_{3p} = V \cdot (L_1 - L_3) - H \cdot F_3; \qquad M_{2p} = V \cdot (L_1 - L_3) - H \cdot F_2 - P_3 \cdot (L_3 - L_2);$$

$$N_{12p} = H \cdot cos(0.5 \cdot \alpha) + \frac{P_1}{2} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha); \qquad N_{23p} = H \cdot cos(1.5 \cdot \alpha) + \left(\frac{P_1}{2} + P_2\right) \cdot sin(1.5 \cdot \alpha);$$

$$N_{34p} = H \cdot cos(2.5 \cdot \alpha) + \left(\frac{P_1}{2} + P_2 + P_3\right) \cdot sin(2.5 \cdot \alpha).$$

Определение усилий в шарнирной цепи от вертикальных нагрузок



Расчетная схема определения усилий шарнирной цепи от вертикальных нагрузок

$$N_{45p} = \frac{(V + P_4) \cdot sin(3 \cdot \alpha) + H \cdot sin(\alpha)}{cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad N_{56p} = N_{45p} + \frac{P_5}{cos(0.5 \cdot \alpha)};$$

$$N_{67p} = N_{78p} = N_{89p} = N_{56p};$$

$$R_{4p} = H \cdot cos(\alpha) + N_{45p} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha) - (V + P_4) \cdot cos(3 \cdot \alpha);$$

$R_{5p} = \left(N_{45p} + N_{56p}\right) \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right);$ $R_{6p} = \left(N_{56p} + N_{67p}\right) \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right);$

$R_{7p} = R_{8p} = R_{9p} = R_{6p}.$

Определение усилий в трехшарнирной арке от горизонтальных нагрузок

$H_{cr} = \dfrac{Q_1 \cdot F_1 + Q_2 \cdot F_2 + Q_3 \cdot F_3}{F_1};$ $H_{sk} = \dfrac{Q_2 \cdot \left(F_1 - F_2\right) + Q_3 \cdot \left(F_1 - F_3\right)}{F_1};$

$M_{2q} = \left(H_{cr} - Q_1\right) \cdot \left(F_1 - F_2\right);$ $M_{3q} = H_{sk} \cdot F_3;$

$N_{12q} = \left(H_{cr} - Q_1\right) \cdot cos\left(0.5 \cdot \alpha\right);$ $N_{23q} = \left(H_{cr} - Q_1 - Q_2\right) \cdot cos\left(1.5 \cdot \alpha\right);$

$N_{34q} = -H_{sk} \cdot cos\left(2.5 \cdot \alpha\right).$

Определение усилий в шарнирной цепи от горизонтальных нагрузок

$N_{45q} = -\dfrac{\left(H_{sk} + Q_4\right) \cdot cos\left(3 \cdot \alpha\right)}{cos\left(0.5 \cdot \alpha\right)};$ $N_{56q} = N_{67q} = N_{78q} = N_{89q} = N_{45q};$

$R_{4q} = -\left(H_{sk} + Q_4\right) \cdot sin\left(3 \cdot \alpha\right) + N_{45q} \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right);$ $R_{5q} = \left(N_{45q} + N_{56q}\right) \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right);$

$R_{6q} = R_{7q} = R_{8q} = R_{9q} = R_{5q}.$

Определение усилий в основной системе от единичных моментов

Определение усилий в трехшарнирной арке от единичного момента, приложенного в точке 1

$M_{11} = 1;$ $H_1 = \dfrac{M_{11}}{F_1};$

$M_{21} = H_1 \cdot F_2;$ $M_{31} = H_1 \cdot F_3;$

$N_{121} = -H_1 \cdot cos\left(0.5 \cdot \alpha\right);$ $N_{231} = -H_1 \cdot cos\left(1.5 \cdot \alpha\right);$ $N_{341} = -H_1 \cdot cos\left(2.5 \cdot \alpha\right).$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 1

$N_{451} = -\dfrac{H_1 \cdot sin\left(\alpha\right)}{cos\left(0.5 \cdot \alpha\right)};$ $N_{561} = N_{671} = N_{781} = N_{891} = N_{451};$

$R_{41} = N_{451} \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right) - H_1 \cdot cos\left(\alpha\right);$ $R_{51} = 2 \cdot N_{451} \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right);$ $R_{61} = R_{71} = R_{81} = R_{91} = R_{51}.$

Определение усилий в трехшарнирной арке от единичного момента, приложенного в точке 4

$M_{44} = 1$; $H_4 = \dfrac{M_{44}}{F_1};$

$M_{24} = M_{44} - H_4 \cdot F_2;$ $M_{34} = M_{44} - H_4 \cdot F_3;$

$N_{124} = H_4 \cdot cos\left(0.5 \cdot \alpha\right);$ $N_{234} = H_4 \cdot cos\left(1.5 \cdot \alpha\right);$ $N_{344} = H_4 \cdot cos\left(2.5 \cdot \alpha\right).$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 4

$N_{454} = \dfrac{H_4 \cdot sin\left(\alpha\right)}{cos\left(0.5 \cdot \alpha\right)} + \dfrac{M_{44} \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right)}{S \cdot cos\left(0.5 \cdot \alpha\right)};$ $N_{564} = N_{454} + \dfrac{M_{44} \cdot sin\left(0.5 \cdot \alpha\right)}{S \cdot cos\left(0.5 \cdot \alpha\right)};$

$N_{674} = N_{784} = N_{894} = N_{564};$

$$R_{41} = N_{451} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha) + H_4 \cdot cos(\alpha) + \frac{M_{44} \cdot cos(\alpha)}{S};$$

$$R_{51} = -\frac{M_{44} \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}{S} + (N_{454} + N_{564}) \cdot sin(0.5 \cdot \alpha);$$

$$R_{64} = 2 \cdot N_{564} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha); \qquad R_{74} = R_{84} = R_{94} = R_{64}.$$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 5

$$M_{55} = 1;$$

$$N_{455} = -\frac{M_{55} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha)}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad N_{565} = N_{455};$$

$$R_{45} = -\frac{M_{55}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)};$$

$$R_{55} = \frac{2 \cdot M_{55} \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}{S} + 2 \cdot N_{455} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha); R_{65} = -\frac{M_{55}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}.$$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 6

$$M_{66} = 1;$$

$$N_{566} = -\frac{M_{66} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha)}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad N_{676} = N_{566};$$

$$R_{56} = -\frac{M_{66}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad R_{66} = \frac{2 \cdot M_{66} \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}{S} + 2 \cdot N_{566} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha);$$

$$R_{76} = -\frac{M_{66}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}.$$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 7

$$M_{77} = 1;$$

$$N_{677} = -\frac{M_{77} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha)}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad N_{787} = N_{677};$$

$$R_{67} = -\frac{M_{77}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad R_{77} = \frac{2 \cdot M_{77} \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}{S} + 2 \cdot N_{677} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha);$$

$$R_{87} = -\frac{M_{77}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}.$$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 8

$$M_{88} = 1;$$

$$N_{788} = -\frac{M_{88} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha)}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad N_{898} = N_{788};$$

$$R_{78} = -\frac{M_{88}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}; \qquad R_{88} = \frac{2 \cdot M_{88} \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}{S} + 2 \cdot N_{788} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha);$$

$$R_{98} = -\frac{2 \cdot M_{88}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}.$$

Определение усилий в шарнирной цепи от единичного момента, приложенного в точке 9

$M_{99} = 1;$

$N_{899} = -\frac{M_{99} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha)}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)};$

$R_{89} = -\frac{M_{99}}{S \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)};$ $\quad R_{99} = \frac{2 \cdot M_{99} \cdot cos(0.5 \cdot \alpha)}{S} + 2 \cdot N_{899} \cdot sin(0.5 \cdot \alpha).$

Определение перемещений

$\delta_{11R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{41}{}^2 + R_{51}{}^2 + R_{61}{}^2 + R_{71}{}^2 + R_{81}{}^2 + R_{91}{}^2 \cdot 0.5\right);$

$\delta_{11M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left(M_{11}{}^2 + M_{11} \cdot M_{21} + 2 \cdot M_{21}{}^2 + M_{21} \cdot M_{31} + 2 \cdot M_{31}{}^2\right);$

$\delta_{11N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{121}{}^2 + N_{231}{}^2 + N_{341}{}^2 + N_{451}{}^2 + N_{561}{}^2 + N_{671}{}^2 + N_{781}{}^2 + N_{891}{}^2\right);$

$\delta_{11} = \delta_{11R} + \delta_{11M} + \delta_{11N};$

$\delta_{14R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{41} \cdot R_{44} + R_{51} \cdot R_{54} + R_{61} \cdot R_{64} + R_{71} \cdot R_{74} + R_{81} \cdot R_{84} + R_{91} \cdot R_{94} \cdot 0.5\right);$

$\delta_{14M} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(M_{11} \cdot M_{24} + 4 \cdot M_{21} \cdot M_{24} + M_{21} \cdot M_{34} + M_{31} \cdot M_{24} + 4 \cdot M_{31} \cdot M_{34} + M_{31} \cdot M_{44}\right);$

$\delta_{14N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{121} \cdot N_{124} + N_{231} \cdot N_{234} + N_{341} \cdot N_{344} + N_{451} \cdot N_{454} + \right.$

$\left. N_{561} \cdot N_{564} + N_{671} \cdot N_{674} + N_{781} \cdot N_{784} + N_{891} \cdot N_{894} \right);$

$\delta_{14} = \delta_{14R} + \delta_{14M} + \delta_{14N};$

$\delta_{15R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{41} \cdot R_{45} + R_{51} \cdot R_{55} + R_{61} \cdot R_{65}\right);\ \ \delta_{15M} = 0;$

$\delta_{15N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{451} \cdot N_{455} + N_{561} \cdot N_{565}\right);\ \ \delta_{15} = \delta_{15R} + \delta_{15M} + \delta_{15N};$

$\delta_{16R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{51} \cdot R_{56} + R_{61} \cdot R_{66} + R_{71} \cdot R_{76}\right);\ \ \delta_{16M} = 0;$

$\delta_{16N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{561} \cdot N_{566} + N_{671} \cdot N_{676}\right);\ \delta_{16} = \delta_{16R} + \delta_{16M} + \delta_{16N};$

$\delta_{17R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{61} \cdot R_{67} + R_{71} \cdot R_{77} + R_{81} \cdot R_{87}\right);\ \delta_{17M} = 0;$

$\delta_{17N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{671} \cdot N_{677} + N_{781} \cdot N_{787}\right);\ \delta_{17} = \delta_{17R} + \delta_{17M} + \delta_{17N};$

$\delta_{18R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{71} \cdot R_{78} + R_{81} \cdot R_{88} + R_{91} \cdot R_{98} \cdot 0.5\right);\qquad \delta_{18M} = 0;$

$\delta_{18N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{781} \cdot N_{788} + N_{891} \cdot N_{898}\right);\ \delta_{18} = \delta_{18R} + \delta_{18M} + \delta_{18N};$

$\delta_{19R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{81} \cdot R_{89} + R_{91} \cdot R_{99} \cdot 0.5\right);\qquad \delta_{19M} = 0;\qquad \delta_{19N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{891} \cdot N_{899};$

$\delta_{19} = \delta_{19R} + \delta_{19M} + \delta_{19N};$

$\delta_{44R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{44}{}^2 + R_{54}{}^2 + R_{64}{}^2 + R_{74}{}^2 + R_{84}{}^2 + R_{94}{}^2 \cdot 0.5\right);$

$\delta_{44M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left(2 \cdot M_{24}{}^2 + 2 \cdot M_{34}{}^2 + M_{24} \cdot M_{34} + 2 \cdot M_{44}{}^2 + M_{34} \cdot M_{44}\right);$

$$\delta_{44N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{124}{}^2 + N_{234}{}^2 + N_{344}{}^2 + N_{454}{}^2 + N_{564}{}^2 + N_{674}{}^2 + N_{784}{}^2 + N_{894}{}^2 \right);$$

$$\delta_{44} = \delta_{44R} + \delta_{44M} + \delta_{44N};$$

$$\delta_{45R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{44} \cdot R_{45} + R_{54} \cdot R_{55} + R_{64} \cdot R_{65} \right); \qquad \delta_{45M} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_{44} \cdot M_{55};$$

$$\delta_{45N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{454} \cdot N_{455} + N_{564} \cdot N_{565} \right);$$

$$\delta_{45} = \delta_{45R} + \delta_{45M} + \delta_{45N};$$

$$\delta_{46R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{54} \cdot R_{56} + R_{64} \cdot R_{66} + R_{74} \cdot R_{76} \right); \qquad \delta_{46M} = 0;$$

$$\delta_{46N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{564} \cdot N_{566} + N_{674} \cdot N_{676} \right);$$

$$\delta_{46} = \delta_{46R} + \delta_{46M} + \delta_{46N};$$

$$\delta_{47R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{64} \cdot R_{67} + R_{74} \cdot R_{77} + R_{84} \cdot R_{87} \right); \qquad \delta_{47M} = 0;$$

$$\delta_{47N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{674} \cdot N_{677} + N_{784} \cdot N_{787} \right);$$

$$\delta_{47} = \delta_{47R} + \delta_{47M} + \delta_{47N};$$

$$\delta_{48R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{74} \cdot R_{78} + R_{84} \cdot R_{88} + R_{94} \cdot R_{98} \cdot 0.5 \right); \qquad \delta_{48M} = 0;$$

$$\delta_{48N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{784} \cdot N_{788} + N_{894} \cdot N_{898} \right);$$

$$\delta_{48} = \delta_{48R} + \delta_{48M} + \delta_{48N};$$

$$\delta_{49R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{84} \cdot R_{89} + R_{94} \cdot R_{99} \cdot 0.5 \right); \qquad \delta_{49M} = 0; \qquad \delta_{49N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{894} \cdot N_{899};$$

$$\delta_{49} = \delta_{49R} + \delta_{49M} + \delta_{49N};$$

$$\delta_{55R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{45}{}^2 + R_{55}{}^2 + R_{65}{}^2 \right); \qquad \delta_{55M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot 2 \cdot M_{55}{}^2; \; \delta_{55N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{455}{}^2 + N_{565}{}^2 \right);$$

$$\delta_{55} = \delta_{55R} + \delta_{55M} + \delta_{55N};$$

$$\delta_{56R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{55} \cdot R_{56} + R_{65} \cdot R_{66} \right); \qquad \delta_{56M} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_{55} \cdot M_{66}; \; \delta_{56N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{565} \cdot N_{566};$$

$$\delta_{56} = \delta_{56R} + \delta_{56M} + \delta_{56N};$$

$$\delta_{57R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot R_{65} \cdot R_{67}; \qquad \delta_{57M} = 0; \qquad \delta_{57N} = 0;$$

$$\delta_{57} = \delta_{57R} + \delta_{57M} + \delta_{57N};$$

$$\delta_{58R} = 0; \qquad \delta_{58M} = 0; \qquad \delta_{58N} = 0;$$

$$\delta_{58} = \delta_{58R} + \delta_{58M} + \delta_{58N};$$

$$\delta_{59R} = 0; \qquad \delta_{59M} = 0; \qquad \delta_{59N} = 0;$$

$$\delta_{59} = \delta_{59R} + \delta_{59M} + \delta_{59N};$$

$$\delta_{66R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{56}{}^2 + R_{66}{}^2 + R_{76}{}^2 \right); \qquad \delta_{66M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot 2 \cdot M_{66}{}^2; \quad \delta_{66N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{566}{}^2 + N_{676}{}^2 \right);$$

$$\delta_{66} = \delta_{66R} + \delta_{66M} + \delta_{66N};$$

$$\delta_{67R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{66} \cdot R_{67} + R_{76} \cdot R_{77} \right); \qquad \delta_{67M} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_{66} \cdot M_{77}; \; \delta_{67N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{676} \cdot N_{677};$$

$\delta_{67} = \delta_{67R} + \delta_{67M} + \delta_{67N}$;

$\delta_{68R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot R_{76} \cdot R_{78}$; $\delta_{68M} = 0$; $\delta_{68N} = 0$;

$\delta_{68} = \delta_{68R} + \delta_{68M} + \delta_{68N}$;

$\delta_{69R} = 0$; $\delta_{69M} = 0$; $\delta_{69N} = 0$;

$\delta_{69} = \delta_{69R} + \delta_{69M} + \delta_{69N}$;

$\delta_{77R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{67}^{\ 2} + R_{77}^{\ 2} + R_{87}^{\ 2}\right)$; $\delta_{77M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot 2 \cdot M_{77}^{\ 2}$; $\delta_{77N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{677}^{\ 2} + N_{787}^{\ 2}\right)$;

$\delta_{77} = \delta_{77R} + \delta_{77M} + \delta_{77N}$;

$\delta_{78R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{77} \cdot R_{78} + R_{87} \cdot R_{88}\right)$; $\delta_{78M} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_{77} \cdot M_{88}$; $\delta_{78N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{787} \cdot N_{788}$;

$\delta_{78} = \delta_{78R} + \delta_{78M} + \delta_{78N}$;

$\delta_{79R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot R_{87} \cdot R_{89}$; $\delta_{79M} = 0$; $\delta_{79N} = 0$;

$\delta_{79} = \delta_{79R} + \delta_{79M} + \delta_{79N}$;

$\delta_{88R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{78}^{\ 2} + R_{88}^{\ 2} + R_{98}^{\ 2} \cdot 0.5\right)$; $\delta_{88M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot 2 \cdot M_{88}^{\ 2}$; $\delta_{88N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{788}^{\ 2} + N_{898}^{\ 2}\right)$;

$\delta_{88} = \delta_{88R} + \delta_{88M} + \delta_{88N}$;

$\delta_{89R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{88} \cdot R_{89} + R_{98} \cdot R_{99} \cdot 0.5\right)$; $\delta_{89M} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot M_{88} \cdot M_{99}$;

$\delta_{89N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{898} \cdot N_{899}$;

$\delta_{89} = \delta_{89R} + \delta_{89M} + \delta_{89N}$;

$\delta_{99R} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{89}^{\ 2} + R_{99}^{\ 2} \cdot 0.5\right)$; $\delta_{99M} = 2 \cdot \frac{S}{3 \cdot E \cdot I} \cdot M_{99}^{\ 2}$; $\delta_{99N} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{899}^{\ 2}$;

$\delta_{99} = \delta_{99R} + \delta_{99M} + \delta_{99N}$;

$\delta_{1pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{41} \cdot R_{4p} + R_{51} \cdot R_{5p} + R_{61} \cdot R_{6p} + R_{71} \cdot R_{7p} + R_{81} \cdot R_{8p} + R_{91} \cdot R_{9p} \cdot 0.5\right)$;

$\delta_{1pM} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(4 \cdot M_{2p} \cdot M_{21} + M_{2p} \cdot M_{11} + 4 \cdot M_{3p} \cdot M_{31} + M_{3p} \cdot M_{21} + M_{2p} \cdot M_{31}\right)$;

$\delta_{1pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{12p} \cdot N_{121} + N_{23p} \cdot N_{231} + N_{34p} \cdot N_{341} + N_{45p} \cdot N_{451} +\right.$

$\left. N_{56p} \cdot N_{561} + N_{67p} \cdot N_{671} + N_{78p} \cdot N_{781} + N_{89p} \cdot N_{891}\right)$;

$\delta_{1p} = \delta_{1pR} + \delta_{1pM} + \delta_{1pN}$;

$\delta_{4pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{44} \cdot R_{4p} + R_{54} \cdot R_{5p} + R_{64} \cdot R_{6p} + R_{74} \cdot R_{7p} + R_{84} \cdot R_{8p} + R_{94} \cdot R_{9p} \cdot 0.5\right)$;

$\delta_{4pM} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(4 \cdot M_{2p} \cdot M_{24} + 4 \cdot M_{3p} \cdot M_{34} + M_{3p} \cdot M_{24} + M_{2p} \cdot M_{34} + M_{3p} \cdot M_{44}\right)$;

$\delta_{4pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{12p} \cdot N_{124} + N_{23p} \cdot N_{234} + N_{34p} \cdot N_{344} + N_{45p} \cdot N_{454} +\right.$

$\left. N_{56p} \cdot N_{564} + N_{67p} \cdot N_{674} + N_{78p} \cdot N_{784} + N_{89p} \cdot N_{894}\right)$;

$\delta_{4p} = \delta_{4pR} + \delta_{4pM} + \delta_{4pN}$;

$$\delta_{5pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{45} \cdot R_{4p} + R_{55} \cdot R_{5p} + R_{65} \cdot R_{6p} \right); \qquad \delta_{5pM} = 0;$$

$$\delta_{5pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{45p} \cdot N_{455} + N_{56p} \cdot N_{565} \right);$$

$$\delta_{5p} = \delta_{5pR} + \delta_{5pM} + \delta_{5pN};$$

$$\delta_{6pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{56} \cdot R_{5p} + R_{66} \cdot R_{6p} + R_{76} \cdot R_{7p} \right); \qquad \delta_{6pM} = 0;$$

$$\delta_{6pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{56p} \cdot N_{566} + N_{67p} \cdot N_{676} \right);$$

$$\delta_{6p} = \delta_{6pR} + \delta_{6pM} + \delta_{6pN};$$

$$\delta_{7pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{67} \cdot R_{6p} + R_{77} \cdot R_{7p} + R_{87} \cdot R_{8p} \right); \qquad \delta_{7pM} = 0;$$

$$\delta_{7pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{67p} \cdot N_{677} + N_{78p} \cdot N_{787} \right);$$

$$\delta_{7p} = \delta_{7pR} + \delta_{7pM} + \delta_{7pN};$$

$$\delta_{8pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{78} \cdot R_{7p} + R_{88} \cdot R_{8p} + R_{98} \cdot R_{9p} \cdot 0.5 \right); \qquad \delta_{8pM} = 0;$$

$$\delta_{8pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{78p} \cdot N_{788} + N_{89p} \cdot N_{898} \right);$$

$$\delta_{8p} = \delta_{8pR} + \delta_{8pM} + \delta_{8pN};$$

$$\delta_{9pR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{89} \cdot R_{8p} + R_{99} \cdot R_{9p} \cdot 0.5 \right); \qquad \delta_{9pM} = 0; \qquad \delta_{9pN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{89p} \cdot N_{899};$$

$$\delta_{9p} = \delta_{9pR} + \delta_{9pM} + \delta_{9pN};$$

$$\delta_{1qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{41} \cdot R_{4q} + R_{51} \cdot R_{5q} + R_{61} \cdot R_{6q} + R_{71} \cdot R_{7q} + R_{81} \cdot R_{8q} + R_{91} \cdot R_{9q} \cdot 0.5 \right);$$

$$\delta_{1qM} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(4 \cdot M_{2q} \cdot M_{21} + M_{2q} \cdot M_{11} + 4 \cdot M_{3q} \cdot M_{31} + M_{3q} \cdot M_{21} + M_{2q} \cdot M_{31} \right);$$

$$\delta_{1qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{12q} \cdot N_{121} + N_{23q} \cdot N_{231} + N_{34q} \cdot N_{341} + N_{45q} \cdot N_{451} + \right.$$

$$\left. N_{56q} \cdot N_{561} + N_{67q} \cdot N_{671} + N_{78q} \cdot N_{781} + N_{89q} \cdot N_{891} \right);$$

$$\delta_{1q} = \delta_{1qR} + \delta_{1qM} + \delta_{1qN};$$

$$\delta_{4qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{44} \cdot R_{4q} + R_{54} \cdot R_{5q} + R_{64} \cdot R_{6q} + R_{74} \cdot R_{7q} + R_{84} \cdot R_{8q} + R_{94} \cdot R_{9q} \cdot 0.5 \right);$$

$$\delta_{4qM} = 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(4 \cdot M_{qp} \cdot M_{24} + 4 \cdot M_{qp} \cdot M_{34} + M_{3q} \cdot M_{24} + M_{2q} \cdot M_{34} + M_{3q} \cdot M_{44} \right);$$

$$\delta_{4qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{12q} \cdot N_{124} + N_{23q} \cdot N_{234} + N_{34q} \cdot N_{344} + N_{45q} \cdot N_{454} + \right.$$

$$\left. N_{56q} \cdot N_{564} + N_{67q} \cdot N_{674} + N_{78q} \cdot N_{784} + N_{89q} \cdot N_{894} \right);$$

$$\delta_{4q} = \delta_{4qR} + \delta_{4qM} + \delta_{4qN};$$

$$\delta_{5qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{45} \cdot R_{4q} + R_{55} \cdot R_{5q} + R_{65} \cdot R_{6q} \right); \qquad \delta_{5qM} = 0;$$

$$\delta_{5qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{45q} \cdot N_{455} + N_{56q} \cdot N_{565} \right);$$

$$\delta_{5q} = \delta_{5qR} + \delta_{5qM} + \delta_{5qN};$$

$$\delta_{6qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{56} \cdot R_{5q} + R_{66} \cdot R_{6q} + R_{76} \cdot R_{7q} \right); \qquad \delta_{6qM} = 0;$$

$$\delta_{6qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{56q} \cdot N_{566} + N_{67q} \cdot N_{676} \right);$$

$$\delta_{6q} = \delta_{6qR} + \delta_{6qM} + \delta_{6qN};$$

$$\delta_{7qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{67} \cdot R_{6q} + R_{77} \cdot R_{7q} + R_{87} \cdot R_{8q} \right); \qquad \delta_{7qM} = 0;$$

$$\delta_{7qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{67q} \cdot N_{677} + N_{78q} \cdot N_{787} \right);$$

$$\delta_{7q} = \delta_{7qR} + \delta_{7qM} + \delta_{7qN};$$

$$\delta_{8qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{78} \cdot R_{7q} + R_{88} \cdot R_{8q} + R_{98} \cdot R_{9q} \cdot 0.5 \right); \qquad \delta_{8qM} = 0;$$

$$\delta_{8qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot \left(N_{78q} \cdot N_{788} + N_{89q} \cdot N_{898} \right);$$

$$\delta_{8q} = \delta_{8qR} + \delta_{8qM} + \delta_{8qN};$$

$$\delta_{9qR} = 2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(R_{89} \cdot R_{8q} + R_{99} \cdot R_{9q} \cdot 0.5 \right); \qquad \delta_{9qM} = 0; \qquad \delta_{9qN} = 2 \cdot \frac{S}{E \cdot F} \cdot N_{89q} \cdot N_{899};$$

$$\delta_{9q} = \delta_{9qR} + \delta_{9qM} + \delta_{9qN}.$$

Определение лишних неизвестных

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} & \delta_{17} & \delta_{18} & \delta_{19} \\ \delta_{14} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} & \delta_{47} & \delta_{48} & \delta_{49} \\ \delta_{15} & \delta_{45} & \delta_{55} & \delta_{56} & \delta_{57} & \delta_{58} & \delta_{59} \\ \delta_{16} & \delta_{46} & \delta_{56} & \delta_{66} & \delta_{67} & \delta_{68} & \delta_{69} \\ \delta_{17} & \delta_{47} & \delta_{57} & \delta_{67} & \delta_{77} & \delta_{78} & \delta_{79} \\ \delta_{18} & \delta_{48} & \delta_{58} & \delta_{68} & \delta_{78} & \delta_{88} & \delta_{89} \\ \delta_{19} & \delta_{49} & \delta_{59} & \delta_{69} & \delta_{79} & \delta_{89} & \delta_{99} \end{bmatrix} \qquad \Delta_{pq} = \begin{bmatrix} \delta_{1p} + \delta_{1q} \\ \delta_{4p} + \delta_{4q} \\ \delta_{5p} + \delta_{5q} \\ \delta_{6p} + \delta_{6q} \\ \delta_{7p} + \delta_{7q} \\ \delta_{8p} + \delta_{8q} \\ \delta_{9p} + \delta_{9q} \end{bmatrix} \qquad X = -\Delta_1^{-1} \cdot \Delta_{pq} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix}$$

Определение внутренних усилий

$$M_1 = M_{11} \cdot X_1; \qquad N_{12} = N_{121} \cdot X_1 + N_{124} \cdot X_4 + N_{12p} + N_{12q};$$

$$M_2 = M_{21} \cdot X_1 + M_{24} \cdot X_4 + M_{2p} + M_{2q}; \qquad N_{23} = N_{231} \cdot X_1 + N_{234} \cdot X_4 + N_{23p} + N_{23q};$$

$$M_3 = M_{31} \cdot X_1 + M_{34} \cdot X_4 + M_{3p} + M_{3q}; \qquad N_{34} = N_{341} \cdot X_1 + N_{344} \cdot X_4 + N_{34p} + N_{34q};$$

$$M_4 = M_{44} \cdot X_4; \qquad N_{45} = N_{451} \cdot X_1 + N_{454} \cdot X_4 + N_{455} \cdot X_5 + N_{45p} + N_{45q};$$

$$M_5 = M_{55} \cdot X_5; \qquad N_{56} = N_{561} \cdot X_1 + N_{564} \cdot X_4 + N_{565} \cdot X_5 + N_{566} \cdot X_6 + N_{56p} + N_{56q};$$

$$M_6 = M_{66} \cdot X_6; \qquad N_{67} = N_{671} \cdot X_1 + N_{674} \cdot X_4 + N_{676} \cdot X_6 + N_{677} \cdot X_7 + N_{67p} + N_{67q};$$

$$M_7 = M_{77} \cdot X_7; \qquad N_{78} = N_{781} \cdot X_1 + N_{784} \cdot X_4 + N_{787} \cdot X_7 + N_{788} \cdot X_8 + N_{78p} + N_{78q};$$

$$M_8 = M_{88} \cdot X_8; \qquad N_{89} = N_{891} \cdot X_1 + N_{894} \cdot X_4 + N_{898} \cdot X_8 + N_{899} \cdot X_9 + N_{89p} + N_{89q};$$

$$M_9 = M_{99} \cdot X_9.$$

Определение упругих реакций

$$R_1 = R_2 = R_3 = 0;$$

$$R_4 = R_{41} \cdot X_1 + R_{44} \cdot X_4 + R_{45} \cdot X_5 + R_{4p} + R_{4q};$$

$$R_5 = R_{51} \cdot X_1 + R_{54} \cdot X_4 + R_{55} \cdot X_5 + R_{56} \cdot X_6 + R_{5p} + R_{5q};$$

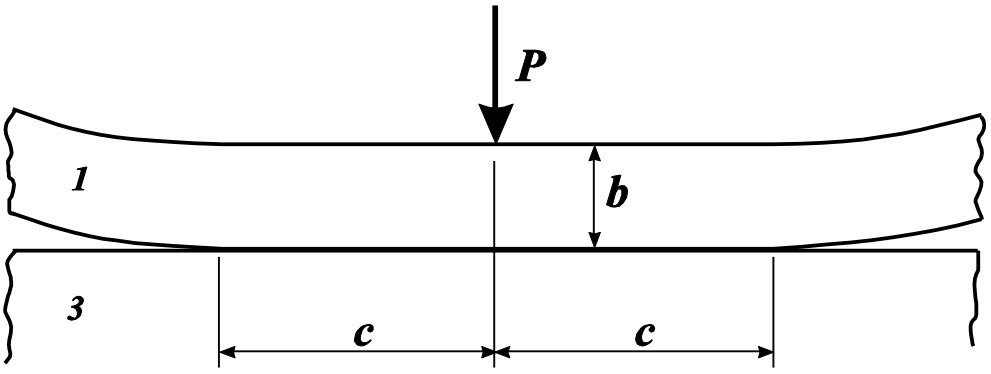
$$R_6 = R_{61} \cdot X_1 + R_{64} \cdot X_4 + R_{65} \cdot X_5 + R_{66} \cdot X_6 + R_{67} \cdot X_7 + R_{6p} + R_{6q};$$

$$R_7 = R_{71} \cdot X_1 + R_{74} \cdot X_4 + R_{76} \cdot X_6 + R_{77} \cdot X_7 + R_{78} \cdot X_8 + R_{7p} + R_{7q};$$

$$R_8 = R_{81} \cdot X_1 + R_{84} \cdot X_4 + R_{87} \cdot X_7 + R_{88} \cdot X_8 + R_{89} \cdot X_9 + R_{8p} + R_{8q};$$

$$R_9 = R_{91} \cdot X_1 + R_{94} \cdot X_4 + R_{98} \cdot X_8 + R_{99} \cdot X_9 + R_{9p} + R_{9q}.$$

Контакт с отставанием для слоя и основания при действии на слой сосредоточенной поперечной силы



Цель: Определение размера зоны контакта слоя с основанием при действии на слой сосредоточенной поперечной силы в конструктивно нелинейной постановке.

Имя файла с исходными данными: **Contact_3_731.SPR**

Формулировка задачи: Упругий слой высотой b размещается на упругом основании с возможностью проскальзывания и подвергается воздействию по верхней поверхности сосредоточенной поперечной силы P. Определить размер зоны контакта слоя с основанием $2 \cdot c$.

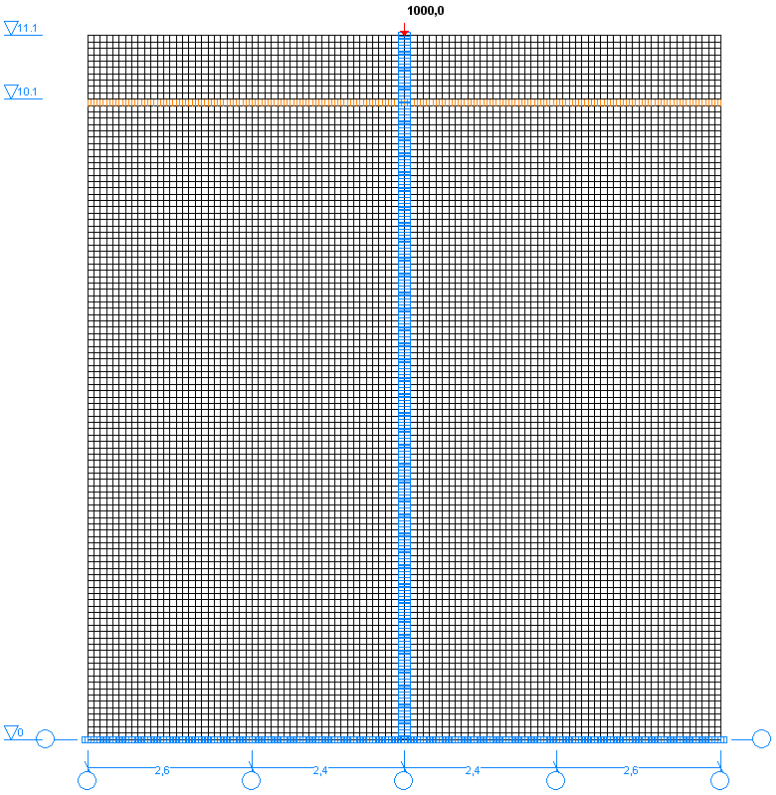
Ссылки: К. Джонсон, Механика контактного взаимодействия, Москва, Мир, 1989, стр. 163

Исходные данные:

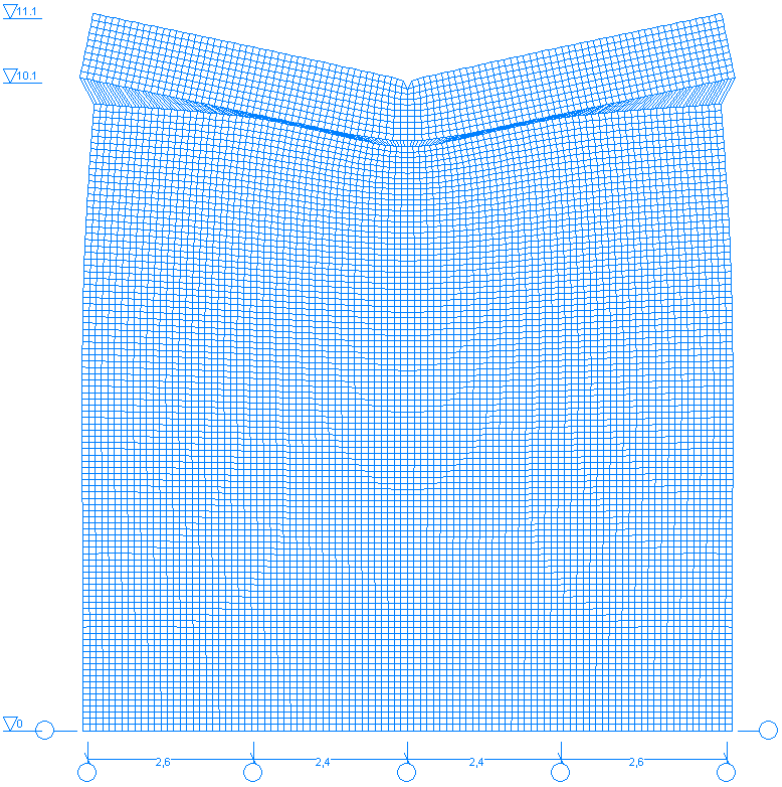
$E_1 = 21.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала слоя;
$\nu_1 = 0.3$	- коэффициент Пуассона материала слоя;
$E_3 = 3.0 \cdot 10^7$ кН/м^2	- модуль упругости материала основания;
$\nu_3 = 0.2$	- коэффициент Пуассона материала основания;
b = 1.00 м	- высота слоя;
L = 10.00 м	- длина слоя и основания в модели;
H = 10.00 м	- высота основания в модели;
P = 1000 кН	- значение сосредоточенной силы, расположенной на верхней поверхности слоя.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама. Элементы слоя – 1000 восьмиузловых элементов балки-стенки типа 30. Сетка конечных элементов разбита по высоте и длине слоя с шагом 0.1 м. Элементы основания – 10000 восьмиузловых элементов балки-стенки типа 30. Сетка конечных элементов разбита по высоте и длине основания с шагом 0.1 м. Для моделирования контакта с отставанием между нижней поверхностью слоя и верхней поверхностью основания вводится 201 элемент односторонних двухузловых связей типа 352 повышенной жесткости $k = 1.0 \cdot 10^9$ кН/м, каждый из которых попарно по вертикали соединяет узлы слоя и основания. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на нижней поверхности основания по направлению степени свободы Z. Для обеспечения геометрической неизменяемости системы по вертикальной оси симметрии слоя и основания (вдоль действия силы P) вводятся связи по направлению степени свободы X. Воздействие задается в виде поперечной узловой нагрузки P (по направлению оси Z общей системы координат). Нелинейное загружение формировалось для шагово-итерационного метода с коэффициентом загружения - 1, количеством шагов - 1, количеством итераций - 10 для линейного загружения P. Количество узлов в расчетной схеме – 33622.

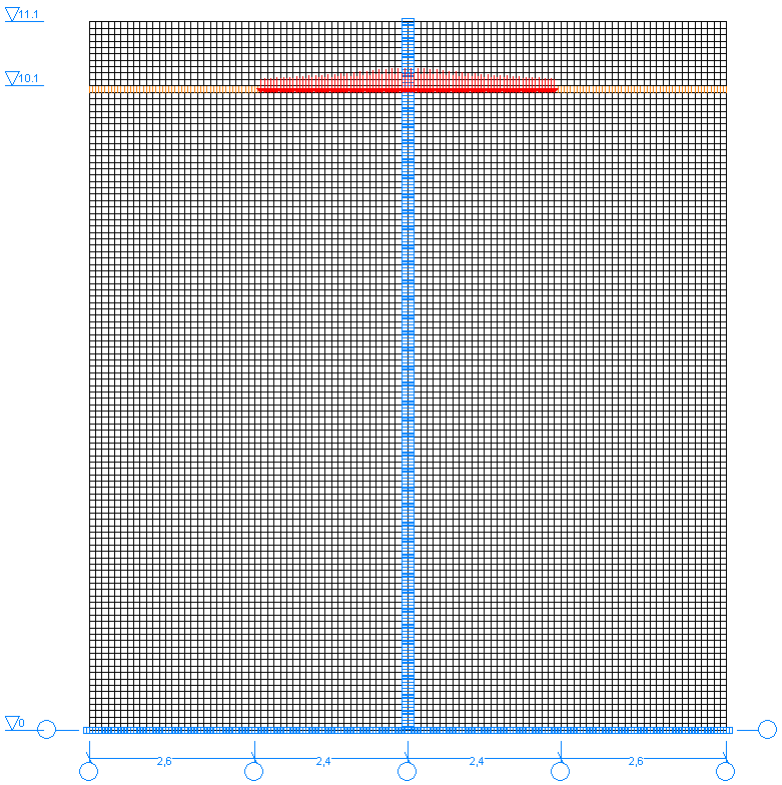
Результаты решения в SCAD



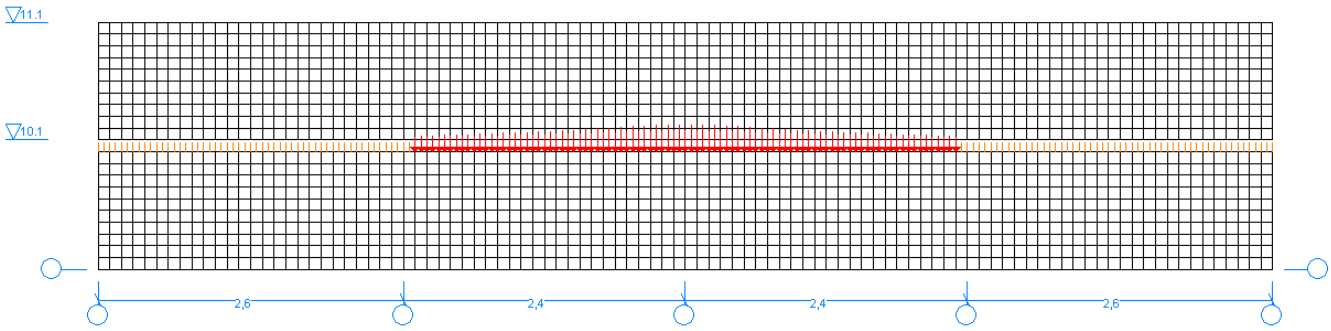
Расчетная схема



Деформированная схема



Размер зоны контакта с основанием, контактные напряжения



Размер зоны контакта с основанием, контактные напряжения (фрагмент схемы)

Сравнение решений:

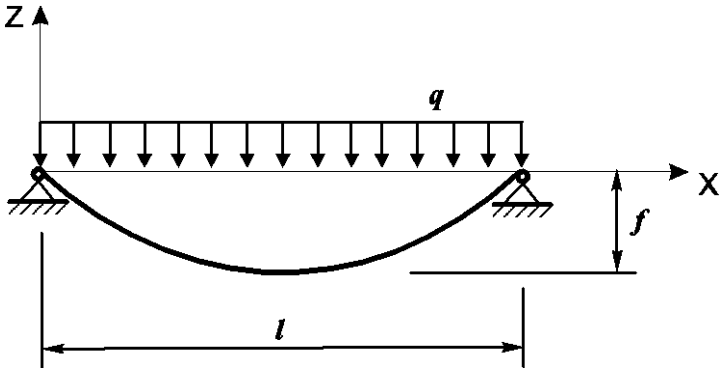
Размер зоны контакта с основанием 2·c, м

Теория	SCAD	Отклонение, %
4.78	4.60	3.77

Замечания: При аналитическом решении размер зоны контакта с основанием $2 \cdot c$ определяется по следующей формуле:

$$2 \cdot c = 2 \cdot b \cdot \sqrt[3]{1.845 \cdot \frac{1-\nu_3^{\,2}}{E_3} \cdot \frac{E_1}{1-\nu_1^{\,2}}}.$$

Гибкая нить с опорами в одном уровне под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния гибкой нити с опорами в одном уровне от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки *q*.

Имя файла с исходными данными: **NL_CANAT_v11.3.SPR**

Формулировка задачи: Гибкая нить с опорами в одном уровне находится под воздействием поперечной равномерно распределенной нагрузки q от собственного веса γ. Определить стрелу провеса *f* и натяжение σ гибкой нити.

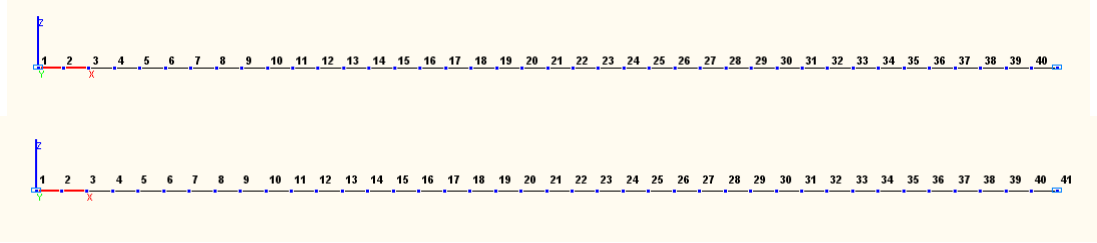
Ссылки: С.П. Фесик, Справочник по сопротивлению материалов, изд. 2-е, Киев, Будівельник, 1982, стр. 33.

Исходные данные:

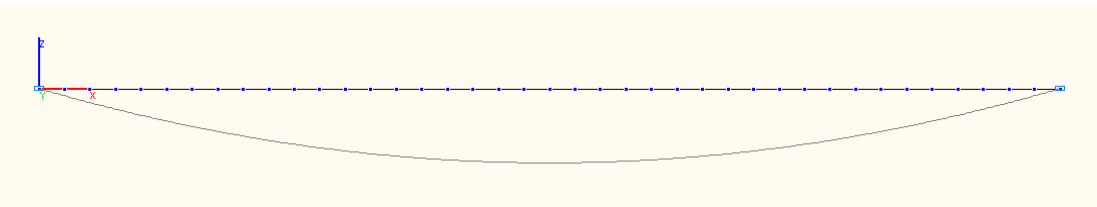
$E = 1.0 \cdot 10^7$ тс/м^2	- модуль упругости нити;
l = 40.0 м	- длина пролета (заготовки) гибкой нити;
d = 0.04 м	- диаметр поперечного сечения гибкой нити;
$\gamma = 8.0$ тс/м^3	- значение объемного веса материала гибкой нити.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, 40 элементов типа 302. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей в опорных узлах гибкой нити по направлениям степеней свободы X, Z. Воздействие поперечной равномерно распределенной нагрузки задается в виде $q = \gamma \cdot F$, где $F = \pi \cdot d^2/4$. Количество узлов в расчетной схеме – 41. Расчет производится в геометрически нелинейной постановке простым шаговым методом со следующими параметрами: коэффициент загружения 0.01, количество шагов 100.

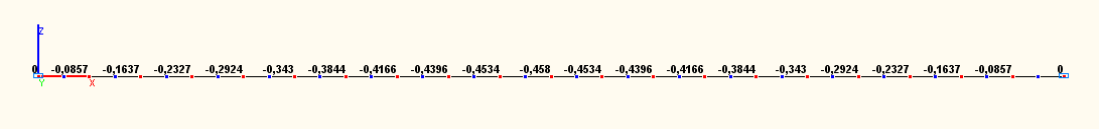
Результаты решения в SCAD



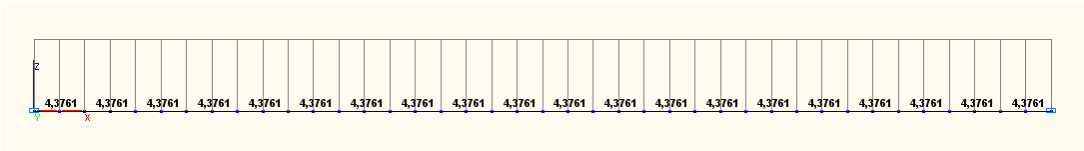
Расчетная схема



Деформированная схема



Значения вертикальных перемещений Z (м)



Эпюра продольных сил N (тс)

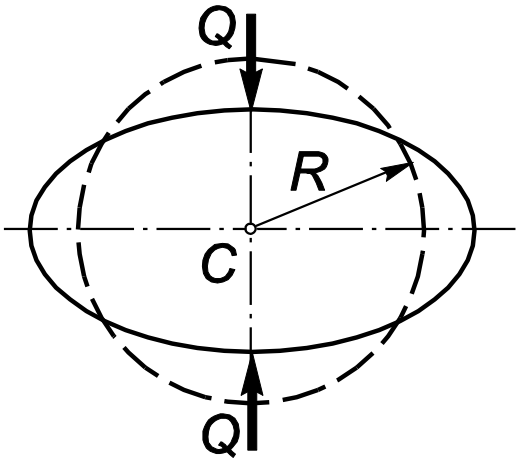
Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
Стрела провеса *f* гибкой нити, м	-0.4579	-0.4580	0.02
Натяжение σ гибкой нити, тс/м^2	3494.3	4.3761 / (3.1416 · 0.04^2/4) = 3482.4	0.34

Замечания: При аналитическом решении стрела провеса *f* и натяжение σ гибкой нити определяются по следующим формулам:

$$f = \frac{l}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \gamma \cdot l}{8 \cdot E}}; \qquad \sigma = \frac{\gamma \cdot l^2}{8 \cdot f}.$$

Гибкое кольцо, нагруженное двумя взаимно уравновешенными радиально сжимающими силами



Цель: Определение максимальных перемещений и изгибающих моментов в гибком кольце, нагруженном двумя взаимно уравновешенными радиально сжимающими силами в геометрически нелинейной постановке.

Файлы с исходными данными:

Имя файла	Описание файла расчета
Кольцо_Q_50.SPR	Гибкое кольцо нагружено радиально сжимающими силами Q = 50 кН

Формулировка задачи: Гибкое кольцо постоянного поперечного сечения нагружено двумя взаимно уравновешенными радиально сжимающими силами Q. Определить: поперечные перемещения w и изгибающие моменты M в местах приложения сжимающих сил.

***Ссылки*:** Е.П. Попов, Теория и расчет гибких упругих стержней, Москва, Наука, 1986, стр. 154

Исходные данные:

$EF = 1.5 \cdot 10^7$ кН - продольная жесткость поперечного сечения кольца;

$EI_y = 3.125 \cdot 10^5$ кН·м^2 - изгибная жесткость поперечного сечения кольца в его плоскости;

$EI_z = 1.250 \cdot 10^6$ кН·м^2 - изгибная жесткость поперечного сечения кольца из его плоскости;

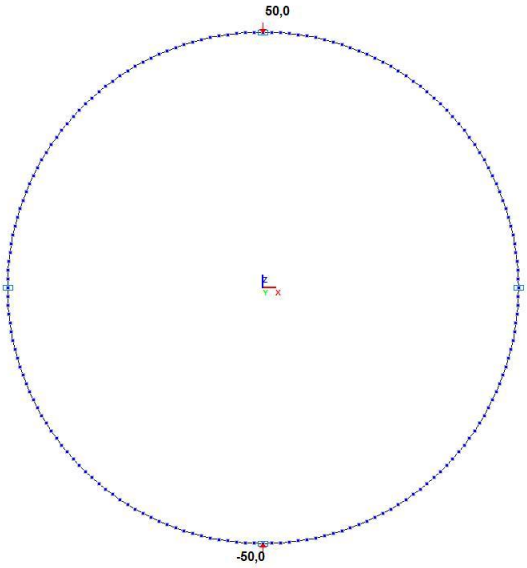
$GI_x = 3.533 \cdot 10^5$ кН·м^2 - крутильная жесткость поперечного сечения кольца;

R = 50.0 м - радиус кольца;

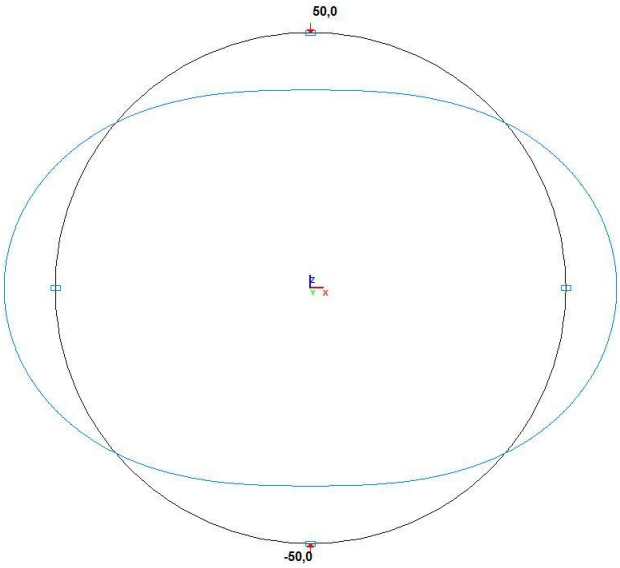
Q = 50 кН - значение сжимающих сил.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Элементы пластины - 180 стержневых элементов с учетом геометрической нелинейности типа 310. Сетка конечных элементов разбита по длине продольной оси кольца с шагом 2.0º. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связей по условиям ее симметрии. Нелинейное загружение формировалось для шагово-итерационного метода с коэффициентом загружения - 1, количеством шагов - 1, количеством итераций - 7 для линейного загружения Q. Количество узлов в расчетной схеме – 180.

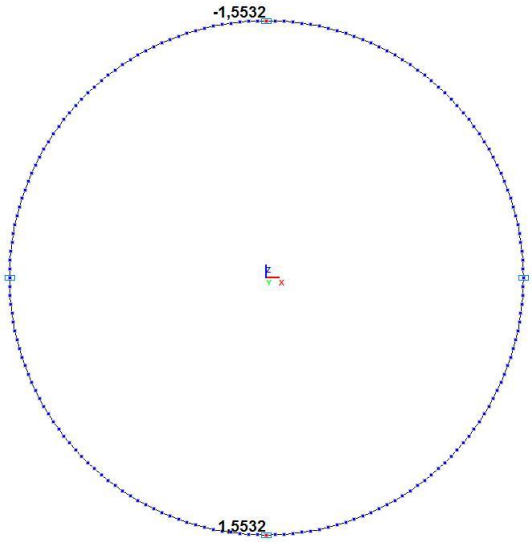
Результаты решения в SCAD



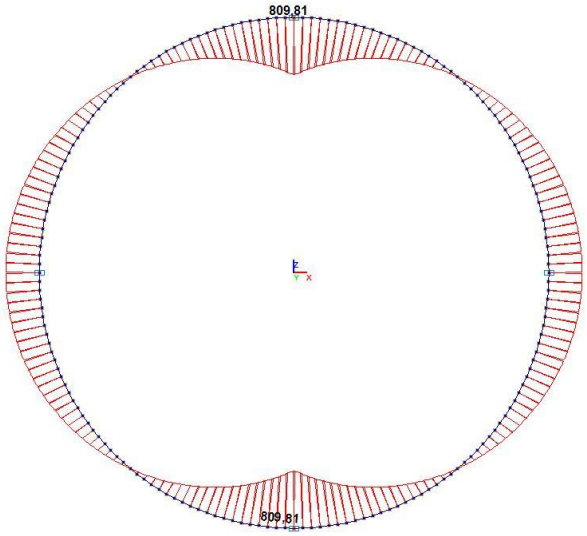
Расчетная схема



Деформированная схема



Значения поперечных перемещений w (м)



Эпюры изгибающих моментов M (кН·м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение сечения кольца w, м в местах приложения сжимающих сил Q = 50 кН	±1.6060	±1.5532	3.29
Изгибающий момент для сечения кольца M, кН·м в местах приложения сжимающих сил Q = 50 кН	809.37	809.81	0.05

Замечания: При аналитическом решении поперечные перемещения *w* и изгибающие моменты M в местах приложения сжимающих сил определяются по следующим формулам:

При $0 \le Q \le 0.6297 \cdot \frac{EI}{R^2}$:

$$w = \left[\frac{2}{k} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot EI}{Q \cdot R^2}} \cdot E\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{2}{k^2} - 1\right) \cdot \frac{\pi}{2} \right] \cdot R; \qquad M = \frac{2}{k} \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{Q \cdot EI}{2}} - \frac{EI}{R},$$

где k определяется из решения уравнения: $k \cdot F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi \cdot R}{2} \cdot \sqrt{\frac{Q}{2 \cdot EI}};$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}$ – эллиптический интеграл Лежандра первого рода,

$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \cdot d\varphi$ – эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

При $0.6297 \cdot \frac{EI}{R^2} \le Q \le 2.7865 \cdot \frac{EI}{R^2}$:

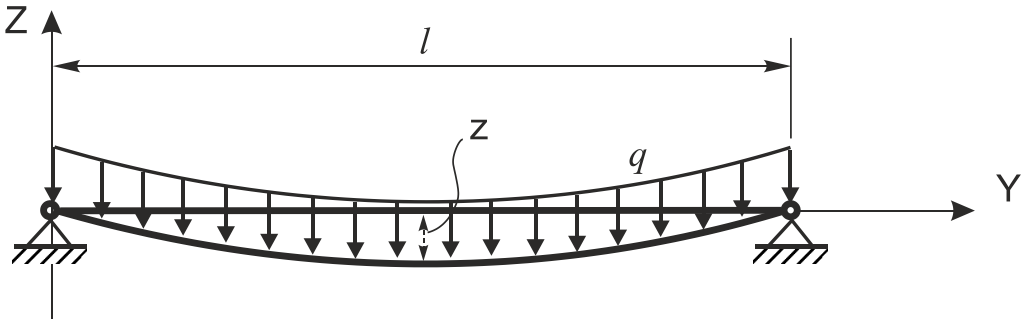
$$w = \left[2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot EI}{Q \cdot R^2}} \cdot E(\Psi) - \frac{\pi}{2} \right] \cdot R; \qquad M = 2 \cdot k \cdot \cos(\Psi) \cdot \sqrt{\frac{Q \cdot EI}{2}} - \frac{EI}{R},$$

где k и Ψ определяются из решения системы уравнений: $\begin{cases} k \cdot sin(\Psi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ F(\Psi) = \dfrac{\pi \cdot R}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{Q}{2 \cdot EI}} \end{cases}$;

$F(\Psi) = \int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot sin^2(\psi)}}$ – эллиптический интеграл Лежандра первого рода,

$E(\Psi) = \int_0^{\Psi} \sqrt{1 - k^2 \cdot sin^2(\psi)} \cdot d\psi$ – эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

Гибкая длинная прямоугольная пластина, шарнирно опертая по продольным кромкам, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки.



Цель: Определение напряженно-деформированного состояния гибкой длинной прямоугольной пластины, шарнирно опертой по продольным кромкам, от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Имя файла с исходными данными: **NEL.SPR**

Формулировка задачи: Гибкая длинная прямоугольная пластина, шарнирно опертая по продольным кромкам, находится под воздействием поперечной равномерно распределенной по ее площади нагрузки q. Определить поперечное перемещение Z деформированной срединной поверхности, а также максимальные σ_{yd} и минимальные σ_{yt} нормальные напряжения по сечению в половине пролета пластины.

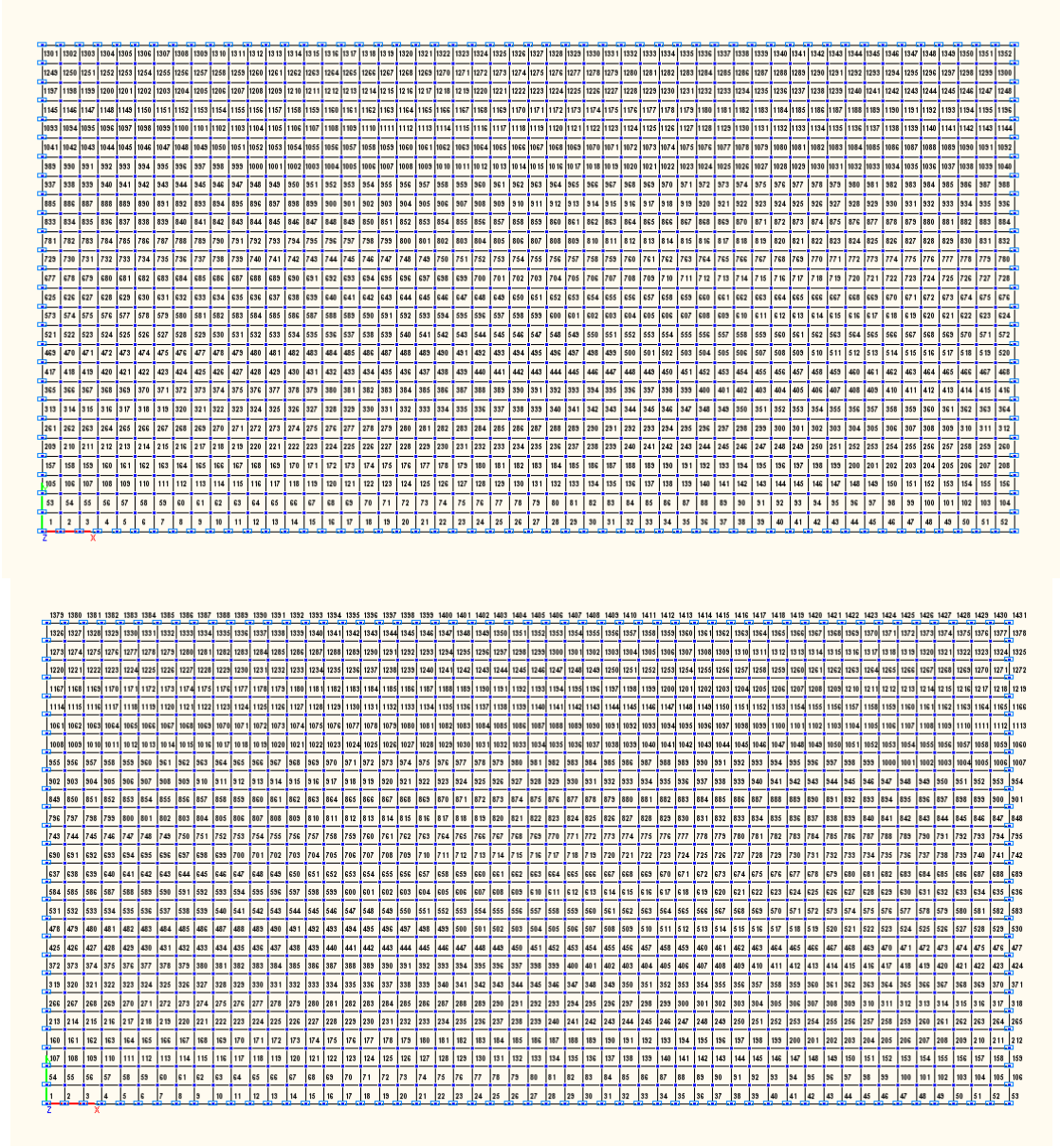
Ссылки: С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластины и оболочки, Москва, Физматгиз, 1963, стр. 20.

Исходные данные:

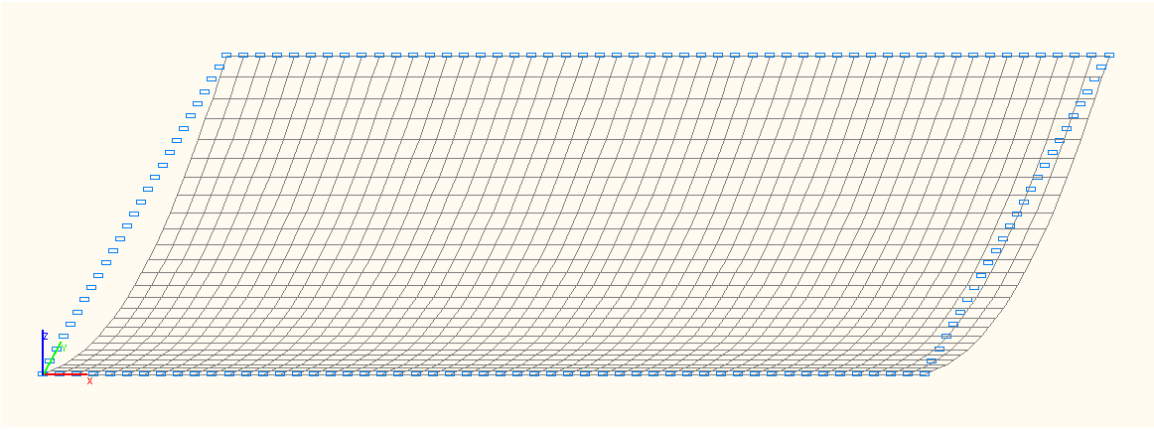
$E = 2.1 \cdot 10^6$ кгс/см^2	- модуль упругости;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
h = 1.3 см	- толщина пластины;
l = 130.0 см	- размер короткой стороны пластины (вдоль оси Y общей системы координат);
b = 260.0 см	- размер элементарной полосы длинной стороны пластины (вдоль оси X общей системы координат);
q = 1.4 кгс/см^2	- значение поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 1352 элемента плиты типа 341. Сетка конечных элементов разбита по длинам сторон пластины (вдоль осей X, Y общей системы координат) с шагом 5.0 см. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Y, Z для длинных кромок, расположенных вдоль оси X общей системы координат, из условий шарнирного опирания и по направлениям степеней свободы X, UY для коротких кромок, расположенных вдоль оси Y общей системы координат, из условий цилиндрического изгиба элементарной полосы длинной стороны пластины. Количество узлов в расчетной схеме 1431. Расчет производится в геометрически нелинейной постановке шагово-итерационным методом со следующими параметрами: коэффициент загружения 0.1, количество шагов 10, количество итераций 30.

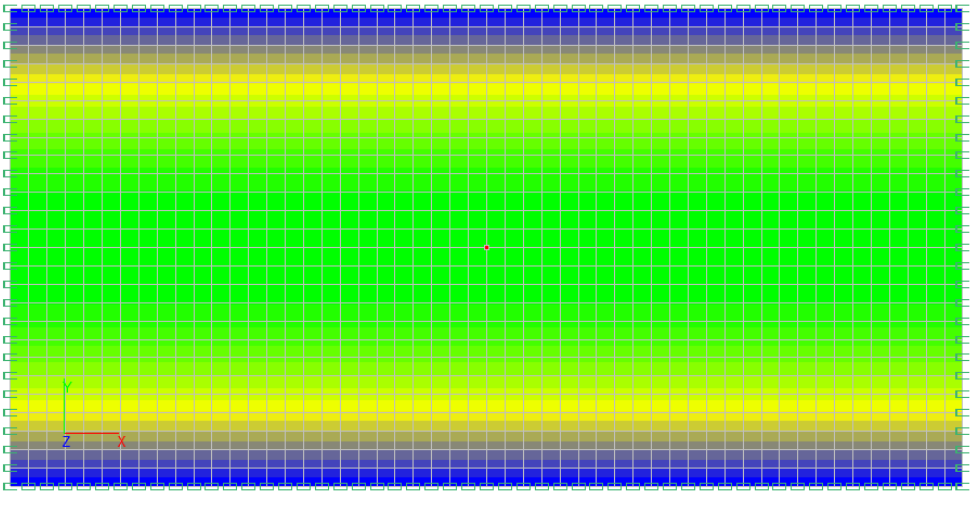
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема

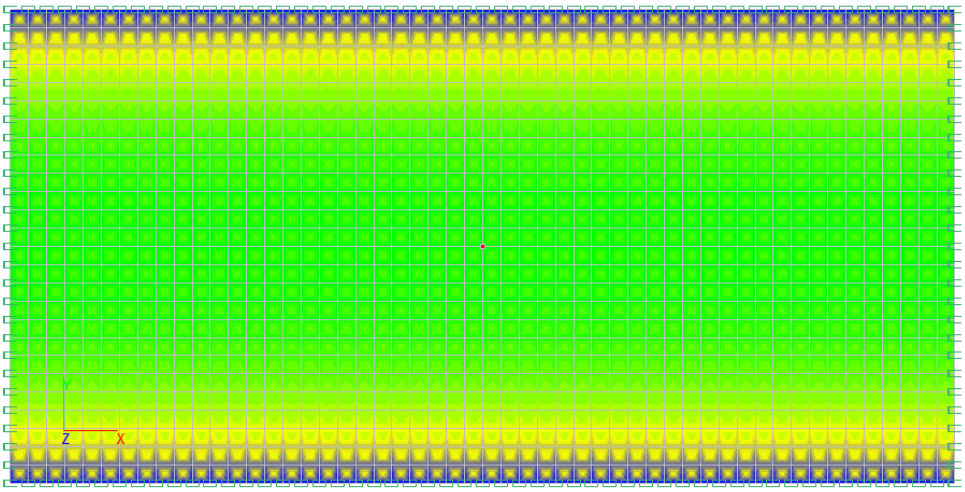


Деформированная схема



см	см
-1,78119	-1,66986
-1,66986	-1,55854
-1,55854	-1,44721
-1,44721	-1,33589
-1,33589	-1,22457
-1,22457	-1,11324
-1,11324	-1,00192
-1,00192	-0,89059
-0,89059	-0,77927
-0,77927	-0,66795
-0,66795	-0,55662
-0,55662	-0,4453
-0,4453	-0,33397
-0,33397	-0,22265
-0,22265	-0,11132
-0,11132	0

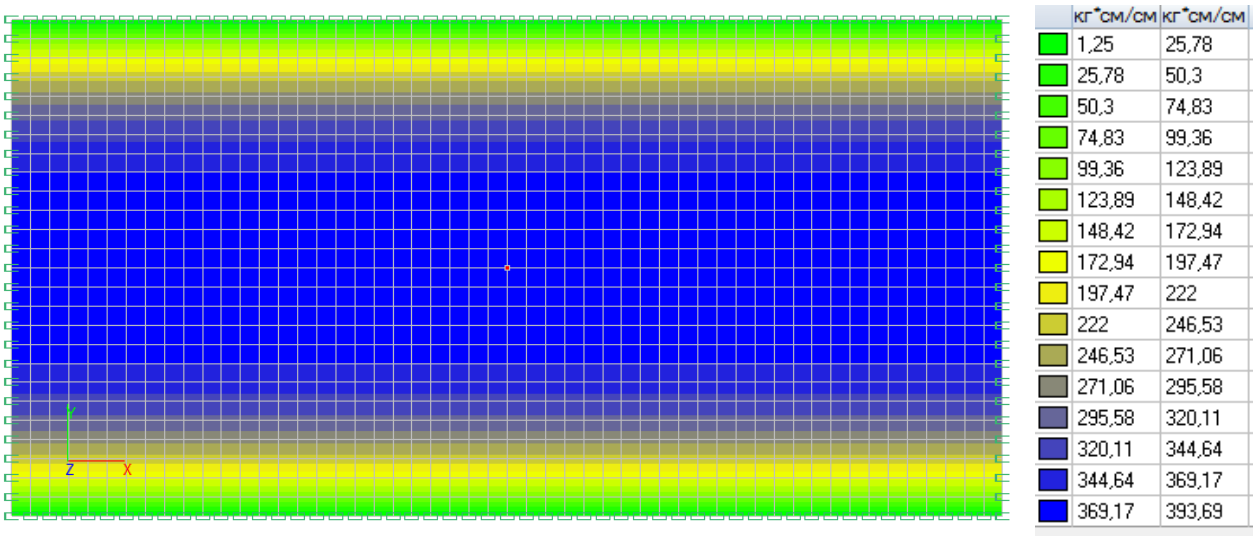
Значения поперечных перемещений Z (см)



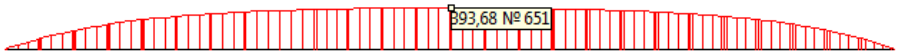
кг/см^2	кг/см^2
1096,11	1098,13
1098,13	1100,14
1100,14	1102,16
1102,16	1104,18
1104,18	1106,2
1106,2	1108,22
1108,22	1110,24
1110,24	1112,26
1112,26	1114,27
1114,27	1116,29
1116,29	1118,31
1118,31	1120,33
1120,33	1122,35
1122,35	1124,37
1124,37	1126,38
1126,38	1128,4

Значения продольных напряжений N_y (кгс/см^2)

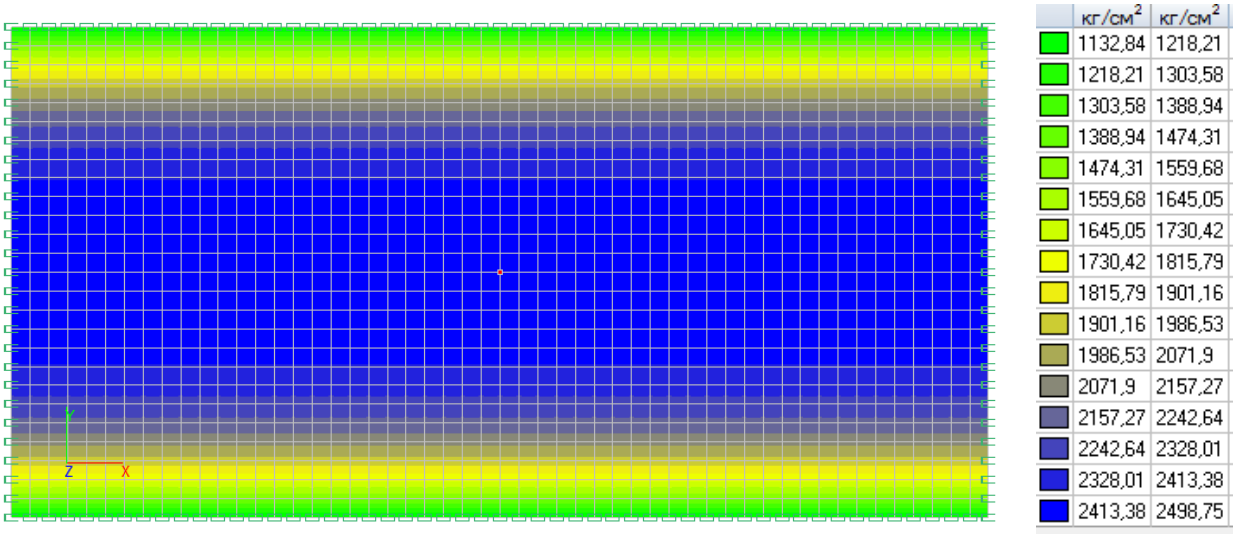
Эпюра продольных напряжений N_y (кгс/см^2)



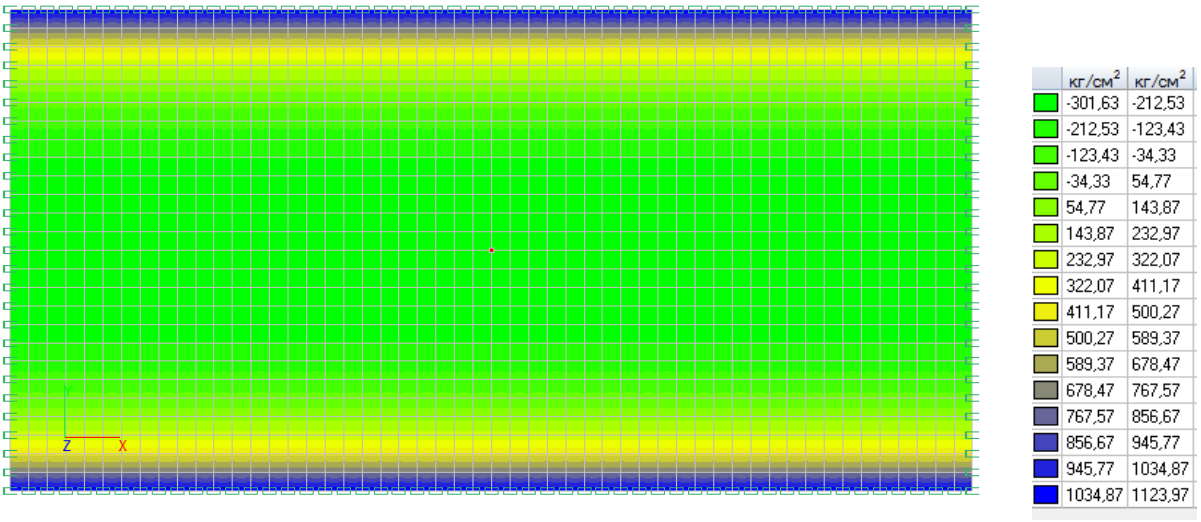
Значения изгибающих моментов M_y (кгс·см/см)



Эпюра изгибающих моментов M_y (кгс·см/см)



Значения нормальных напряжений s_{yd} (кгс/см^2)



Значения нормальных напряжений s_{yt} (кгс/см^2)

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**	**Отклонения, %**
Поперечное перемещение Z деформированной срединной поверхности в половине пролета пластины, см	-1.782	-1.781	0.06
максимальные нормальные напряжения по сечению в половине пролета пластины s_{yd}, кгс/см^2	2503	2498.7	0,17
минимальные нормальные напряжения по сечению в половине пролета пластины s_{yt}, кгс/см^2	-287	-294.0	2.44

Замечания: При аналитическом решении перемещение Z деформированной срединной поверхности, а также максимальные s_{yd} и минимальные s_{yt} нормальные напряжения по сечению, в половине пролета пластины могут быть вычислены по следующим формулам:

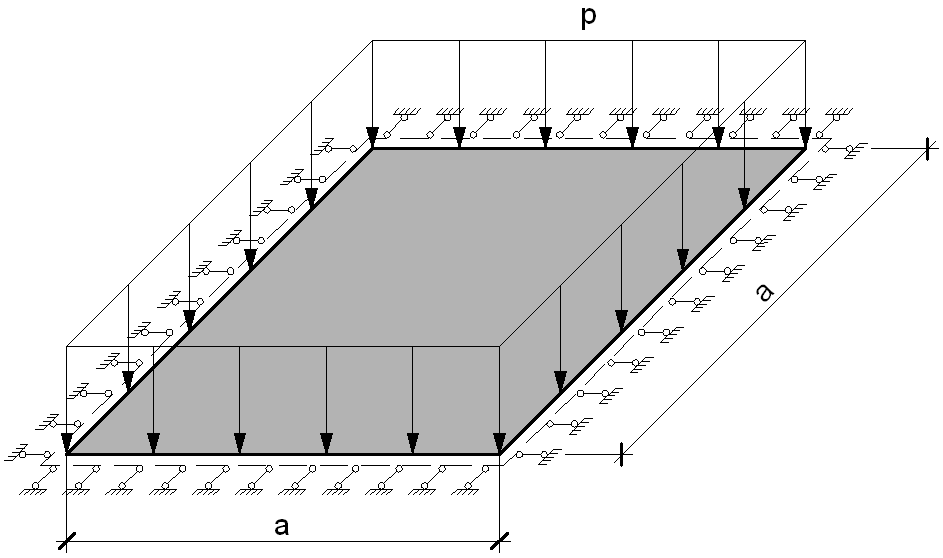
$$Z = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot D} \cdot \frac{\frac{1}{ch(u)} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5 \cdot u^4}{24}}; \qquad s_{yd} = s_{yN} + s_{yM}; \qquad s_{yt} = s_{yN} - s_{yM}, \text{ где:}$$

$$s_{yN} = \frac{N_y}{h}; \qquad s_{yM} = \frac{6 \cdot M_y}{h^2}; \qquad N_y = \frac{4 \cdot u^2 \cdot D}{l^2}; \qquad M_y = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1 - \frac{1}{ch(u)}}{\frac{u^2}{2}};$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}.$$

Значение *u* определяется из выражения: $\frac{E^2 \cdot h^8}{\left(1-\nu^2\right)^2 \cdot q^2 \cdot l^8} = \frac{135}{16} \cdot \frac{th(u)}{u^9} + \frac{27}{16} \cdot \frac{th^2(u)}{u^8} - \frac{135}{16 \cdot u^8} + \frac{9}{8 \cdot u^6}.$

Гибкая квадратная шарнирно опертая по периметру пластина, нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой



Цель: Определение максимальных перемещений и продольных напряжений в гибкой квадратной пластине, шарнирно опертой по периметру и нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой в геометрически нелинейной постановке.

Имя файла с исходными данными: **7.6.SPR**

Формулировка задачи: Гибкая квадратная изотропная пластина постоянной толщины шарнирно неподвижно оперта по периметру и нагружена поперечной равномерно распределенной нагрузкой p. Определить: поперечные перемещения w и продольные напряжения N_x и N_y для центра пластины.

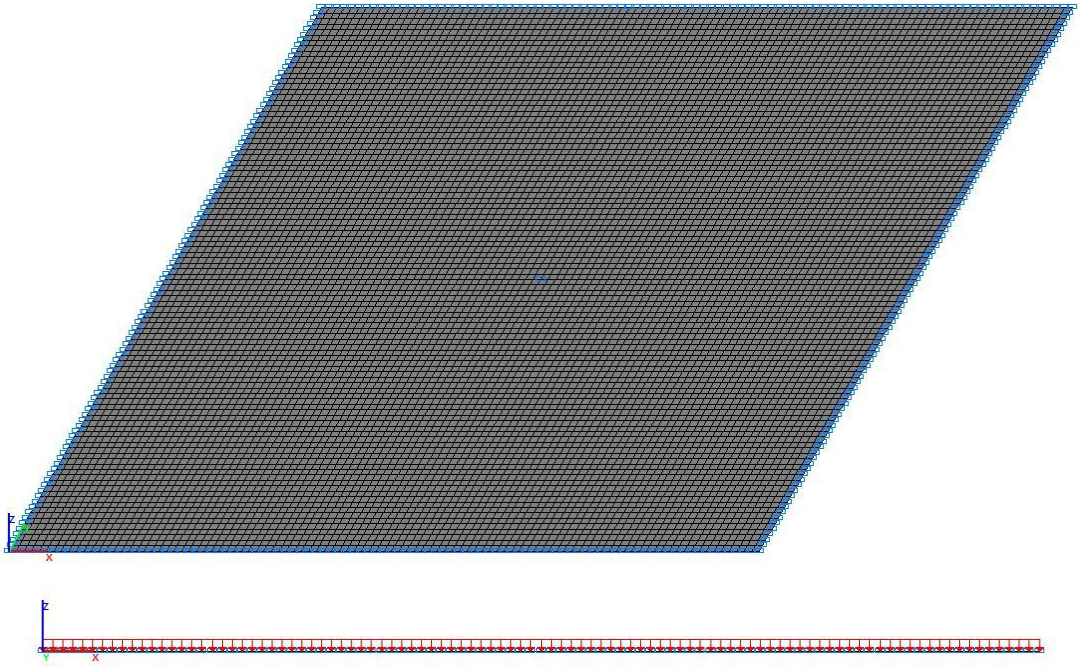
Ссылки: S. Levy, Bending of rectangular plates with large deflections, Washington, National advisory committee for aeronautics, Technical note No 846, May 1942.
H. Hencky, Die berechnung dünner rechteckiger platten mit verschwindender biegungsteifigkeit, Dresden, Zeitschrift für angewandte mathematic und mechanic, April 1921.
И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 606

Исходные данные:

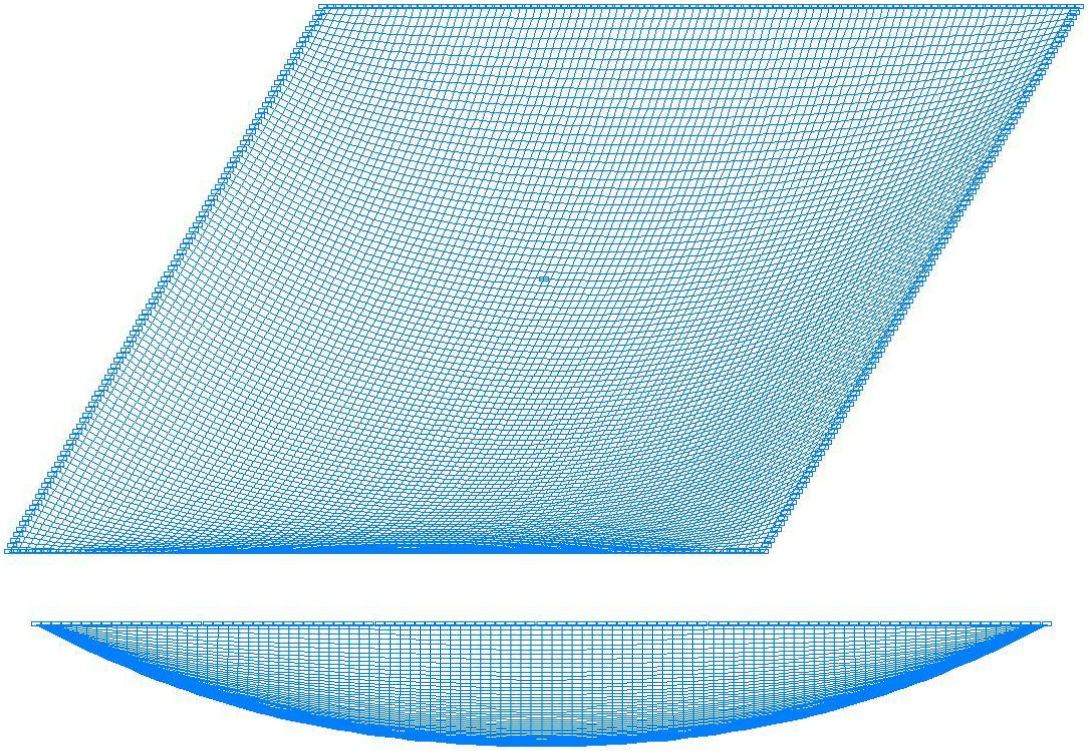
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
h = 0.01 м	- толщина пластины;
a = 10.0 м	- размер стороны пластины;
p = 10 кПа	- значение равномерно распределенной нагрузки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Элементы пластины - 10000 четырехузловых элементов оболочки с учетом геометрической нелинейности типа 344. Сетка конечных элементов разбита по длинам сторон пластины (вдоль осей X, Y общей системы координат) с шагом 0.10 м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорного контура пластины по направлению степени свободы Z, а также за счет наложения связей на узлы сторон пластины по нормальному к ним направлению (для двух противоположных сторон параллельных оси X общей системы координат – вдоль оси Y, для двух противоположных сторон параллельных оси Y общей системы координат – вдоль оси X). В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узел центра пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Нелинейное загружение формировалось для шагово-итерационного метода с коэффициентом загружения - 1, количеством шагов - 1, количеством итераций - 100 для линейного загружения p. Количество узлов в расчетной схеме – 10201.

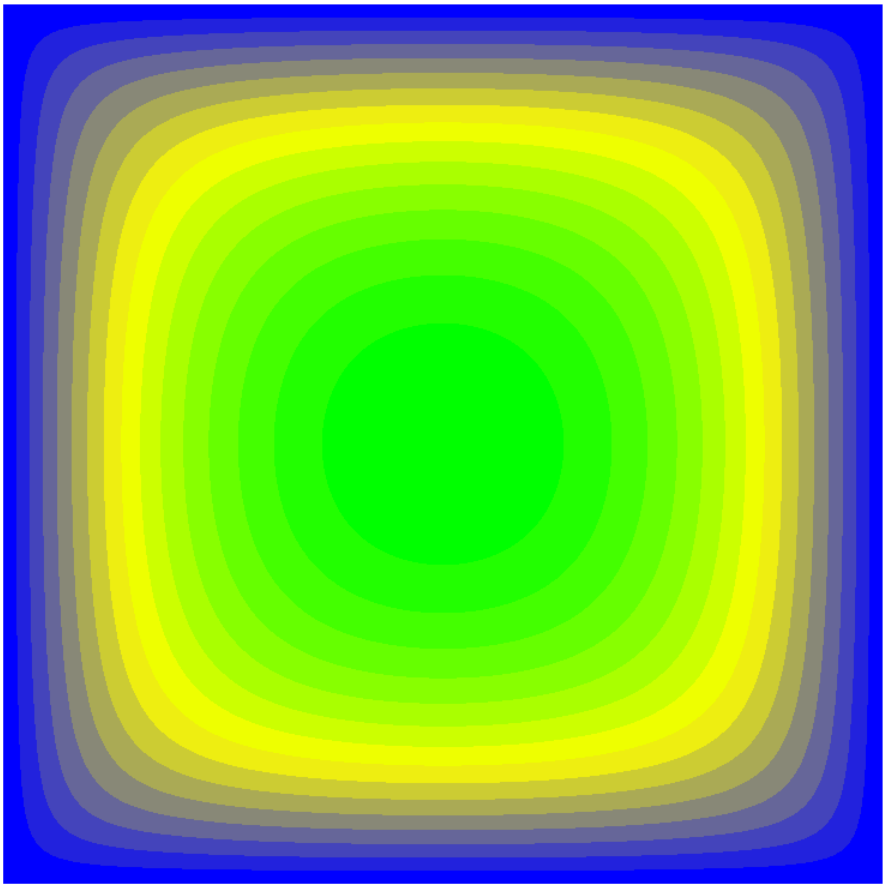
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема

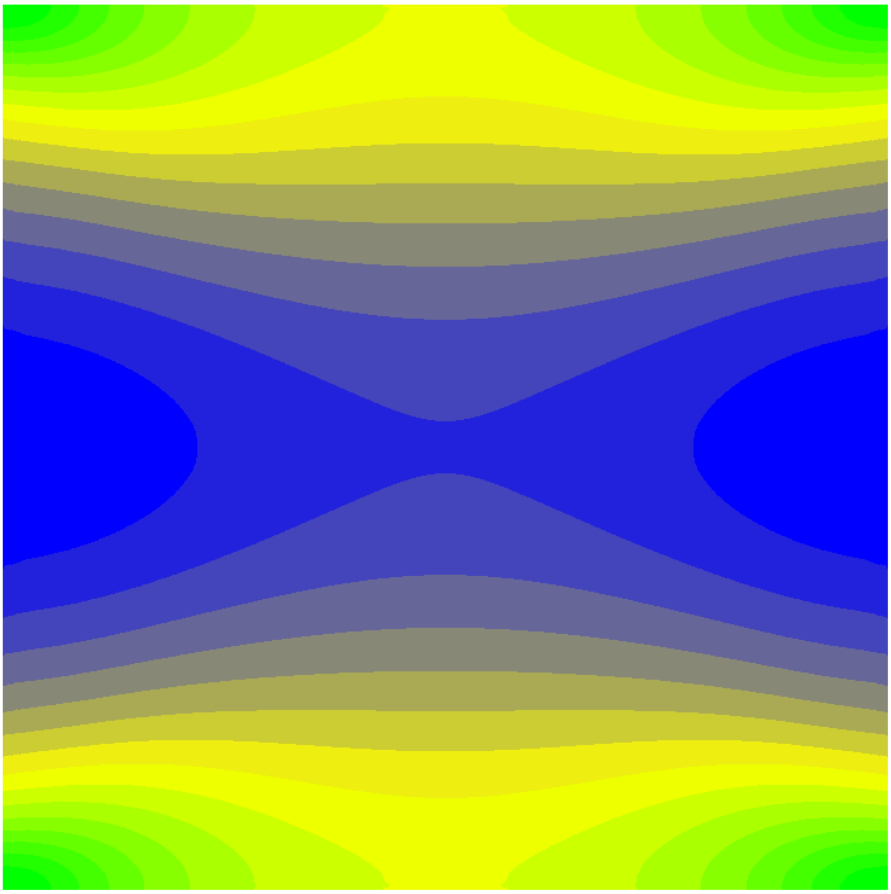


Деформированная схема



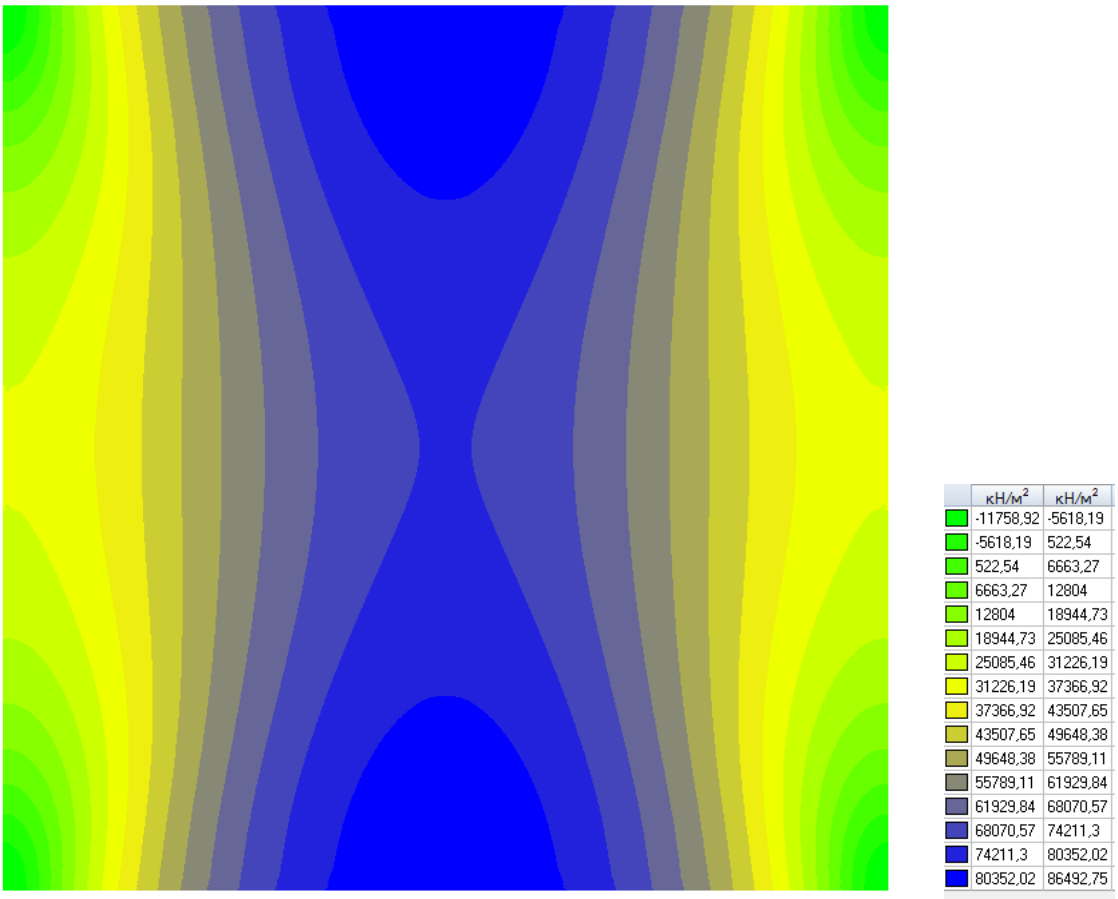
	м	м
	-0,10474	-0,098193
	-0,098193	-0,091647
	-0,091647	-0,085101
	-0,085101	-0,078555
	-0,078555	-0,072008
	-0,072008	-0,065462
	-0,065462	-0,058916
	-0,058916	-0,05237
	-0,05237	-0,045824
	-0,045824	-0,039277
	-0,039277	-0,032731
	-0,032731	-0,026185
	-0,026185	-0,019639
	-0,019639	-0,013092
	-0,013092	-0,006546
	-0,006546	0

Значения поперечных перемещений w (м)



	кН/м^2	кН/м^2
	-11758,92	-5618,19
	-5618,19	522,54
	522,54	6663,27
	6663,27	12804
	12804	18944,73
	18944,73	25085,46
	25085,46	31226,19
	31226,19	37366,92
	37366,92	43507,65
	43507,65	49648,38
	49648,38	55789,11
	55789,11	61929,84
	61929,84	68070,57
	68070,57	74211,3
	74211,3	80352,02
	80352,02	86492,75

Значения продольных напряжений N_x (кН/м^2)



Значения продольных напряжений N_y (кН/м^2)

Сравнение решений:

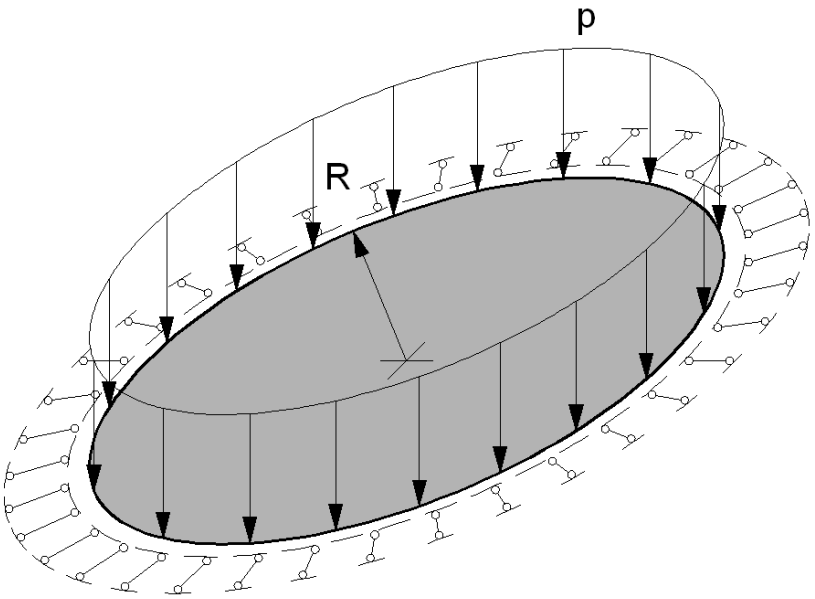
Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение в центре пластины w, м	0.1050 (0.1067)	0.1047	0.29 (1.87)
Продольное напряжение в центре пластины N_x, кН/м^2	74963 (75830)	74480	0.64 (1,7)
Продольное напряжение в центре пластины N_y, кН/м^2	74963 (75830)	74480	0.64 (1,7)

Без скобок указаны значения по приближенному решению Hencky для теории Кармана;
В скобках указаны значения по уточненному решению Levy для теории Кармана

Замечания: При аналитическом приближенном решении Hencky поперечные перемещения *w* и продольные напряжения N_x и N_y для центра пластины определяются по следующим формулам (коэффициент Пуассона ν = 0.3):

$$w = 0.285 \cdot a \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{E} \cdot \frac{a}{h}}; \qquad N_x = N_y = 3.4 \cdot E \cdot \left(\frac{w}{a}\right)^2.$$

Гибкая круговая шарнирно опертая по контуру пластина, нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой



Цель: Определение максимальных перемещений и продольных радиально-кольцевых напряжений в гибкой круговой пластине, шарнирно опертой по контуру и нагруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой в геометрически нелинейной постановке.

Имя файла с исходными данными: **7.7.SPR**

Формулировка задачи**:** Гибкая круговая изотропная пластина постоянной толщины шарнирно неподвижно оперта по контуру и нагружена поперечной равномерно распределенной нагрузкой p. Определить: поперечные перемещения w и продольные радиально-кольцевые напряжения N_r и N_t для центра пластины.

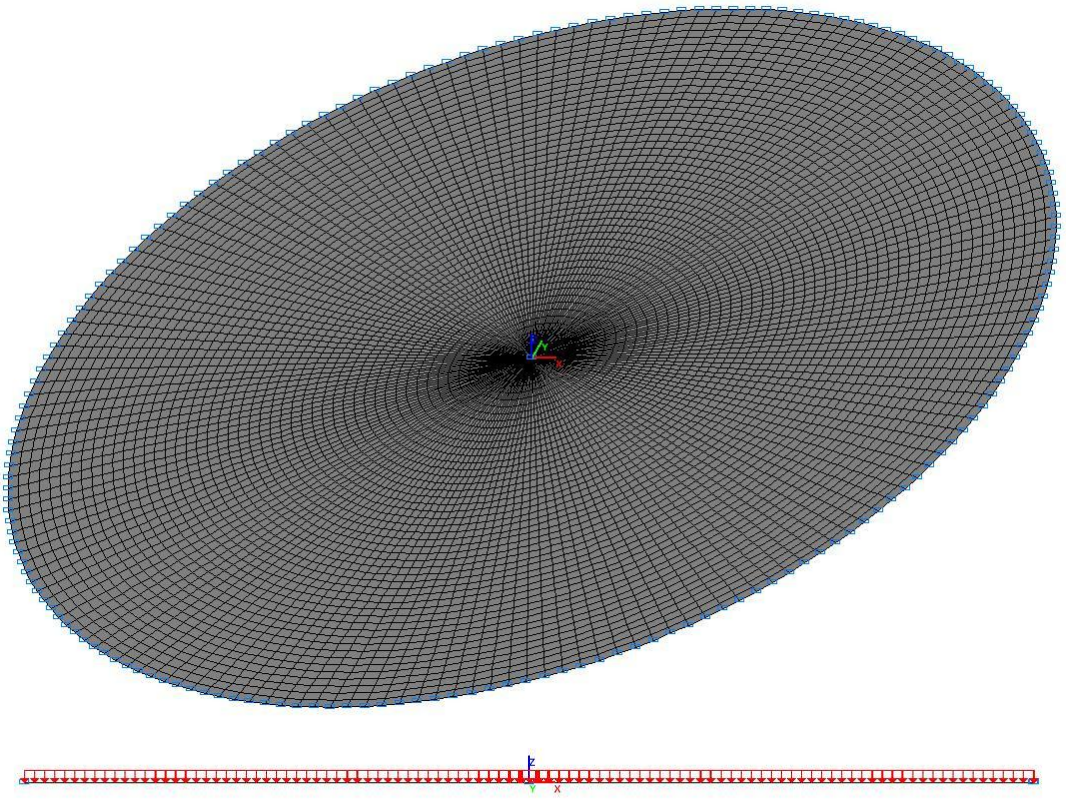
Ссылки**:** S. Way, Bending of circular plates with large deflections, New York, ASME, v.56 N 8, 1934, p. 627-636.
H. Hencky, Uber den spannungsztand in kreisrunden platten mit verschwindender biegungssteifigkeit, Dresden, Zeitschrift für angewandte mathematic und physik, v.63, 1915, p. 311-317.
И.А. Биргер, Я.Г. Пановко, Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1, Москва, Машиностроение, 1968, стр. 614

Исходные данные**:**

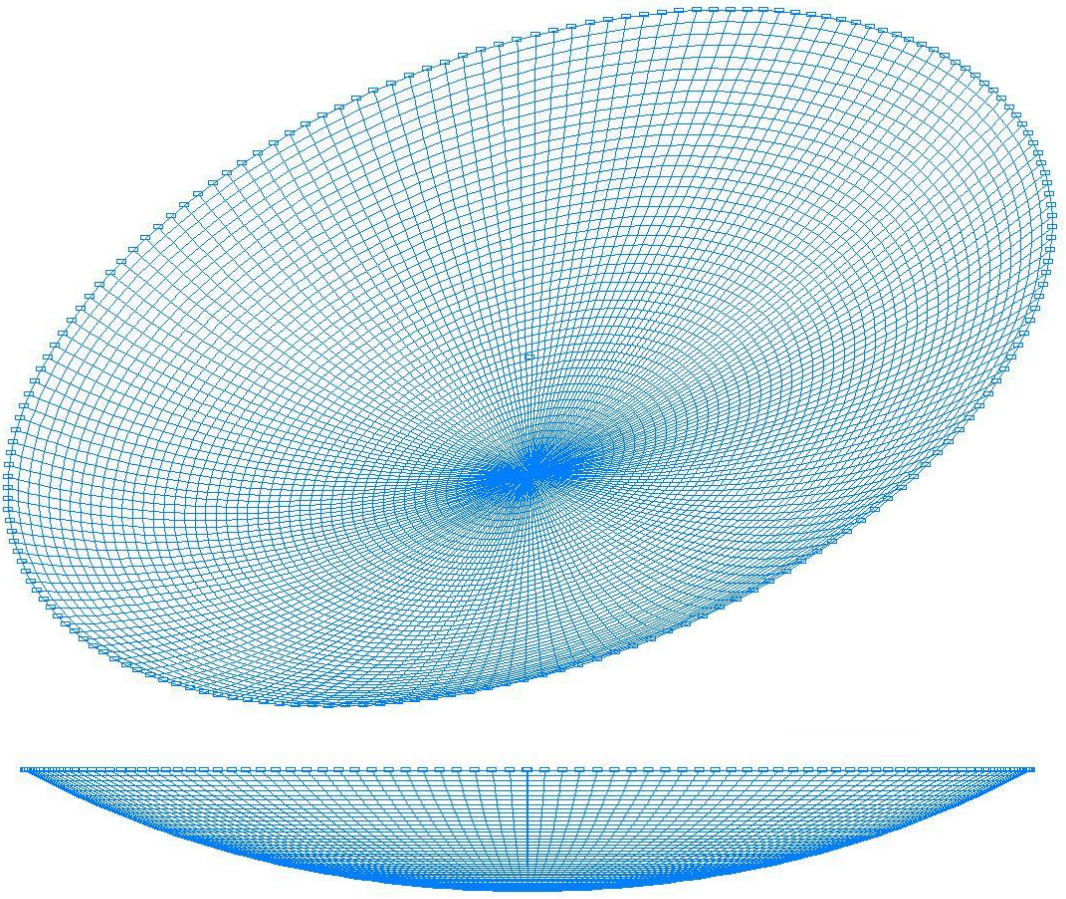
$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
h = 0.01 м	- толщина пластины;
R = 5.0 м	- наружный радиус пластины;
p = 10 кПа	- значение равномерно распределенной нагрузки.

Конечно-элементная модель**:** Расчетная схема – система общего вида. Элементы пластины - 8820 четырехузловых элементов оболочки с учетом геометрической нелинейности типа 344 и 180 трехузловых элементов оболочки с учетом геометрической нелинейности типа 342. Сетка конечных элементов разбита с шагом 0.10 м в радиальном направлении и с шагом 2.0º в тангенциальном направлении. Направление выдачи внутренних усилий – радиально-тангенциальное. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей по направлениям степеней свободы X, Y и Z по наружному контуру пластины. В целях обеспечения геометрической неизменяемости расчетной схемы на узел центра пластины накладывается связь по направлению UZ общей системы координат. Нелинейное загружение формировалось для шагово-итерационного метода с коэффициентом загружения - 1, количеством шагов - 1, количеством итераций - 100 для линейного загружения p. Количество узлов в расчетной схеме – 9001.

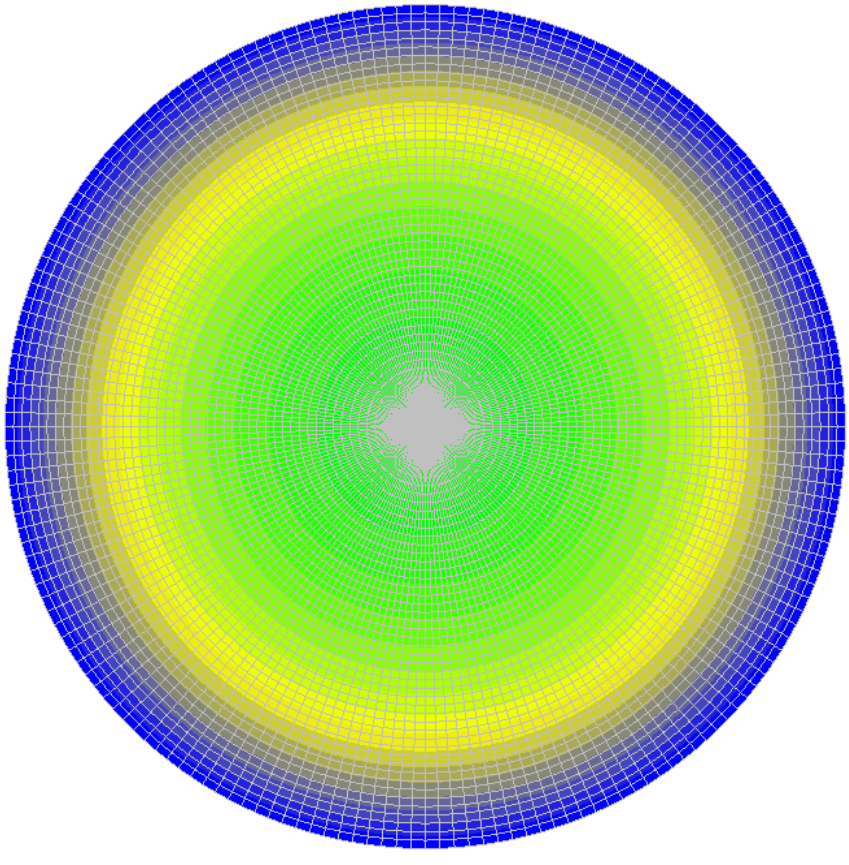
Результаты решения в SCAD



Расчетная схема

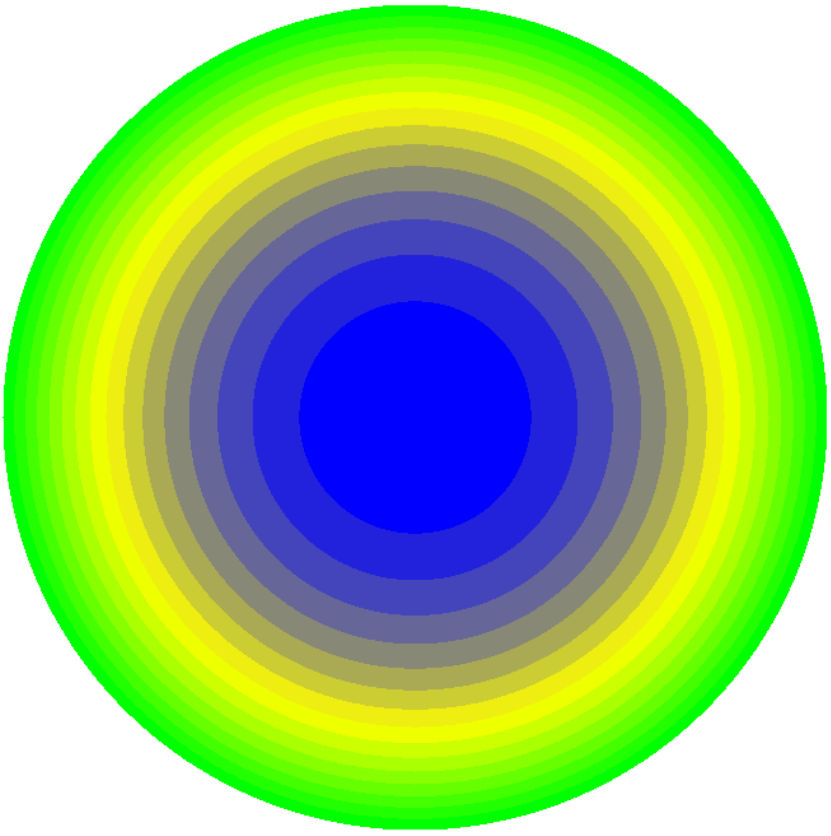


Деформированная схема



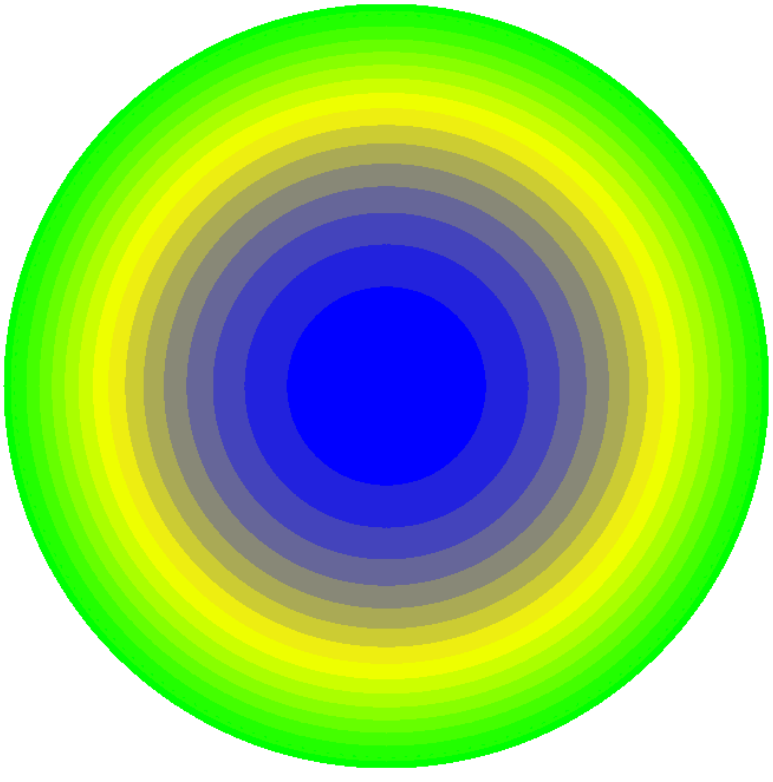
	м	м
	-0,095656	-0,089678
	-0,089678	-0,083699
	-0,083699	-0,077721
	-0,077721	-0,071742
	-0,071742	-0,065764
	-0,065764	-0,059785
	-0,059785	-0,053807
	-0,053807	-0,047828
	-0,047828	-0,04185
	-0,04185	-0,035871
	-0,035871	-0,029893
	-0,029893	-0,023914
	-0,023914	-0,017936
	-0,017936	-0,011957
	-0,011957	-0,005979
	-0,005979	0

Значения поперечных перемещений w (м)



	кН/м^2	кН/м^2
	17118,394	20645,16
	20645,16	24171,924
	24171,924	27698,69
	27698,69	31225,456
	31225,456	34752,22
	34752,22	38278,988
	38278,988	41805,752
	41805,752	45332,52
	45332,52	48859,284
	48859,284	52386,048
	52386,048	55912,816
	55912,816	59439,58
	59439,58	62966,344
	62966,344	66493,112
	66493,112	70019,88
	70019,88	73546,64

Значения продольных радиальных напряжений N_r (кН/м^2)



кН/м^2	кН/м^2
56889,332	57931,404
57931,404	58973,476
58973,476	60015,548
60015,548	61057,62
61057,62	62099,692
62099,692	63141,764
63141,764	64183,836
64183,836	65225,912
65225,912	66267,984
66267,984	67310,056
67310,056	68352,128
68352,128	69394,2
69394,2	70436,272
70436,272	71478,344
71478,344	72520,416
72520,416	73562,488

Значения продольных тангенциальных напряжений N_t (кН/м^2)

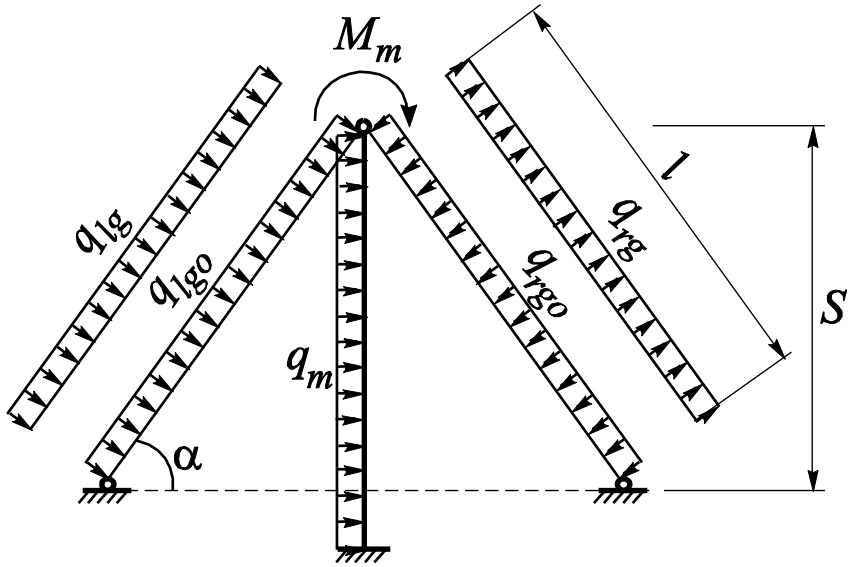
Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
Поперечное перемещение в центре пластины w, м	0.0968	0.0957	1.14
Продольное радиальное напряжение в центре пластины N_r, кН/м^2	72316	73540	1.69
Продольное тангенциальное напряжение в центре пластины N_t, кН/м^2	72316	73540	1.69

Замечания: При аналитическом приближенном решении Hencky по теории Кармана поперечные перемещения w и продольные радиально-тангенциальные напряжения N_r и N_t для центра пластины определяются по следующим формулам (коэффициент Пуассона ν = 0.3):

$$w = 0.662 \cdot R \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{E} \cdot \frac{R}{h}}; \qquad N_r = N_t = 0.965 \cdot E \cdot \left(\frac{w}{R}\right)^2.$$

Двухвантовая мачта под действием статических нагрузок и сил предварительного натяжения



Цель: Определение напряженного состояния двухвантовой мачты от действия статических нагрузок и сил предварительного натяжения в физически нелинейной постановке.

Имя файла с исходными данными: **Mast.spr**

Формулировка задачи: Двухвантовая мачта с заделанным в опоре стволом и симметрично нисходящими от его вершины вантами под углом α к горизонту подвергается следующим воздействиям (в плоскости конструкции мачты):

- В исходном состоянии ванты загружены равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q_{lg0} = q_{rg0}$ и предварительно напряжены силой H_0;
- В рабочем состоянии на ствол мачты действует равномерно распределенная нагрузка q_m и момент в вершине M_m, на наветренную и подветренную ванты действуют равномерно распределенные нагрузки q_{lg} и q_{rg}, температура системы не меняется.

Определить продольные силы N_{lg}, N_{rg} и N_m в наветренной и в подветренной вантах и в стволе мачты, а также изгибающие моменты M_m в сечениях ствола мачты.

Ссылки: А.В. Перельмутер, Основы расчета вантово-стержневых систем, Стройиздат, 1969, стр. 61

Исходные данные:

$EF_g = 0.58 \cdot 10^5$ т	- продольная жесткость вант;
$EI_m = 0.92 \cdot 10^7$ т·м^2	- изгибная жесткость ствола мачты;
S = 93.0 м	- высота ствола мачты;
L = 115.5 м	- длина хорды вант;
α = 45°	- угол наклона вант к горизонту;
$q_{lg0} = q_{rg0} = 22.75 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(\alpha) = 16.087$ т/м	- равномерно распределенная поперечная нагрузка на ванты в исходном состоянии;
$q_{lg} = 37.40 \cdot 10^{-3} - q_{lg0} / \cos(\alpha) = 14.650$ т/м	- равномерно распределенная поперечная нагрузка на наветренную ванту в рабочем состоянии;
$q_{rg} = q_{rg0} / \cos(\alpha) - 8.10 \cdot 10^{-3} = 14.650$ т/м	- равномерно распределенная поперечная нагрузка на подветренную ванту в рабочем состоянии;
$q_m = 950.00 \cdot 10^{-3}$ т/м	- равномерно распределенная поперечная нагрузка на ствол мачты в рабочем состоянии;
$M_m = 401.00$ т·м	- момент в вершине ствола мачты;
$H_0 = 19.40$ т	- силы предварительного напряжения вант.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Элементы ствола мачты – 93 стержневых элемента типа 5. Сетка конечных элементов разбита по высоте ствола мачты (вдоль осей X1 местных систем координат) с шагом 1.0 м. Жесткостные характеристики элементов ствола мачты:

$EF = 1.00 \cdot 10^8$ т; $EI_y = EI_z = GI_x = 0.92 \cdot 10^7$ т·м^2.

Элементы вант – 2 вантовых элемента типа 308. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на опорные узлы вант по направлениям степеней свободы X, Z и на опорный узел ствола мачты по направлениям степеней свободы X, Z, UY.

Воздействия в исходном состоянии задаются через жесткостные характеристики вантовых элементов:

$\gamma = 7.84483$ т/м^3 - объемный вес вант;

$E = 2.00 \cdot 10^7$ т/м^2 - модуль упругости материала вант;

$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$H_0 = 19.40$ т - силы предварительного напряжения вант;

$D = 6.0675$ см - наружный диаметр кольцевого поперечного сечения вант;

$d = 0.0001$ см - внутренний диаметр кольцевого поперечного сечения вант.

Для контроля значений внутренних усилий в исходном состоянии создается отдельное загружение с вертикальной сосредоточенной нагрузкой минимального значения $P_0 = 1.00 \cdot 10^{-4}$ т в вершине ствола мачты.

Воздействия в рабочем состоянии задаются в виде нагрузок:

поперечной равномерно распределенной в местной системе координат по оси Z1 на вантовые элементы;

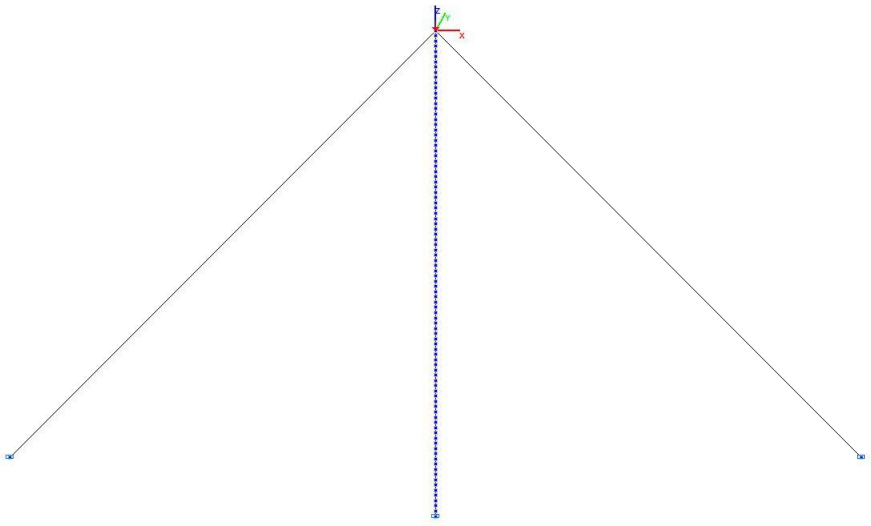
поперечной равномерно распределенной в общей системе координат по оси X на элементы ствола мачты;

сосредоточенного момента вокруг оси Y общей системы координат на узел вершины ствола мачты.

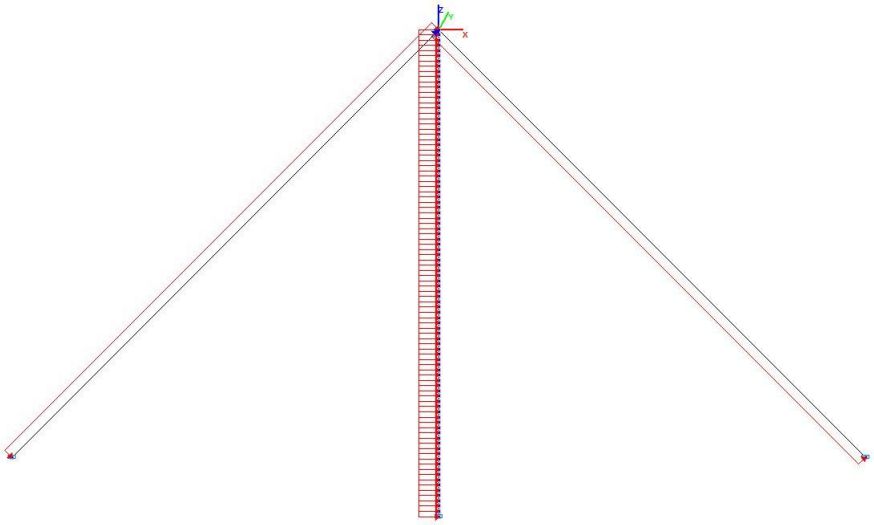
Нелинейное загружение формировалось для простого шагового метода с коэффициентом загружения 0.1 и количеством шагов 10 для воздействий исходного состояния, с коэффициентом загружения 0.01 и количеством шагов 100 для воздействий рабочего состояния.

Количество узлов в расчетной схеме – 96.

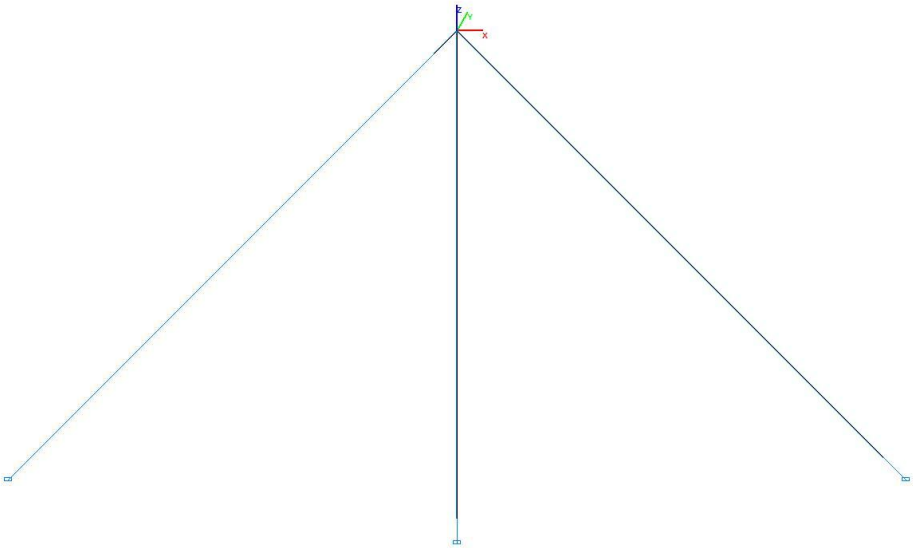
Результаты решения в SCAD



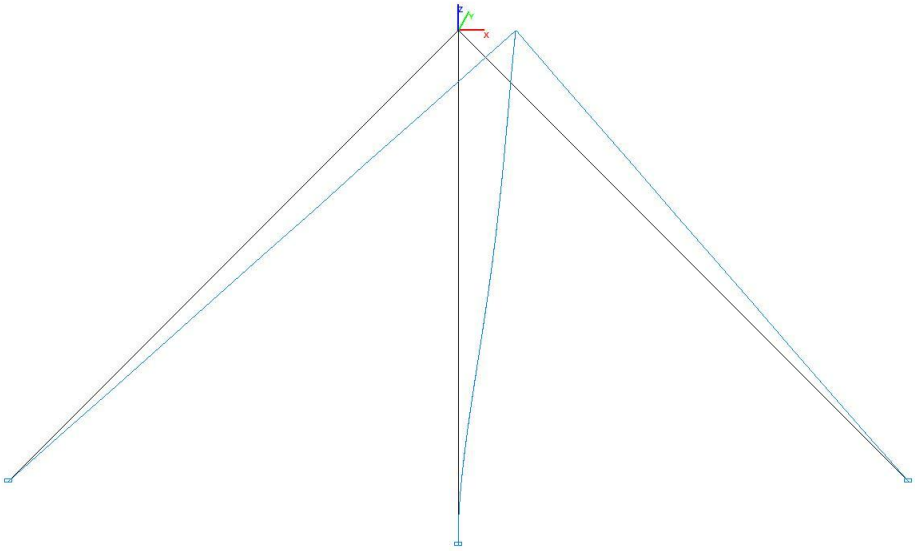
Расчетная схема в исходном состоянии



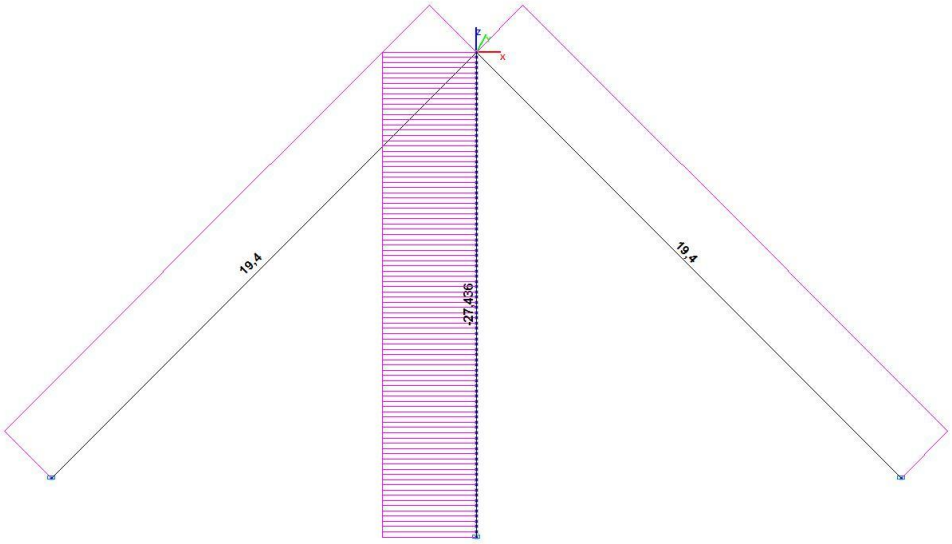
Расчетная схема в рабочем состоянии



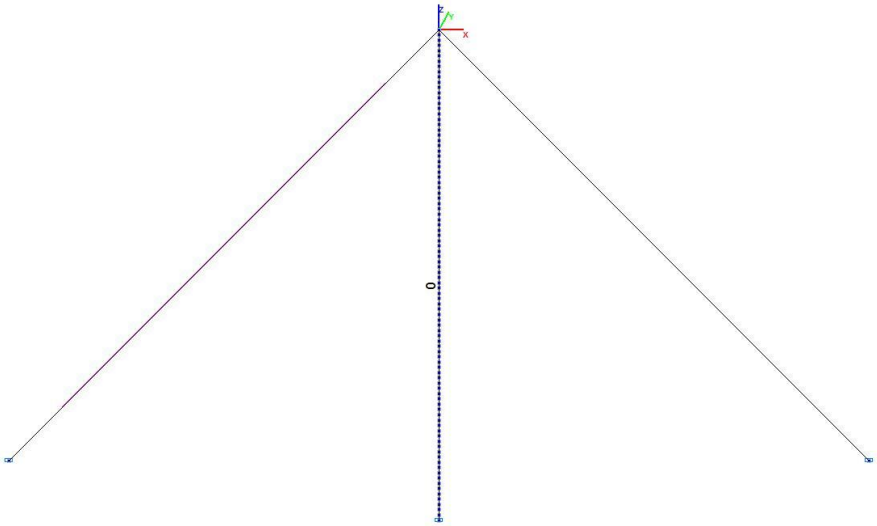
Деформированная схема в исходном состоянии



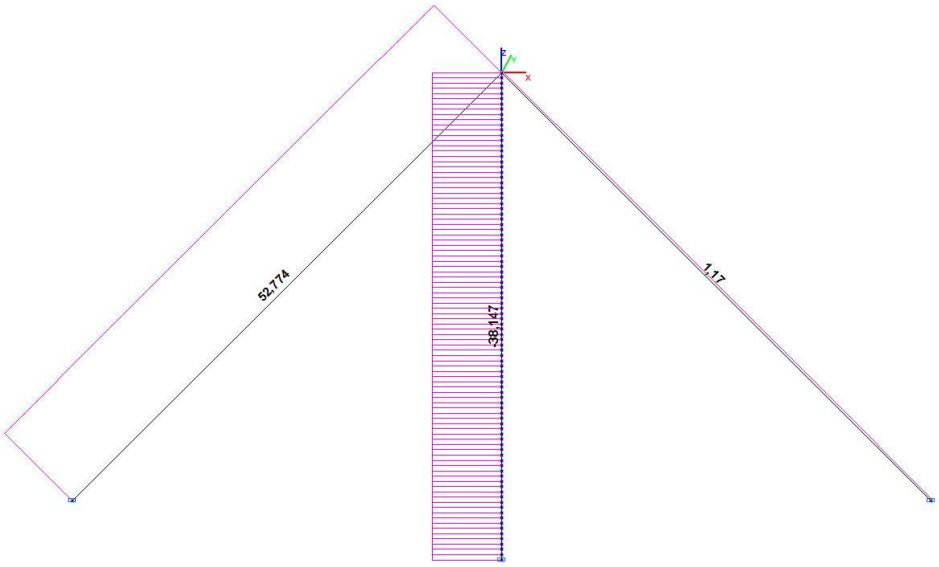
Деформированная схема в рабочем состоянии



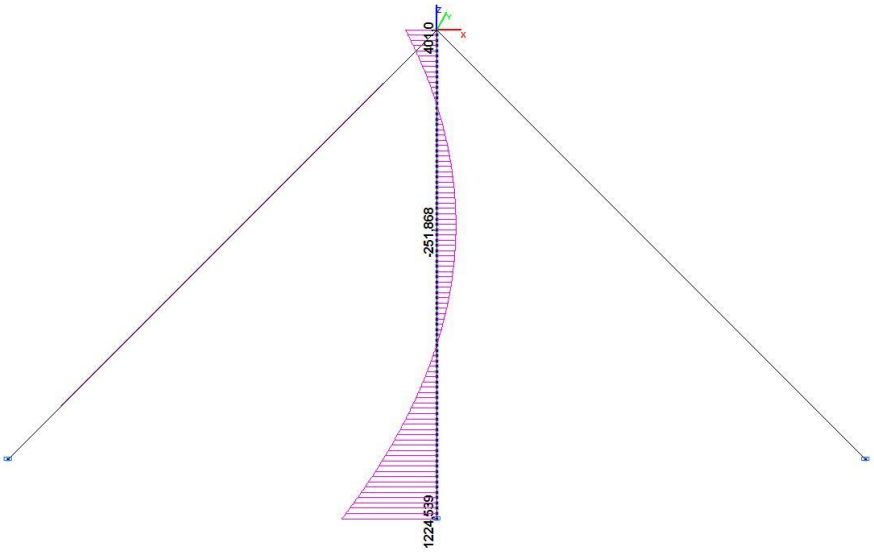
Эпюры продольных сил в исходном состоянии (т)



Эпюры изгибающих моментов в исходном состоянии (т·м)



Эпюры продольных сил в рабочем состоянии (т)

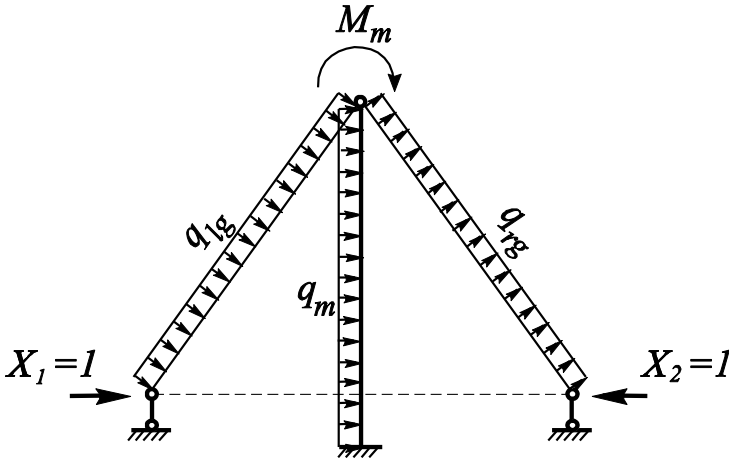


Эпюры изгибающих моментов в рабочем состоянии (т·м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
N_{lg}, т	52.769	52.774	0.01
N_{rg}, т	1.171	1.170	0.09
N_m, т	-38.142	-38.147	0.01
$M_m(0)$, т·м	1227.376	1224.539	0.23
$M_m(S)$, т·м	401.000	401.000	0.00
S_{extr}, м	55.853	56.000	—
$M_m(S_{extr})$, т·м	-254.437	-251.868	1.01

Замечания: При аналитическом решении внутренние усилия в дважды статически неопределимой конструкции мачты определяются методом сил, при этом в качестве неизвестных принимаются распорные реакции X_1 и X_2 опорных узлов вант.



$$N_{lg} = H_0 + N_{lg\,1}\cdot X_1 + N_{lg\,q}$$
$$N_{rg} = H_0 + N_{rg\,2}\cdot X_2 + N_{rgq}$$
$$N_m = -2\cdot H_0\cdot sin(\alpha) + N_{m1}\cdot X_1 + N_{m2}\cdot X_2 + N_{mq}$$
$$M_m(0) = M_{m1}(0)\cdot X_1 + M_{m2}(0)\cdot X_2 + M_{mq}(0)$$
$$M_m(S) = M_{m1}(S)\cdot X_1 + M_{m2}(S)\cdot X_2 + M_{mq}(S)$$
$$S_{extr} = S + \frac{q_{lg}+q_{rg}}{q_m}\cdot L\cdot sin(\alpha) + \frac{X_1 - X_2}{q_m}$$
$$M_m(S_{extr}) = \frac{q_m}{2}\cdot {S_{extr}}^2 - \left[q_m\cdot S + (q_{lg}+q_{rg})\cdot L\cdot sin(\alpha) + X_1 - X_2\right]\cdot S_{extr} +$$
$$+ \frac{q_m}{2}\cdot S^2 + (q_{lg}+q_{rg})\cdot S\cdot L\cdot sin(\alpha) + M_m + (X_1 - X_2)\cdot S$$

Значения неизвестных X_1 и X_2 определяются из решения системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}
\left(\frac{{N_{lg\,1}}^2\cdot L}{EF_g} + \frac{{M_{m1}}^2(0)\cdot S}{3\cdot EI_m}\right)\cdot X_1 + \frac{M_{m1}(0)\cdot M_{m2}(0)\cdot S}{3\cdot EI_m}\cdot X_2 + \frac{N_{lg\,1}\cdot N_{lg\,q}\cdot L}{EF_g} + \\
+ \frac{S}{6\cdot EI_m}\cdot\left(M_{m1}(0)\cdot M_{mq}(0) + 4\cdot M_{m1}\left(\frac{S}{2}\right)\cdot M_{mq}\left(\frac{S}{2}\right) + M_{m1}(S)\cdot M_{mq}(S)\right) - \\
-\frac{1}{2}\cdot N_{lg\,1}\cdot\left(\frac{(q_{lg}+q_{lg\,0})^2\cdot L^3}{12\cdot(H_0 + N_{lg\,q} + N_{lg\,1}\cdot X_1)^2} - \frac{{q_{lg\,0}}^2\cdot L^3}{12\cdot {H_0}^2}\right) = 0 \\
\frac{M_{m1}(0)\cdot M_{m2}(0)\cdot S}{3\cdot EI_m}\cdot X_1 + \left(\frac{{N_{rg\,2}}^2\cdot L}{EF_g} + \frac{{M_{m2}}^2(0)\cdot S}{3\cdot EI_m}\right)\cdot X_2 + \frac{N_{rg1}\cdot N_{rgq}\cdot L}{EF_g} + \\
+ \frac{S}{6\cdot EI_m}\cdot\left(M_{m2}(0)\cdot M_{mq}(0) + 4\cdot M_{m2}\left(\frac{S}{2}\right)\cdot M_{mq}\left(\frac{S}{2}\right) + M_{m2}(S)\cdot M_{mq}(S)\right) - \\
-\frac{1}{2}\cdot N_{rg\,2}\cdot\left(\frac{(-q_{rg}+q_{rg0})^2\cdot L^3}{12\cdot(H_0 + N_{rgq} + N_{rg\,2}\cdot X_2)^2} - \frac{{q_{rg0}}^2\cdot L^3}{12\cdot {H_0}^2}\right) = 0
\end{array}\right\},\text{ где:}$$

$$N_{lg\,1} = -\frac{1}{cos(\alpha)};\qquad N_{m1} = tg(\alpha);$$
$$M_{m1}(0) = 1\cdot S;\qquad M_{m1}\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S}{2};\qquad M_{m1}(S) = 0\cdot S;$$
$$N_{rg\,2} = -\frac{1}{cos(\alpha)};\qquad N_{m2} = tg(\alpha);$$
$$M_{m2}(0) = -1\cdot S;\qquad M_{m2}\left(\frac{S}{2}\right) = -\frac{S}{2};\qquad M_{m2}(S) = -0\cdot S;$$
$$N_{lg\,q} = -\frac{q_{lg}\cdot L}{2}\cdot tg(\alpha);\qquad N_{rgq} = \frac{q_{rg}\cdot L}{2}\cdot tg(\alpha);$$
$$N_{mq} = -\frac{(q_{lg}-q_{rg})\cdot L}{2}\cdot\frac{cos(2\cdot\alpha)}{cos(\alpha)};$$
$$M_{mq}(0) = M_m + \frac{q_m\cdot S^2}{2} + (q_{lg}+q_{rg})\cdot S\cdot L\cdot sin(\alpha);$$
$$M_{mq}\left(\frac{S}{2}\right) = M_m + \frac{q_m\cdot S^2}{8} + \frac{(q_{lg}+q_{rg})\cdot S\cdot L}{2}\cdot sin(\alpha);$$
$$M_{mq}(S) = M_m.$$

Квадратная мембрана с податливым контуром

Цель: Сравнение результатов геометрически нелинейного расчета с экспериментальными исследованиями.

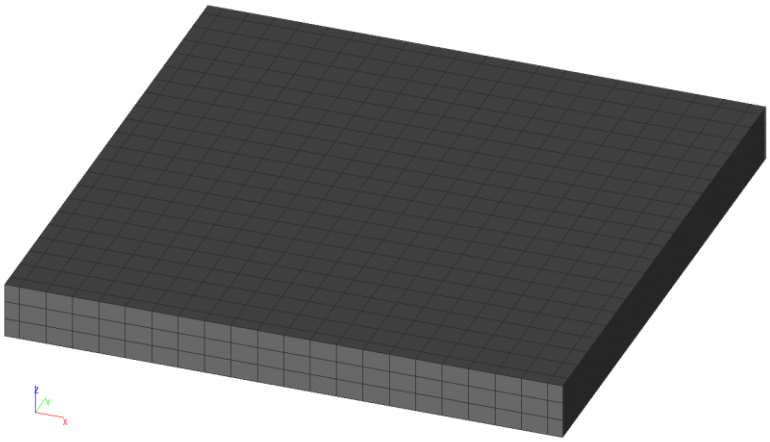
Имя файла с исходными данными: Плита-мембрана 4.SPR

Формулировка задачи:
Рассматривается работа квадратной мембраны с податливым в ее плоскости опорным контуром при действии равномерно распределенной по поверхности нагрузки. Требуется сопоставить расчетные данные с экспериментальными, когда известен прогиб в центре и общая картина.

Ссылки: Г.Л. Аникеев, А.Я. Прицкер, И.Н. Лебедич, Опыт проектирования, изготовления и испытания кровельных панелей из алюминиевых сплавов // Строительные конструкции из алюминиевых сплавов (проектирование, исследование, изготовление) - М.: Стройиздат, 1963

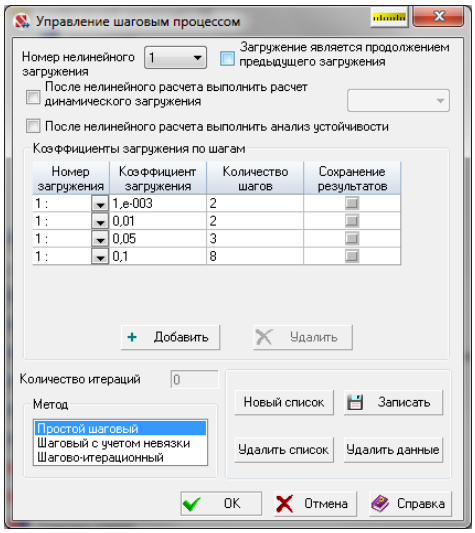
Исходные данные:
Испытывалась мембранная конструкция размером 3×3 м изготовленная из сплава АМГ-6М. Толщина мембранного листа 1 мм, контур выполнен из гнутого швеллера 80×300×3 мм. Перед испытаниями выполнялся обмер опытного образца, начальная стрела провеса центра мембраны составляла 1,5 мм. Испытательная нагрузка 100 кгс/м^2. Перемещения в центре измерялись прогибомером Максимова. Была отмечена весьма характерная картина прогибов, при которой линии уровня далеко отклоняются от овальной формы и в окрестности контура ближе к прямоугольному виду.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема набрана из конечных элементов оболочечного типа (КЭ 341), схема содержит 832 элемента. По углам конструкции предусматривались связи по направлению Z, а по серединам сторон опорного контура связи вдоль X и вдоль Y, соответственно на стороне параллельной оси X и стороне параллельной оси Y.
В расчетной схеме промоделирована начальная погибь мембраны.



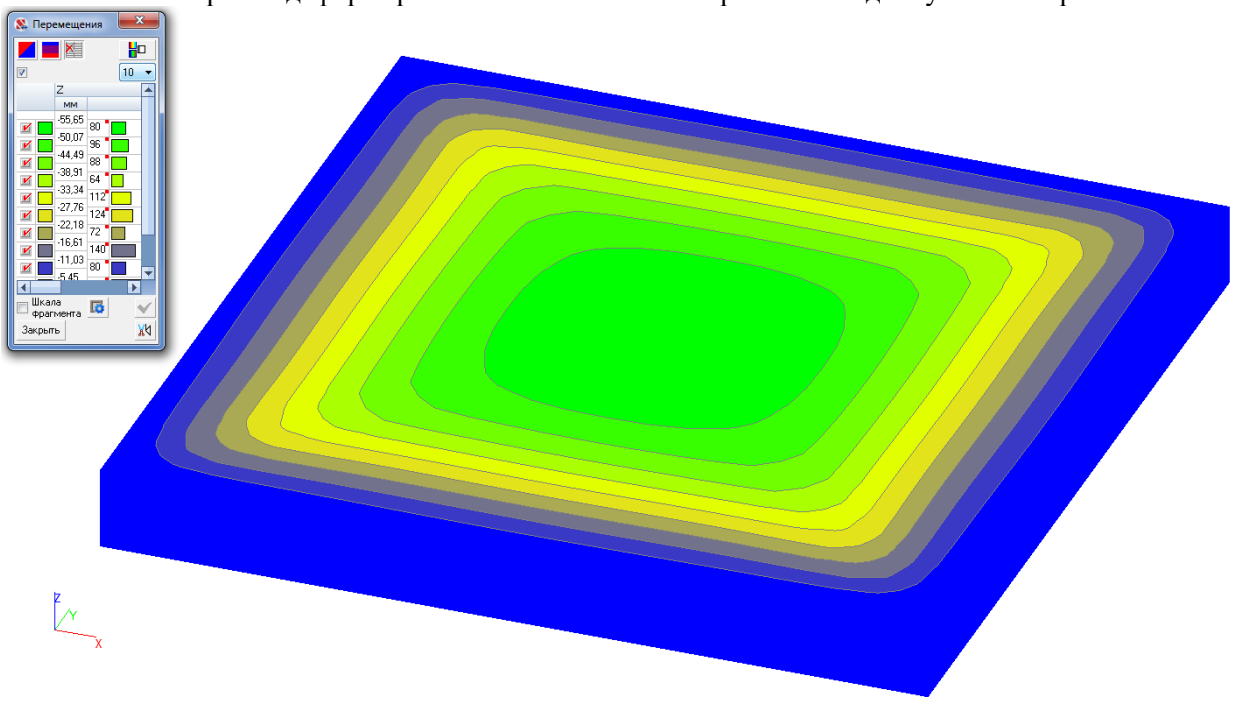
Расчетная схема

Нелинейная задача решалась шаговым методом с выбором шага указанном на следующем скриншоте:



Результаты решения в SCAD

Качественная картина деформирования полностью повторила наблюдаемую в эксперименте



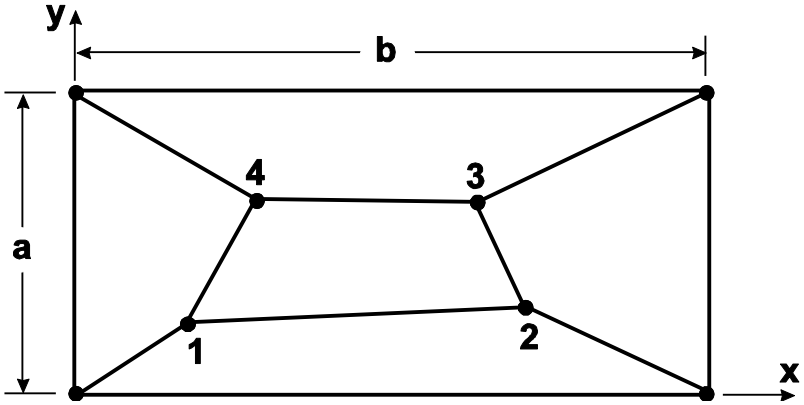
Изополя перемещений

Сравнение решений:

Параметр	Эксперимент	SCAD	Отклонение, %
Максимальное перемещение в вертикальном направлении (мм)	59,1	55,65	5,84

Патологические тесты

Прямоугольная пластина в условиях постоянных напряжений на срединной поверхности



Цель: Проверка точного воспроизведения условий постоянных напряжений на срединной поверхности прямоугольной пластины при нерегулярной крупной сетке конечных элементов.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Patch_test_Constant_stress_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42
Patch_test_Constant_stress_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44
Patch_test_Constant_stress_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45
Patch_test_Constant_stress_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50

Формулировка задачи: Прямоугольная изотропная пластина постоянной толщины подвергается воздействию смещений наружных кромок, обеспечивающих условия постоянных напряжений на срединной поверхности. Проверить: обеспечение условий постоянных нормальных σ_x, σ_y и касательных τ_{xy} напряжений на срединной поверхности.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.
J. Robinson, S. Blackham, An evaluation of lower order membranes as contained in MSC/NASTRAN, ASAS and PARFEC FEM system, Dorset, Robinson and associates, 1979.

Исходные данные:

$E = 1.0 \cdot 10^6$ кПа - модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.25$ - коэффициент Пуассона;
$t = 0.001$ м - толщина пластины;
$a = 0.12$ м - размер короткой стороны пластины;
$b = 0.24$ м - размер длинной стороны пластины;

Граничные условия:

$u = 10^{-3} \cdot (x + y/2)$ - смещение наружных кромок вдоль длинной стороны пластины;
$v = 10^{-3} \cdot (x/2 + y)$ - смещение наружных кромок вдоль короткой стороны пластины;

Расположение внутренних узлов сетки конечных элементов:

Номера узлов по рисунку 1	x	y
1	0.04	0.02
2	0.18	0.03
3	0.16	0.08
4	0.08	0.08

***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются четыре расчетные модели:
Модель 1 - 10 трехузловых элементов оболочки типа 42. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям

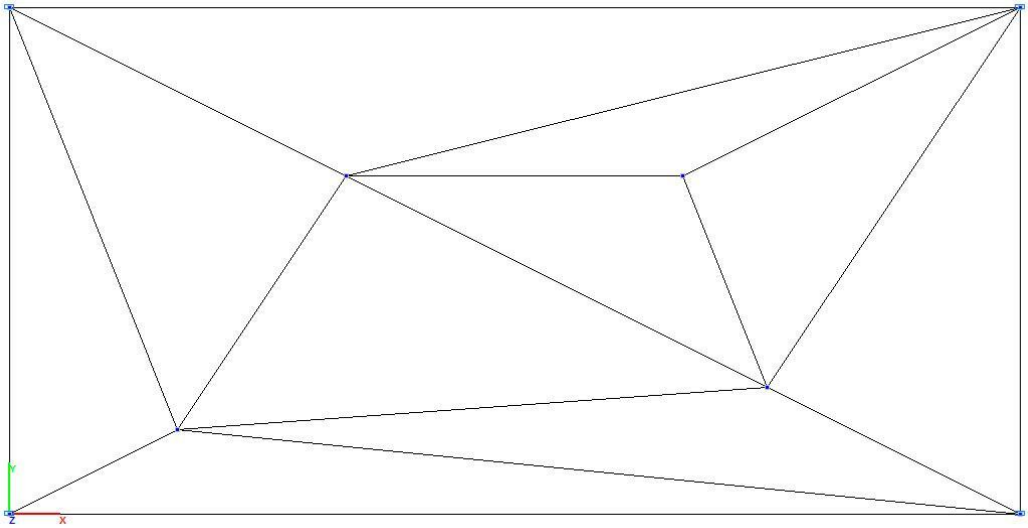
степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения их в соответствии с заданными значениями u и v. Количество узлов в модели – 8.

Модель 2 - 5 четырехузловых элементов оболочки типа 44. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения их в соответствии с заданными значениями u и v. Количество узлов в модели – 8.

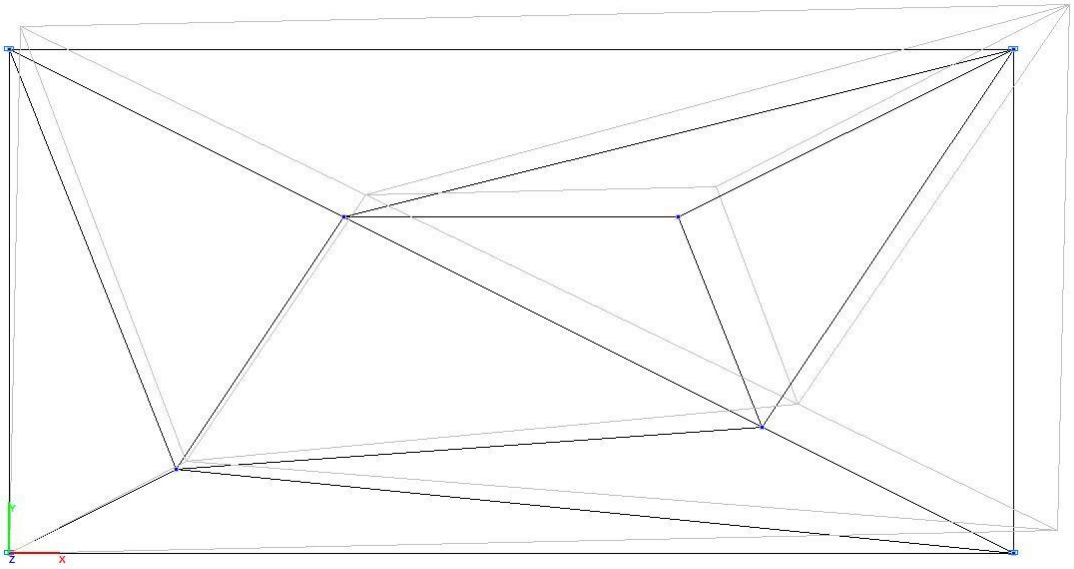
Модель 3 - 10 шестиузловых элементов оболочки типа 45. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения их в соответствии с заданными значениями u и v. Количество узлов в модели – 25.

Модель 4 - 5 восьмиузловых элементов оболочки типа 50. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения их в соответствии с заданными значениями u и v. Количество узлов в модели – 20.

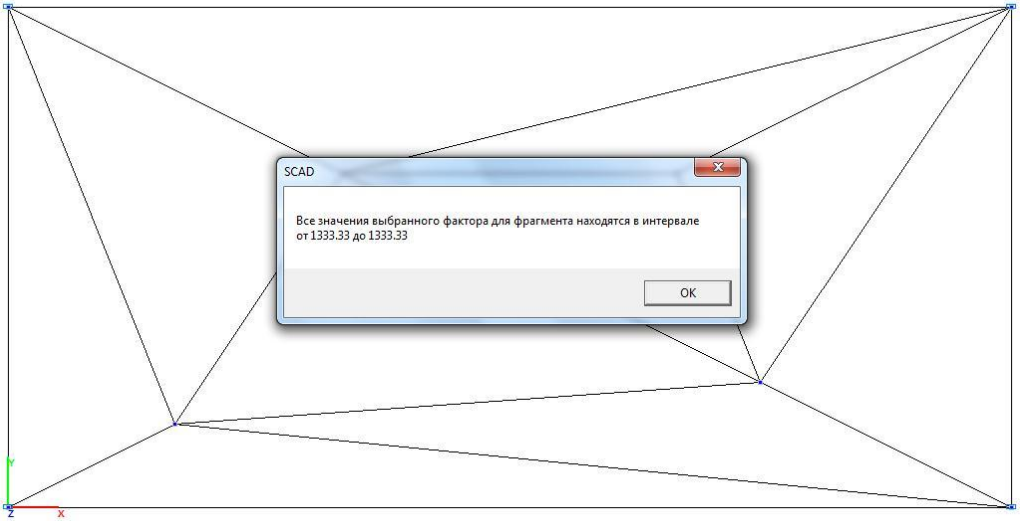
Результаты решения в SCAD



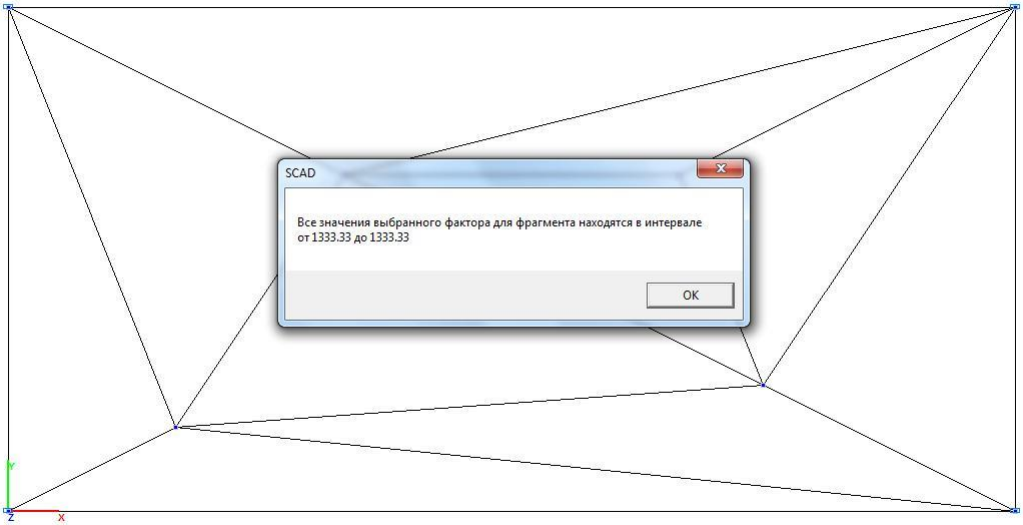
Модель 1. Расчетная схема



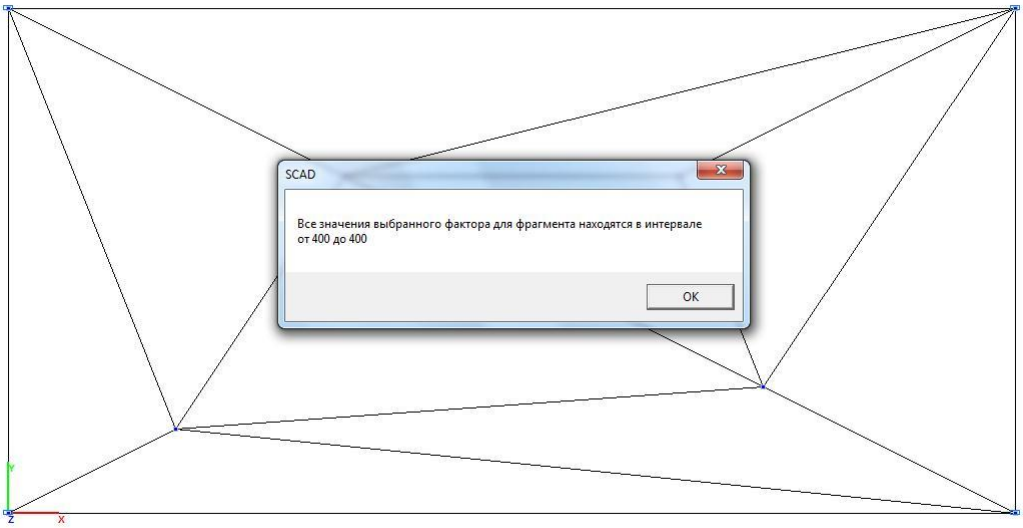
Модель 1. Деформированная схема



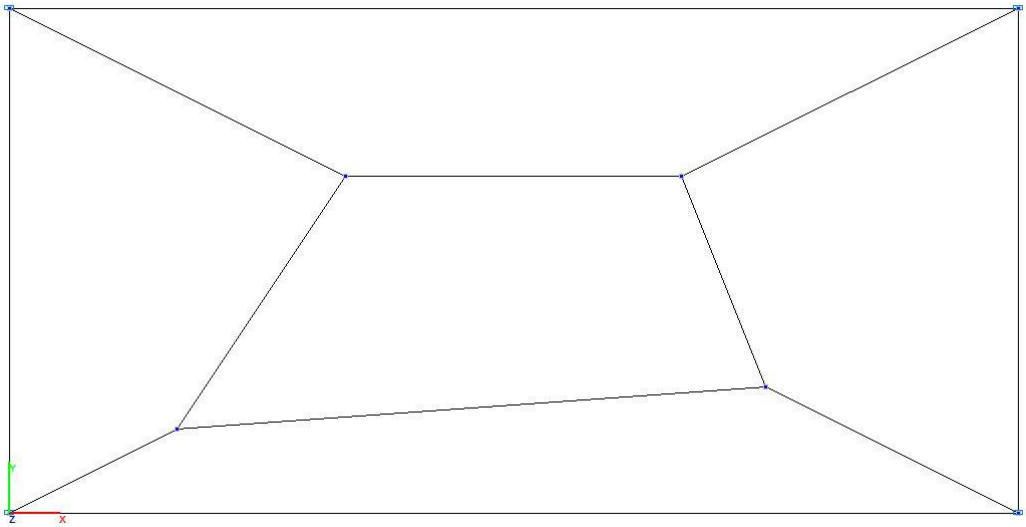
Модель 1. Значения нормальных напряжений σ_x (кН/м^2)



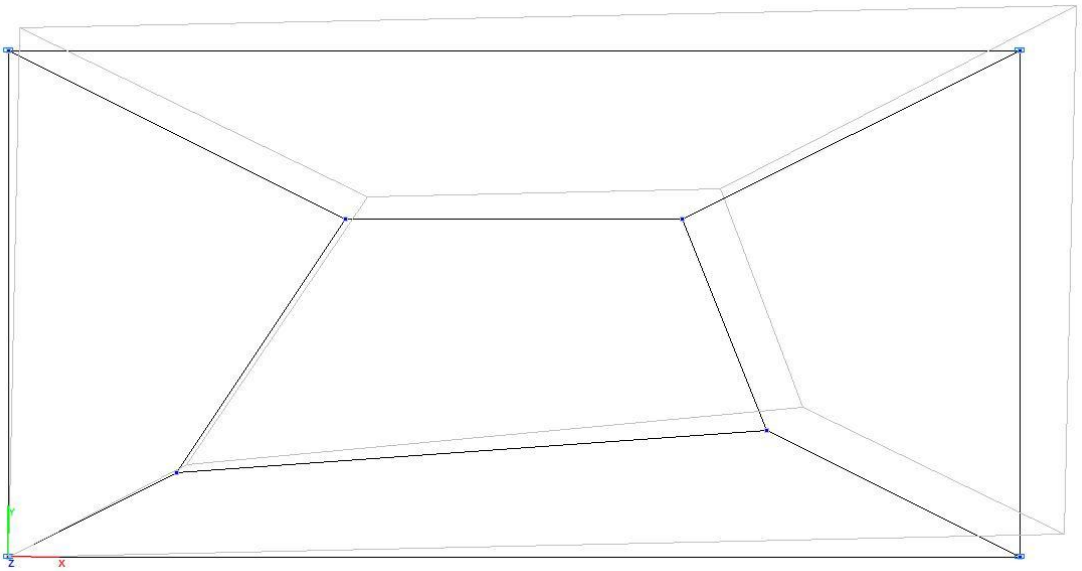
Модель 1. Значения нормальных напряжений σ_y (кН/м^2)



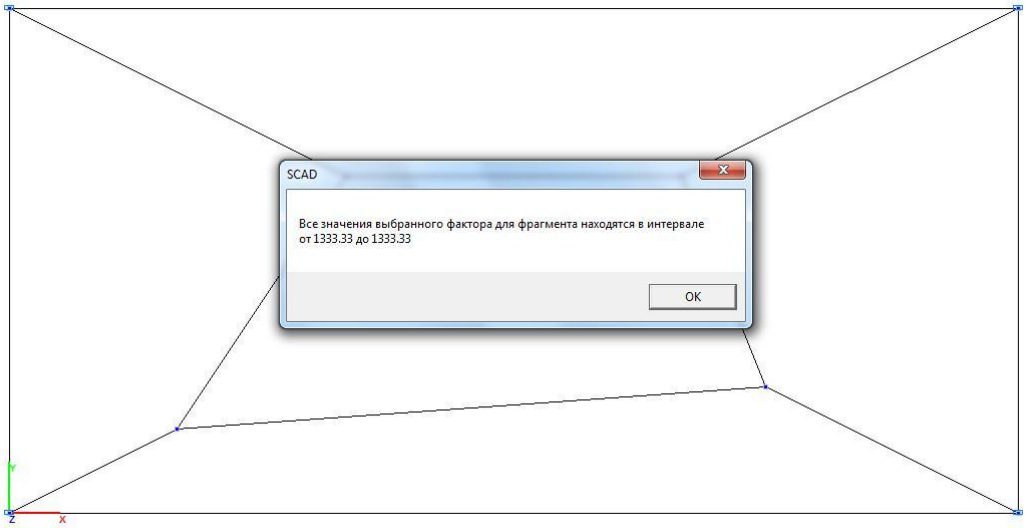
Модель 1. Значения касательных напряжений τ_{xy} (кН/м^2)



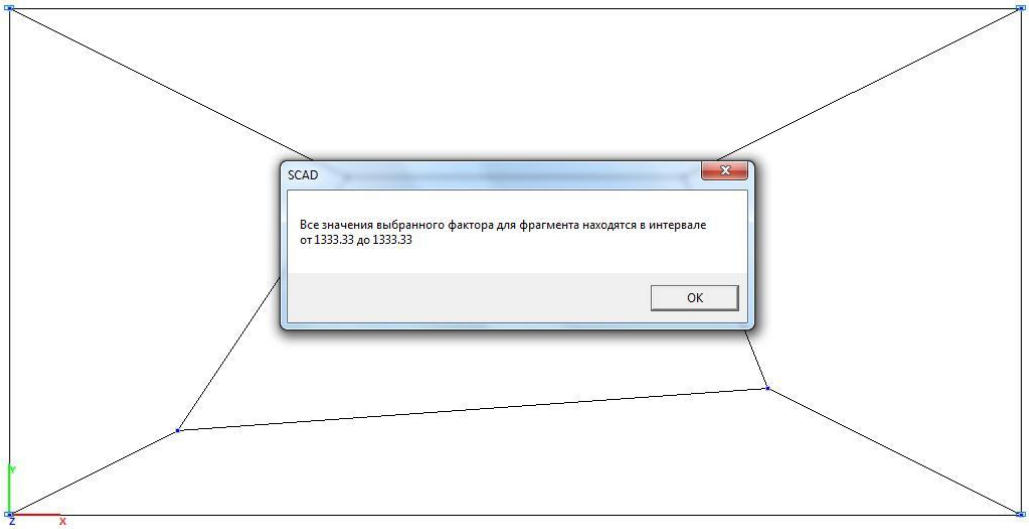
Модель 2. Расчетная схема



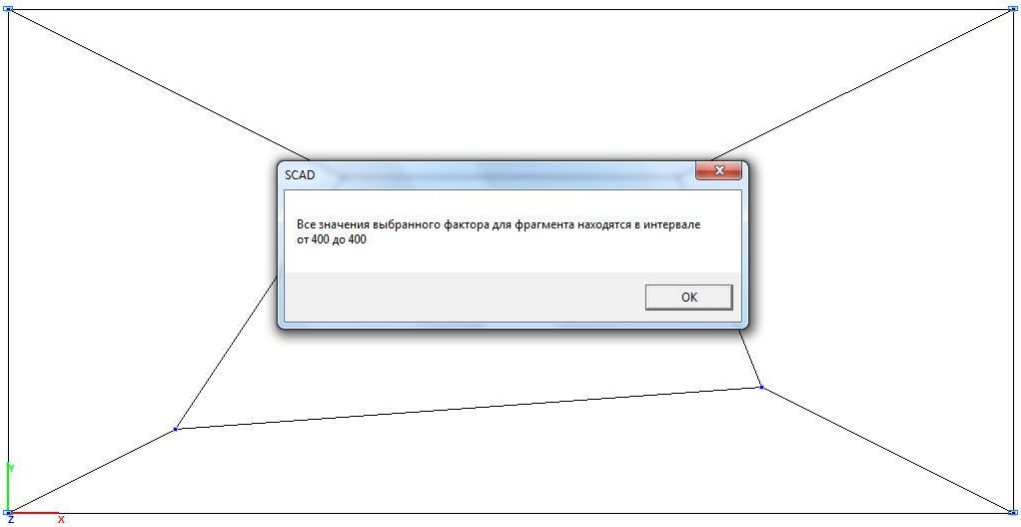
Модель 2. Деформированная схема



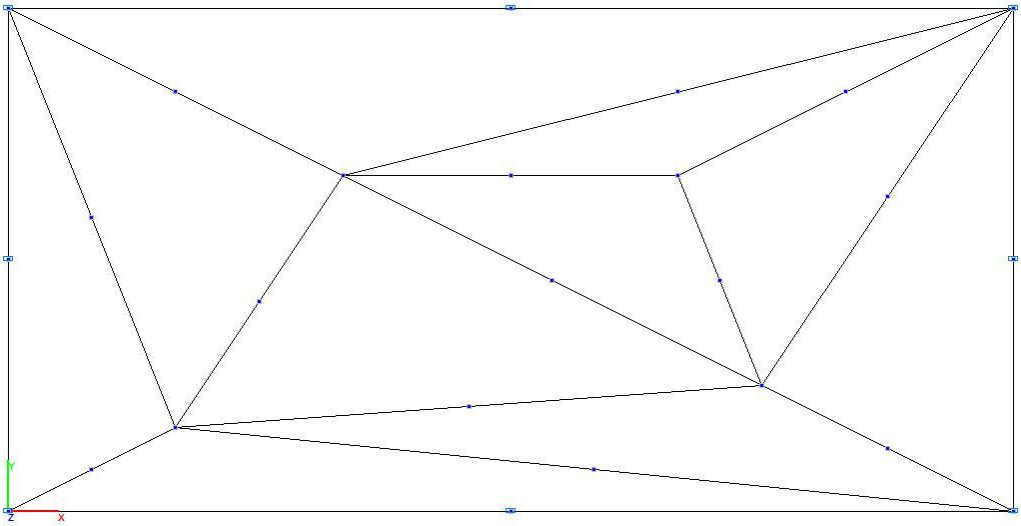
Модель 2. Значения нормальных напряжений σ_x (кН/м^2)



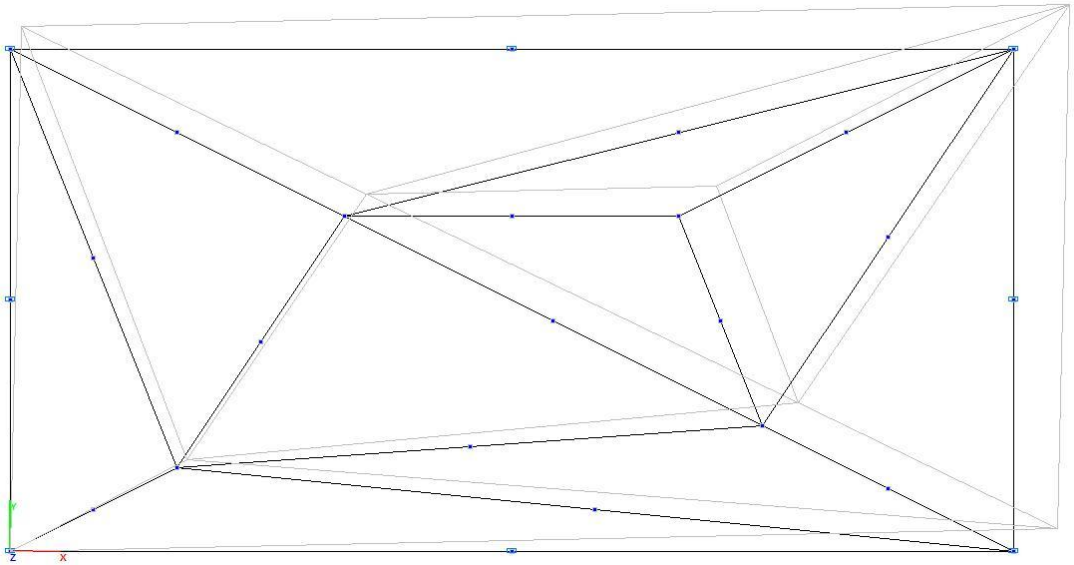
Модель 2. Значения нормальных напряжений σ_y (кН/м^2)



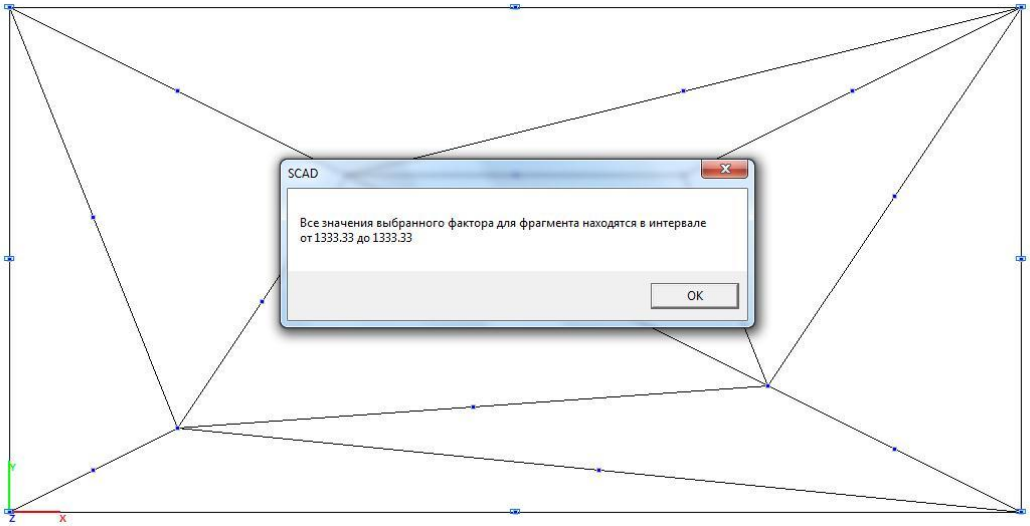
Модель 2. Значения касательных напряжений τ_{xy} (кН/м^2)



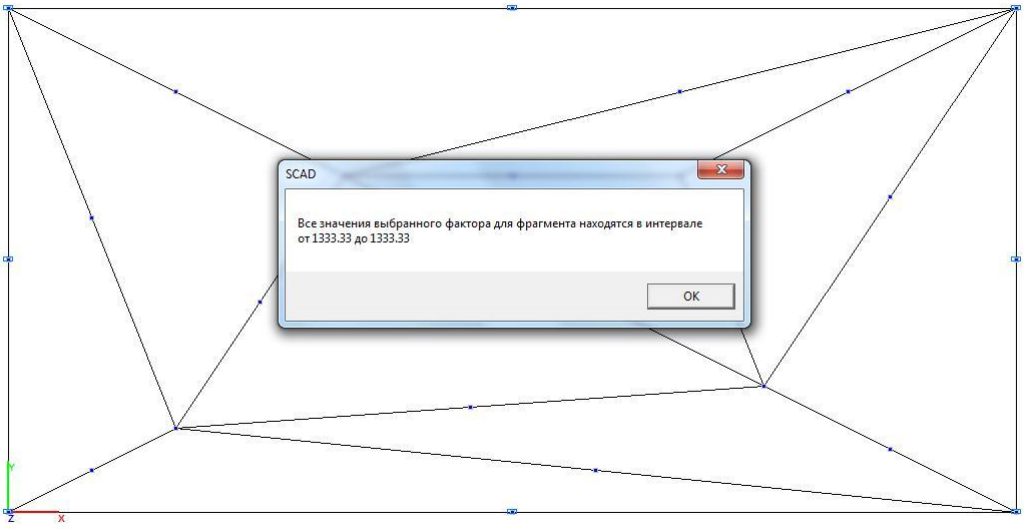
Модель 3. Расчетная схема



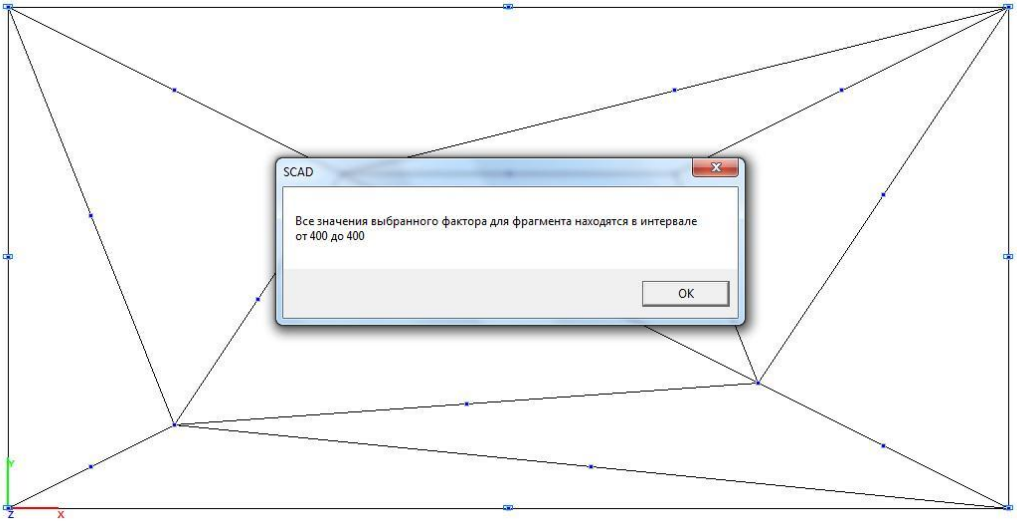
Модель 3. Деформированная схема



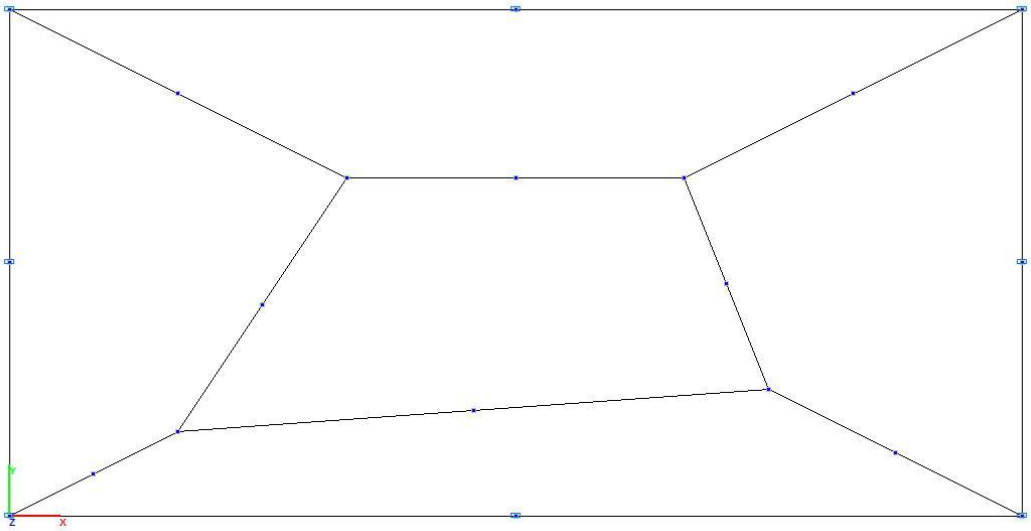
Модель 3. Значения нормальных напряжений σ_x (кН/м^2)



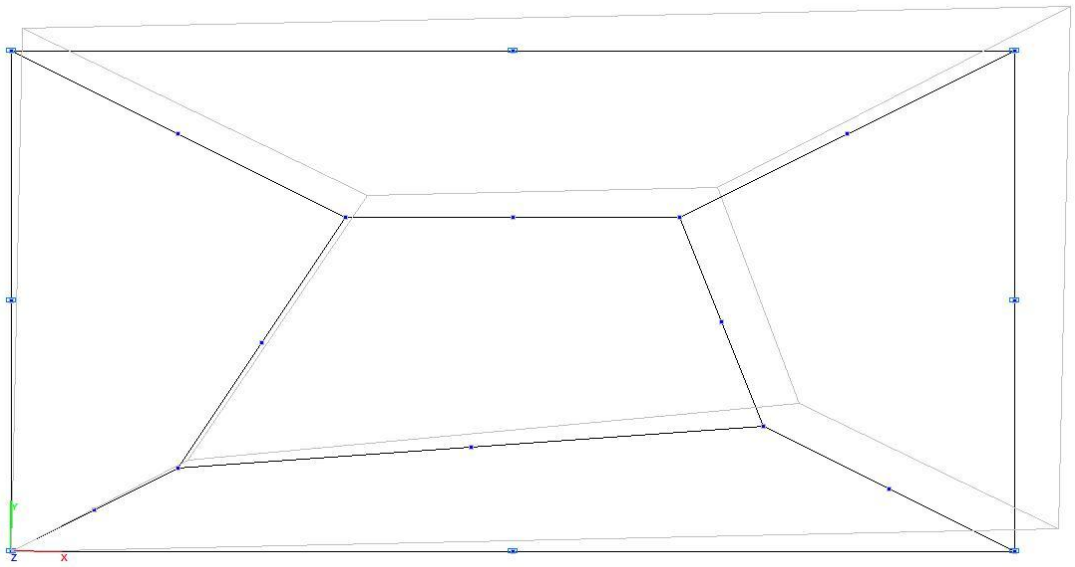
Модель 3. Значения нормальных напряжений σ_y (кН/м^2)



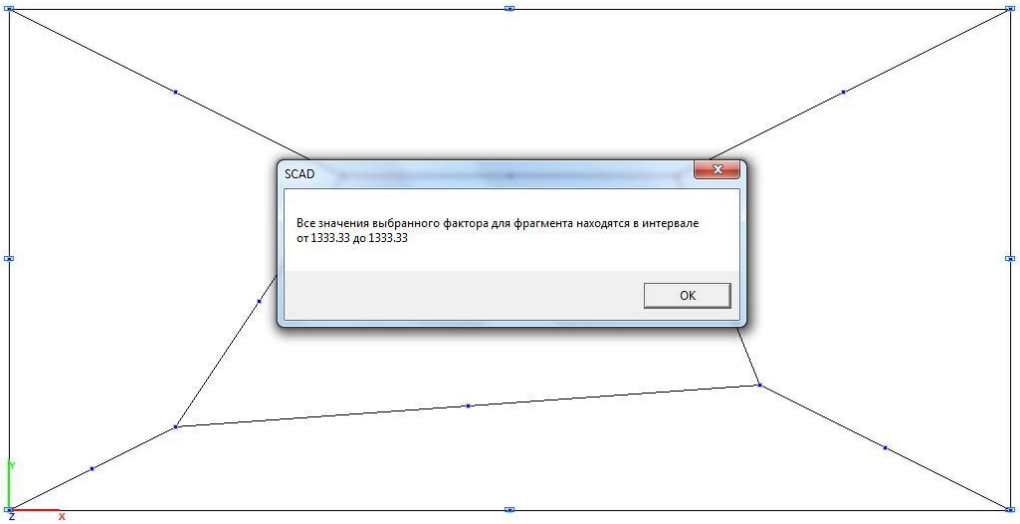
Модель 3. Значения касательных напряжений τ_{xy} (кН/м^2)



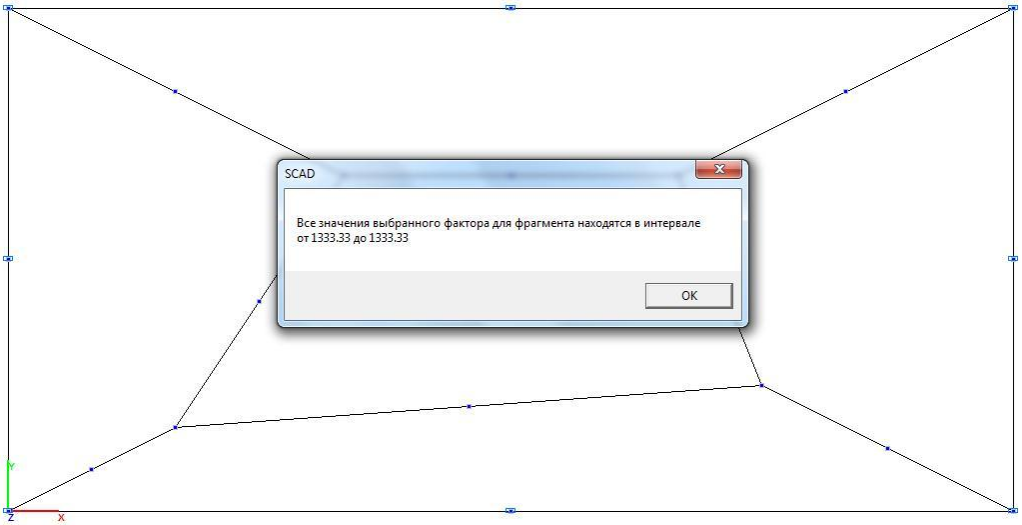
Модель 4. Расчетная схема



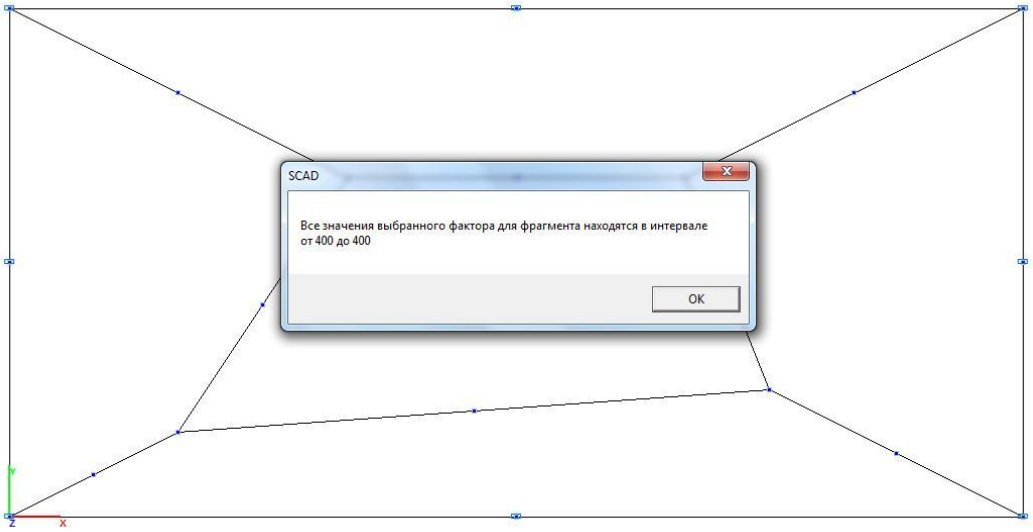
Модель 4. Деформированная схема



Модель 4. Значения нормальных напряжений σ_x (кН/м^2)



Модель 4. Значения нормальных напряжений σ_y (кН/м^2)



Модель 4. Значения касательных напряжений τ_{xy} (кН/м^2)

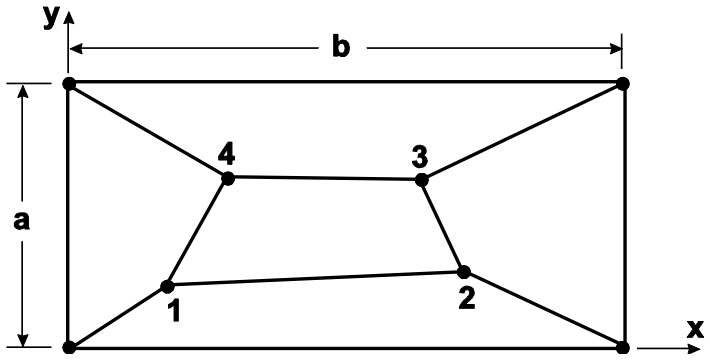
Сравнение решений:

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	400	400	0.00
2	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	400	400	0.00
3	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	400	400	0.00
4	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	1333	1333	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	400	400	0.00

Замечания: При аналитическом решении нормальные σ_x, σ_y и касательные τ_{xy} напряжения на срединной поверхности пластины определяются по следующим формулам:

$$\sigma_x = 10^{-3} \cdot \frac{E}{1-\nu}; \qquad \sigma_y = 10^{-3} \cdot \frac{E}{1-\nu}; \qquad \tau_{xy} = 10^{-3} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}.$$

Прямоугольная пластина в условиях постоянных кривизн



Цель: Проверка точного воспроизведения условий постоянных кривизн (напряжений на наружной поверхности) для прямоугольной пластины при нерегулярной крупной сетке конечных элементов.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Patch_test_Constant_curvature_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42
Patch_test_Constant_curvature_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44
Patch_test_Constant_curvature_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45
Patch_test_Constant_curvature_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50

Формулировка задачи: Прямоугольная изотропная пластина постоянной толщины подвергается воздействию смещений и поворотов наружных кромок, обеспечивающих условия постоянных кривизн (напряжений на наружной поверхности). Проверить: обеспечение условий постоянных кривизн κ_x, κ_y, κ_{xy} (напряжений на наружной поверхности σ_x, σ_y, τ_{xy}).

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.
J. Robinson, S. Blackham, An evaluation of plate bending elements: MSC/NASTRAN, ASAS, PARFEC, ANSYS and SAP4, Dorset, Robinson and associates, 1981.

Исходные данные:

$E = 1.0 \cdot 10^6$ кПа - модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.25$ - коэффициент Пуассона;
$t = 0.001$ м - толщина пластины;
$a = 0.12$ м - размер короткой стороны пластины;
$b = 0.24$ м - размер длинной стороны пластины;

Граничные условия:

$w = 10^{-3} \cdot (x^2 + x \cdot y + y^2)/2$ - смещение наружных кромок по нормали к поверхности пластины;
$\theta_x = 10^{-3} \cdot (x/2 + y)$ - поворот наружных кромок вокруг коротких сторон пластины;
$\theta_y = 10^{-3} \cdot (-x - y/2)$ - поворот наружных кромок вокруг длинных сторон пластины.

Расположение внутренних узлов сетки конечных элементов:

Номера узлов по рисунку 1	x	y
1	0.04	0.02
2	0.18	0.03
3	0.16	0.08
4	0.08	0.08

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются четыре расчетные модели:
Модель 1 - 10 трехузловых элементов оболочки типа 42. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям

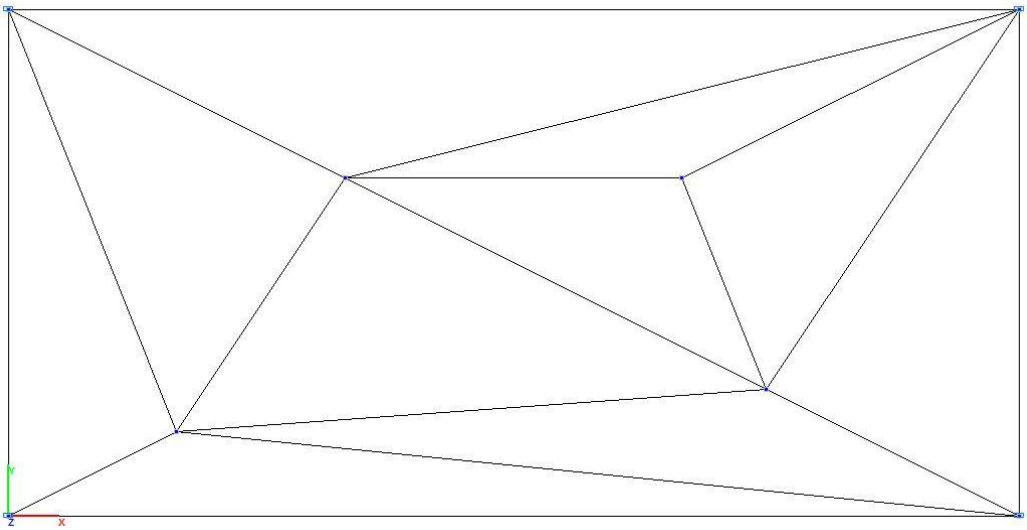
степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения (поворота) их в соответствии с заданными значениями w, θ_x и θ_y. Количество узлов в модели – 8.

Модель 2 - 5 четырехузловых элементов оболочки типа 44. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения (поворота) их в соответствии с заданными значениями w, θ_x и θ_y.. Количество узлов в модели – 8.

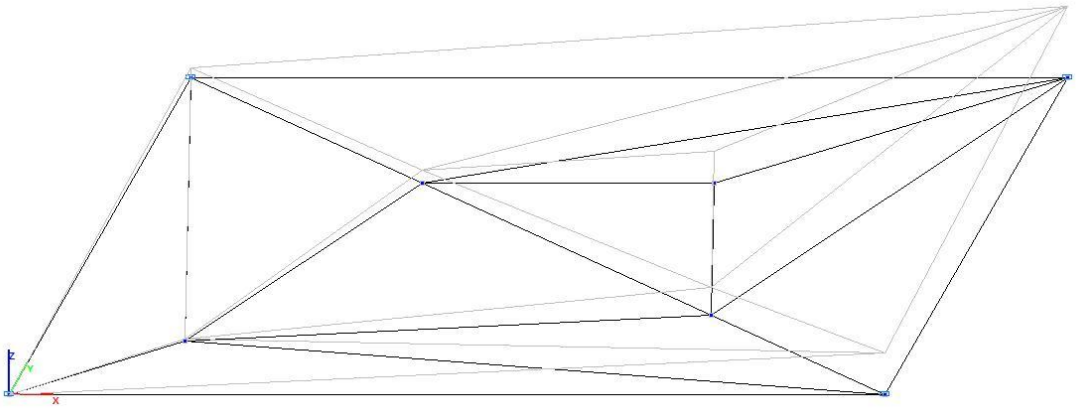
Модель 3 - 10 шестиузловых элементов оболочки типа 45. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения (поворота) их в соответствии с заданными значениями w, θ_x и θ_y. Количество узлов в модели – 25.

Модель 4 - 5 восьмиузловых элементов оболочки типа 50. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и смещения (поворота) их в соответствии с заданными значениями w, θ_x и θ_y. Количество узлов в модели – 20.

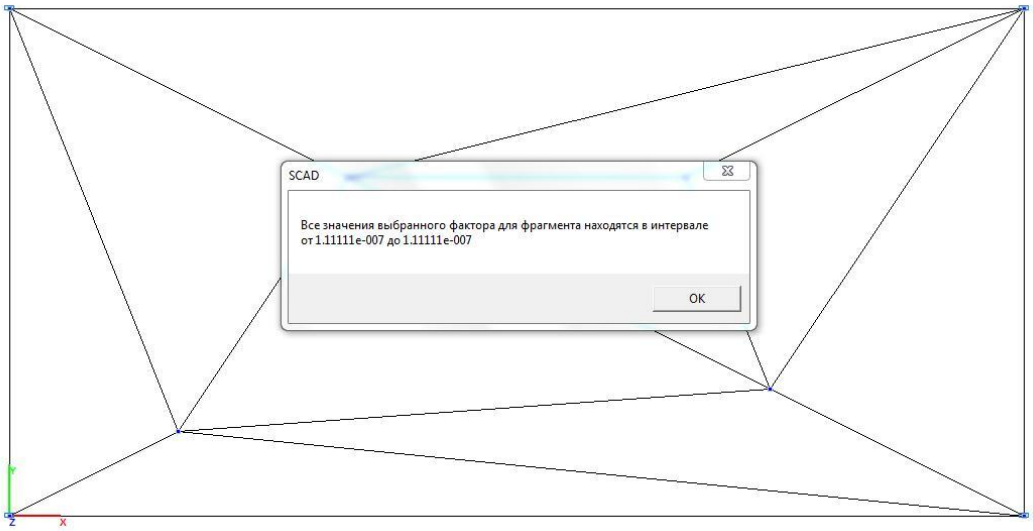
Результаты решения в SCAD



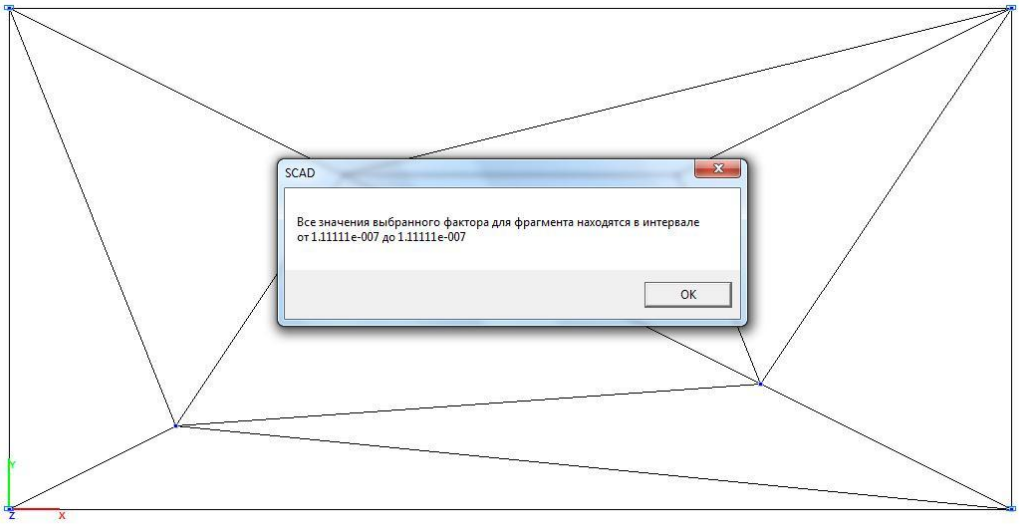
Модель 1. Расчетная схема



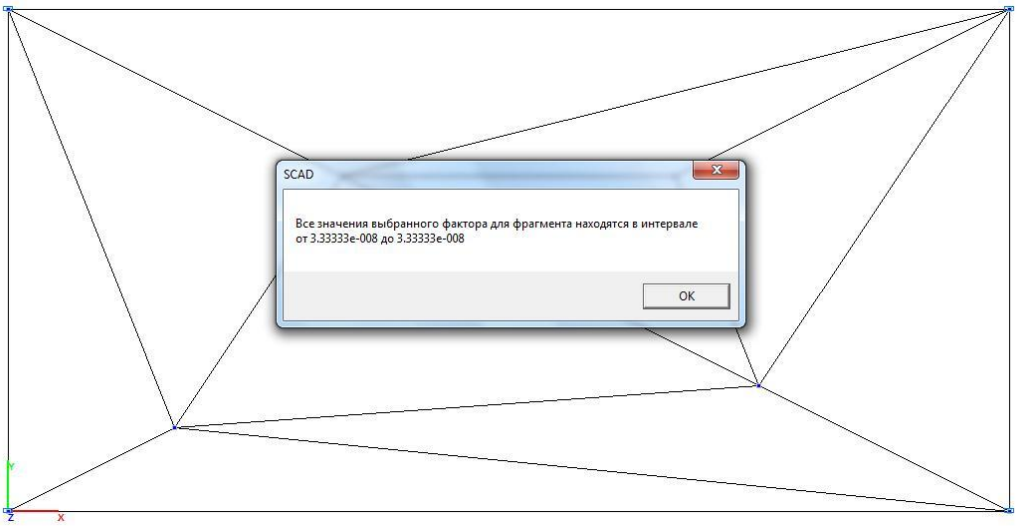
Модель 1. Деформированная схема



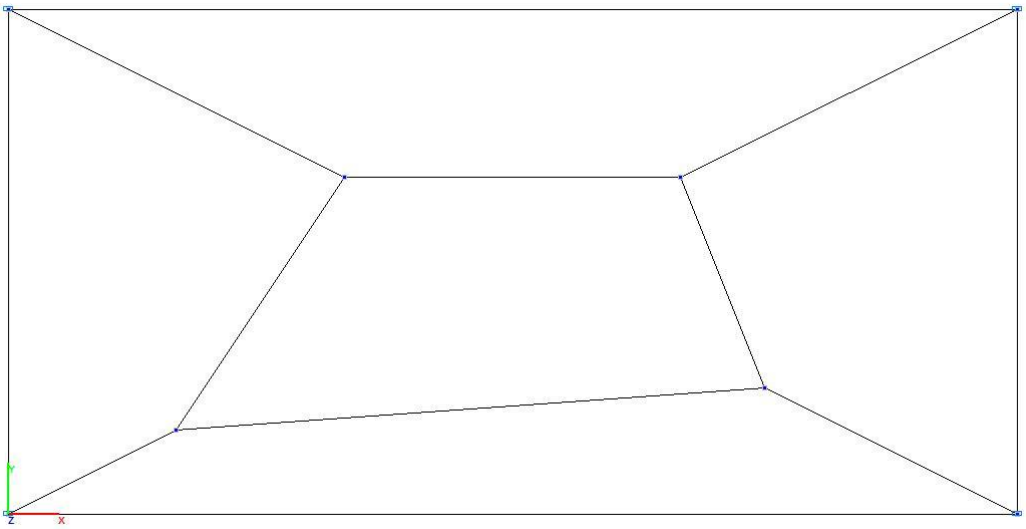
Модель 1. Значения изгибающего момента M_x (кН·м/м)



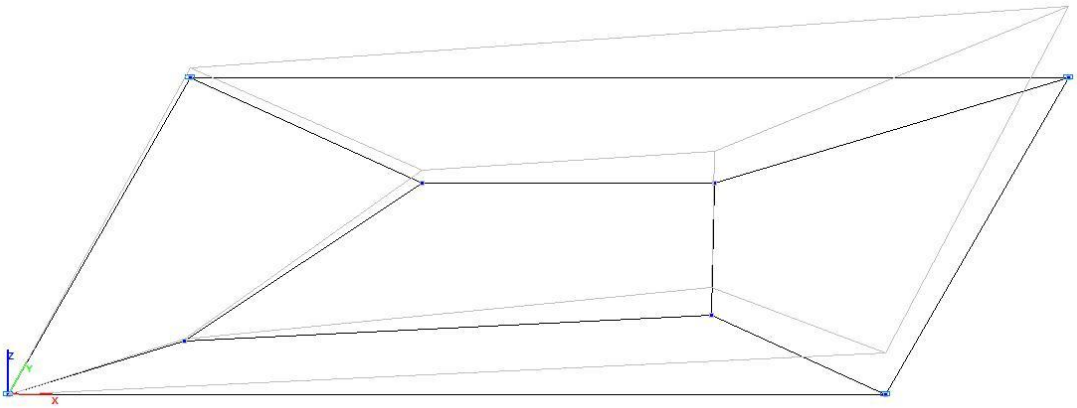
Модель 1. Значения изгибающего момента M_y (кН·м/м)



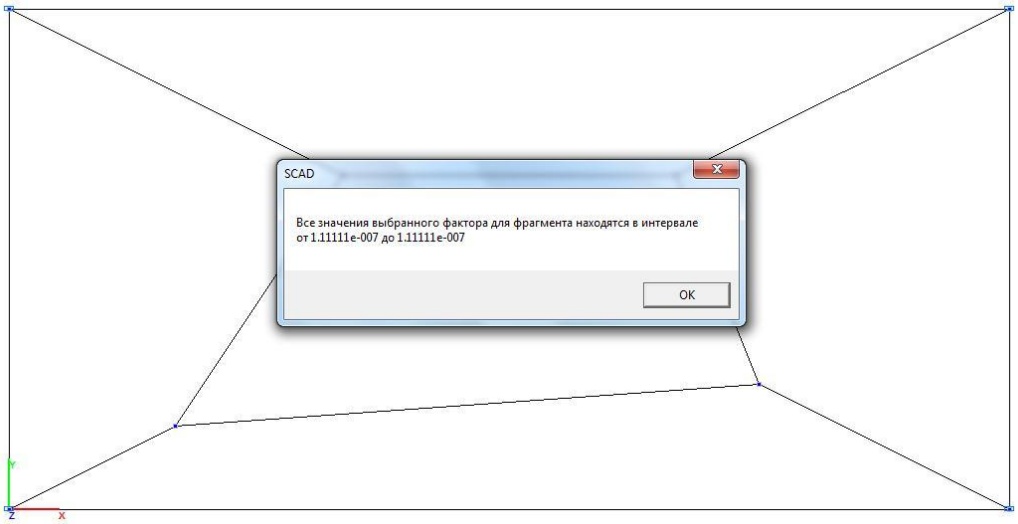
Модель 1. Значения крутящего момента M_{xy} (кН·м/м)



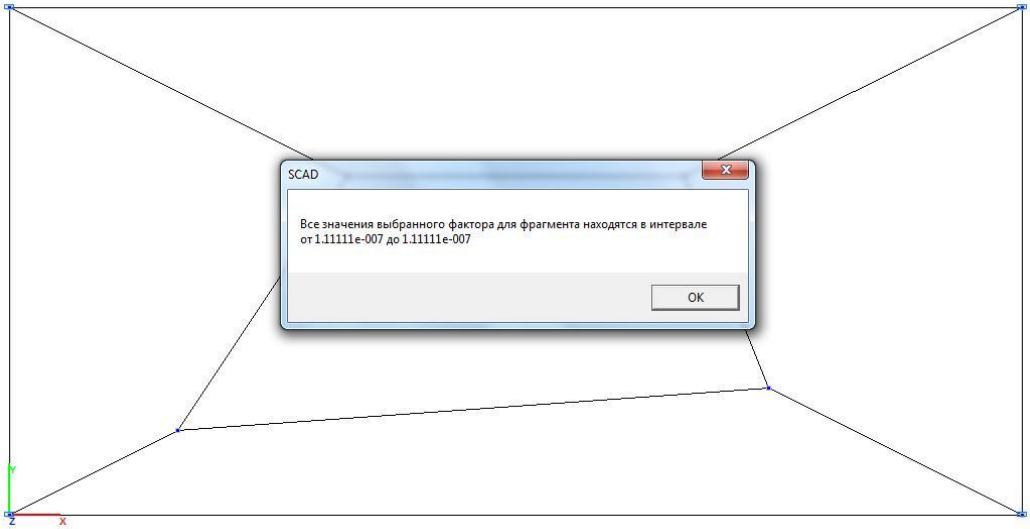
Модель 2. Расчетная схема



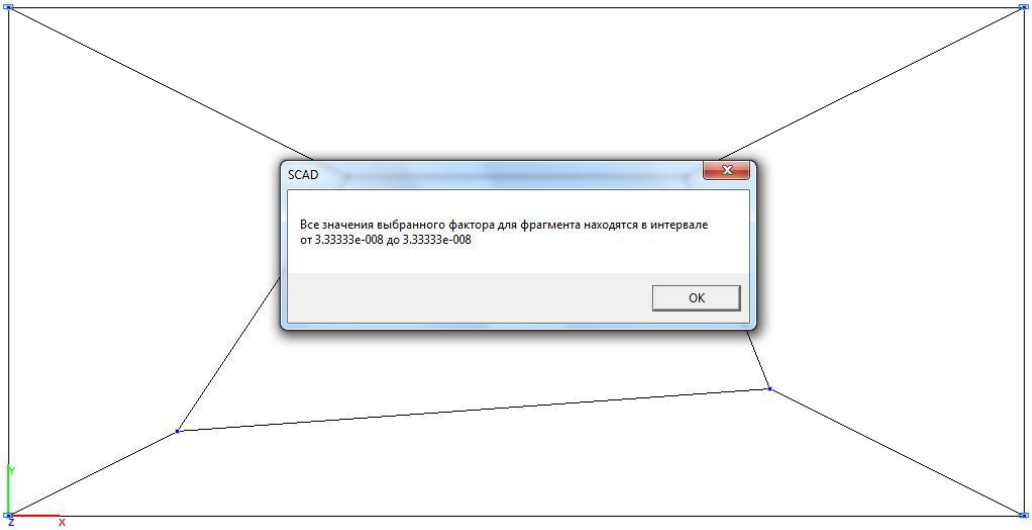
Модель 2. Деформированная схема



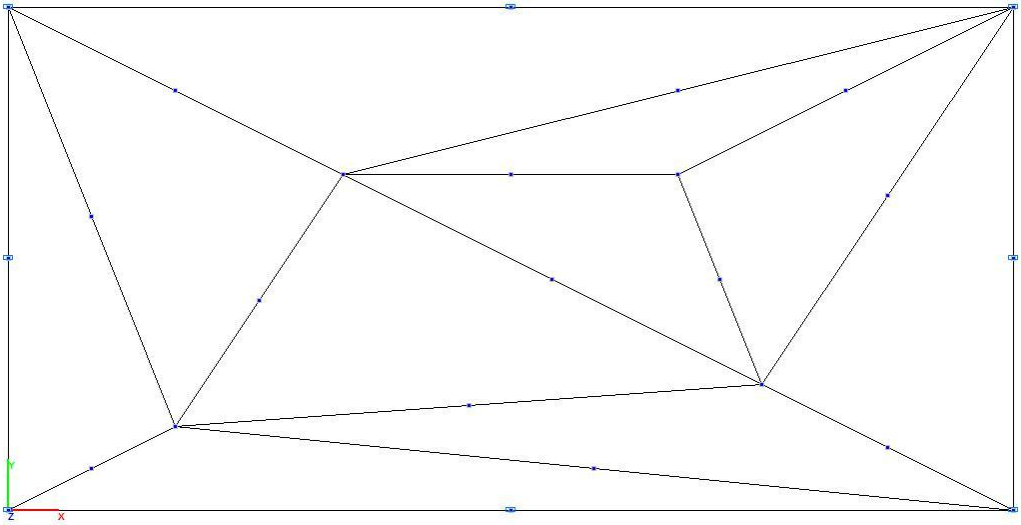
Модель 2. Значения изгибающего момента M_x (кН·м/м)



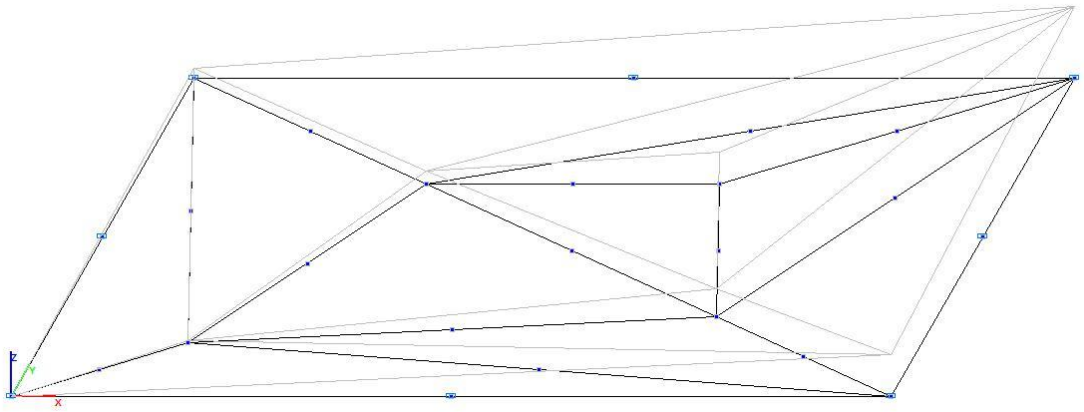
Модель 2. Значения изгибающего момента M_y (кН·м/м)



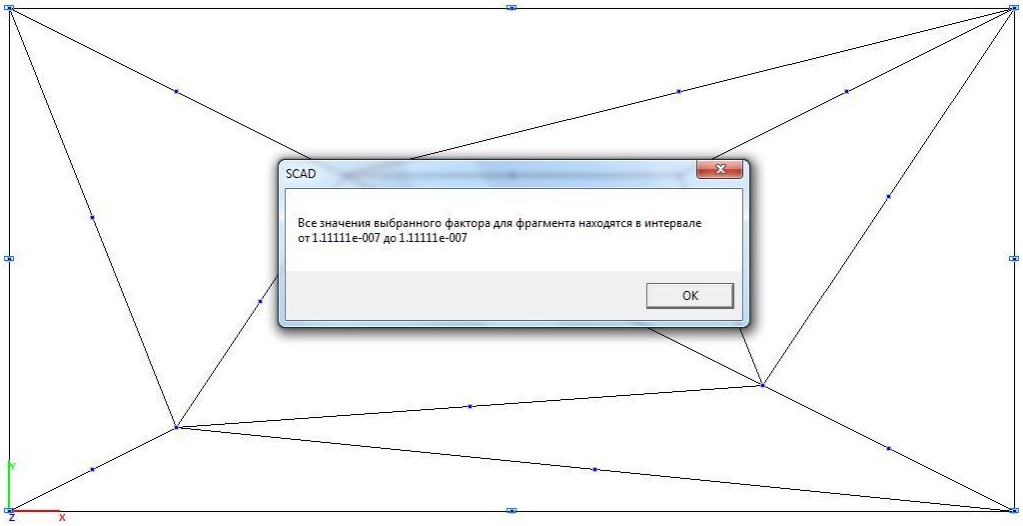
Модель 2. Значения крутящего момента M_{xy} (кН·м/м)



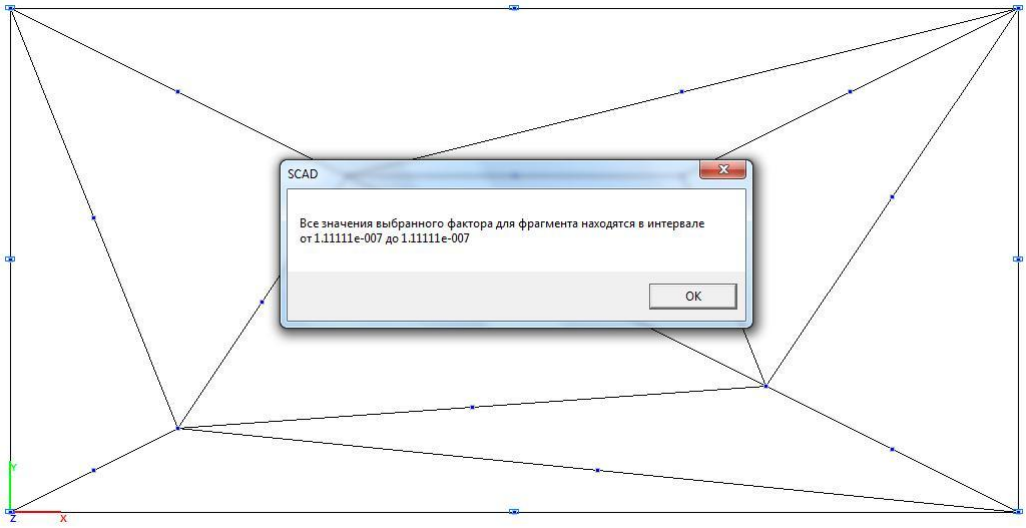
Модель 3. Расчетная схема



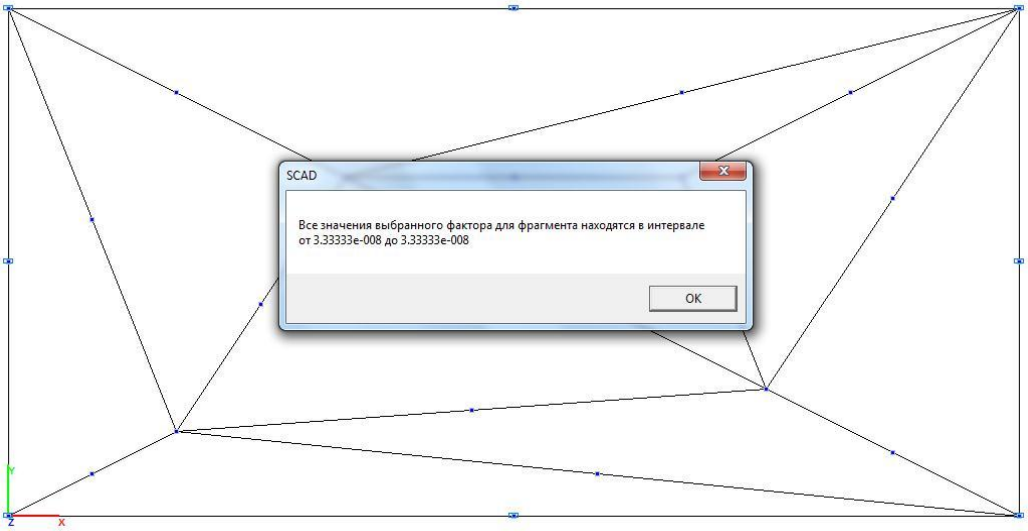
Модель 3. Деформированная схема



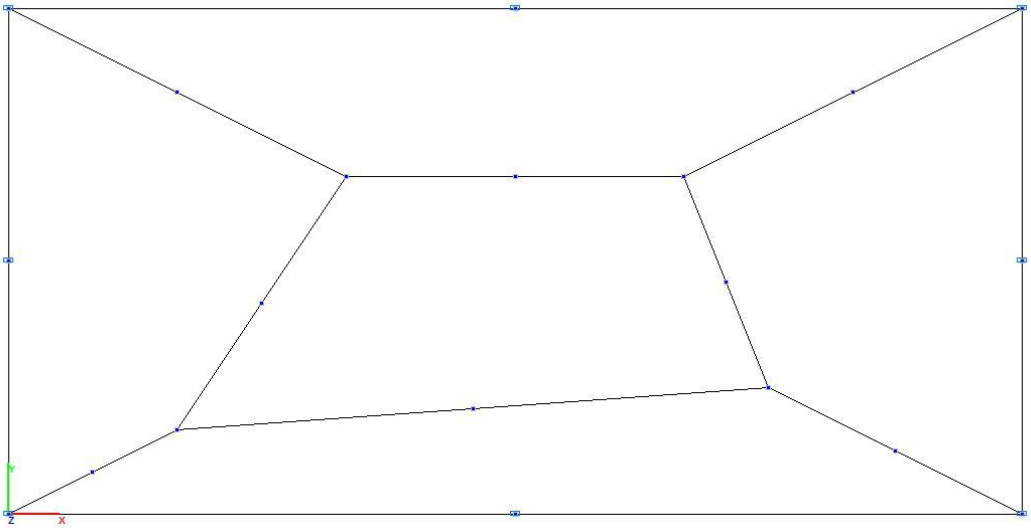
Модель 3. Значения изгибающего момента M_x (кН·м/м)



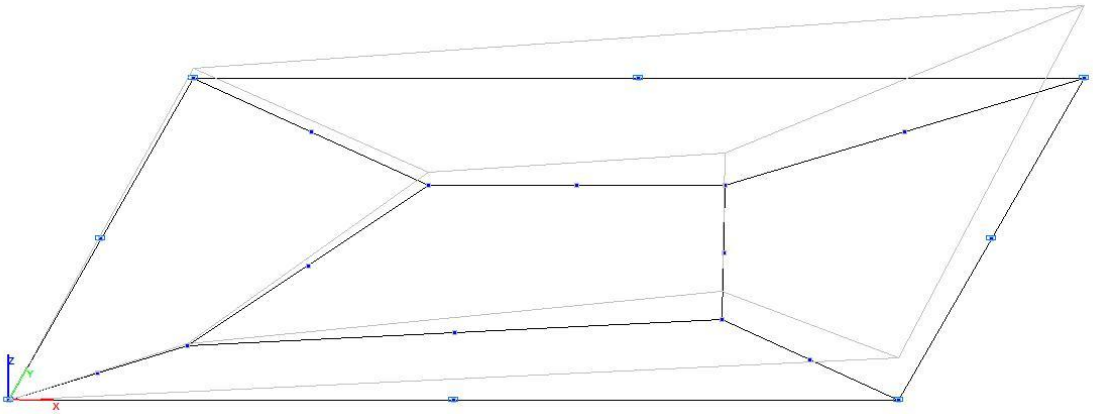
Модель 3. Значения изгибающего момента M_y (кН·м/м)



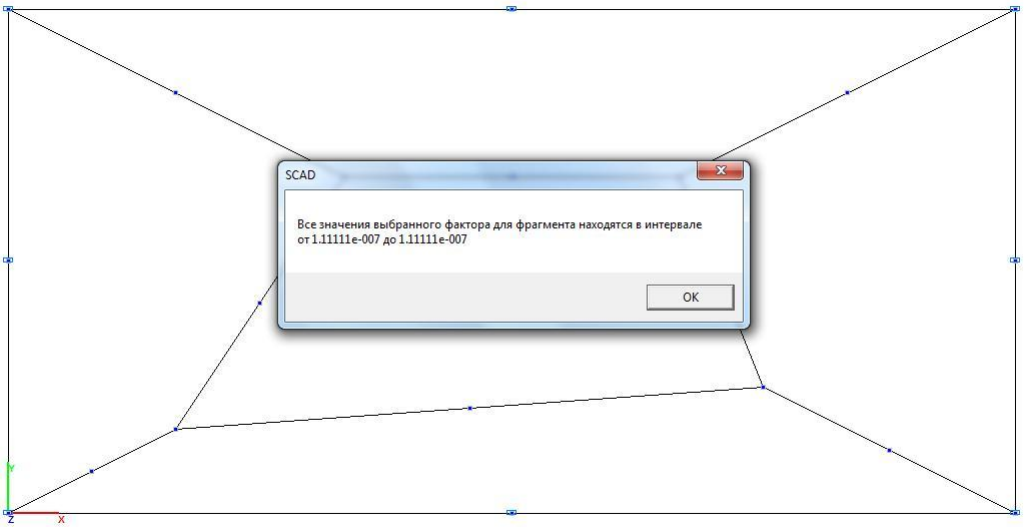
Модель 3. Значения крутящего момента M_{xy} (кН·м/м)



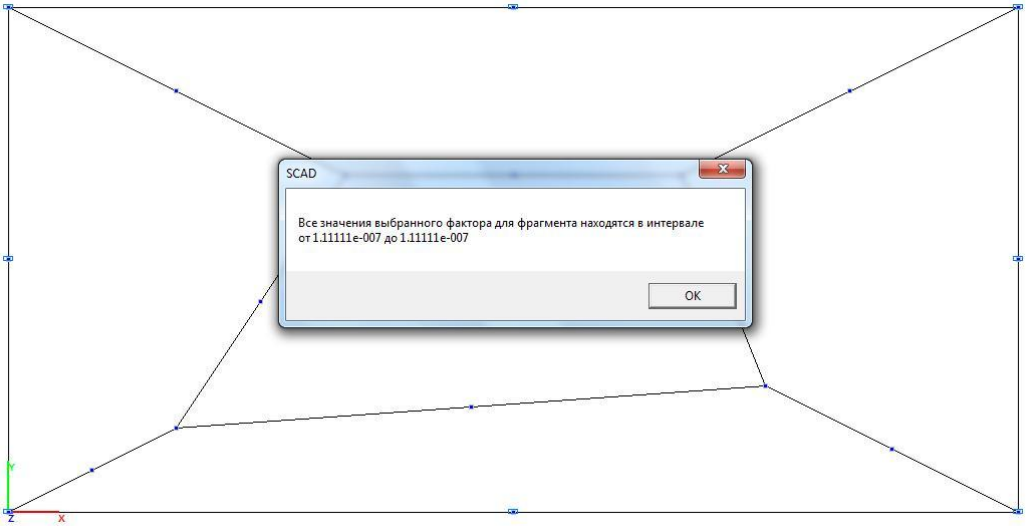
Модель 4. Расчетная схема



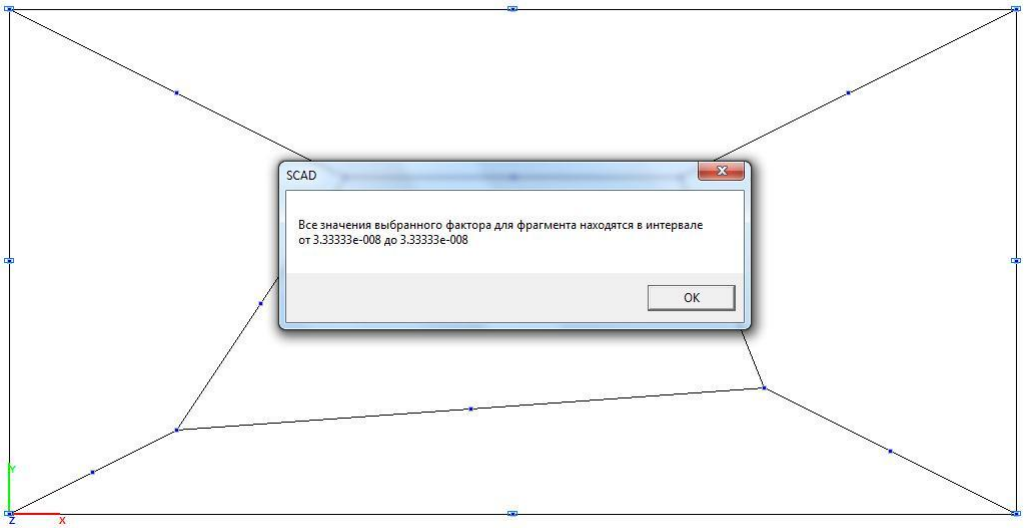
Модель 4. Деформированная схема



Модель 4. Значения изгибающего момента M_x (кН·м/м)



Модель 4. Значения изгибающего момента M_y (кН·м/м)



Модель 4. Значения крутящего момента M_{xy} (кН·м/м)

Сравнение решений:

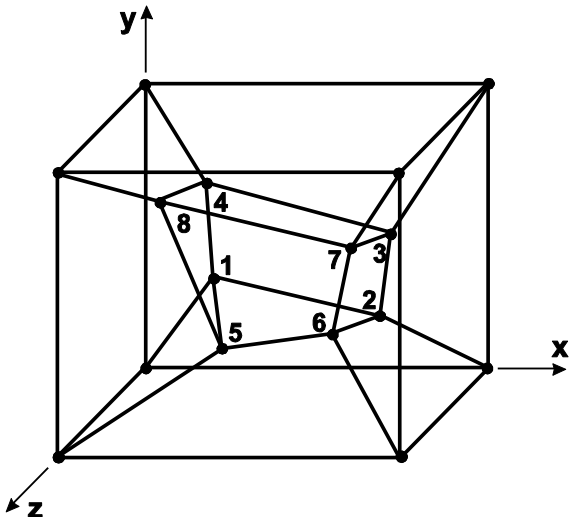
Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	0.200	$6\cdot0.333\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.200	0.00
2	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	0.200	$6\cdot0.333\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.200	0.00
3	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	0.200	$6\cdot0.333\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.200	0.00
4	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	0.667	$6\cdot1.111\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.667	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	0.200	$6\cdot0.333\cdot10^{-7}/0.001^2$ = = 0.200	0.00

Замечания: При аналитическом решении нормальные σ_x, σ_y и касательные τ_{xy} напряжения на наружной поверхности пластины определяются по следующим формулам:

$$\sigma_x = 10^{-3}\cdot\frac{E\cdot t}{2\cdot(1-\nu)} = \frac{6\cdot M_x}{t^2};\qquad \sigma_y = 10^{-3}\cdot\frac{E\cdot t}{2\cdot(1-\nu)} = \frac{6\cdot M_y}{t^2};$$

$$\tau_{xy} = 10^{-3}\cdot\frac{E\cdot t}{4\cdot(1+\nu)} = \frac{6\cdot M_{xy}}{t^2}.$$

Куб в условиях постоянных напряжений по объему



Цель: Проверка точного воспроизведения условий постоянных напряжений по объему куба при нерегулярной крупной сетке конечных элементов.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Patch_test_Constant_stress_Solid_32.SPR	Расчетная модель с типом элементов 32
Patch_test_Constant_stress_Solid_34.SPR	Расчетная модель с типом элементов 34
Patch_test_Constant_stress_Solid_36.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36
Patch_test_Constant_stress_Solid_37.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37

Формулировка задачи: Единичный изотропный куб подвергается воздействию смещений наружных поверхностей, обеспечивающих условия постоянных напряжений по объему. Проверить: обеспечение условий постоянных нормальных σ_x, σ_y, σ_z и касательных τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} напряжений по объему.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

Исходные данные:

$E = 1.0 \cdot 10^6$ кПа — модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.25$ — коэффициент Пуассона;
$a = 1.00$ м — размер ребра куба;

Граничные условия:

$u = 10^{-3} \cdot (2 \cdot x + y + z)/2$ — смещение наружных поверхностей вдоль оси X общей системы координат;
$v = 10^{-3} \cdot (x + 2 \cdot y + z)/2$ — смещение наружных поверхностей вдоль оси Y общей системы координат;
$w = 10^{-3} \cdot (x + y + 2 \cdot z)/2$ — смещение наружных поверхностей вдоль оси Z общей системы координат;

Расположение внутренних узлов сетки конечных элементов:

Номера узлов по рисунку 1	x	y	z
1	0.35	0.35	0.35
2	0.75	0.25	0.25
3	0.85	0.85	0.15
4	0.25	0.75	0.25
5	0.35	0.35	0.65

Номера узлов по рисунку 1	x	y	z
6	0.75	0.25	0.75
7	0.85	0.85	0.85
8	0.25	0.75	0.75

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматриваются четыре расчетные модели:

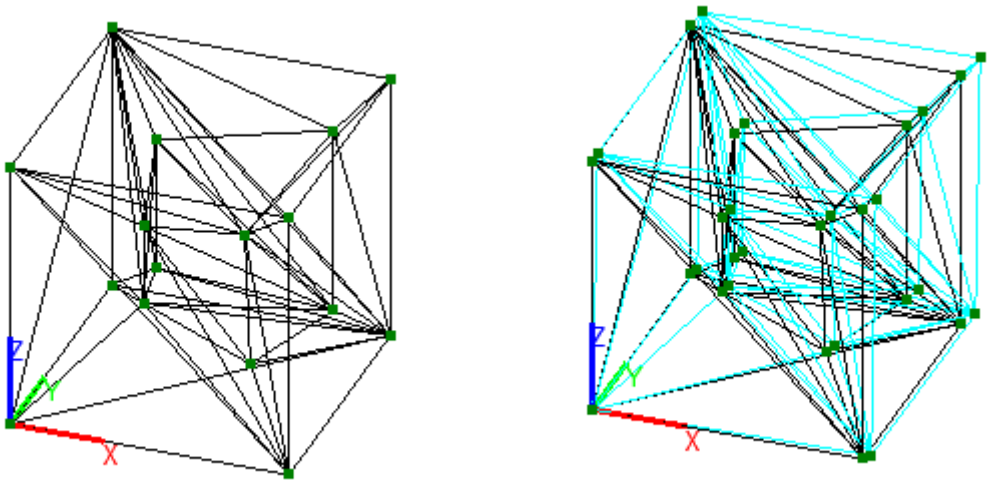
Модель 1 - 42 элемента четырехузловой пирамиды типа 32. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных поверхностей куба по направлениям степеней свободы X, Y, Z и смещения их в соответствии с заданными значениями u, v, w. Количество узлов в модели – 16.

Модель 2 - 14 шестиузловых изопараметрических объемных элементов типа 34. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных поверхностей куба по направлениям степеней свободы X, Y, Z и смещения их в соответствии с заданными значениями u, v, w. Количество узлов в модели – 16.

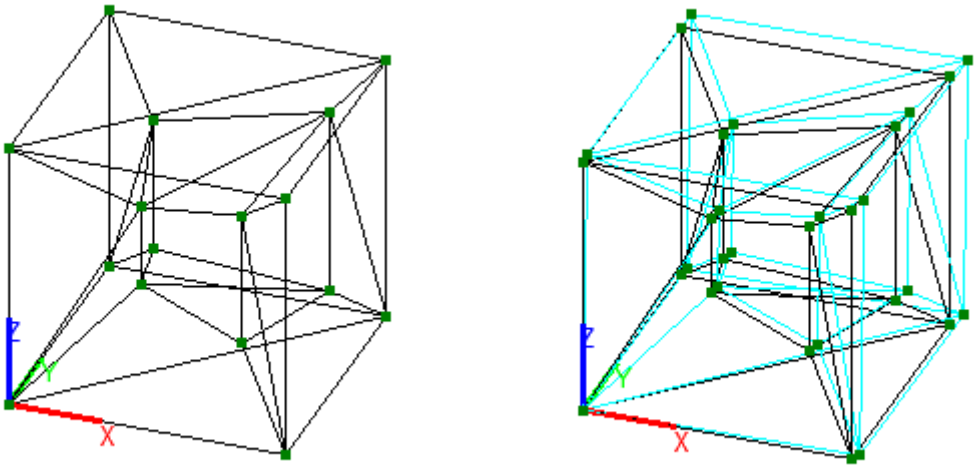
Модель 3 - 7 восьмиузловых изопараметрических объемных элементов типа 36. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных поверхностей куба по направлениям степеней свободы X, Y, Z и смещения их в соответствии с заданными значениями u, v, w. Количество узлов в модели – 16.

Модель 4 - 7 двадцатиузловых изопараметрических объемных элементов типа 37. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы наружных поверхностей куба по направлениям степеней свободы X, Y, Z и смещения их в соответствии с заданными значениями u, v, w. Количество узлов в модели – 48.

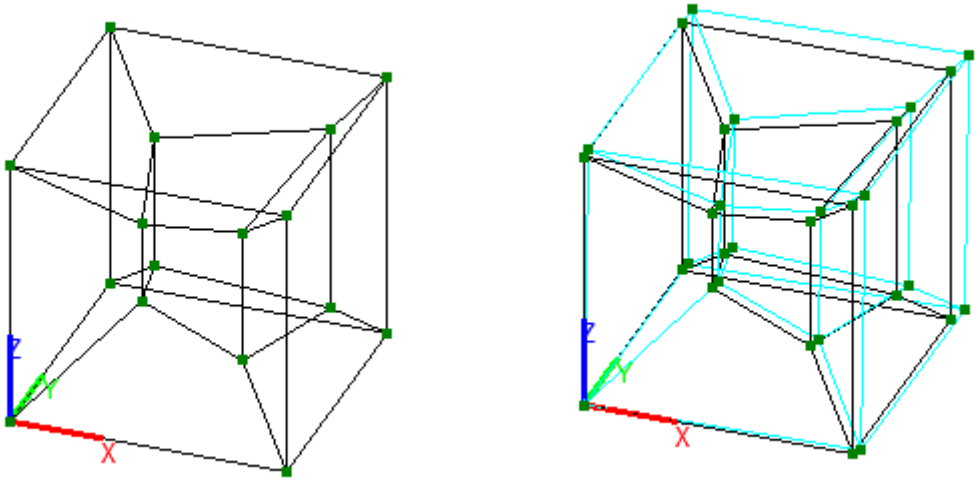
Результаты решения в SCAD



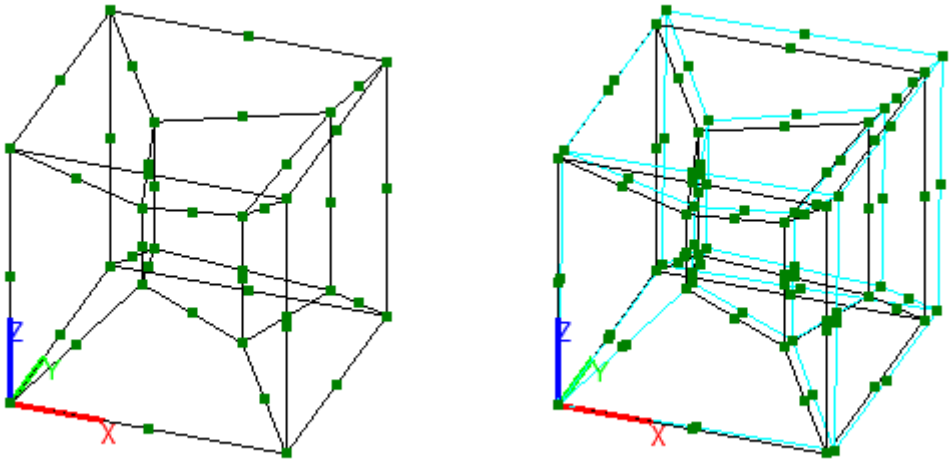
Модель 1. Расчетная и деформированная схемы



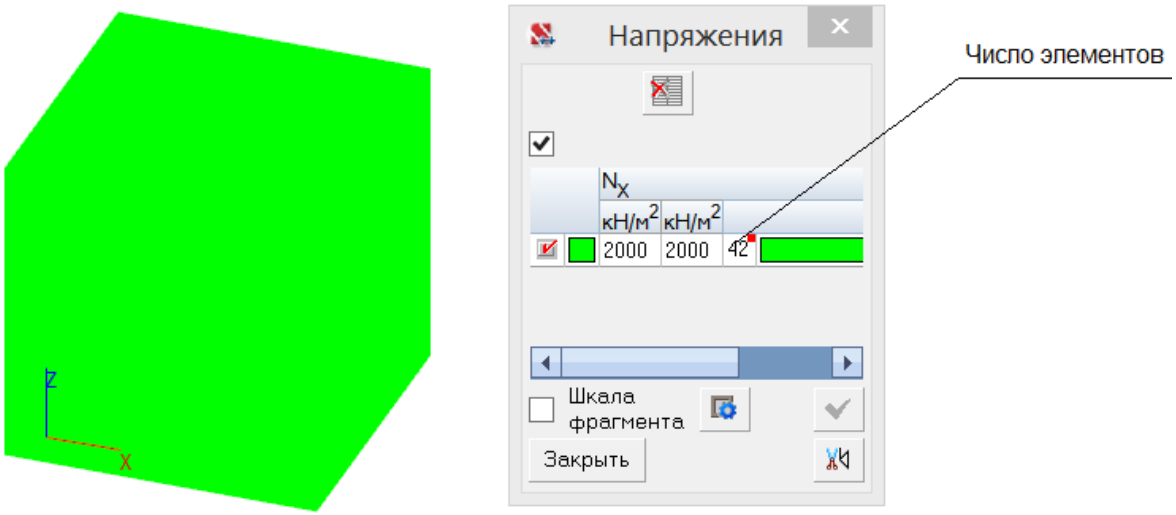
Модель 2. Расчетная и деформированная схемы



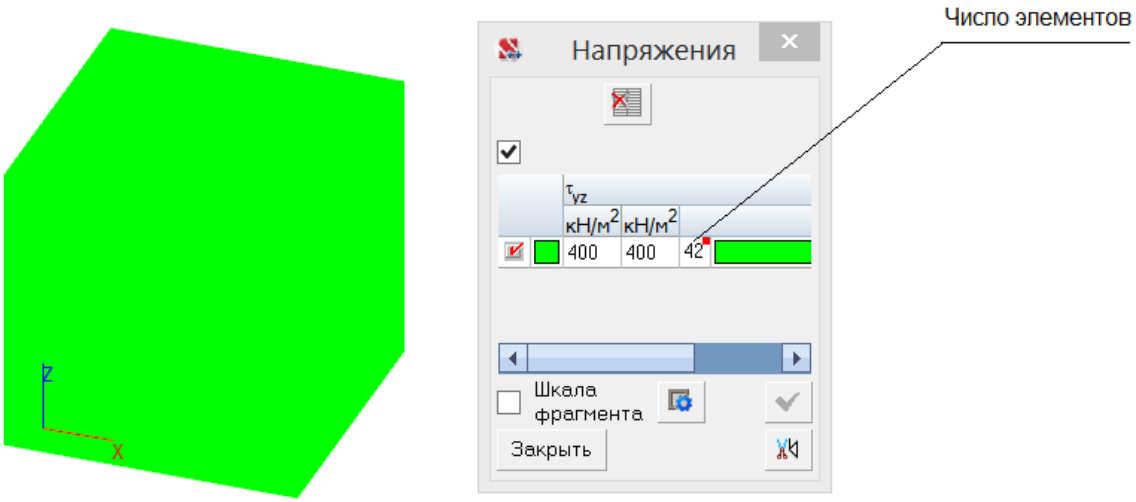
Модель 3. Расчетная и деформированная схемы



Модель 4. Расчетная и деформированная схемы



Значения для всех моделей нормальных напряжений σ_x, σ_y σ_z (кН/м^2)



Значения для всех моделей касательных напряжений τ_{xz}, τ_{xy}, τ_{yz} (кН/м^2)

Сравнение решений:

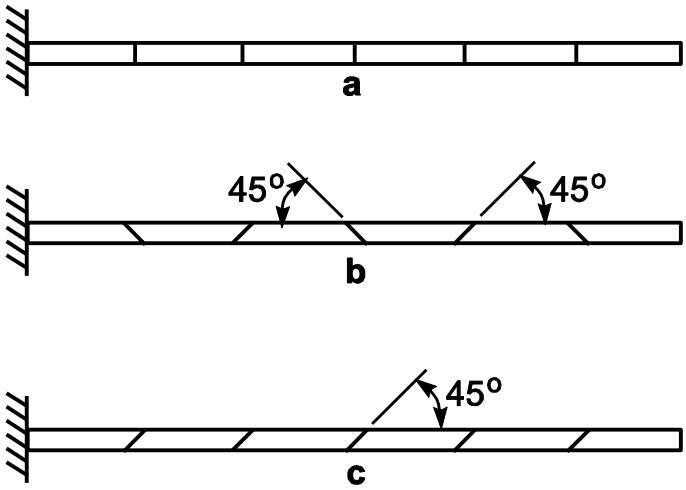
Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1-4	Нормальные напряжения σ_x, кН/м^2	2000	2000	0.00
	Нормальные напряжения σ_y, кН/м^2	2000	2000	0.00
	Нормальные напряжения σ_z, кН/м^2	2000	2000	0.00
	Касательные напряжения τ_{xy}, кН/м^2	400	400	0.00
	Касательные напряжения τ_{xz}, кН/м^2	400	400	0.00
	Касательные напряжения τ_{yz}, кН/м^2	400	400	0.00

Замечания: При аналитическом решении нормальные σ_x, σ_y, σ_z и касательные τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} напряжения по объему куба определяются по следующим формулам:

$$\sigma_x = 10^{-3} \cdot \frac{E}{1-2 \cdot \nu}; \qquad \sigma_y = 10^{-3} \cdot \frac{E}{1-2 \cdot \nu}; \qquad \sigma_z = 10^{-3} \cdot \frac{E}{1-2 \cdot \nu};$$

$$\tau_{xy} = 10^{-3} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}; \qquad \tau_{xz} = 10^{-3} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}; \qquad \tau_{yz} = 10^{-3} \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}.$$

Прямолинейная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных продольной и поперечных сил и крутящего момента



Цель: Проверка точного воспроизведения значений продольного и поперечных смещений и угла закручивания свободного торца прямолинейной консольной балки от действия на нем сосредоточенных продольной и поперечных сил и крутящего момента соответственно при различном искажении сетки конечных элементов.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_142.SPR	Расчетная модель с типом элементов 142 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_144.SPR	Расчетная модель с типом элементов 144 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_145.SPR	Расчетная модель с типом элементов 145 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_Shell_150.SPR	Расчетная модель с типом элементов 150 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_ Solid _36.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Regular_shape_ Solid _37.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 при регулярной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_142.SPR	Расчетная модель с типом элементов 142 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_144.SPR	Расчетная модель с типом элементов 144 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_145.SPR	Расчетная модель с типом элементов 145 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_Shell_150.SPR	Расчетная модель с типом элементов 150 при

Название файла расчета	Описание файла расчета
	трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_ Solid _36.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Trapezoidal_shape_ Solid _37.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 при трапецеидальной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_142.SPR	Расчетная модель с типом элементов 142 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_144.SPR	Расчетная модель с типом элементов 144 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_145.SPR	Расчетная модель с типом элементов 145 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_Shell_150.SPR	Расчетная модель с типом элементов 150 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_ Solid _36.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 при параллелограммной сетке
Straight_cantilever_beam_Parallelogram_shape_ Solid _37.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 при параллелограммной сетке

Формулировка задачи: Прямолинейная изотропная консольная балка прямоугольного поперечного сечения подвергается воздействию на свободном торце сосредоточенных продольной P_x и поперечных P_y, P_z сил и крутящего момента M_x. Проверить: точное воспроизведение значений продольного X и поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки от соответствующих воздействий.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

Исходные данные:

$E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости материала балки;
$\nu = 0.30$ - коэффициент Пуассона;
b = 0. 1 м - ширина балки;
h = 0. 2 м - высота балки;
L = 6.0 м - длина балки;
$P_x = 1.0$ кН - значение продольной силы;
$P_y = 1.0$ кН - значение поперечной силы, действующей по высоте балки;
$P_z = 1.0$ кН - значение поперечной силы, действующей по ширине балки;
$M_x = 1.0$ кН·м - значение крутящего момента.

Конечно-элементная модель: Расчетные схемы – системы общего вида. Рассматриваются три расчетные схемы с регулярной, трапецеидальной и параллелограммной сетками конечных элементов для десяти расчетных моделей:
Модель 1 - 12 трехузловых элементов оболочки типа 42. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил ($P_x = 2 \cdot 0.5$ кН, $P_y = 2 \cdot 0.5$ кН, $P_z = 2 \cdot 0.5$ кН, $M_x = 2 \cdot 5.0 \cdot 0.2/2$ кН·м). Количество узлов в модели – 14.
Модель 2 - 12 трехузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 142. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и

крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 14.

Модель 3 - 6 четырехузловых элементов оболочки типа 44. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 14.

Модель 4 - 6 четырехузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 144. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 14.

Модель 5 - 12 шестиузловых элементов оболочки типа 45. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 39.

Модель 6 - 12 шестиузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 145. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 39.

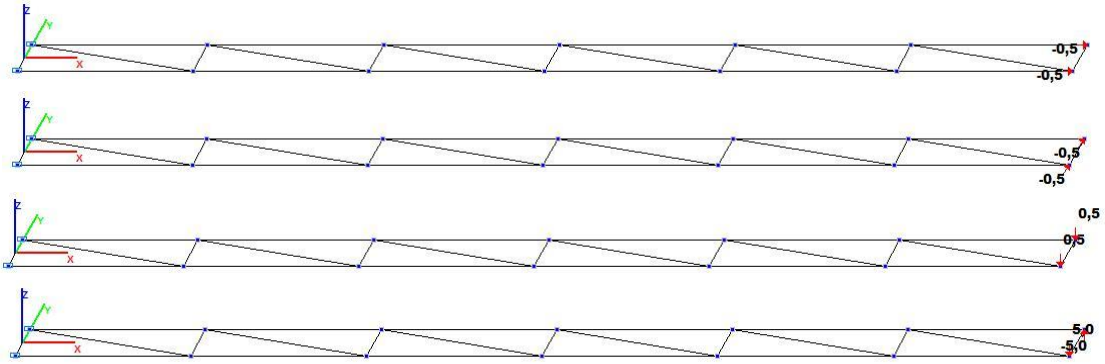
Модель 7 - 6 восьмиузовых элементов оболочки типа 50. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 33.

Модель 8 - 6 восьмиузовых элементов оболочки с учетом сдвига типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде двух узловых сил (P_x = 2·0.5 кН, P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН, M_x = 2·5.0·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 33.

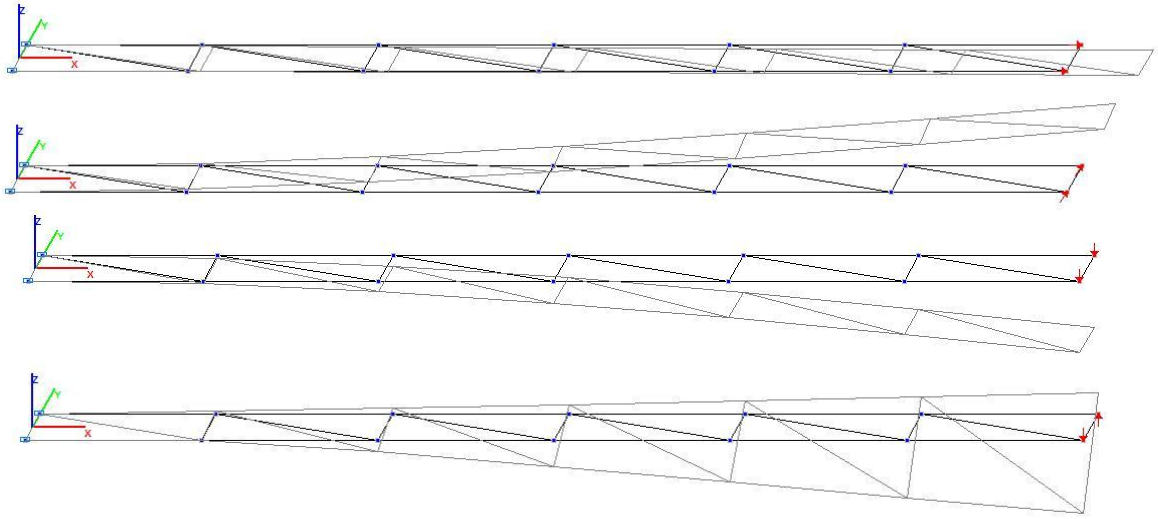
Модель 9 - 6 восьмиузловых изопараметрических объемных элементов типа 36. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде четырех узловых сил (P_x = 4·0.25 кН, P_y = 4·0.25 кН, P_z = 4·0.25 кН, M_x = 4·2.5·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 28.

Модель 10 - 6 двадцатиузловых изопараметрических объемных элементов типа 37. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные продольная P_x и поперечные P_y, P_z силы и крутящий момент M_x представлены в виде четырех узловых сил (P_x = 4·0.25 кН, P_y = 4·0.25 кН, P_z = 4·0.25 кН, M_x = 4·2.5·0.2/2 кН·м). Количество узлов в модели – 80.

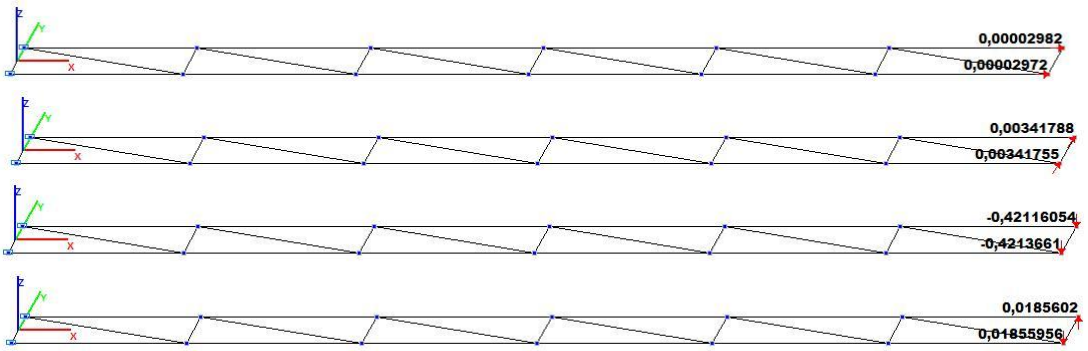
Результаты решения в SCAD



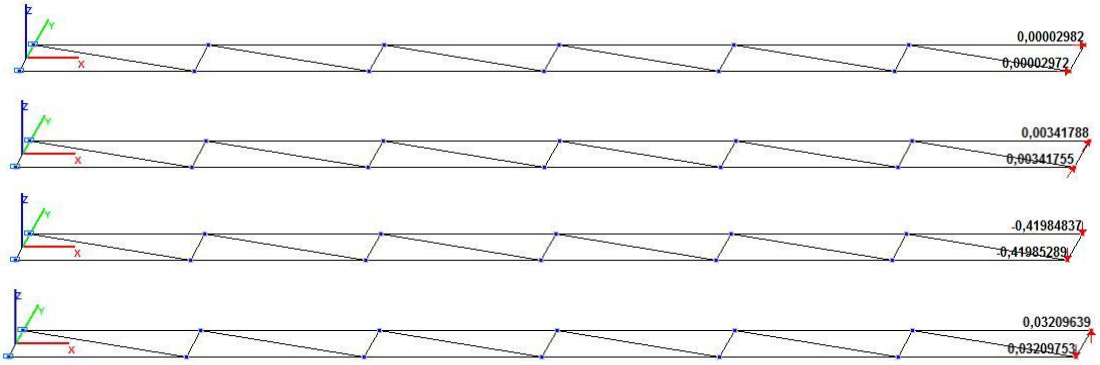
Модели 1 и 2.
Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов



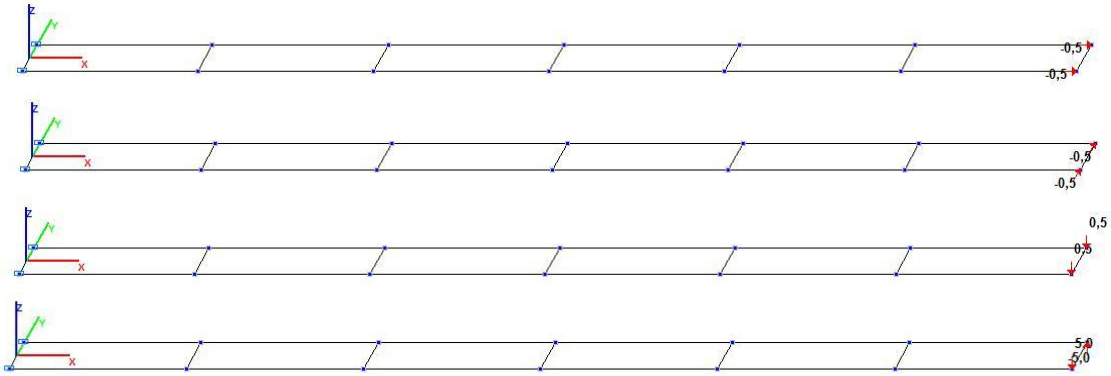
Модель 1 и 2.
Деформированная схема с регулярной сеткой конечных элементов



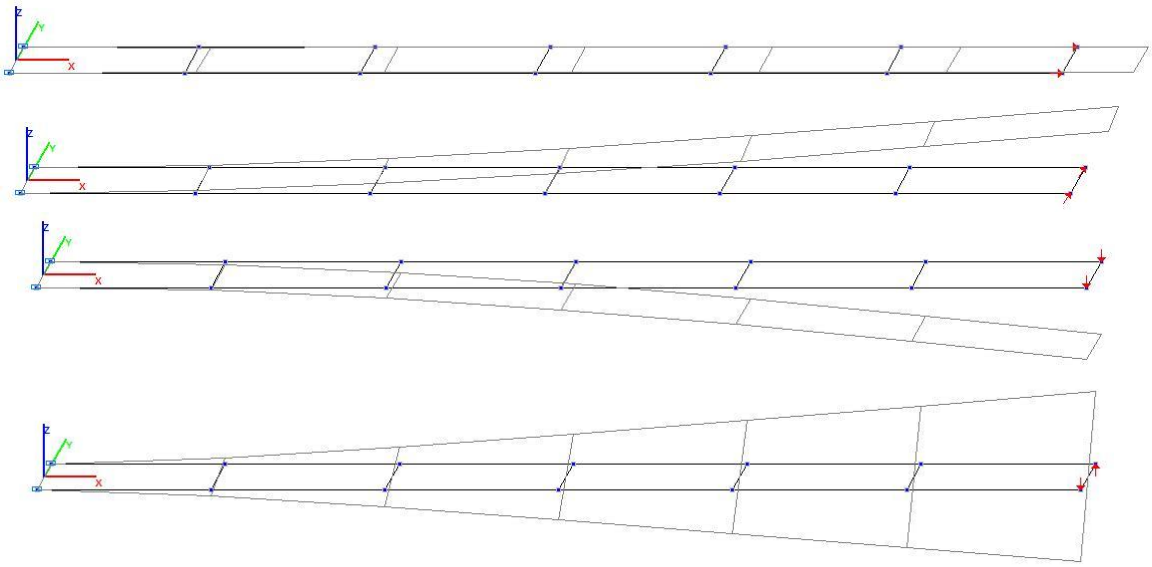
Модель 1.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



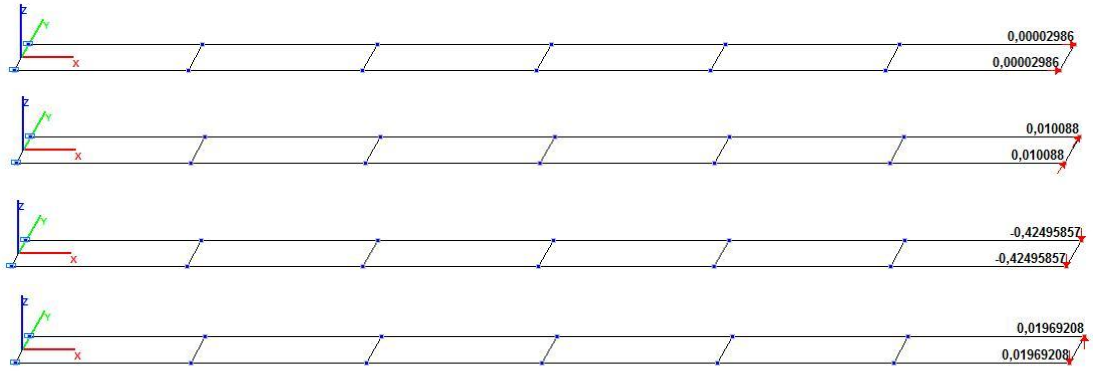
Модель 2.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



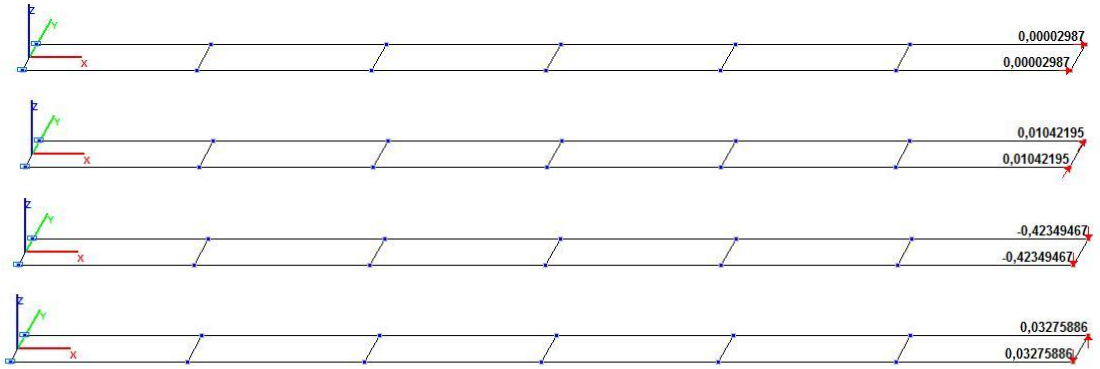
Модели 3 и 4.
Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов



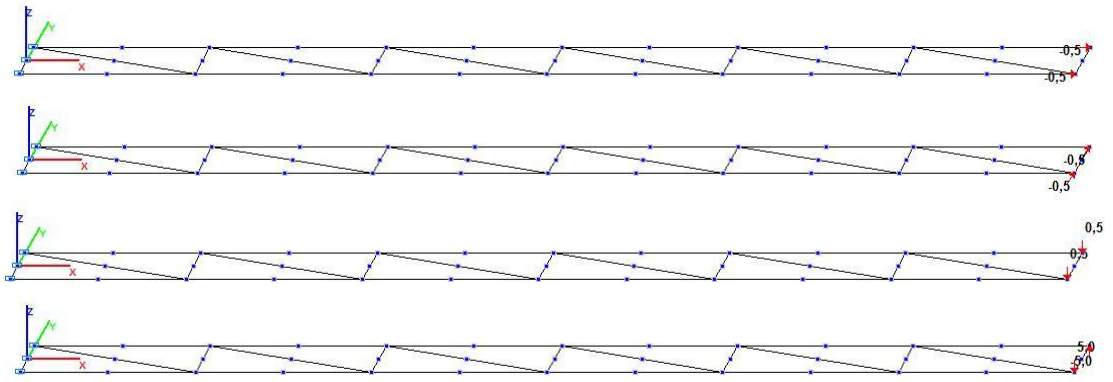
Модель 3 и 4.
Деформированная схема с регулярной сеткой конечных элементов



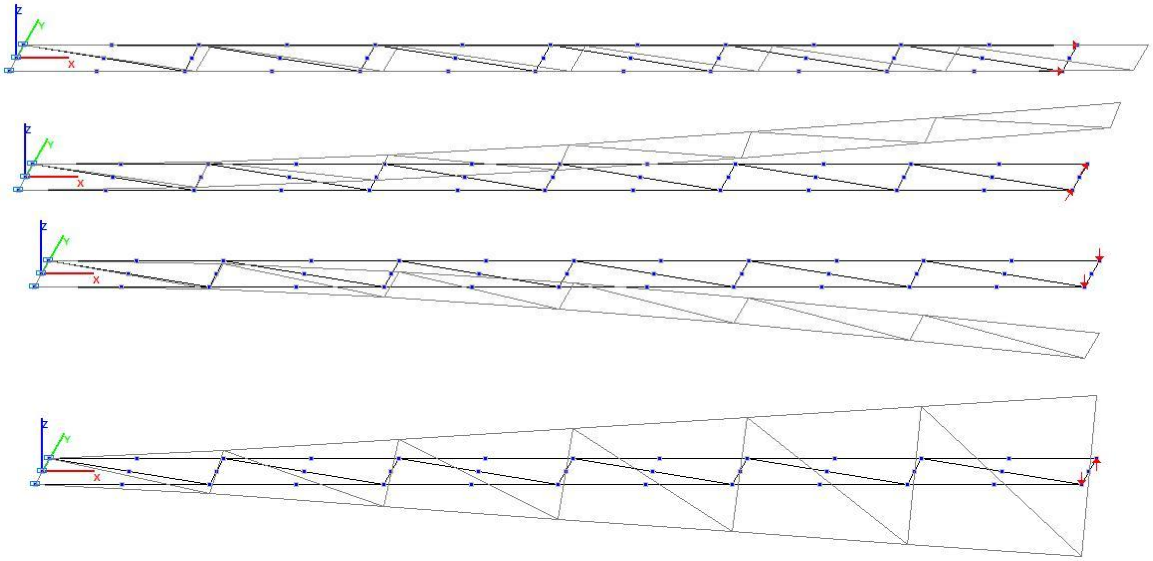
Модель 3.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



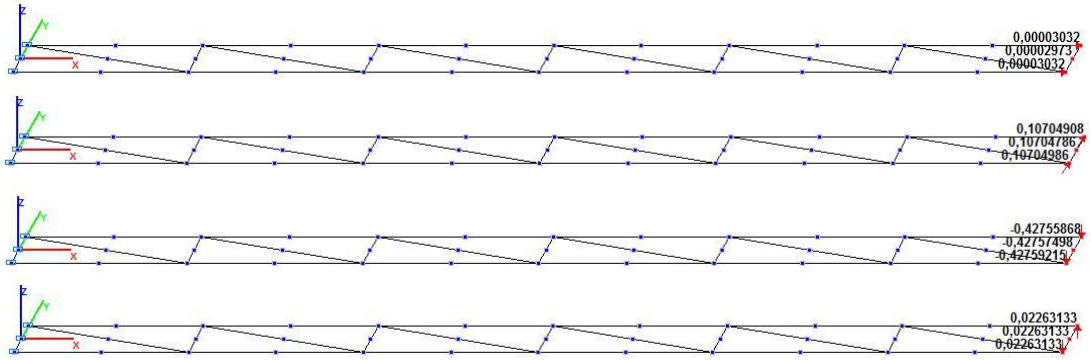
Модель 4.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



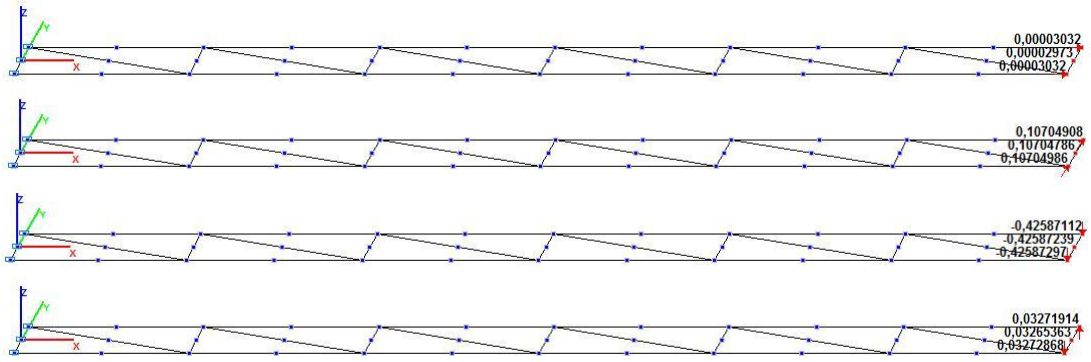
Модели 5 и 6.
Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов



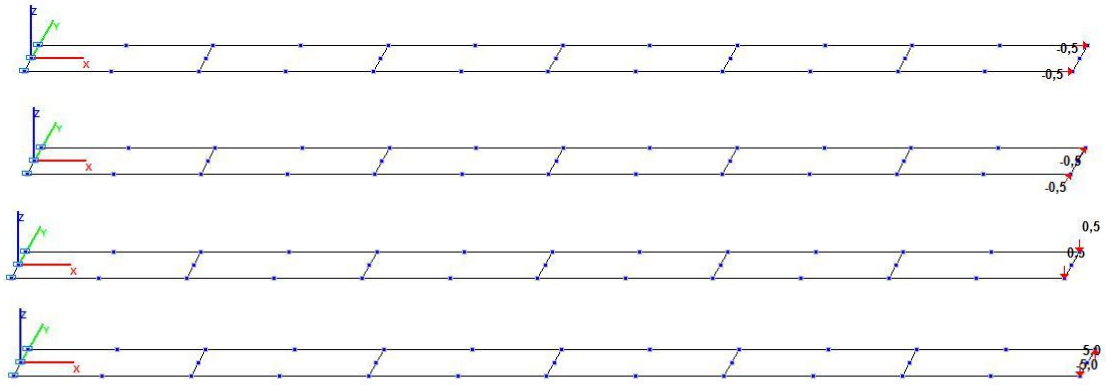
Модели 5 и 6.
Деформированная схема с регулярной сеткой конечных элементов



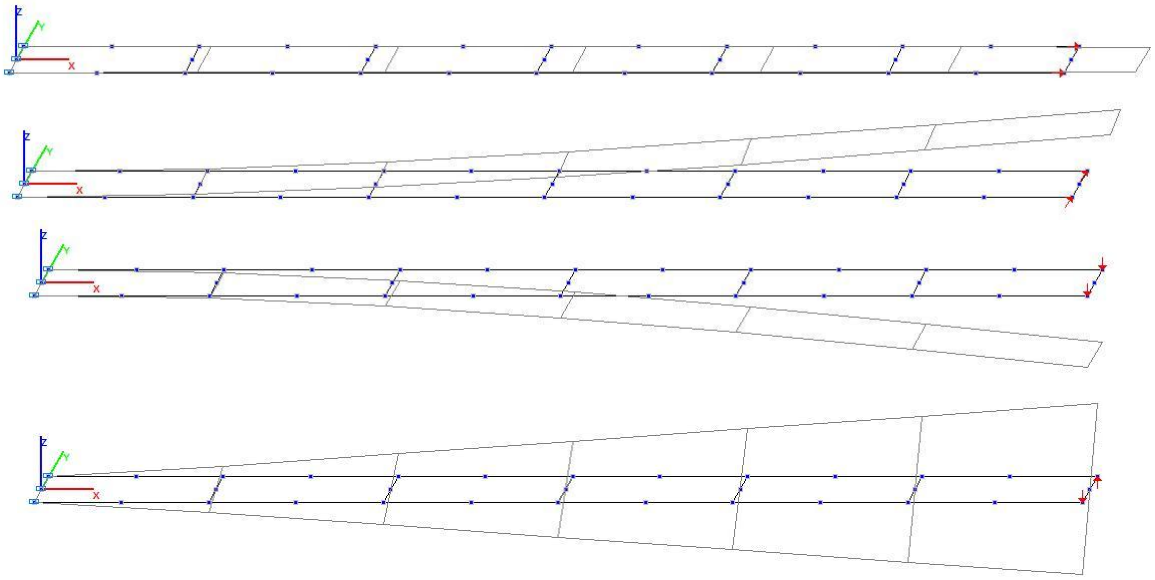
Модель 5.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



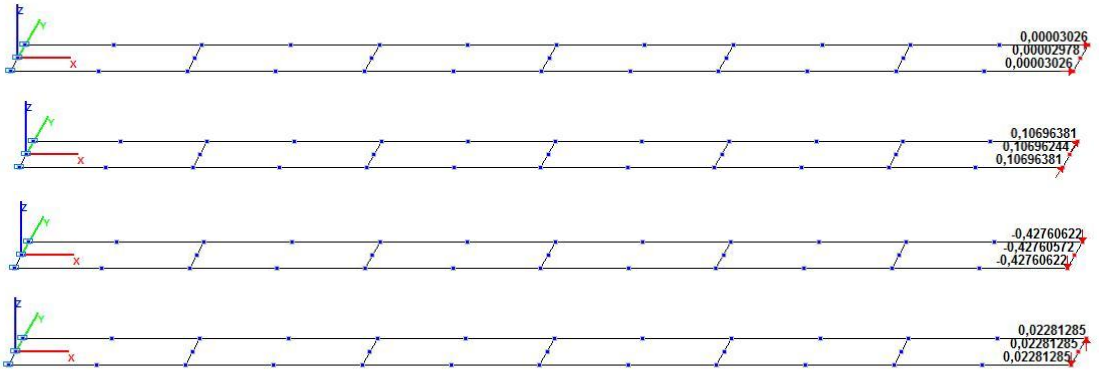
Модель 6.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



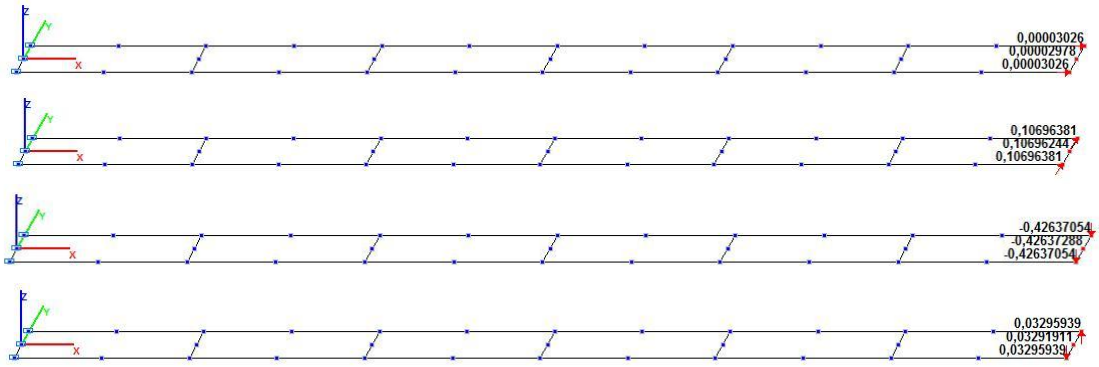
Модели 7 и 8.
Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов



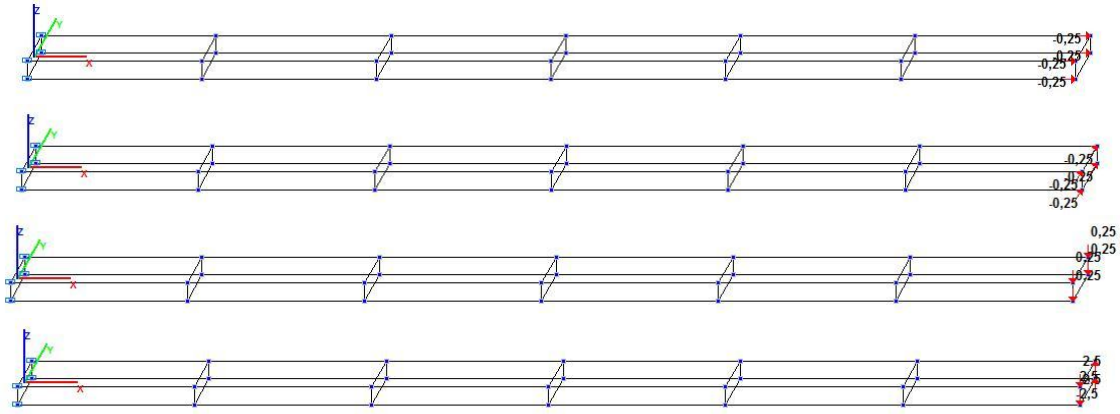
Модель 7 и 8.
Деформированная схема с регулярной сеткой конечных элементов



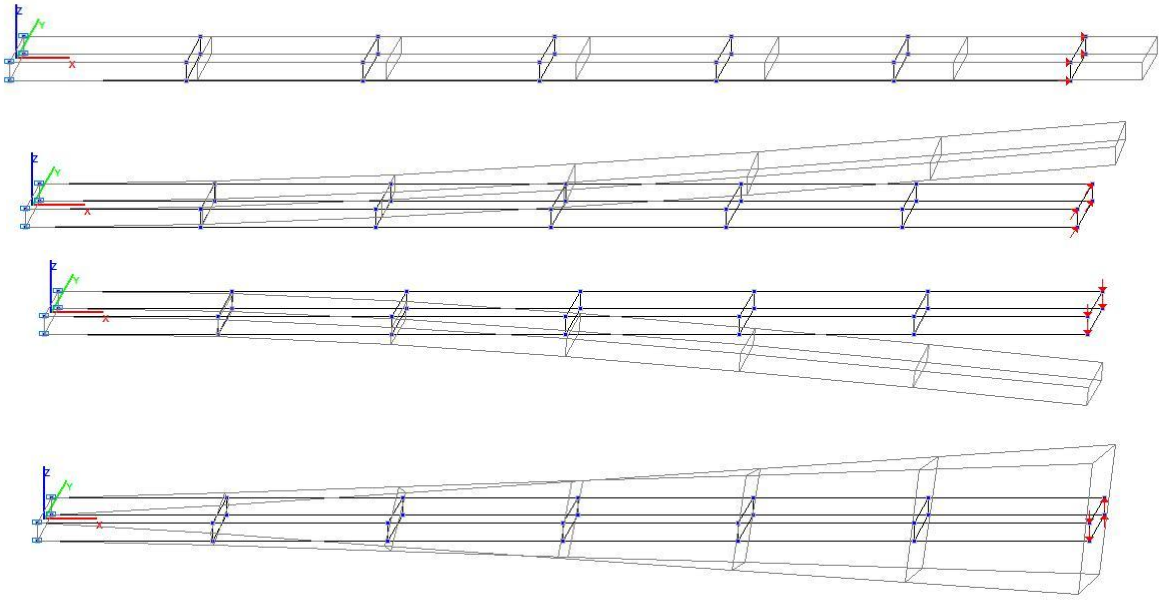
Модель 7.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



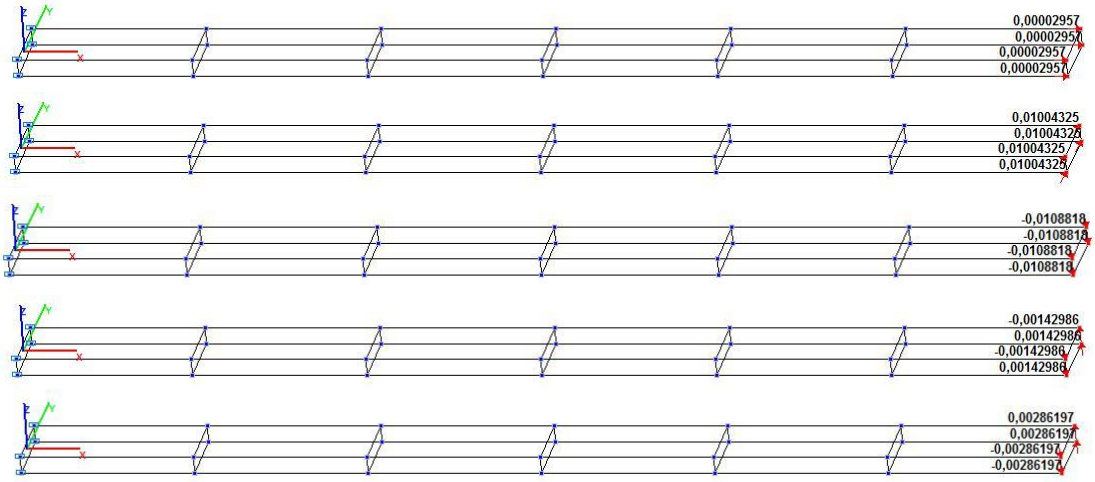
Модель 8.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



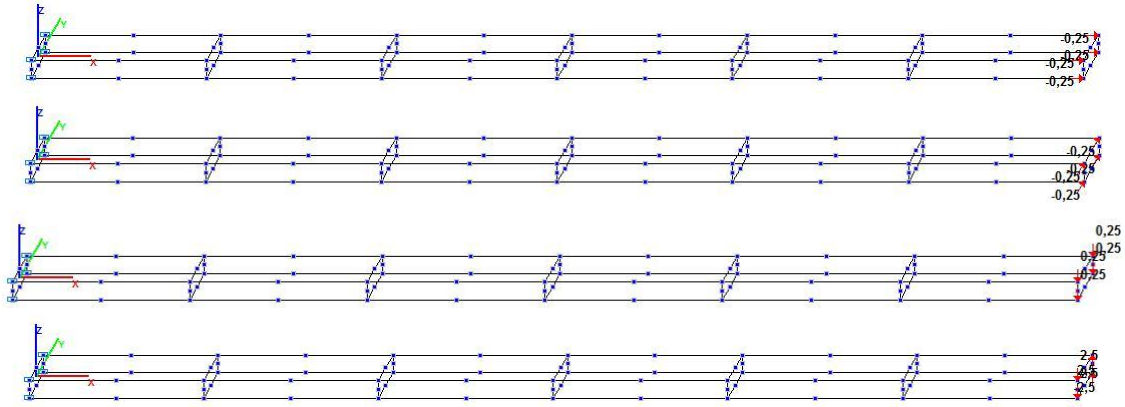
Модель 9.
Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов



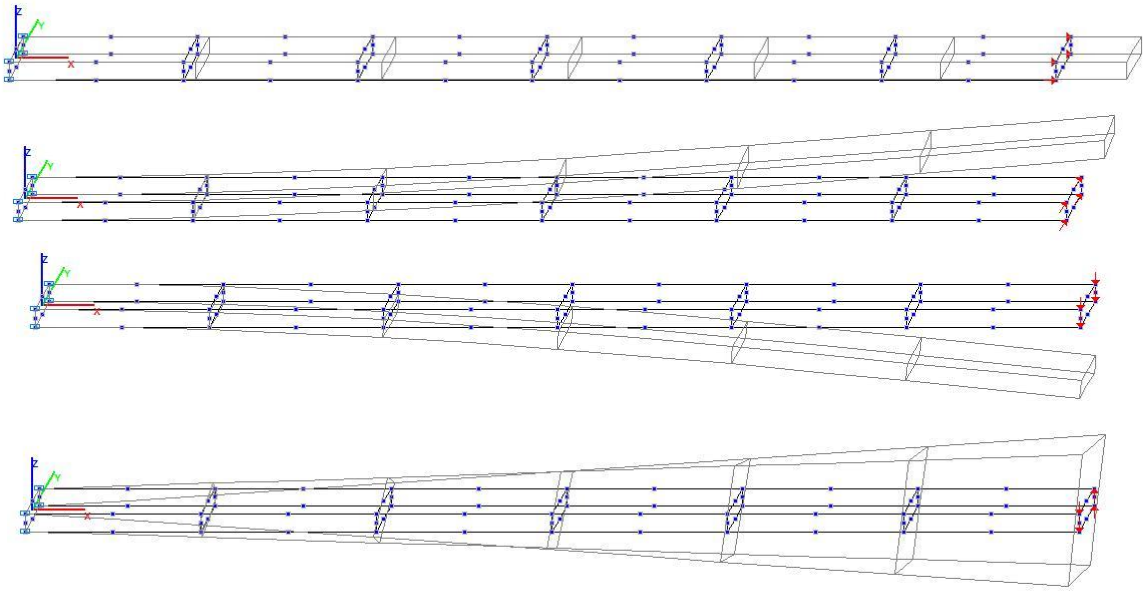
Модель 9.
Деформированная схема с регулярной сеткой конечных элементов



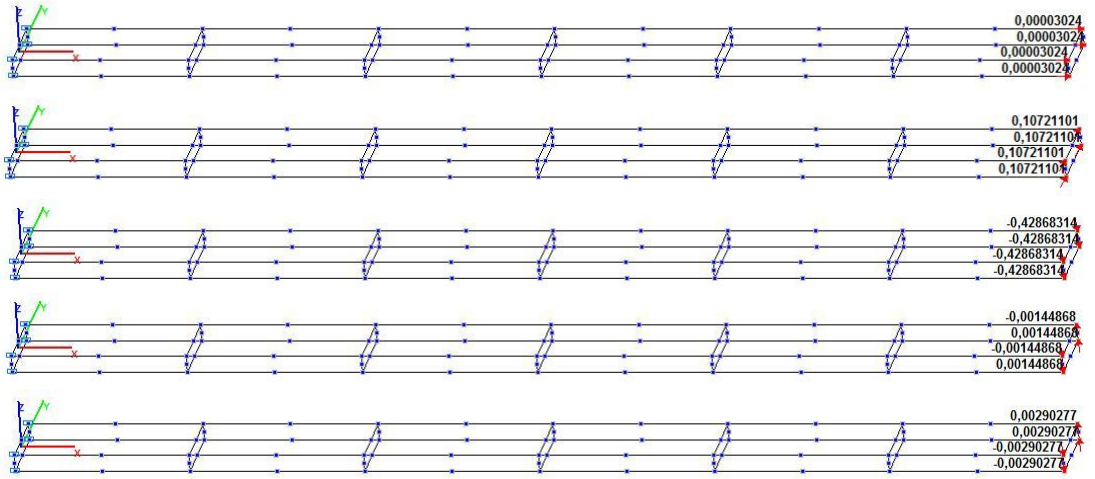
Модель 9.
Значения продольного смещения X от воздействия P_x,
поперечных смещений Y, Z от воздействий P_y, P_z
и поперечных смещений Y, Z от воздействия M_x
свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, м, м)



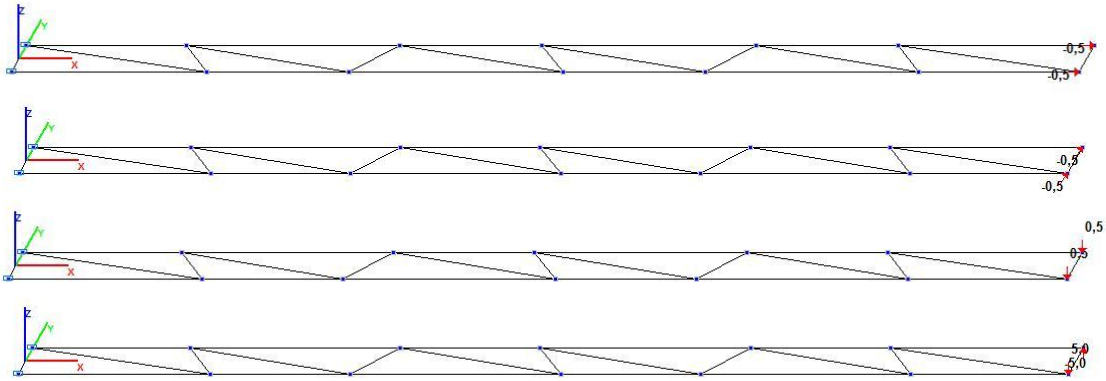
Модель 10.
Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов



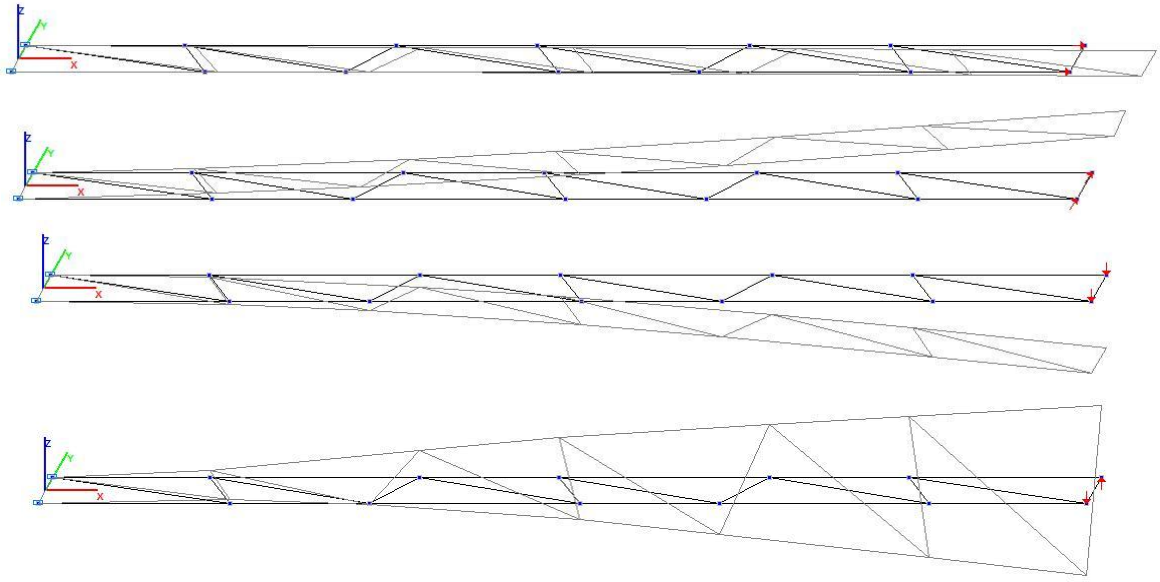
Модель 10.
Деформированная схема с регулярной сеткой конечных элементов



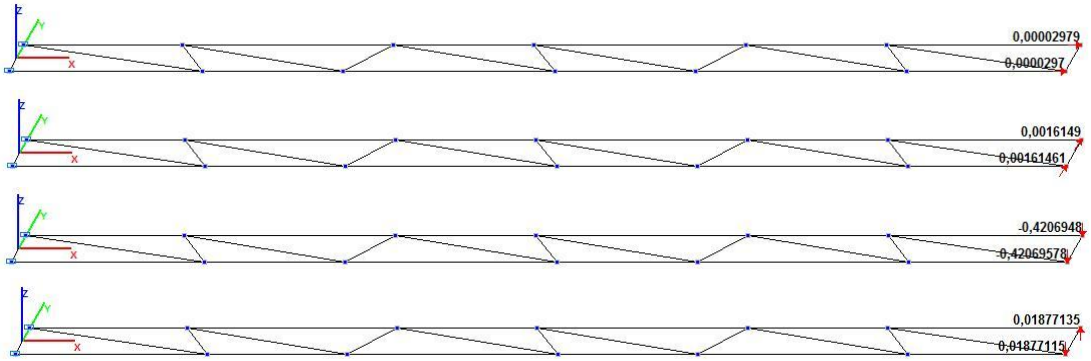
Модель 10.
Значения продольного смещения X от воздействия P_x,
поперечных смещений Y, Z от воздействий P_y, P_z
и поперечных смещений Y, Z от воздействия M_x
свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, м, м)



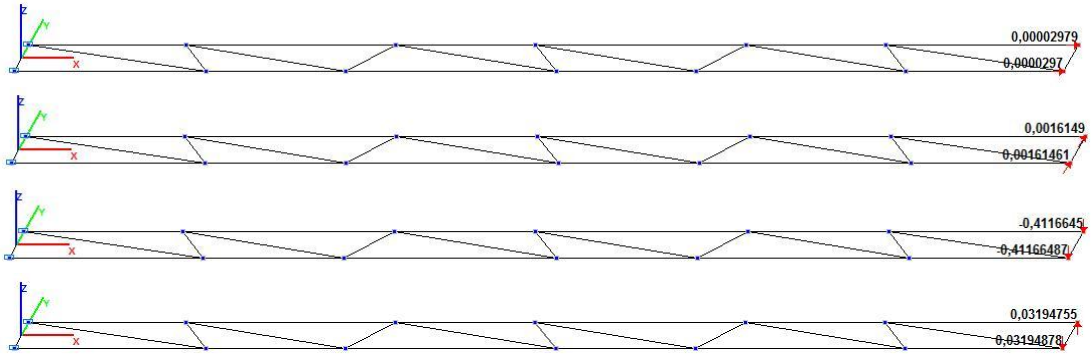
Модель 1 и 2.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



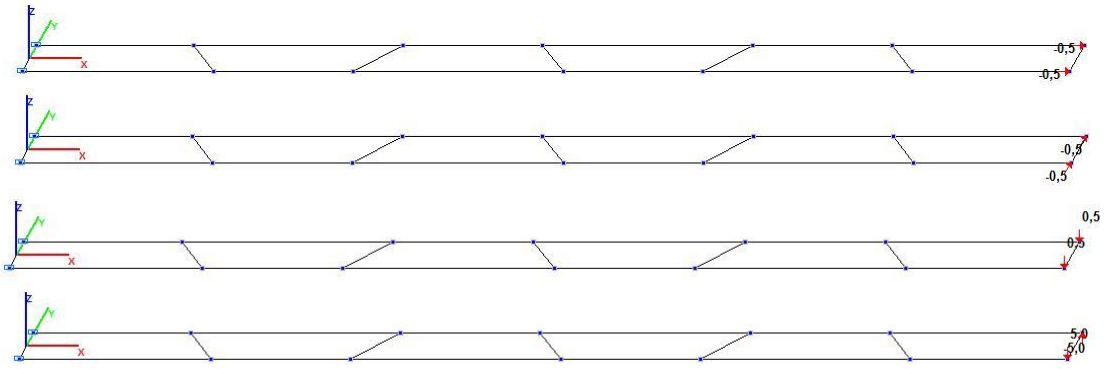
Модель 1 и 2.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



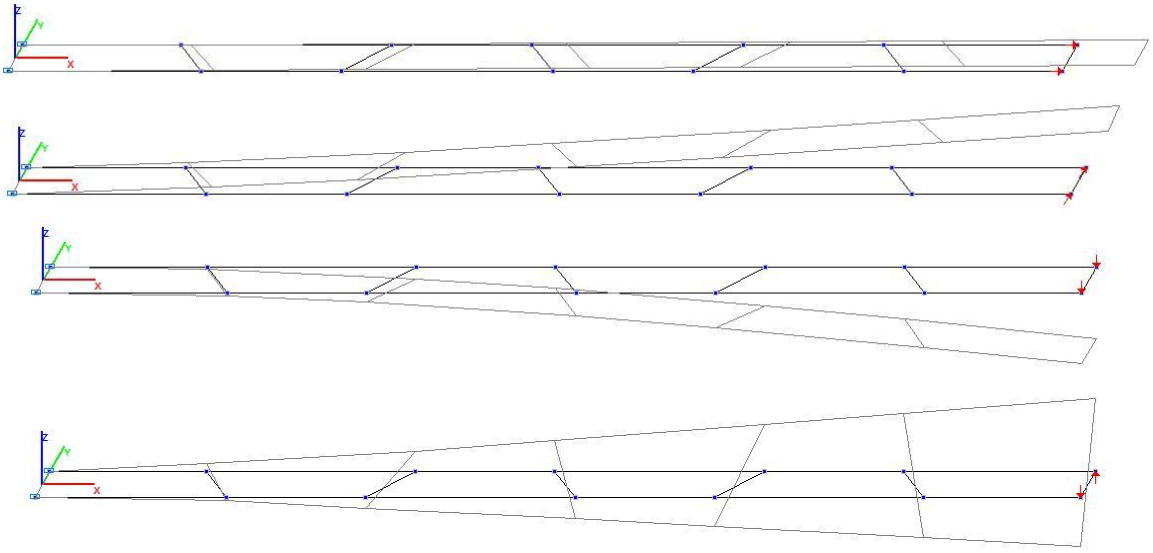
Модель 1.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



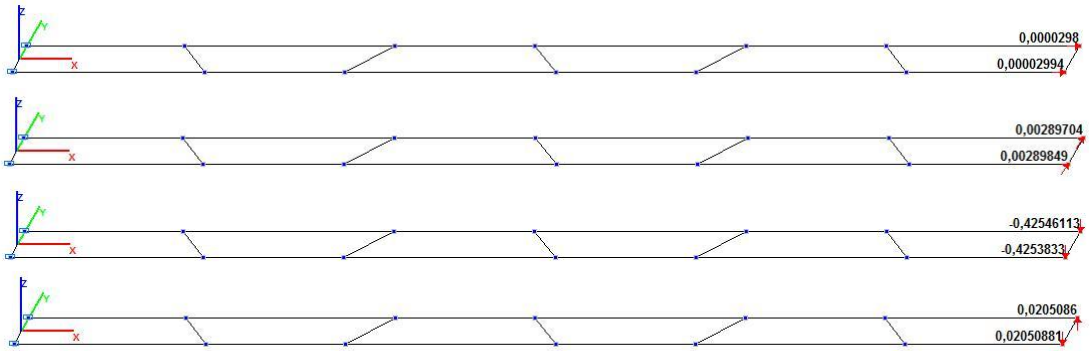
Модель 2.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



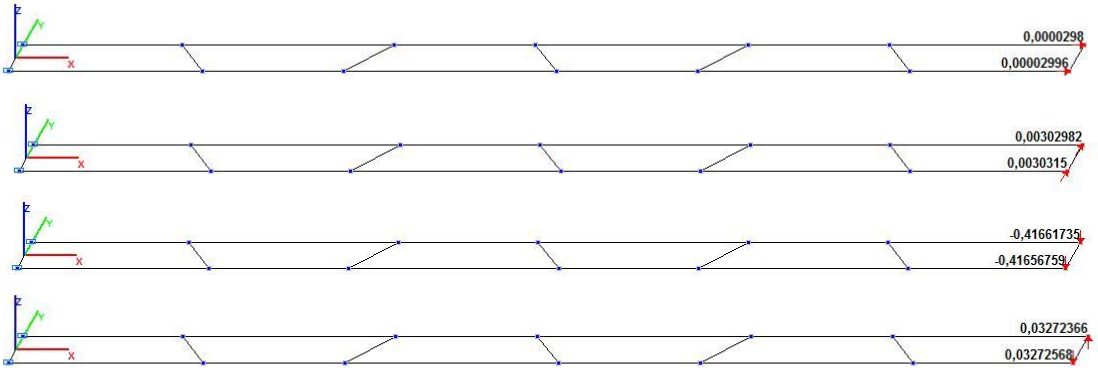
Модели 3 и 4.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



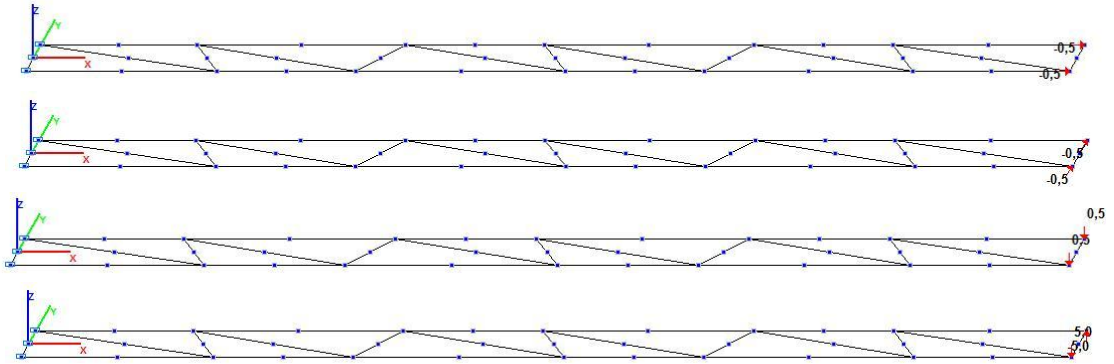
Модель 3 и 4.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



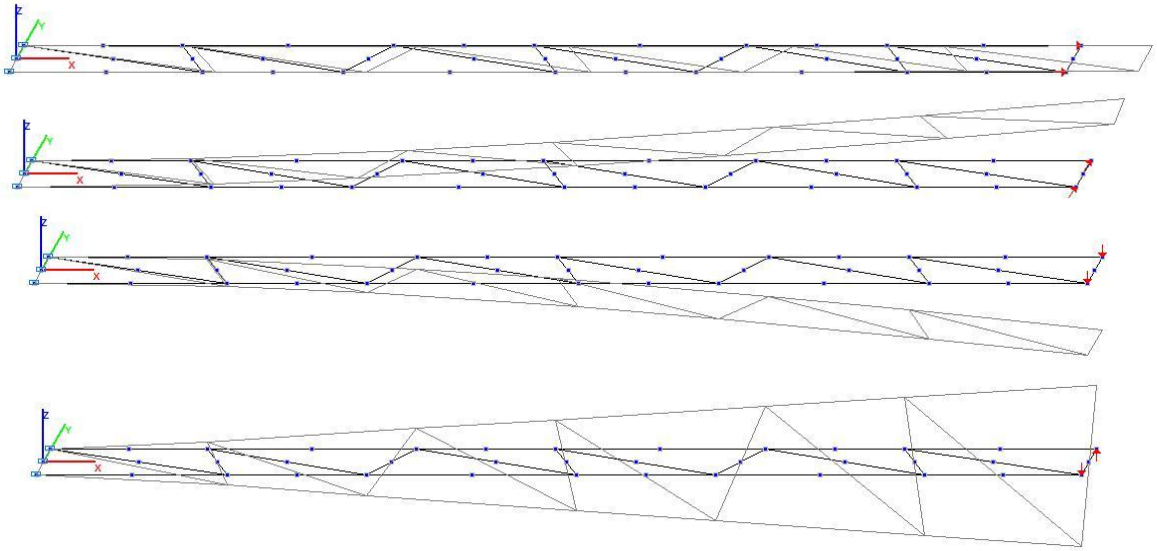
Модель 3.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



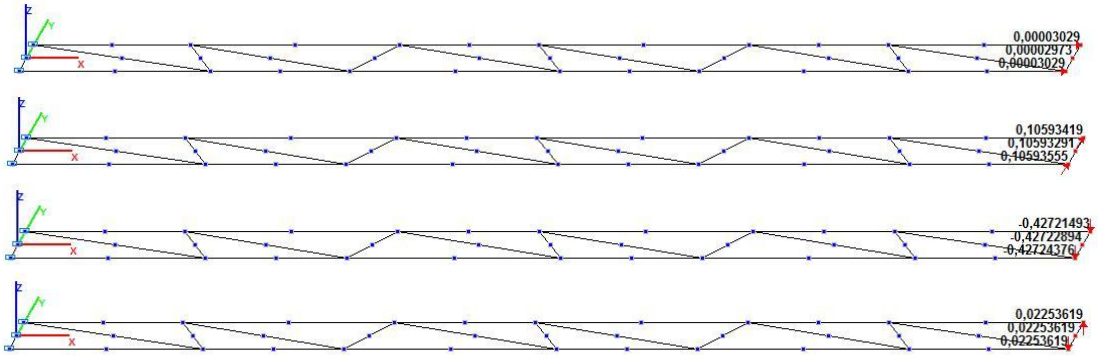
Модель 4.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



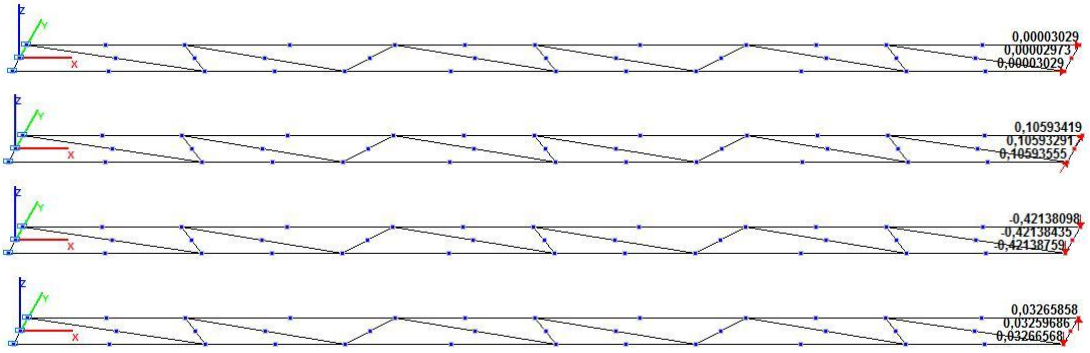
Модели 5 и 6.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



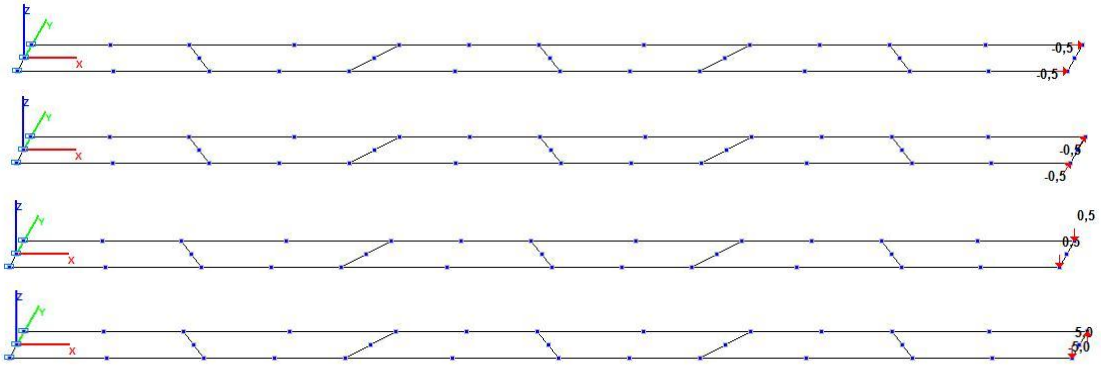
Модели 5 и 6.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



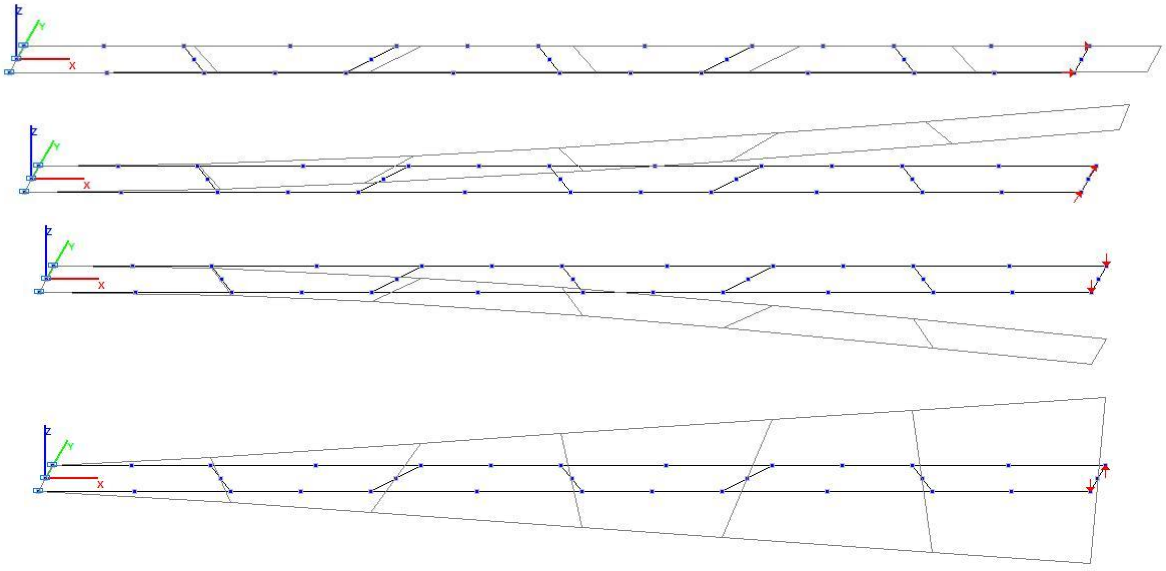
Модель 5.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



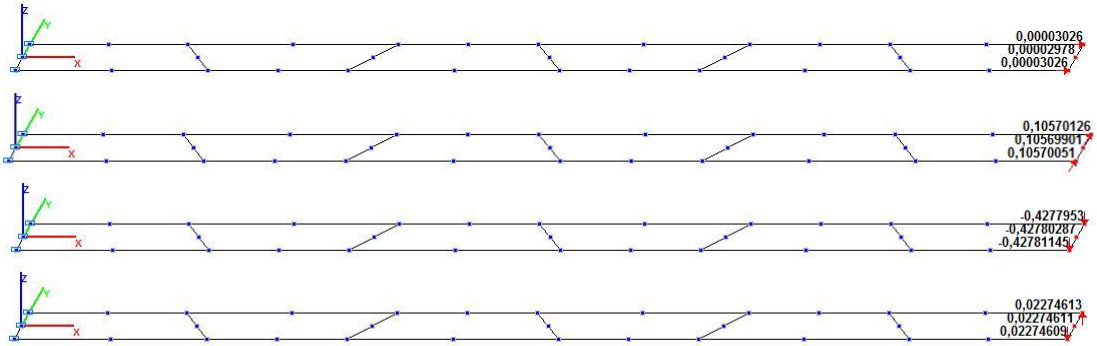
Модель 6.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



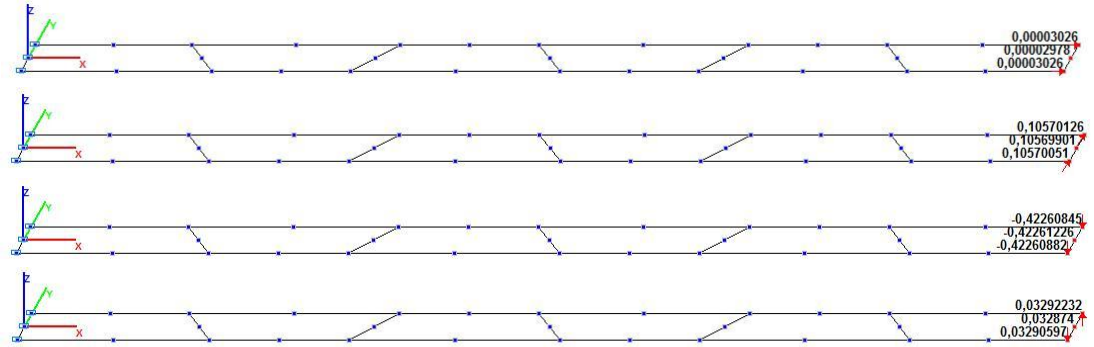
Модели 7 и 8.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



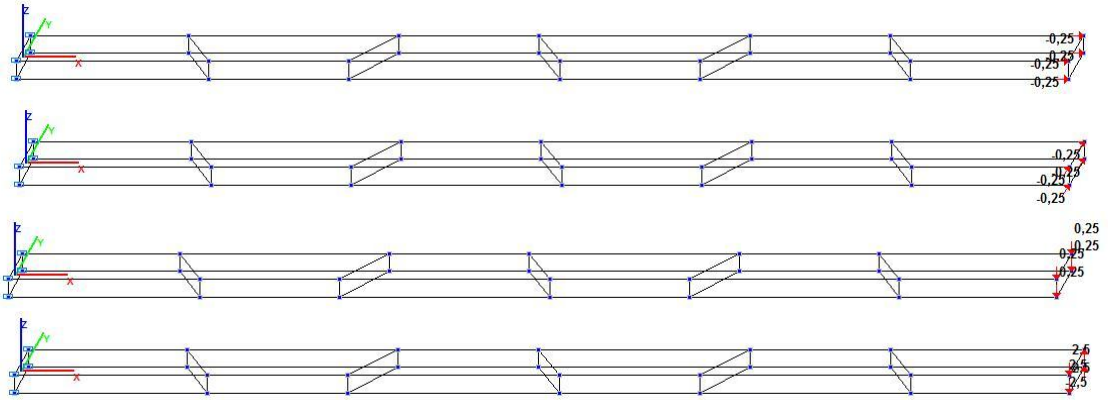
Модели 7 и 8.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



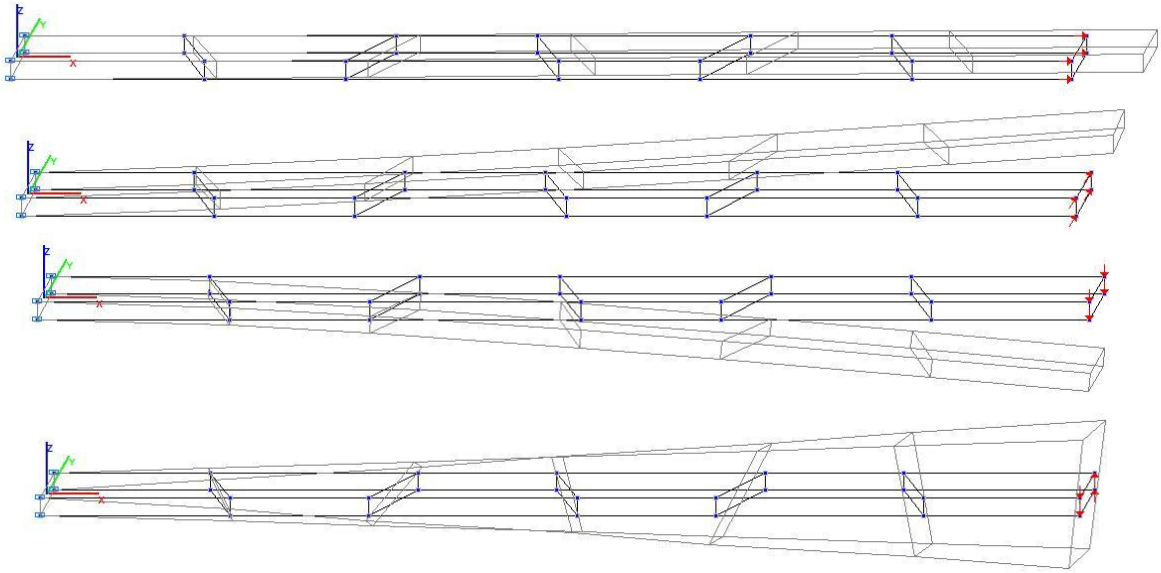
Модель 7.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



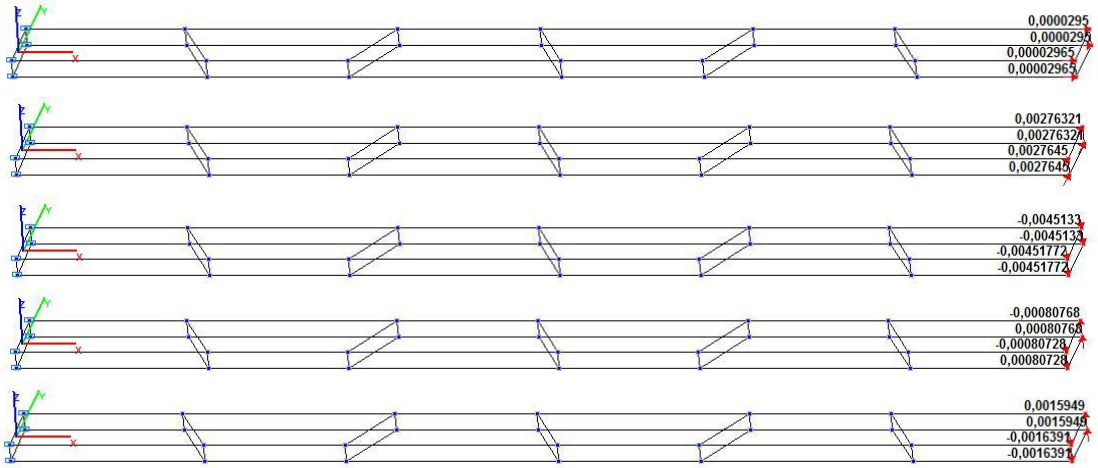
Модель 8.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



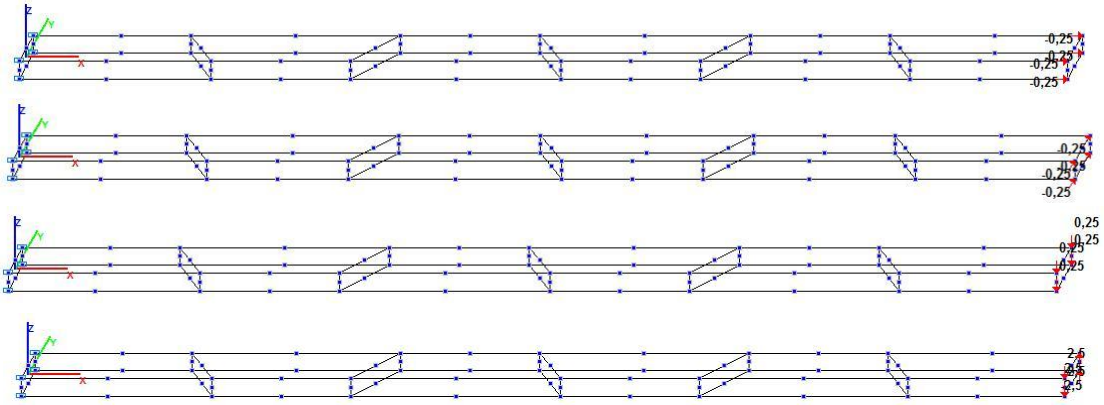
Модель 9.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



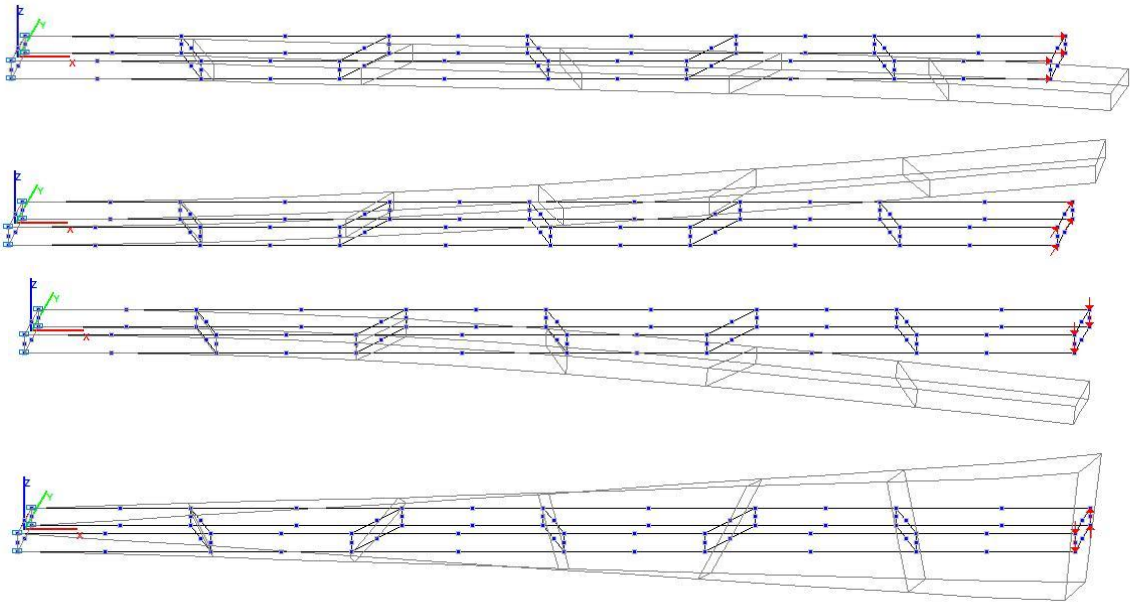
Модель 9.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



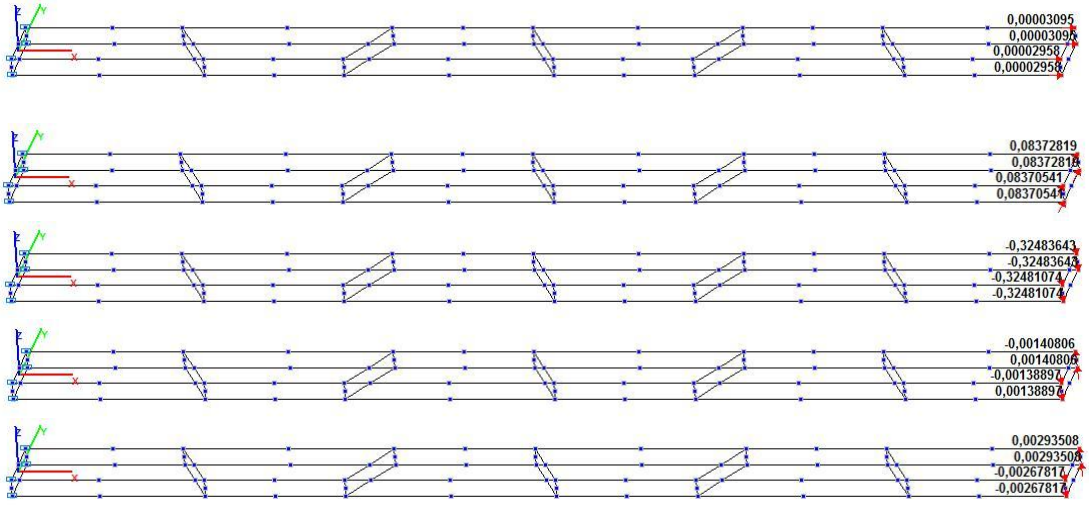
Модель 9.
Значения продольного смещения X от воздействия P_x,
поперечных смещений Y, Z от воздействий P_y, P_z
и поперечных смещений Y, Z от воздействия M_x
свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, м, м)



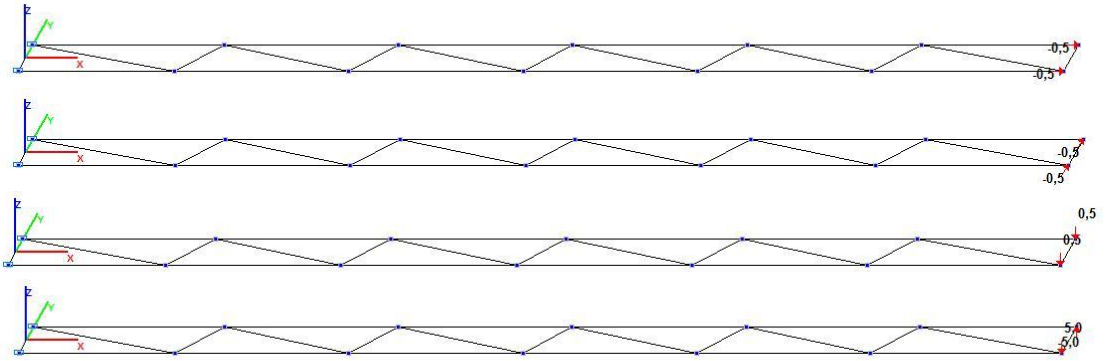
Модель 10.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



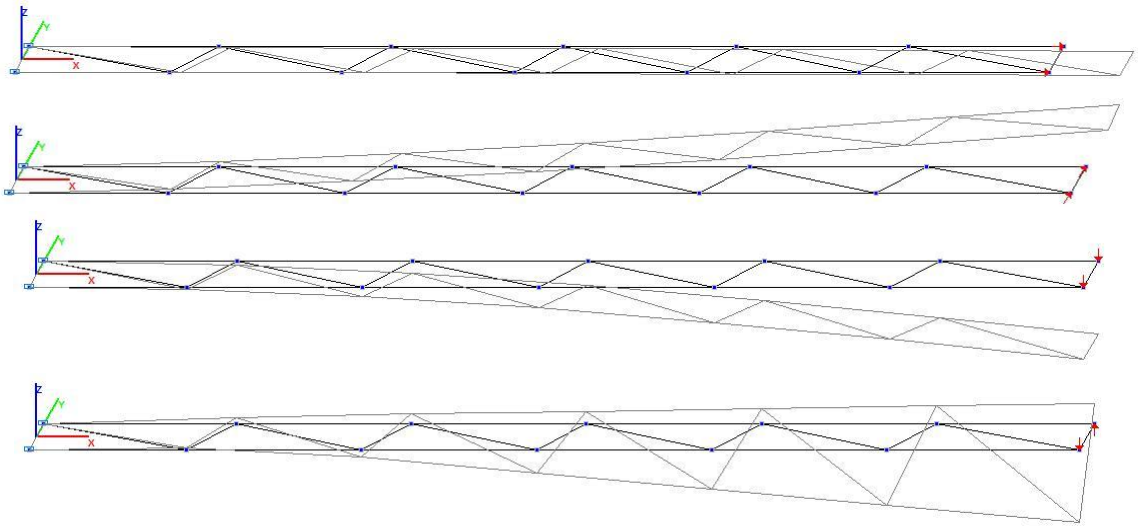
Модель 10.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



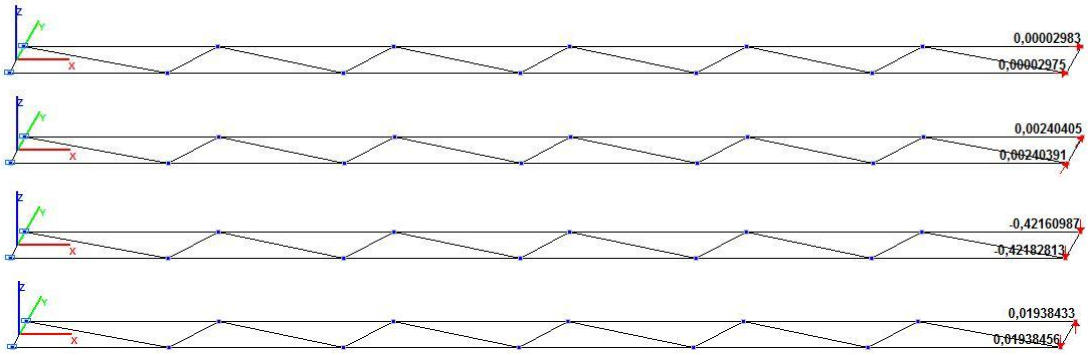
Модель 10.
Значения продольного смещения X от воздействия P_x,
поперечных смещений Y, Z от воздействий P_y, P_z
и поперечных смещений Y, Z от воздействия M_x
свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, м, м)



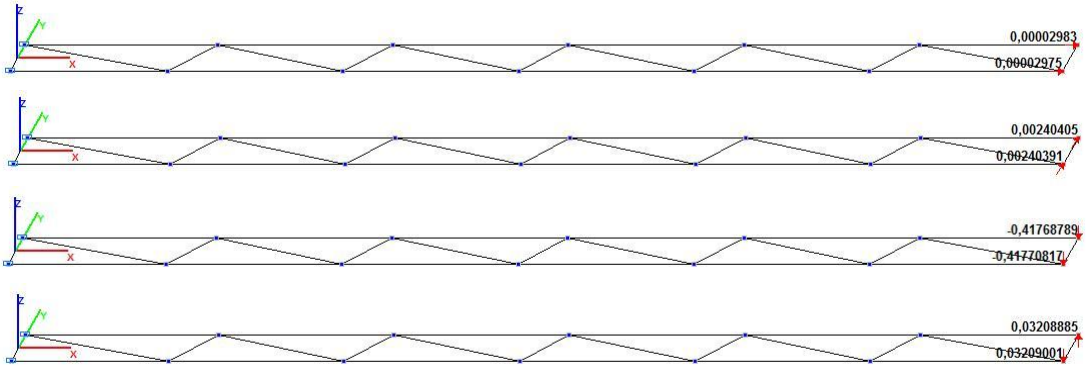
Модель 1 и 2.
Расчетная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



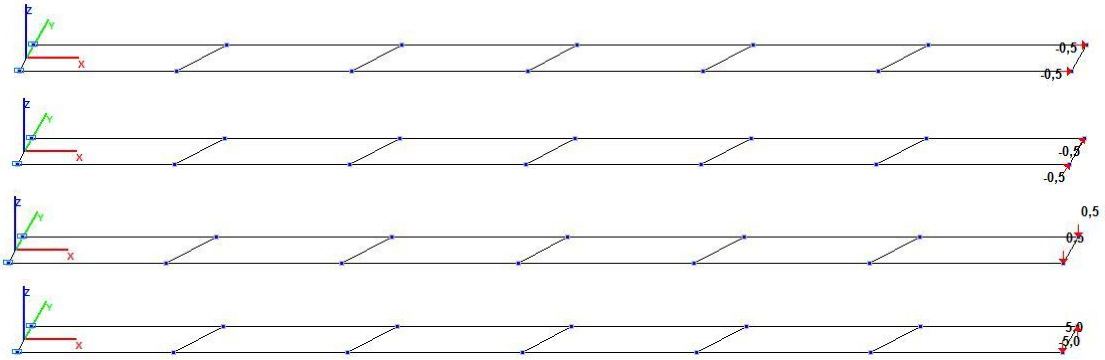
Модель 1 и 2.
Деформированная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



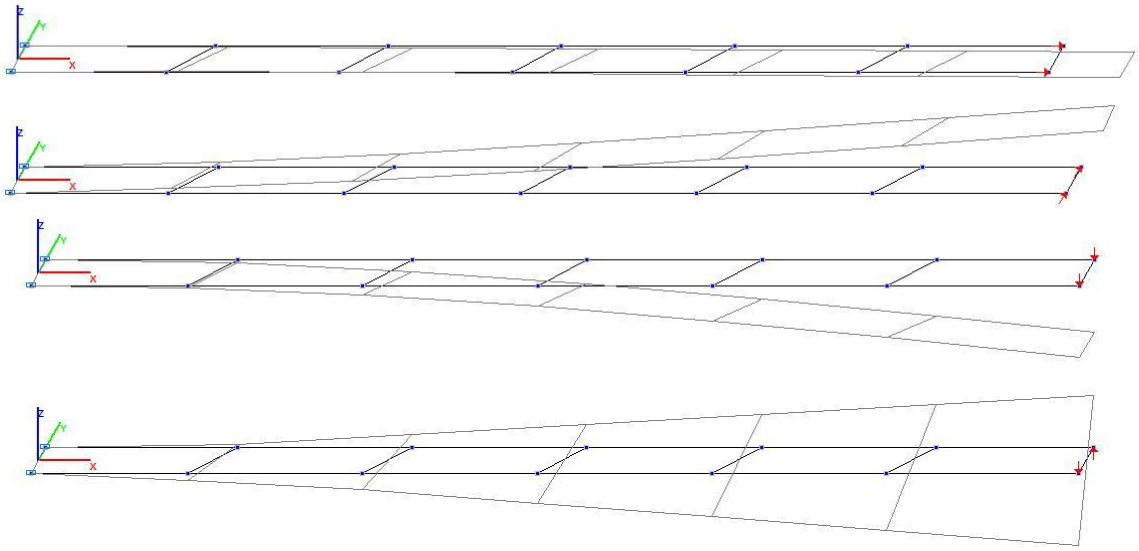
Модель 1.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



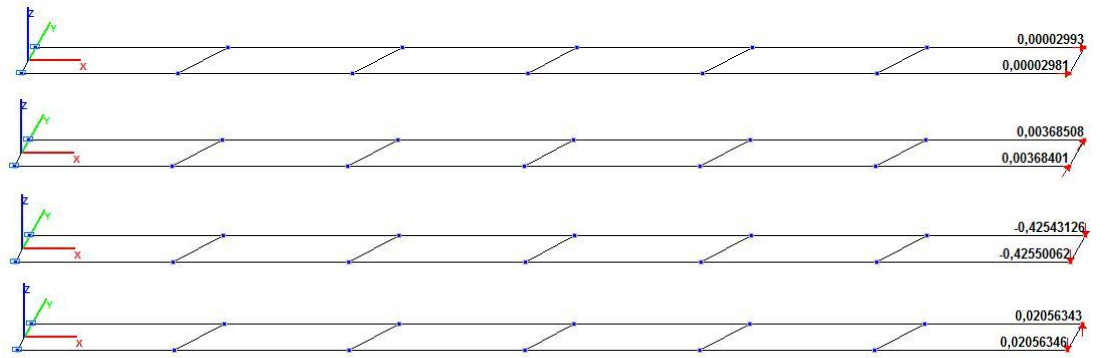
Модель 2.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



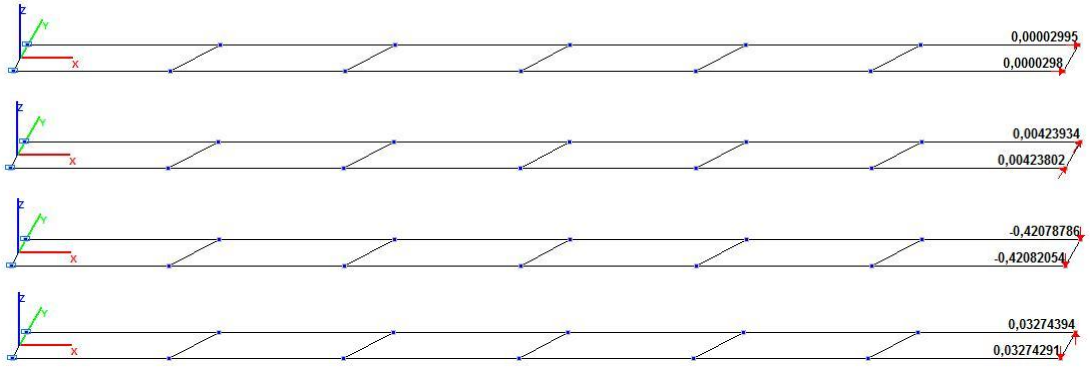
Модели 3 и 4.
Расчетная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



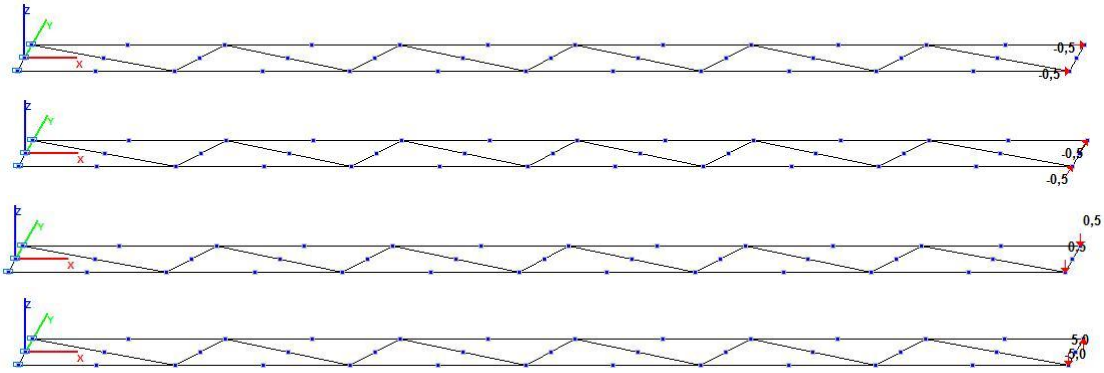
Модели 3 и 4.
Деформированная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



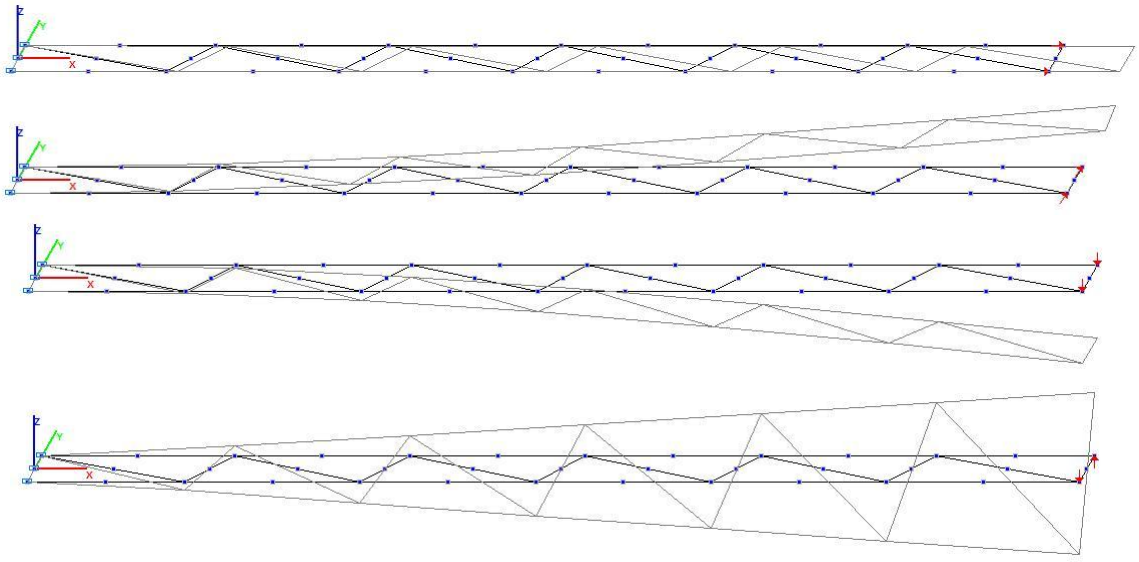
Модель 3.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



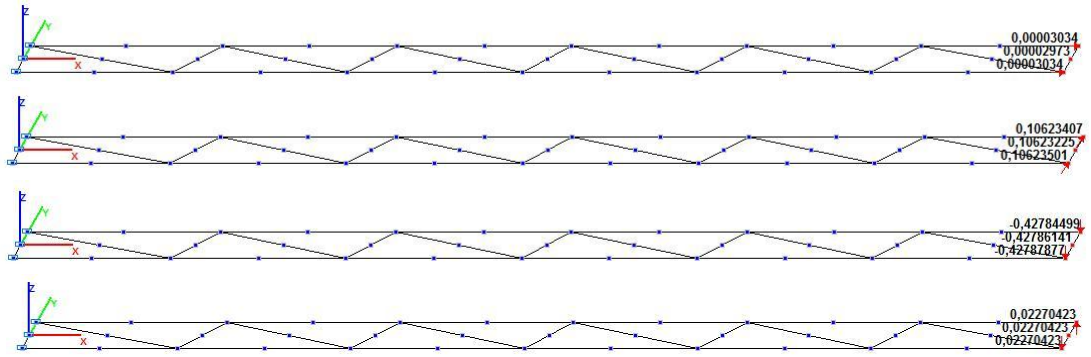
Модель 4.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



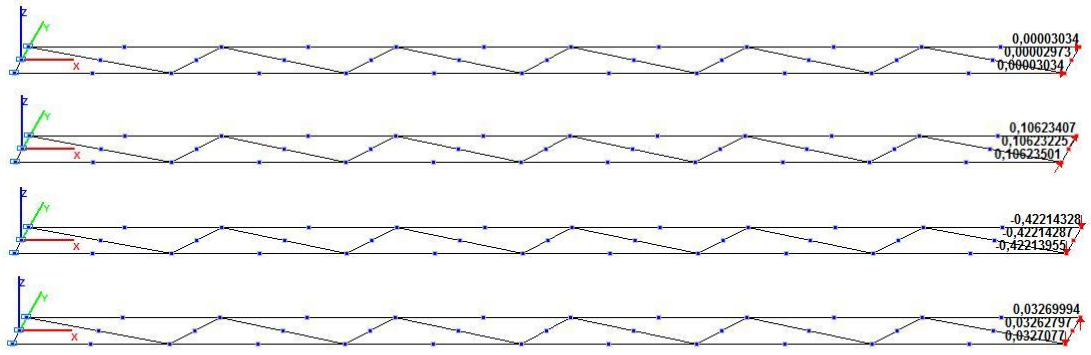
Модели 5 и 6.
Расчетная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



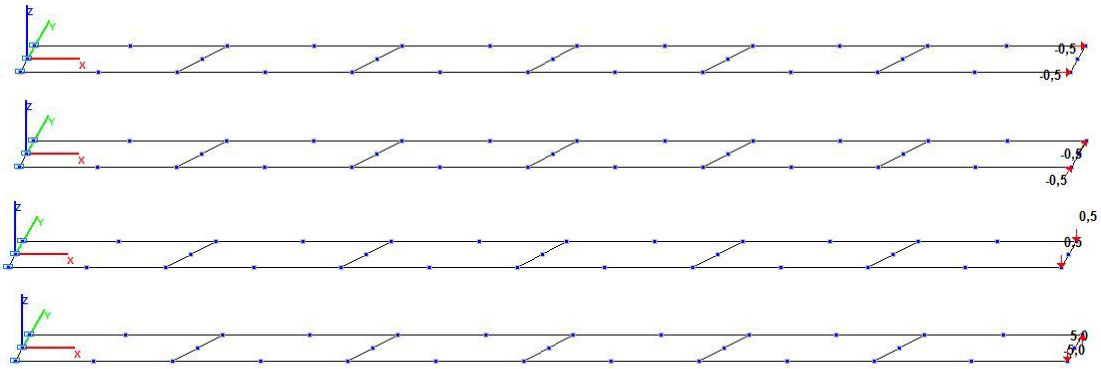
Модели 5 и 6.
Деформированная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



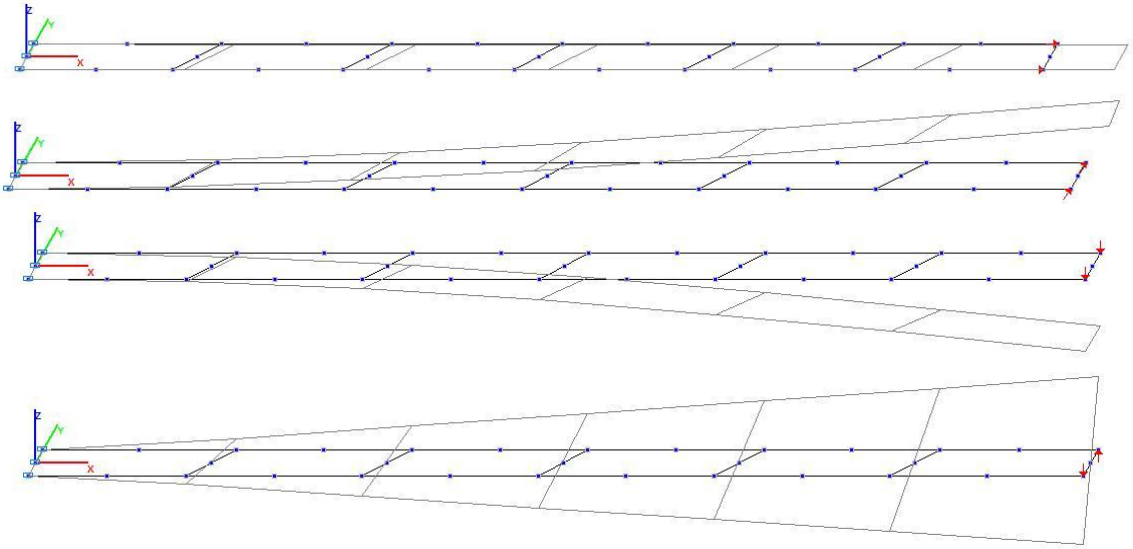
Модель 5.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



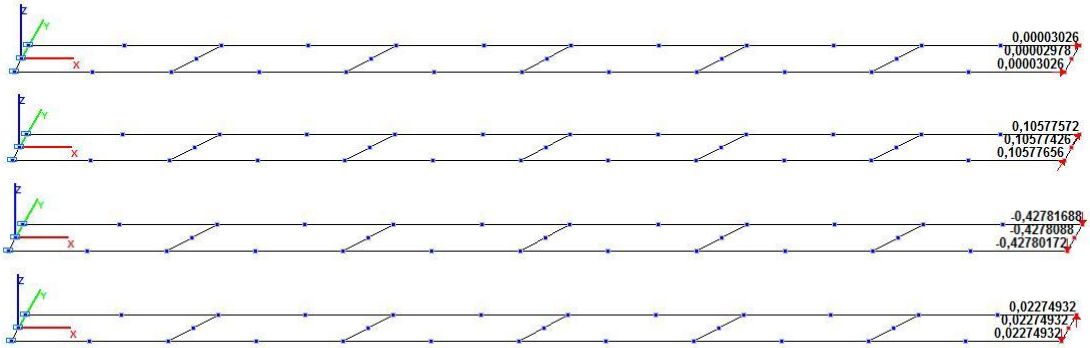
Модель 6.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



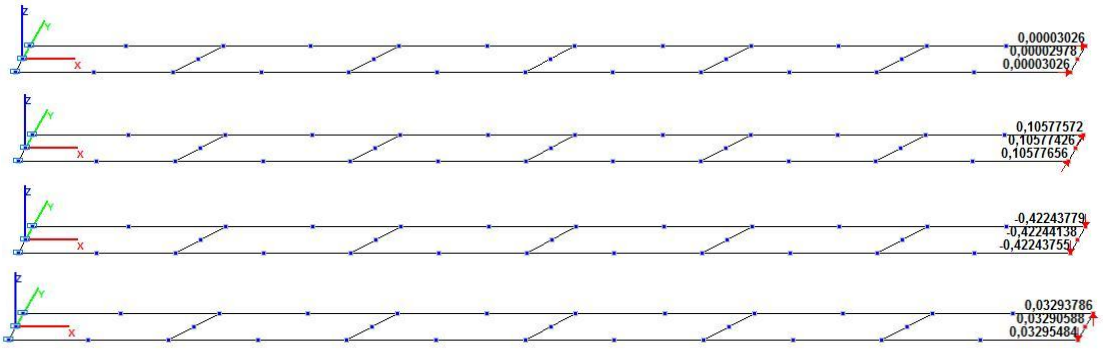
Модели 7 и 8.
Расчетная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



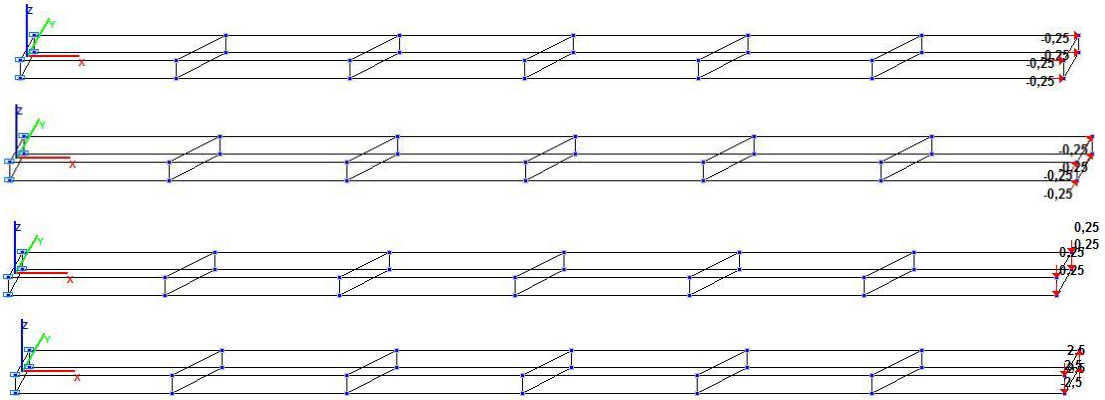
Модели 7 и 8.
Деформированная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов



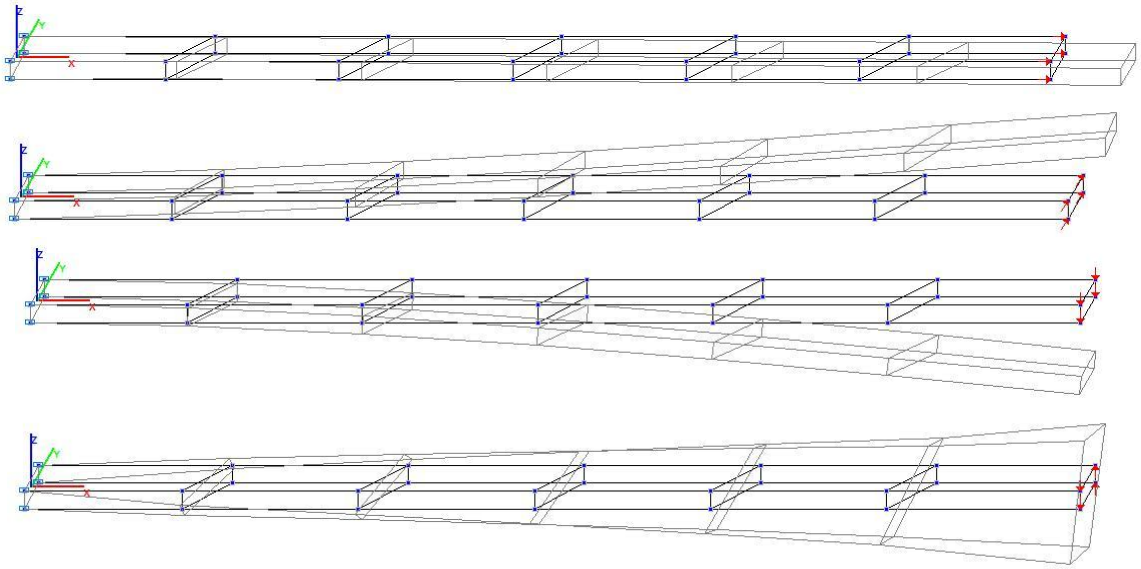
Модель 7.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



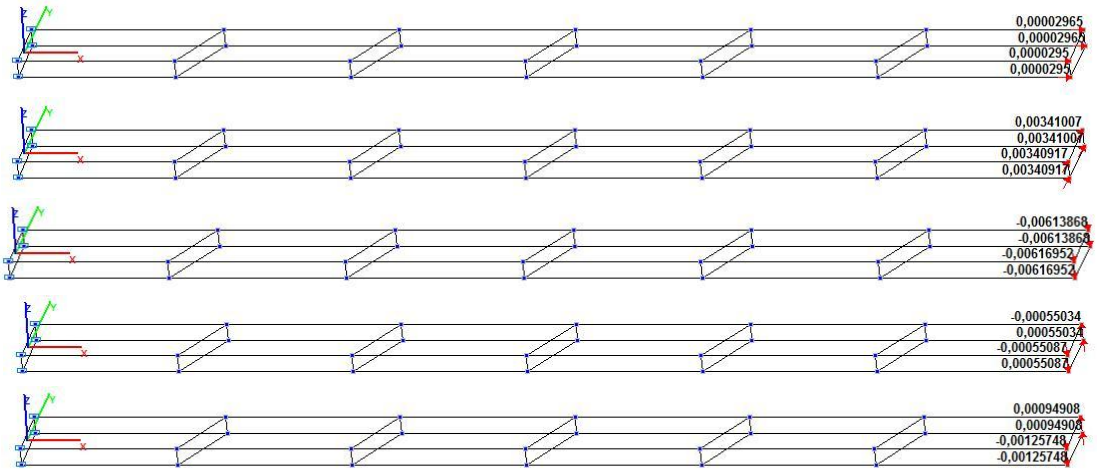
Модель 8.
Значения продольного смещения X, поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, рад)



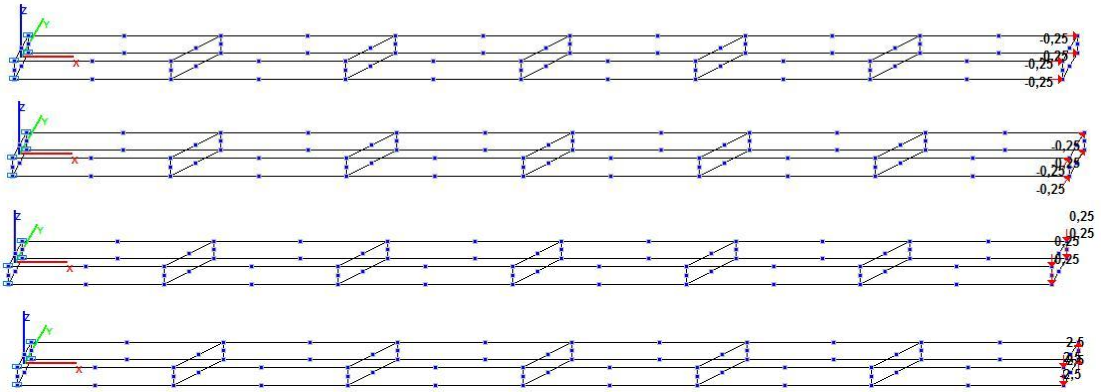
Модель 9.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



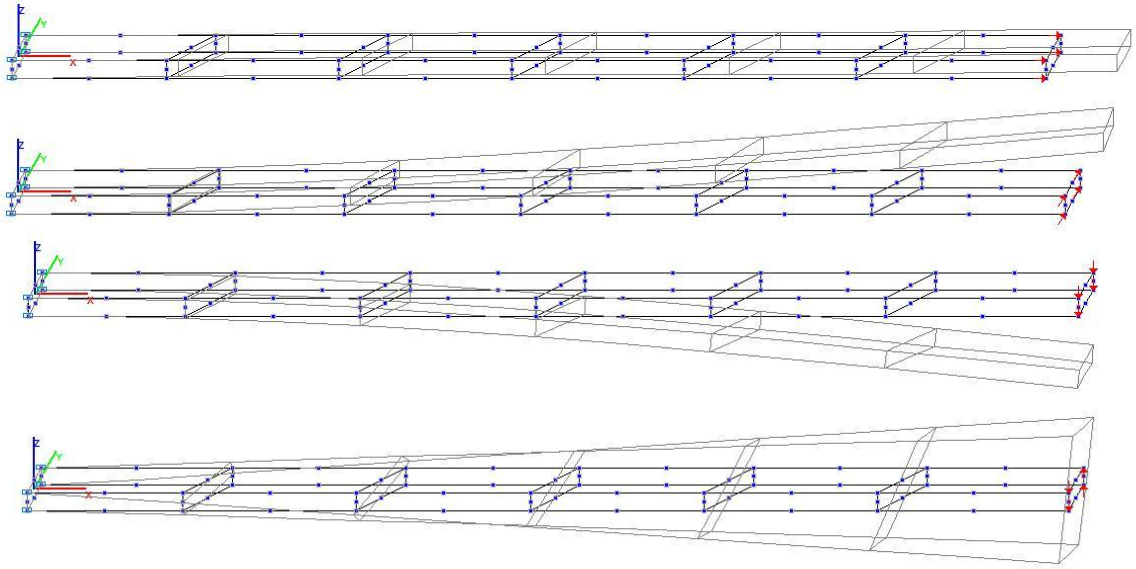
Модель 9.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



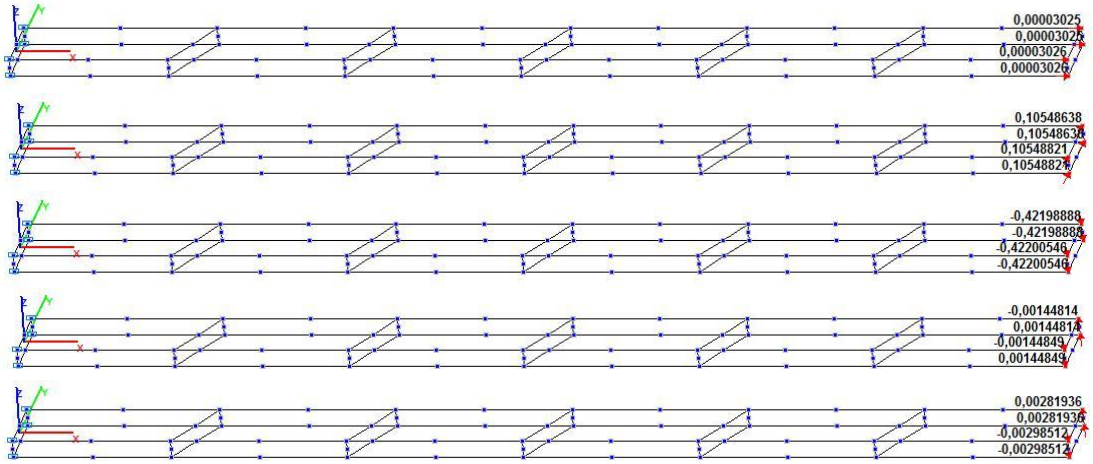
Модель 9.
Значения продольного смещения X от воздействия P_x,
поперечных смещений Y, Z от воздействий P_y, P_z
и поперечных смещений Y, Z от воздействия M_x
свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, м, м)



Модель 10.
Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



Модель 10.
Деформированная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов



Модель 10.
Значения продольного смещения X от воздействия P_x,
поперечных смещений Y, Z от воздействий P_y, P_z
и поперечных смещений Y, Z от воздействия M_x
свободного торца прямолинейной консольной балки (м, м, м, м, м)

Сравнение решений:

Расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002972	0.93
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0034	96.85
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4212	2.50
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.018560	20.68
2 (Тип элемента 142)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002972	0.93
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0034	96.85
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4198	2.82
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032096	5.90
3 (Тип элемента 44)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002986	0.47
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0101	90.65
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4250	1.62
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.019692	15.85
4 (Тип элемента 144)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002987	0.43
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0104	90.37
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4235	1.97
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032759	3.96
5 (Тип элемента 45)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003032	1.07
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1070	0.92
	Поперечное смещение Z свободного торца	0.4320	0.4276	1.02

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
	консольной балки, м			
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.022631	3.29
6 (Тип элемента 145)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003032	1.07
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1070	0.92
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4259	1.41
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032719	4.08
7 (Тип элемента 50)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1070	0.92
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4276	1.02
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.022813	2.51
8 (Тип элемента 150)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1070	0.92
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4264	1.30
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032959	3.37
9 (Тип элемента 36)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002957	1.43
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0100	90.74
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.0109	97.48
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.028974	15.05
10 (Тип элемента 37)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003024	0.80
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1072	0.74
	Поперечное смещение Z свободного торца	0.4320	0.4287	0.76

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
	консольной балки, м			
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.028974	15.05

Расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002970	1.00
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0016	98.52
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4207	2.62
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.018771	19.78
2 (Тип элемента 142)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002970	1.00
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0016	98.52
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4117	4.70
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.031948	6.34
3 (Тип элемента 44)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002980	0.67
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0029	97.31
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4254	1.53
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.020509	12.35
4 (Тип элемента 144)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002980	0.67
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0030	97.22
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4166	3.56
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032724	4.06
5	Продольное смещение X	0.00003000	0.00003029	0.97

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
(Тип элемента 45)	свободного торца консольной балки, м			
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1059	1.94
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4272	1.11
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.022536	3.69
6 (Тип элемента 145)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003029	0.97
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1059	1.94
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4214	2.45
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032659	4.25
7 (Тип элемента 50)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1057	2.13
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4278	0.97
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.022746	2.79
8 (Тип элемента 150)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1057	2.13
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4226	2.18
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032906	3.53
9 (Тип элемента 36)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002950	1.67
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0028	97.41
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.0045	98.96
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.016146	52.66
10	Продольное смещение X	0.00003000	0.00003095	3.17

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
(Тип элемента 37)	свободного торца консольной балки, м			
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0837	22.50
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.3248	24.81
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.027779	18.56

Расчетная схема с параллелограммной сеткой конечных элементов

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002975	0.83
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0024	97.78
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4216	2.41
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.019384	17.16
2 (Тип элемента 142)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002975	0.83
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0024	97.78
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4177	3.31
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032089	5.92
3 (Тип элемента 44)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002981	0.63
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0037	96.57
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4254	1.53
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.020563	12.12
4 (Тип элемента 144)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002980	0.67
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0042	96.11

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4208	2.59
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032743	4.00
5 (Тип элемента 45)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003034	1.13
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1062	1.67
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4278	0.97
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.022704	2.97
6 (Тип элемента 145)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003034	1.13
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1062	1.67
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4221	2.29
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032700	4.13
7 (Тип элемента 50)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1058	2.04
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4278	0.97
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.023400*	0.022749	2.78
8 (Тип элемента 150)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1058	2.04
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4224	2.22
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.032938	3.43
9 (Тип элемента 36)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00002950	1.67
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.0034	96.85

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.0061	98.59
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.011007	67.73
10 (Тип элемента 37)	Продольное смещение X свободного торца консольной балки, м	0.00003000	0.00003026	0.87
	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.1080	0.1055	2.31
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.4320	0.4220	2.31
	Угол закручивания UX свободного торца консольной балки, рад	0.034109	0.028963	15.09

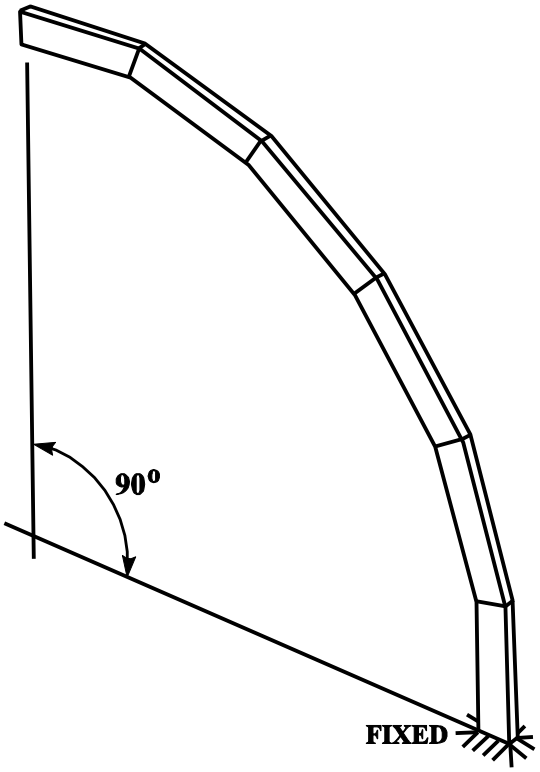
* Значения углов закручивания UX для тонких пластин (без учета сдвига) определены при моменте инерции свободного кручения, вычисленном с величиной коэффициента k_f, равной 1/3 (h/b = ∞).

Замечания: При аналитическом решении значения продольного X и поперечных смещений Y, Z и угла закручивания UX свободного торца прямолинейной консольной балки от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$X = \frac{P_x \cdot L}{E \cdot b \cdot h};\quad Y = \frac{4 \cdot P_y \cdot L^3}{E \cdot b \cdot h^3};\qquad Z = \frac{4 \cdot P_z \cdot L^3}{E \cdot b^3 \cdot h};\qquad UX = \frac{2 \cdot (1+\nu) \cdot M_x \cdot L}{E \cdot k_f \cdot b^3 \cdot h},$$

где: $$k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \right\}.$$

Криволинейная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных поперечных сил



***Цель*:** Проверка точного воспроизведения значений поперечных смещений свободного торца криволинейной консольной балки от действия на нем сосредоточенных соответствующих поперечных сил.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Curved_cantilever_beam_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42
Curved_cantilever_beam_Shell_142.SPR	Расчетная модель с типом элементов 142
Curved_cantilever_beam_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44
Curved_cantilever_beam_Shell_144.SPR	Расчетная модель с типом элементов 144
Curved_cantilever_beam_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45
Curved_cantilever_beam_Shell_145.SPR	Расчетная модель с типом элементов 145
Curved_cantilever_beam_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50
Curved_cantilever_beam_Shell_150.SPR	Расчетная модель с типом элементов 150
Curved_cantilever_beam_ Solid _36.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36
Curved_cantilever_beam_ Solid _37.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37

***Формулировка задачи*:** Криволинейная изотропная консольная балка прямоугольного поперечного сечения подвергается воздействию на свободном торце сосредоточенных поперечных P_y, P_z сил (изгиб в плоскости и из плоскости продольной оси балки). Проверить: точное воспроизведение значений поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки от соответствующих воздействий.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

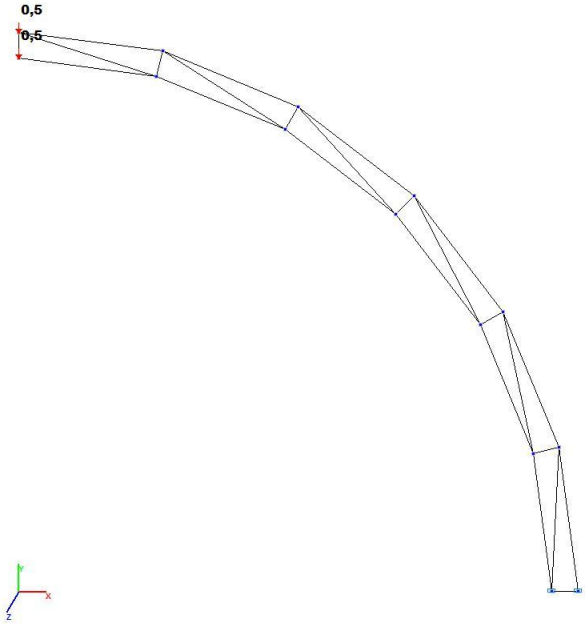
Исходные данные:

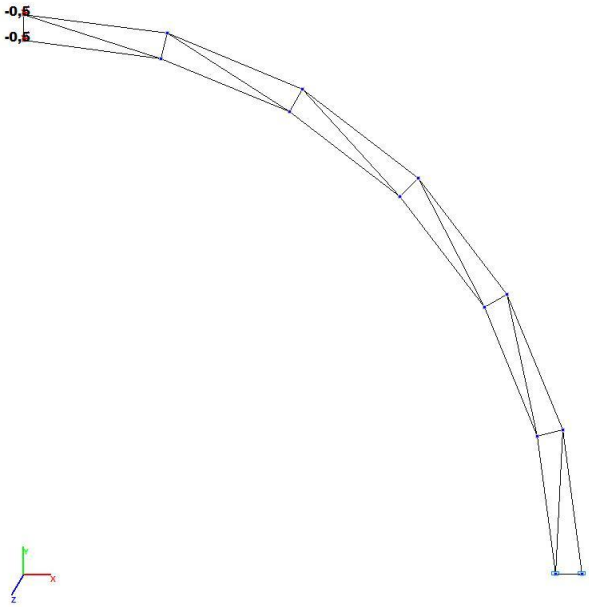
$E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости материала балки;
$\nu = 0.25$ - коэффициент Пуассона;
b = 0. 1 м - ширина балки;
h = 0. 2 м - высота балки;
R = 4.22 м - радиус дуги продольной оси балки;

$\alpha = \pi/2$ рад - центральный угол дуги продольной оси балки;
$P_y = 1.0$ кН - значение поперечной силы, действующей по высоте балки (в плоскости продольной оси);
$P_z = 1.0$ кН - значение поперечной силы, действующей по ширине балки (из плоскости продольной оси).

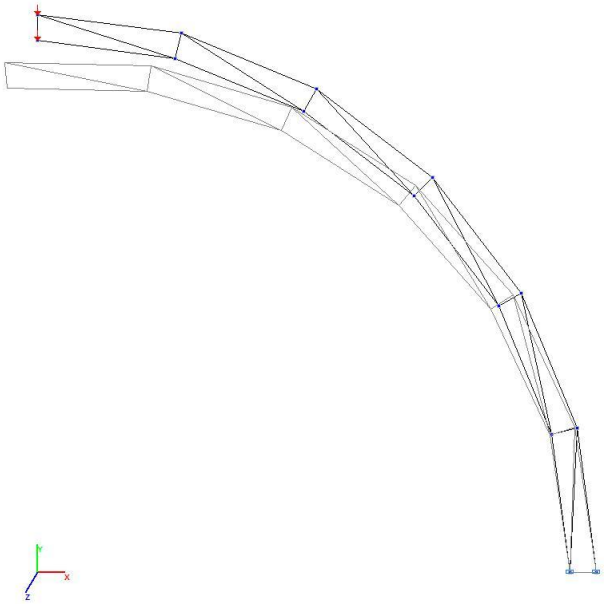
***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема с трапецеидальной сеткой конечных элементов для десяти расчетных моделей:
Модель 1 - 12 трехузловых элементов оболочки типа 42. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 14.
Модель 2 - 12 трехузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 142. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 14.
Модель 3 - 6 четырехузловых элементов оболочки типа 44. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН).. Количество узлов в модели – 14.
Модель 4 - 6 четырехузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 144. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 14.
Модель 5 - 12 шестиузловых элементов оболочки типа 45. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 39.
Модель 6 - 12 шестиузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 145. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 39.
Модель 7 - 6 восьмиузловых элементов оболочки типа 50. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 33.
Модель 8 - 6 восьмиузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2{\cdot}0.5$ кН, $P_z = 2{\cdot}0.5$ кН). Количество узлов в модели – 33.
Модель 9 - 6 восьмиузловых изопараметрических объемных элементов типа 36. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде четырех узловых сил ($P_y = 4{\cdot}0.25$ кН, $P_z = 4{\cdot}0.25$ кН). Количество узлов в модели – 28.
Модель 10 - 6 двадцатиузловых изопараметрических объемных элементов типа 37. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде четырех узловых сил ($P_y = 4{\cdot}0.25$ кН, $P_z = 4{\cdot}0.25$ кН). Количество узлов в модели – 80.

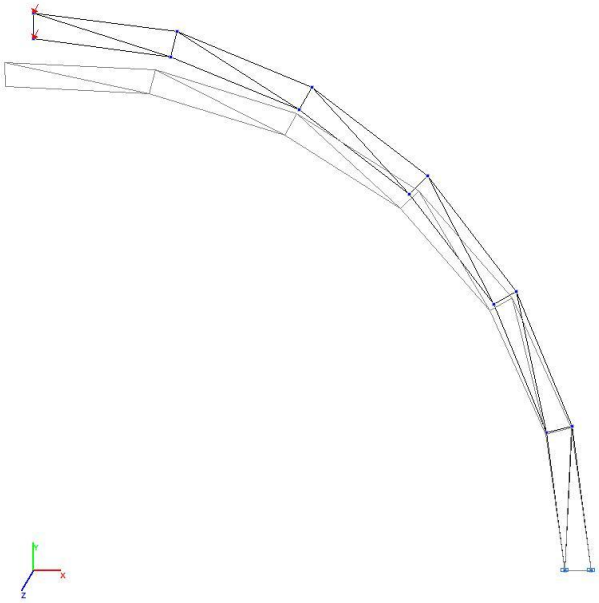
Результаты решения в SCAD



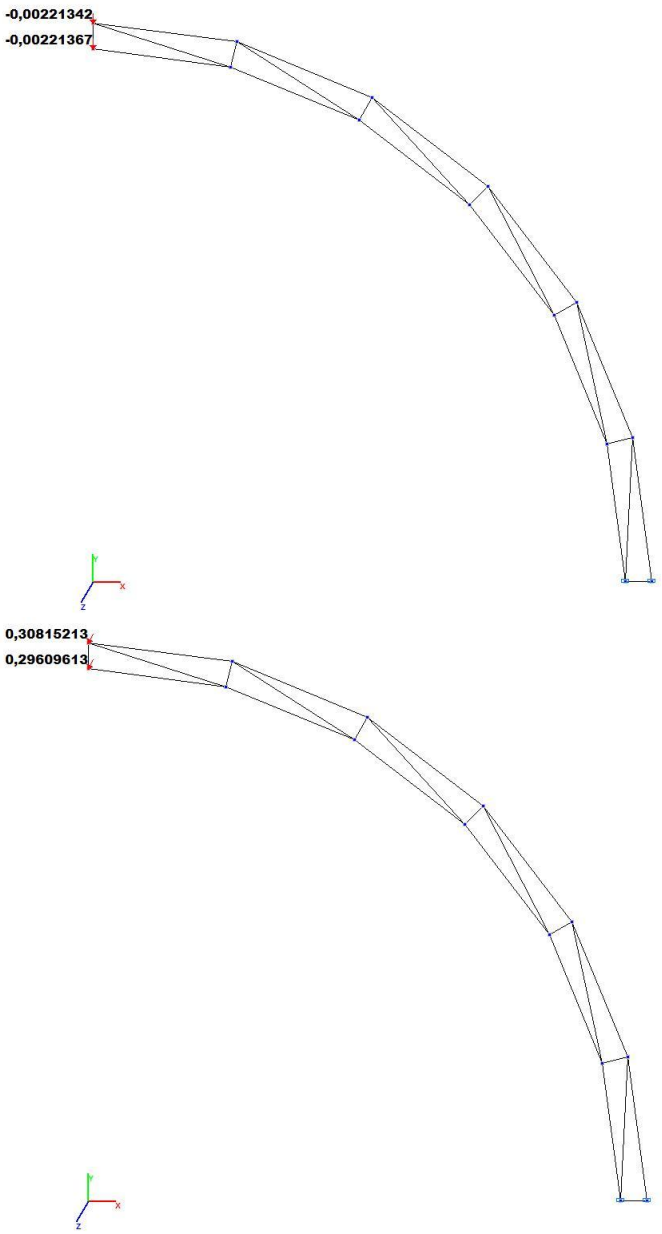


Модели 1 и 2. Расчетная схема

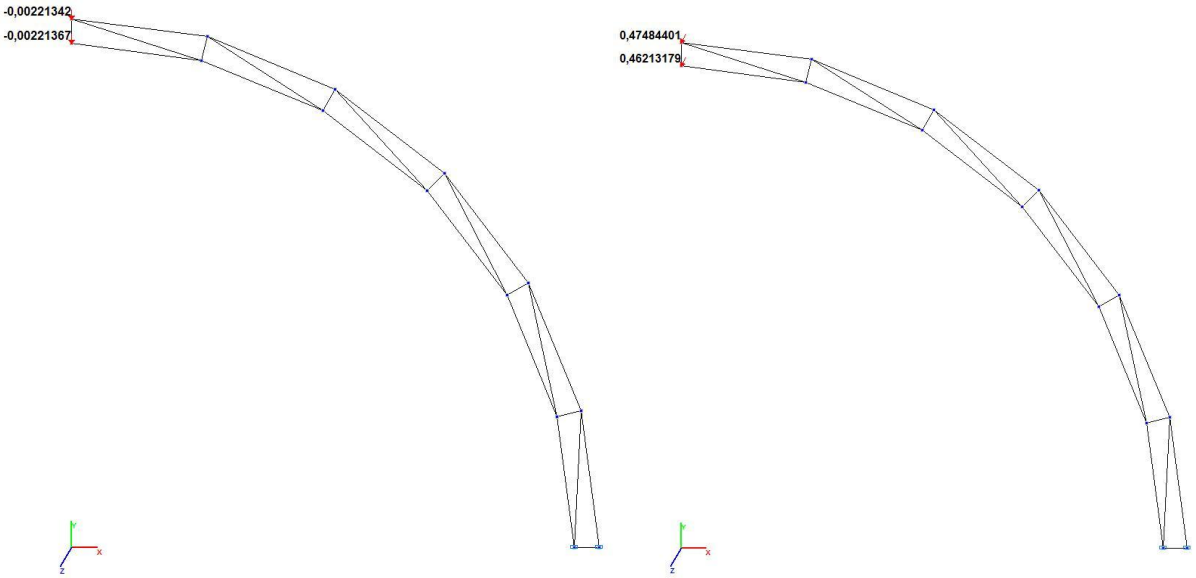




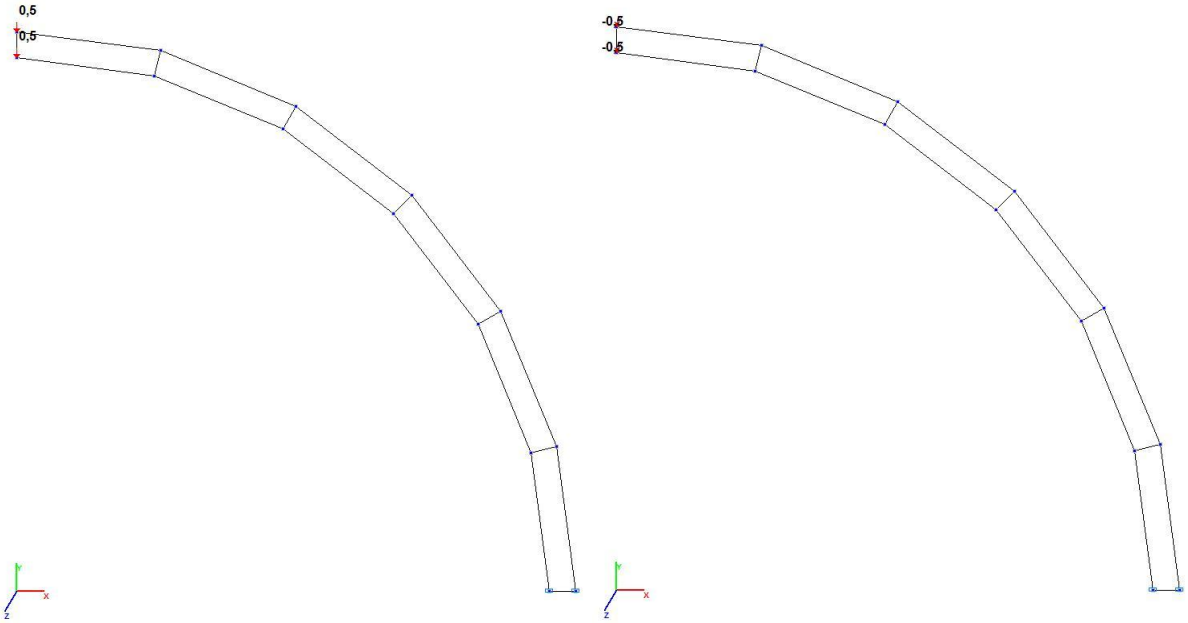
Модели 1 и 2. Деформированная схема



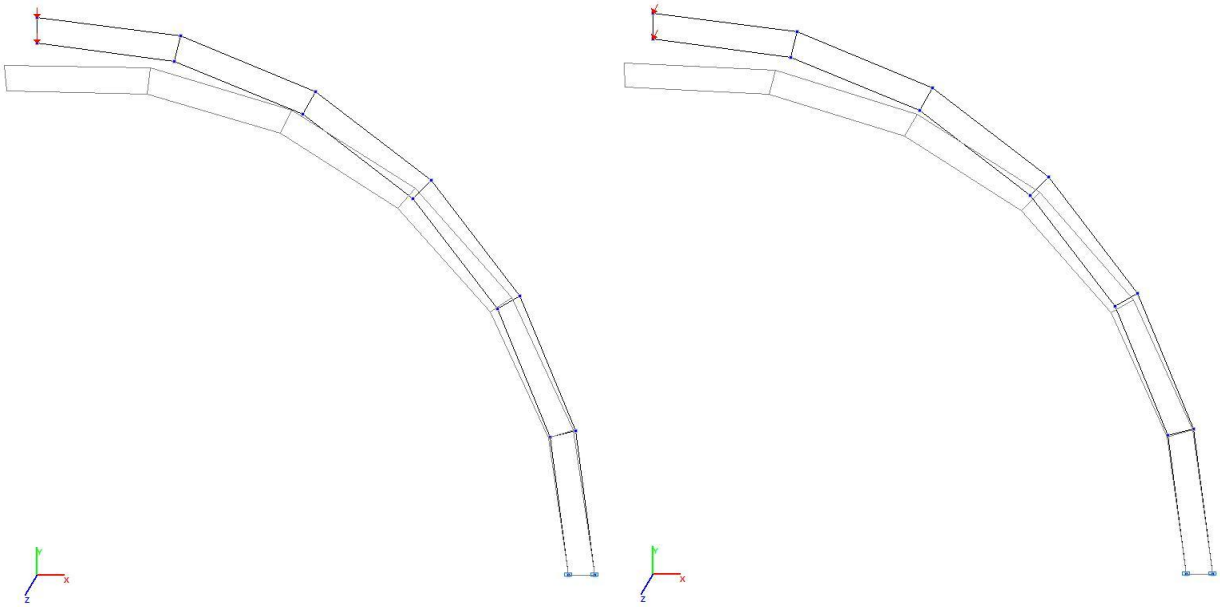
Модель 1. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



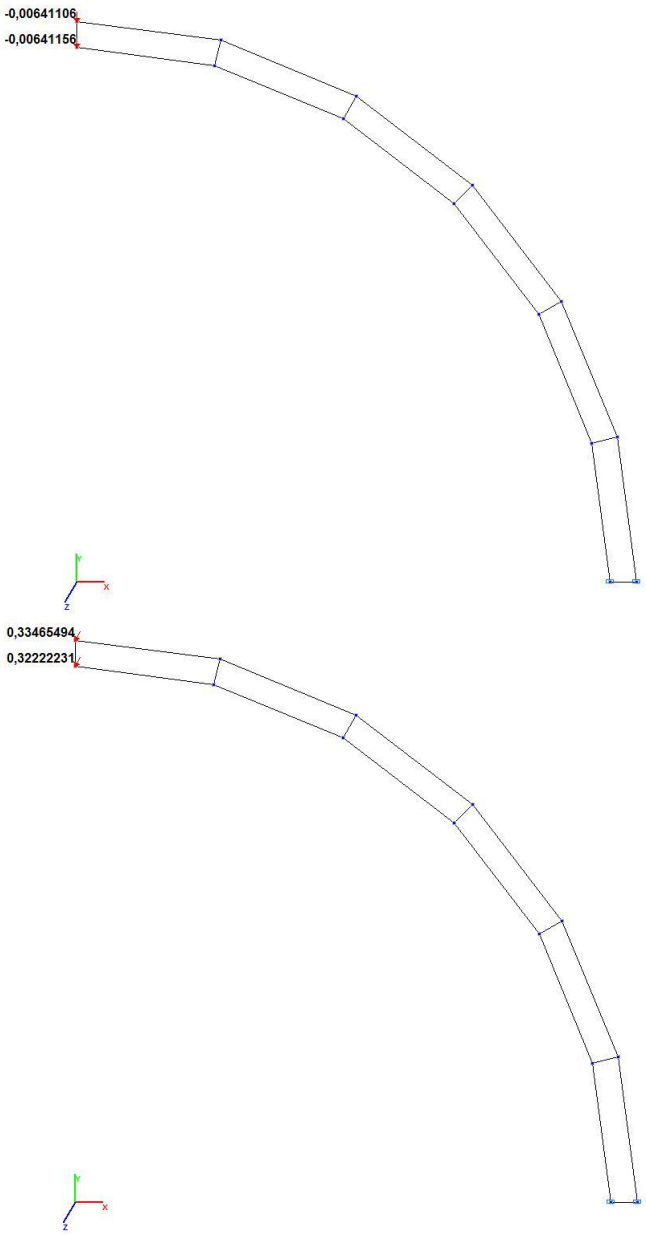
Модель 2. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



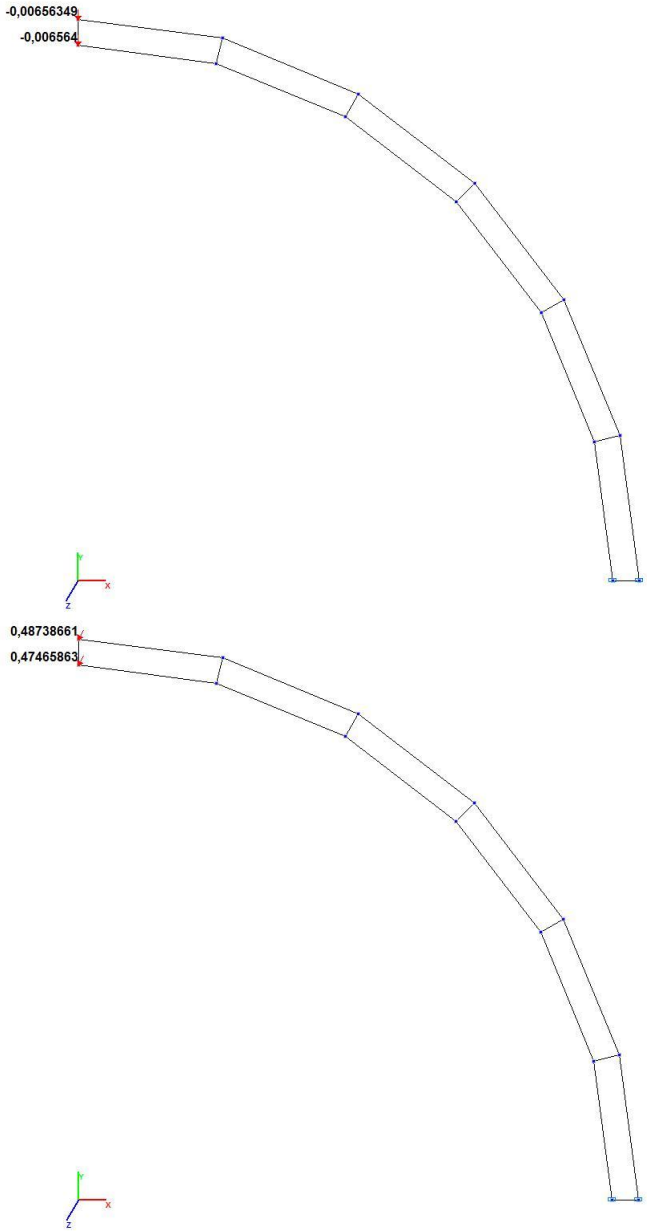
Модели 3 и 4. Расчетная схема



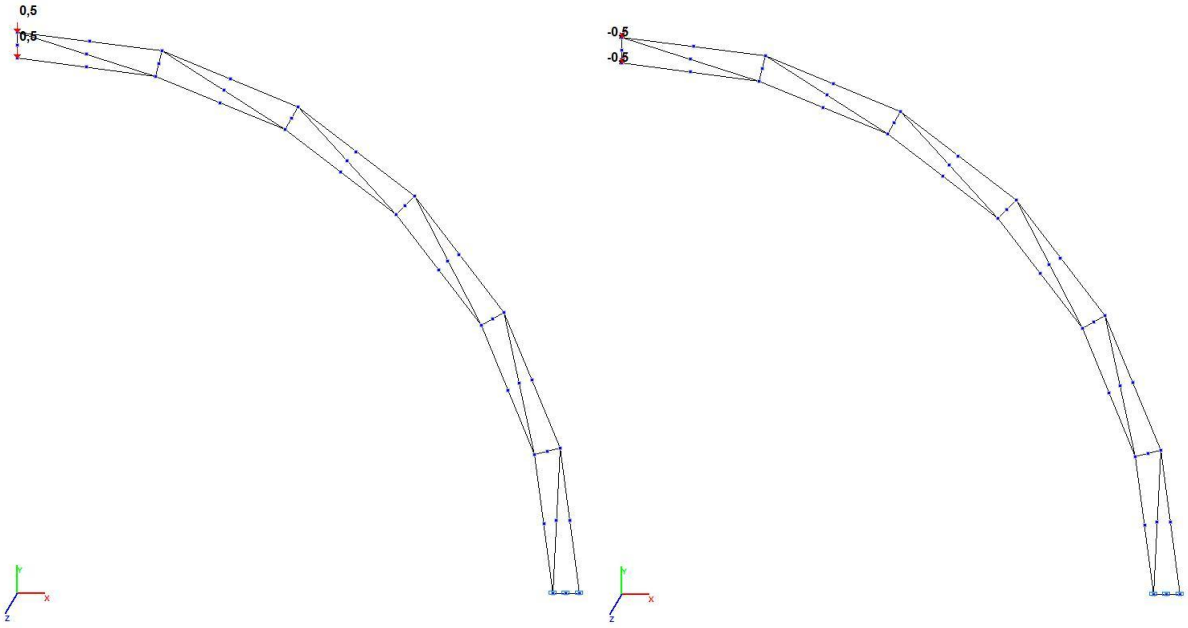
Модели 3 и 4. Деформированная схема



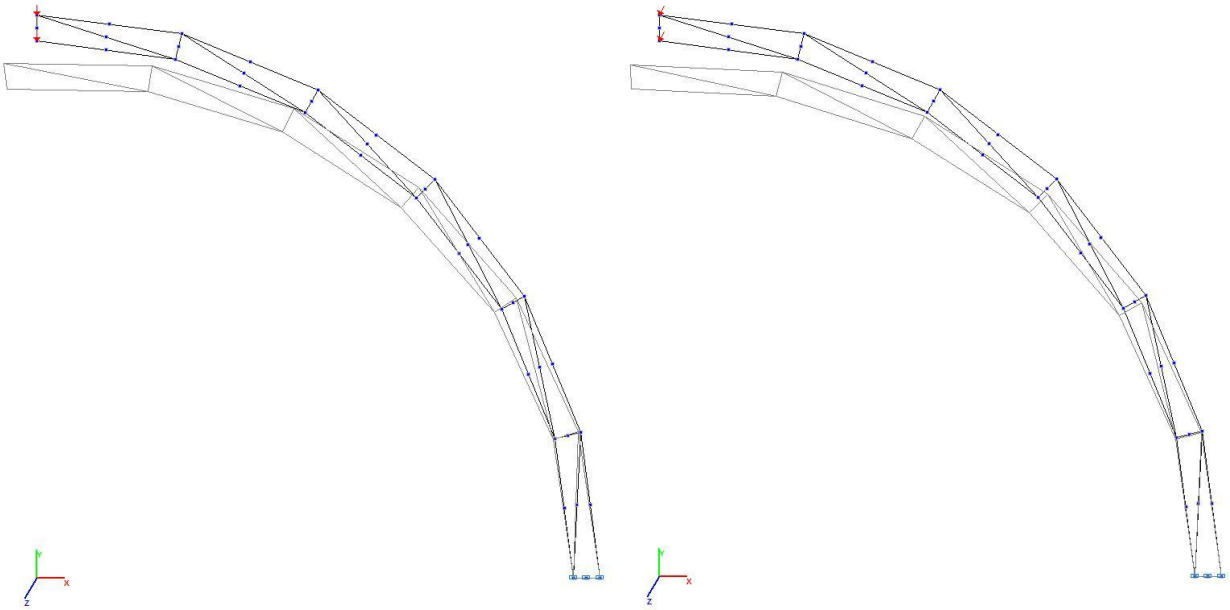
Модель 3. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



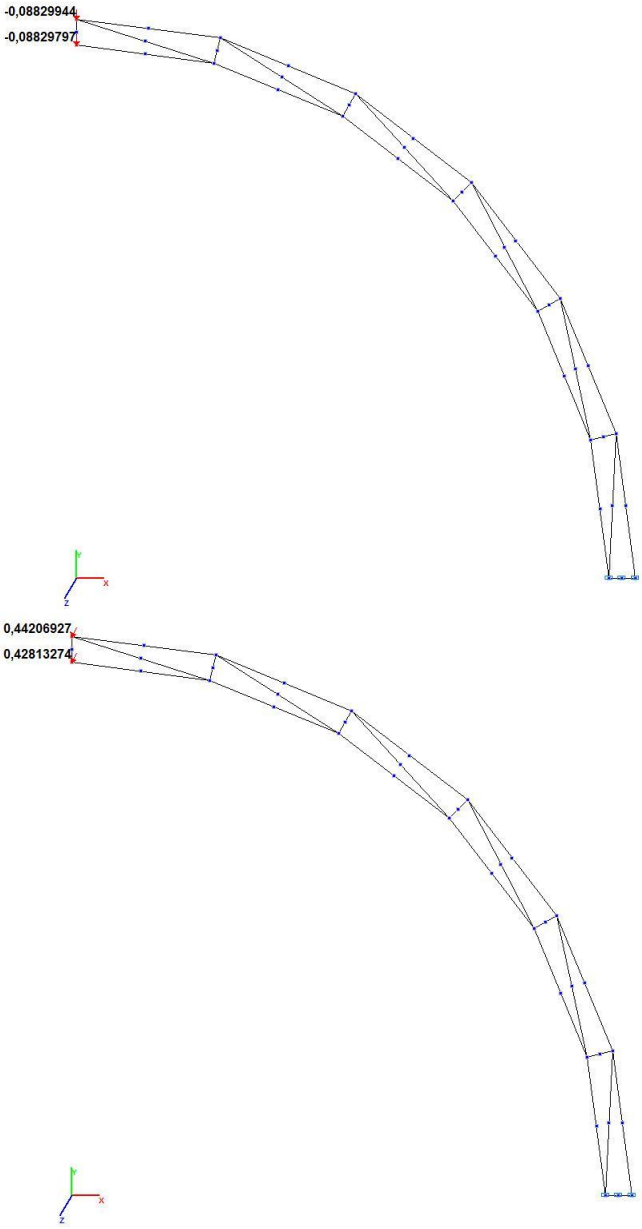
Модель 4. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



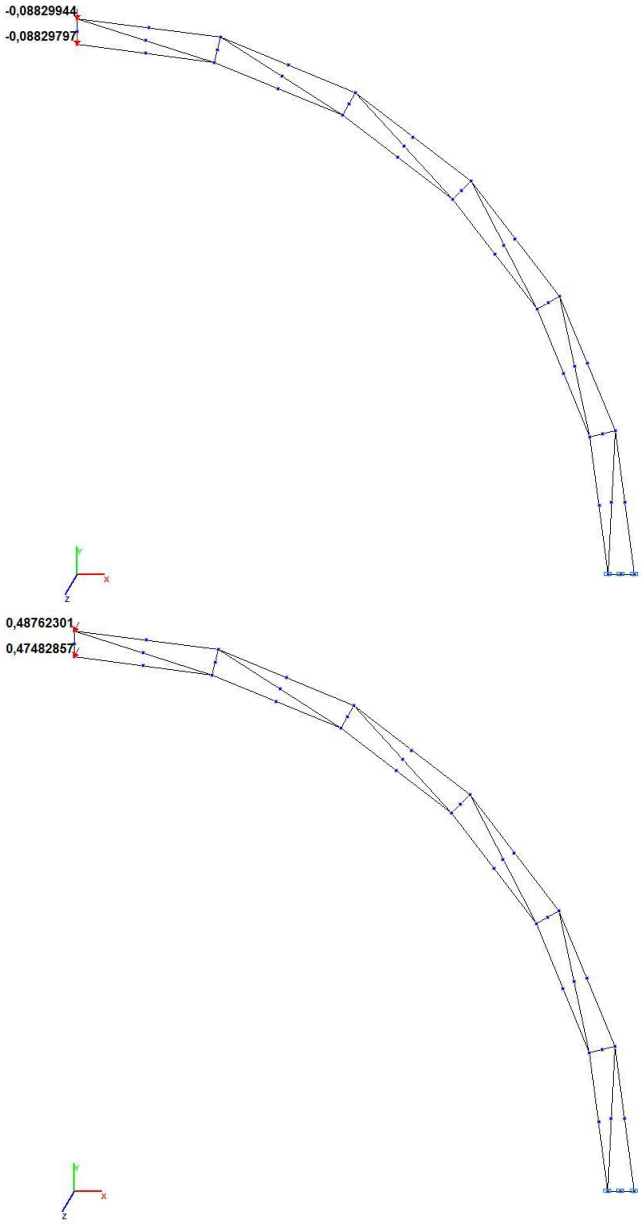
Модели 5 и 6. Расчетная схема



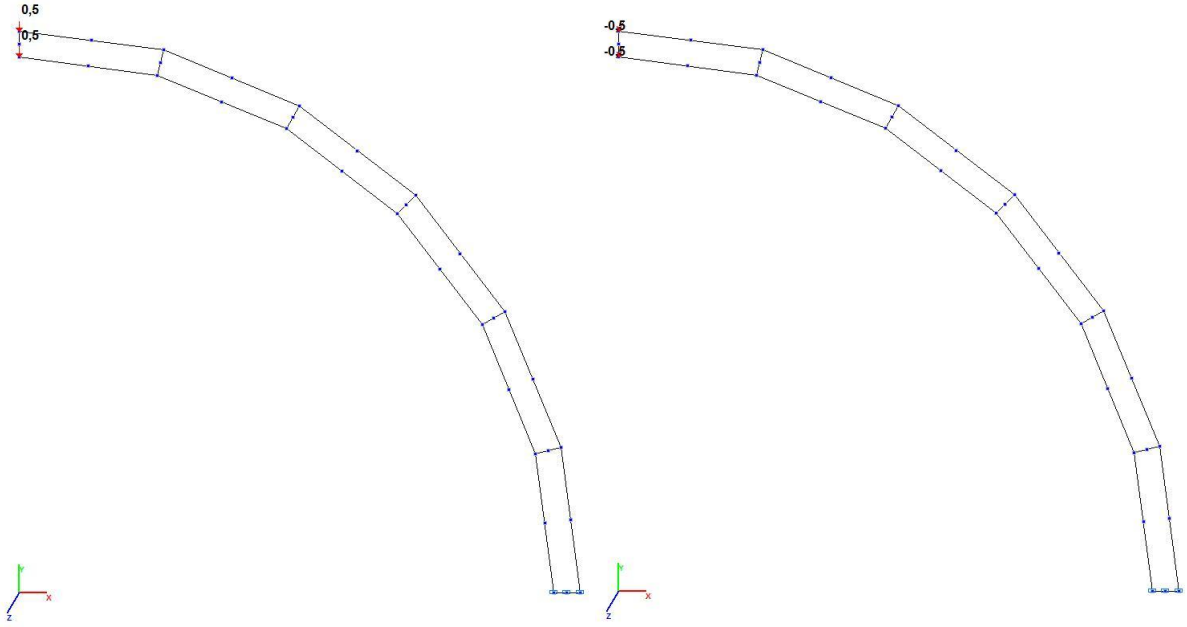
Модели 5 и 6. Деформированная схема



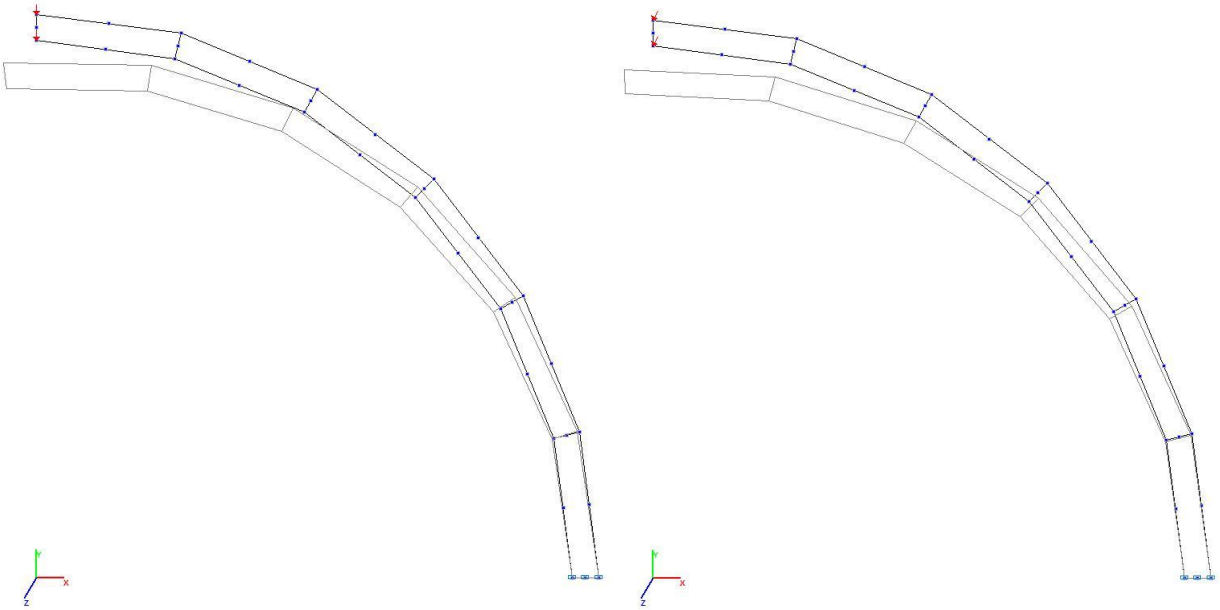
Модель 5. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



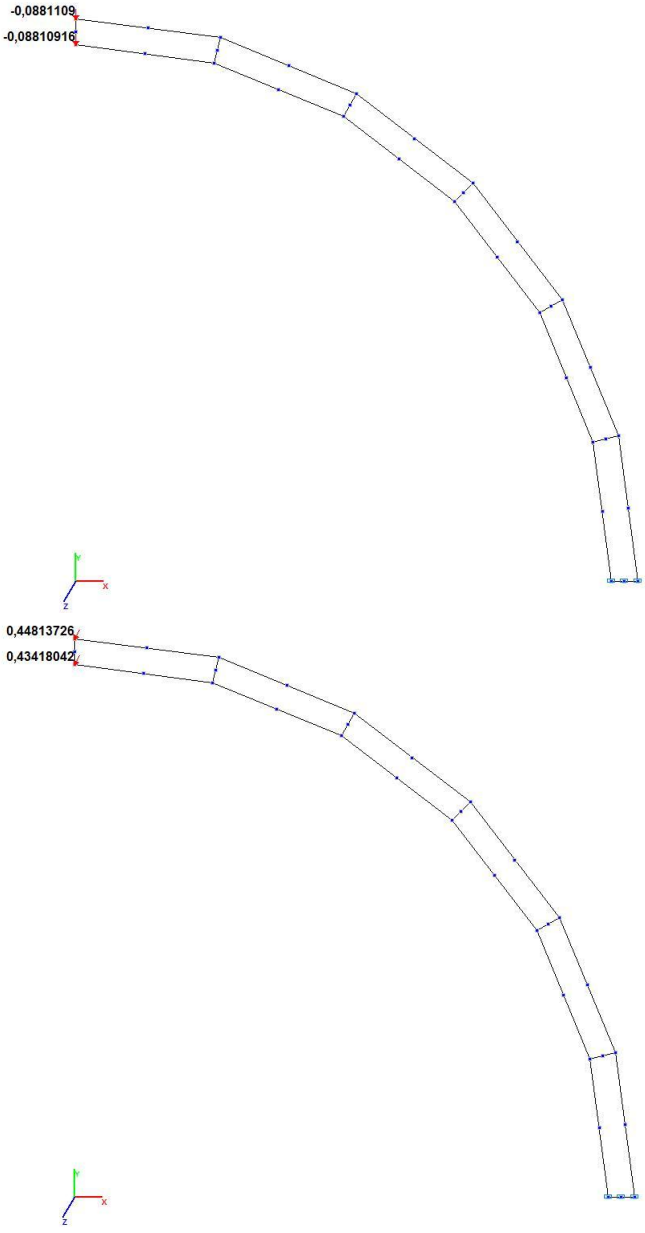
Модель 6. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



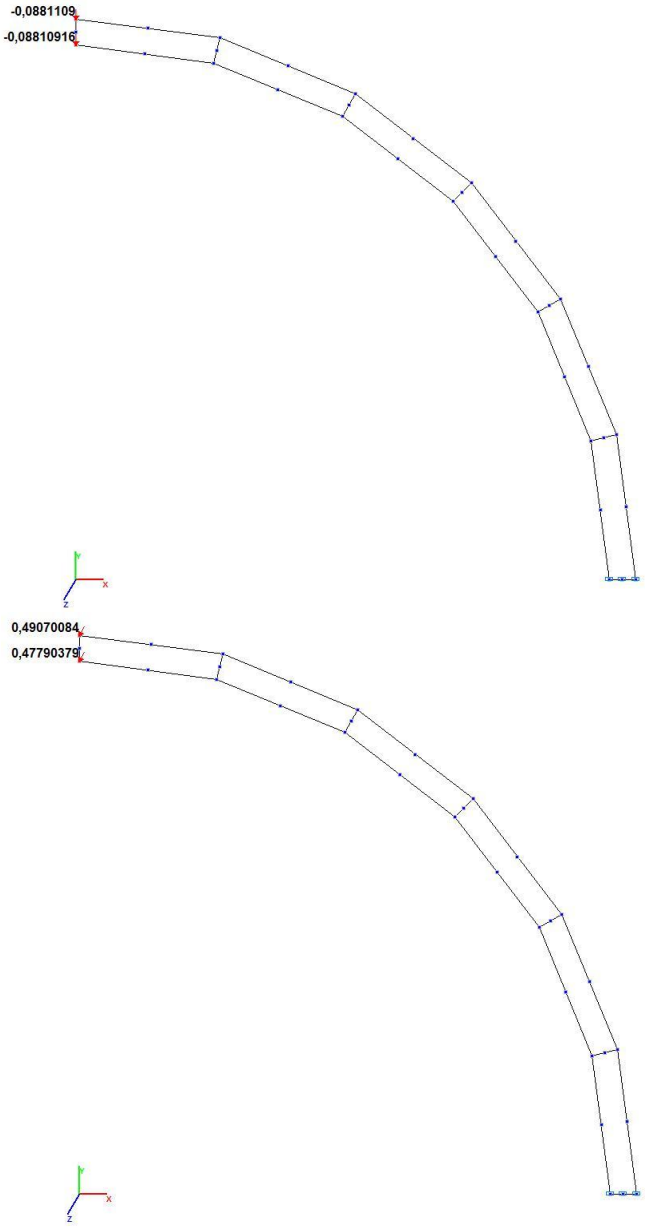
Модели 7 и 8. Расчетная схема



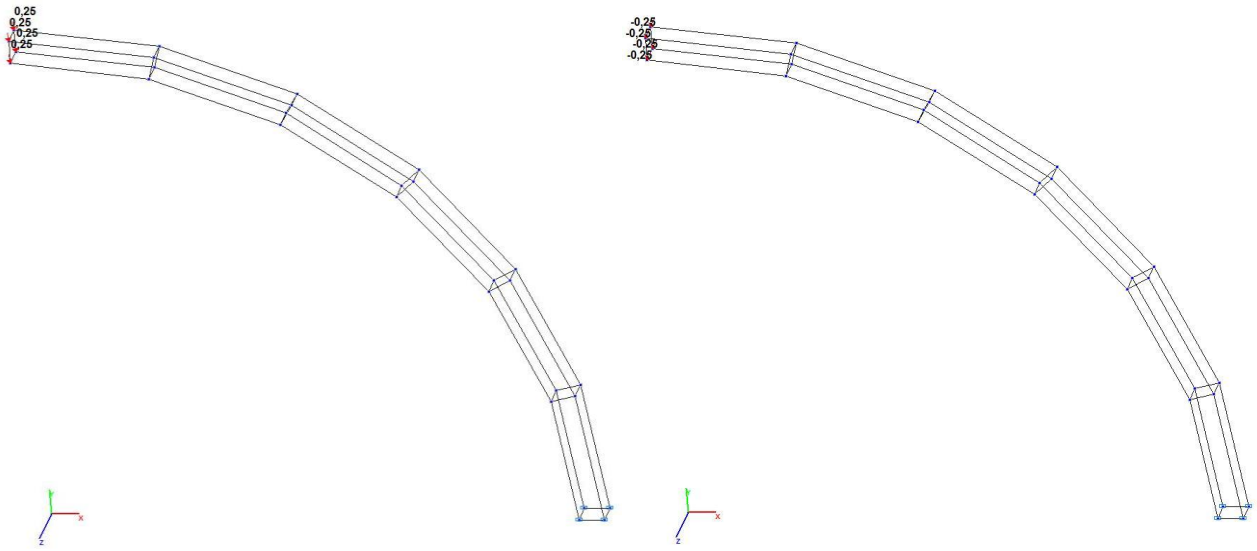
Модели 7 и 8. Деформированная схема



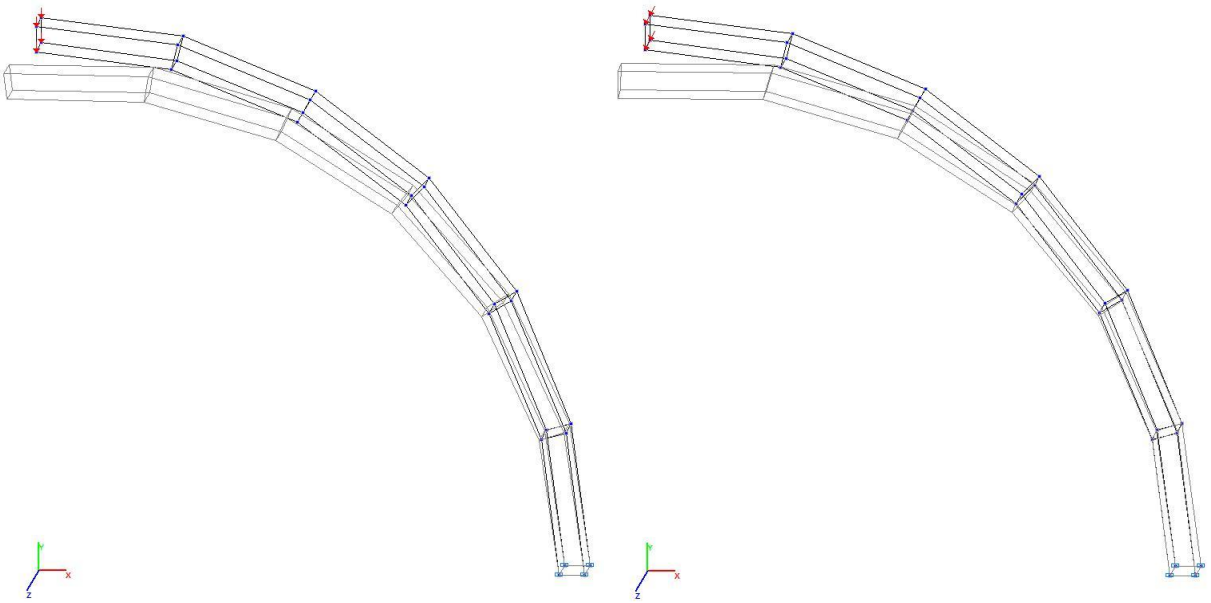
Модель 7. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



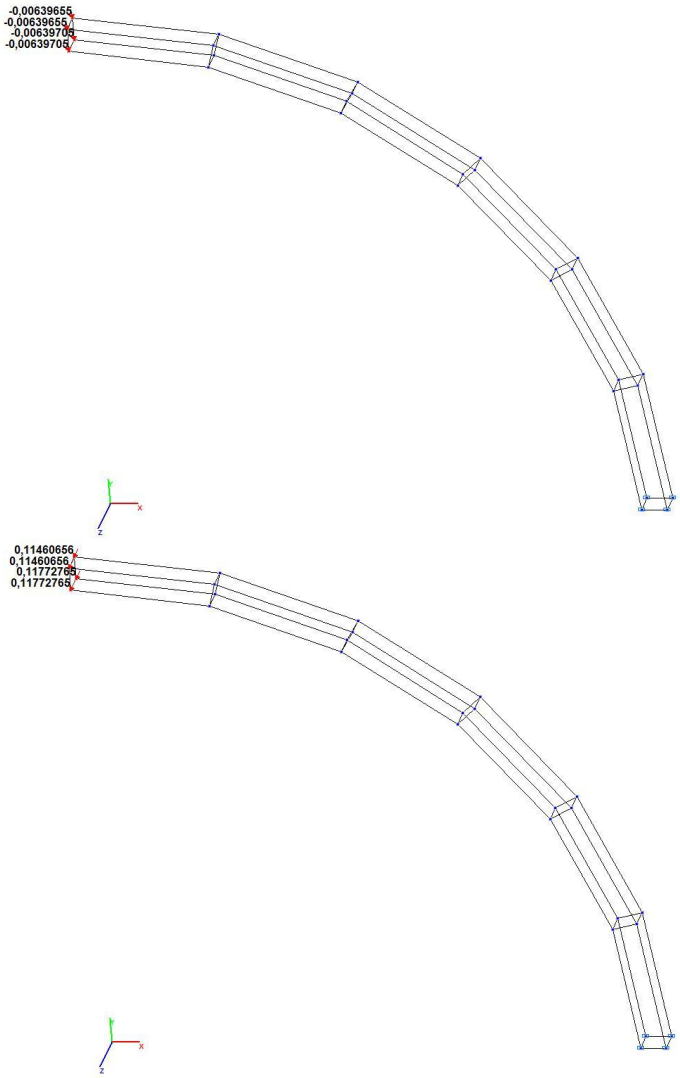
Модель 8. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



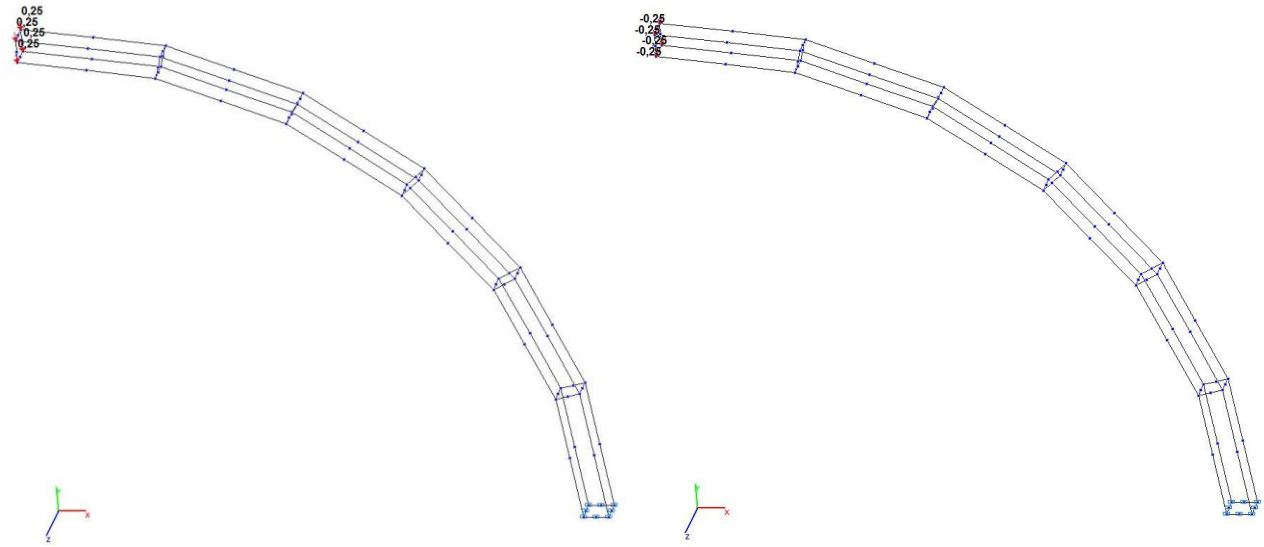
Модель 9. Расчетная схема



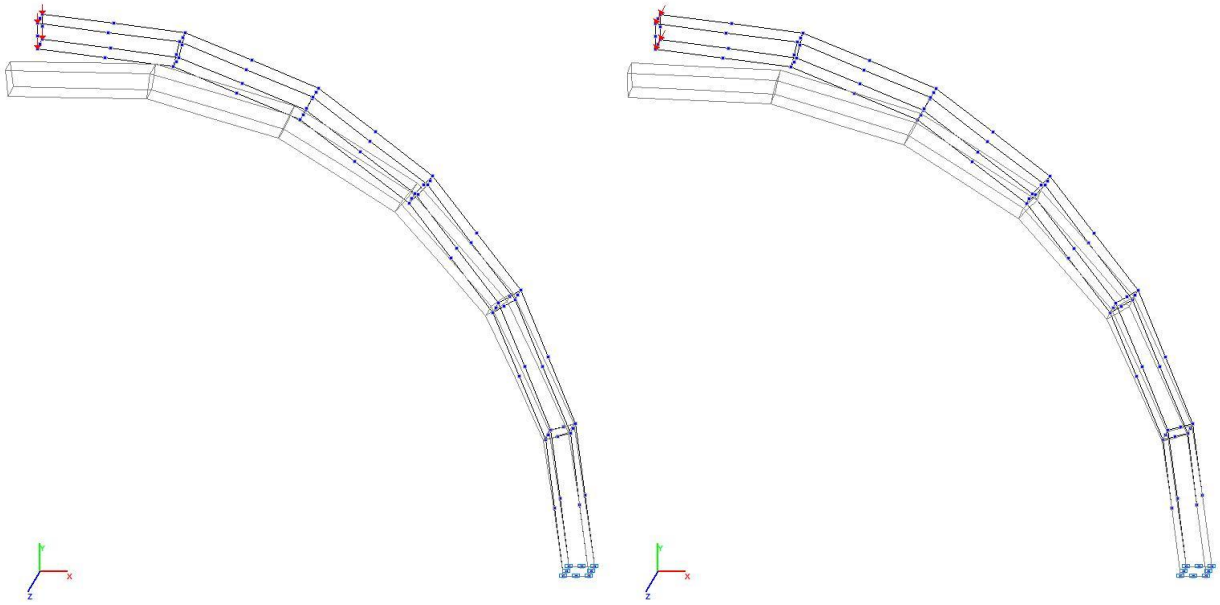
Модель 9. Деформированная схема



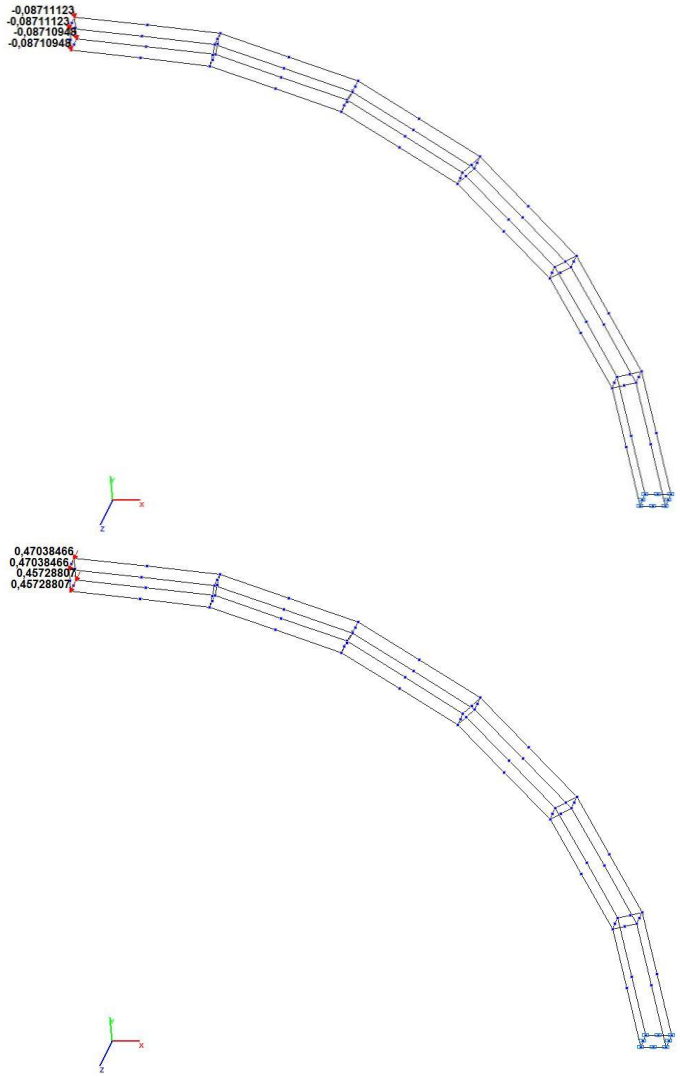
Модель 9. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)



Модель 10. Расчетная схема



Модель 10. Деформированная схема



Модель 10. Значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки (м, м)

Сравнение решений:

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.002213	97.50
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.454527*	0.308152	32.20
2 (Тип элемента 142)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.02213	97.50
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.500466	0.474844	5.12
3 (Тип элемента 44)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.006411	92.76
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.454527*	0.334655	26.37
4 (Тип элемента 144)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.006563	92.59
	Поперечное смещение Z	0.500466	0.487387	2.61

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
	свободного торца консольной балки, м			
5 (Тип элемента 45)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.088299	0.27
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.454527*	0.442069	2.74
6 (Тип элемента 145)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.088299	0.27
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.500466	0.487623	2.57
7 (Тип элемента 50)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.088111	0.48
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.454527*	0.448137	1.41
8 (Тип элемента 150)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.088111	0.48
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.500466	0.490701	1.95
9 (Тип элемента 36)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.006397	92.77
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.500466	0.114607	77.10
10 (Тип элемента 37)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.088536	0.087111	1.61
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.500466	0.470384	6.01

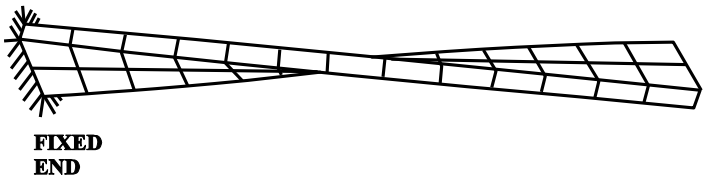
* Значения поперечных смещений Z для тонких пластин (без учета сдвига) определены при моменте инерции свободного кручения, вычисленном с величиной коэффициента k_f, равной 1/3 (h/b = ∞).

Замечания: При аналитическом решении значения поперечных смещений Y, Z свободного торца криволинейной консольной балки от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$Y = \frac{3 \cdot \pi \cdot P_y \cdot R^3}{E \cdot b \cdot h^3}; \qquad Z = \frac{P_z \cdot R^3}{2 \cdot E \cdot b^3 \cdot h \cdot k_f} \cdot \left[6 \cdot \pi \cdot k_f + (3 \cdot \pi - 8) \cdot (1 + \nu)\right],$$

где: $k_f = \frac{1}{3} \cdot \left\{1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot th\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)\right]\right\}.$

Скрученная консольная балка под действием на свободном торце сосредоточенных поперечных сил



Цель: Проверка точного воспроизведения значений поперечных смещений свободного торца скрученной консольной балки от действия на нем соответствующих сосредоточенных поперечных сил.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Twisted_cantilever_beam_Shell_42.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42
Twisted_cantilever_beam_Shell_142.SPR	Расчетная модель с типом элементов 142
Twisted_cantilever_beam_Shell_44.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44
Twisted_cantilever_beam_Shell_144.SPR	Расчетная модель с типом элементов 144
Twisted_cantilever_beam_Shell_45.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45
Twisted_cantilever_beam_Shell_145.SPR	Расчетная модель с типом элементов 145
Twisted_cantilever_beam_Shell_50.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50
Twisted_cantilever_beam_Shell_150.SPR	Расчетная модель с типом элементов 150
Twisted_cantilever_beam_ Solid _36.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36
Twisted_cantilever_beam_ Solid _37.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37

***Формулировка задачи*:** Скрученная по продольной оси изотропная консольная балка прямоугольного поперечного сечения подвергается воздействию на свободном торце сосредоточенных поперечных P_y, P_z сил (изгиб в плоскости и из плоскости высоты балки у свободного торца). Проверить: точное воспроизведение значений поперечных смещений Y, Z свободного торца скрученной консольной балки от соответствующих воздействий.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

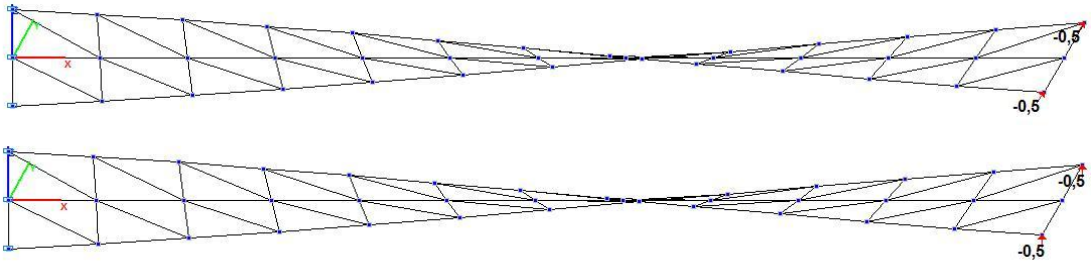
Исходные данные:

$E = 2.9 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости материала балки;
$\nu = 0.22$ - коэффициент Пуассона;
$b = 0.32$ м - ширина балки;
$h = 1.10$ м - высота балки;
$L = 12.0$ м - длина продольной оси балки;
$\alpha = \pi/2$ рад - угол скручивания продольной оси балки;
$P_y = 1.0$ кН - значение поперечной силы, действующей по высоте балки у свободного торца;
$P_z = 1.0$ кН - значение поперечной силы, действующей по ширине балки у свободного торца.

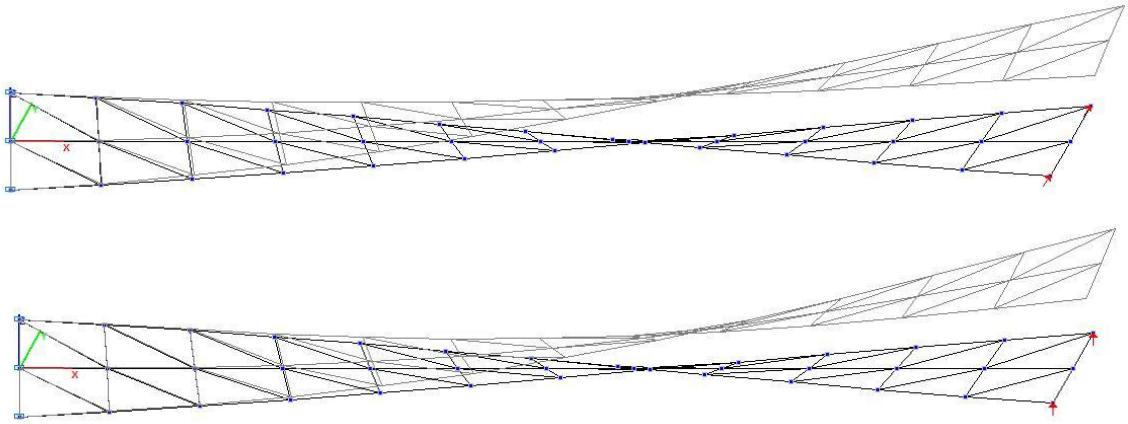
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема с регулярной сеткой конечных элементов 12x2 для десяти расчетных моделей:
Модель 1 - 48 трехузловых элементов оболочки типа 42. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2 \cdot 0.5$ кН, $P_z = 2 \cdot 0.5$ кН). Количество узлов в модели – 39.
Модель 2 - 48 трехузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 142. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил ($P_y = 2 \cdot 0.5$ кН, $P_z = 2 \cdot 0.5$ кН). Количество узлов в модели – 39.

Модель 3 - 24 четырехузловых элементов оболочки типа 44. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил (P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН).. Количество узлов в модели – 39.
Модель 4 - 24 четырехузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 144. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил (P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН). Количество узлов в модели – 39.
Модель 5 - 48 шестиузловых элементов оболочки типа 45. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил (P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН). Количество узлов в модели – 125.
Модель 6 - 48 шестиузловых элементов оболочки с учетом сдвига типа 145. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил (P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН). Количество узлов в модели – 125.
Модель 7 - 24 восьмиузловых элемента оболочки типа 50. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил (P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН). Количество узлов в модели – 101.
Модель 8 - 24 восьмиузловых элемента оболочки с учетом сдвига типа 150. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде двух узловых сил (P_y = 2·0.5 кН, P_z = 2·0.5 кН). Количество узлов в модели – 101.
Модель 9 - 24 восьмиузловых изопараметрических объемных элемента типа 36. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде четырех узловых сил (P_y = 4·0.25 кН, P_z = 4·0.25 кН). Количество узлов в модели – 78.
Модель 10 - 24 двадцатиузловых изопараметрических объемных элемента типа 37. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанного торца балки по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ. Сосредоточенные поперечные P_y, P_z силы представлены в виде четырех узловых сил (P_y = 4·0.25 кН, P_z = 4·0.25 кН). Количество узлов в модели – 241.

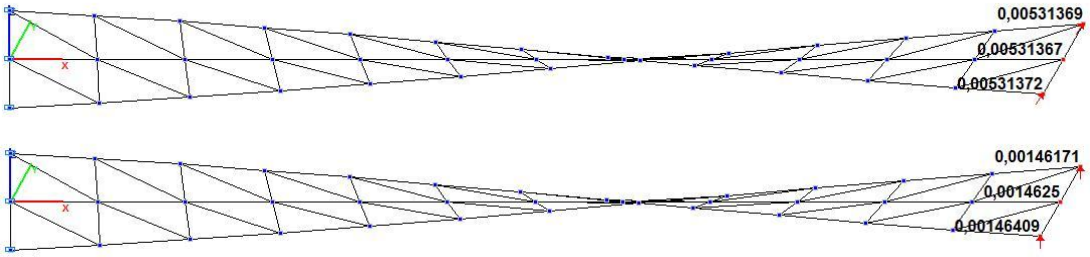
Результаты решения в SCAD



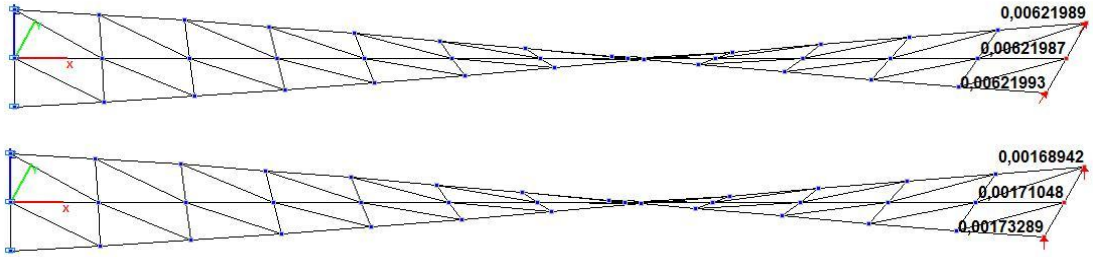
Модели 1 и 2. Расчетная схема



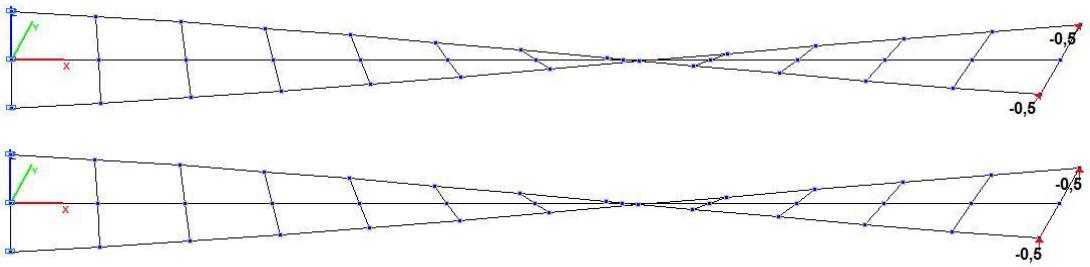
Модели 1 и 2. Деформированная схема



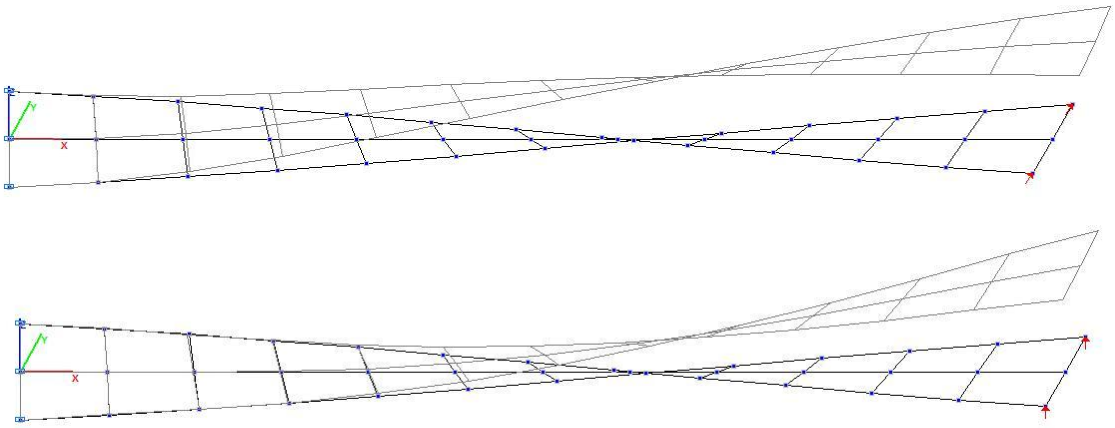
Модель 1. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



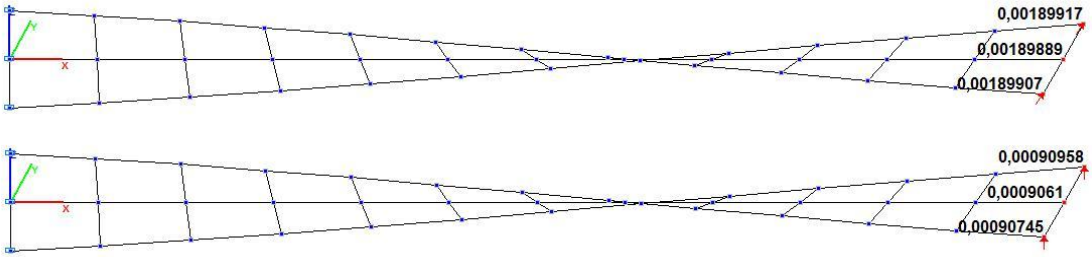
Модель 2. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



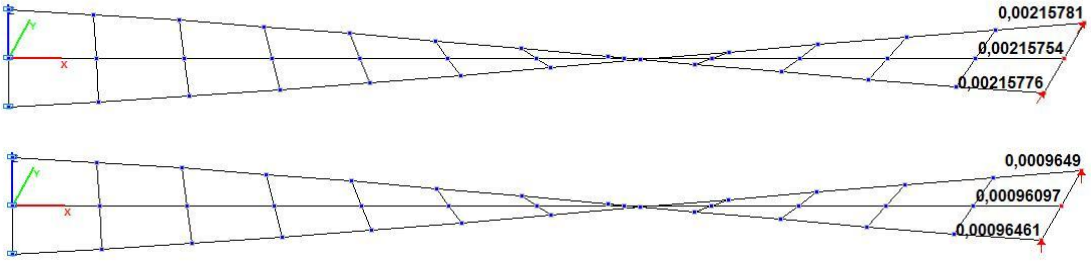
Модели 3 и 4. Расчетная схема



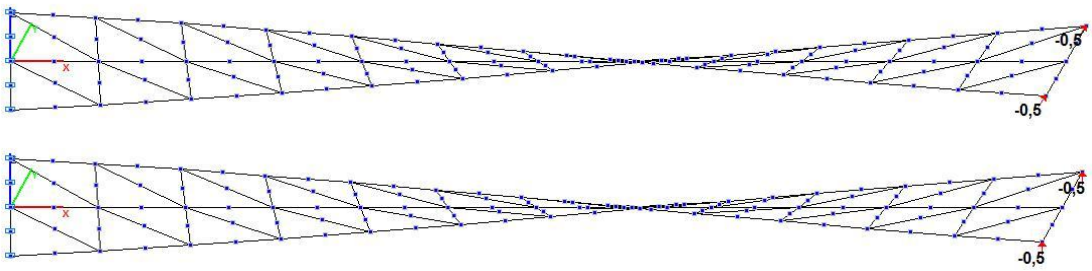
Модели 3 и 4. Деформированная схема



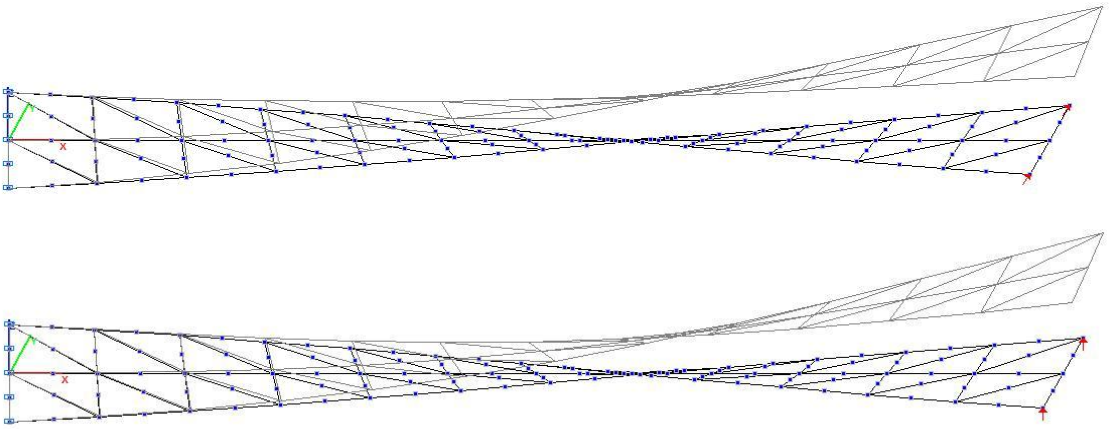
Модель 3. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



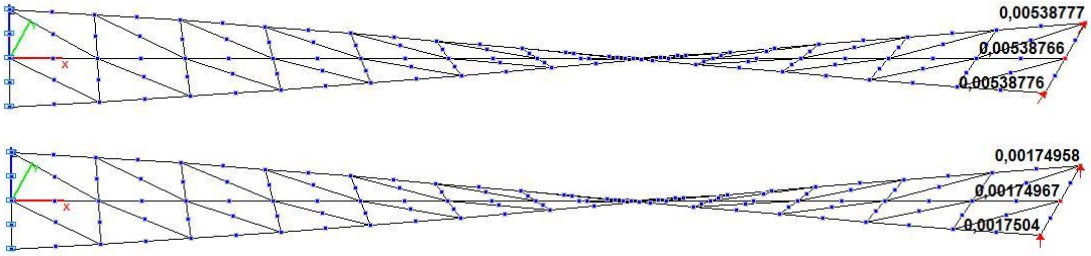
Модель 4. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



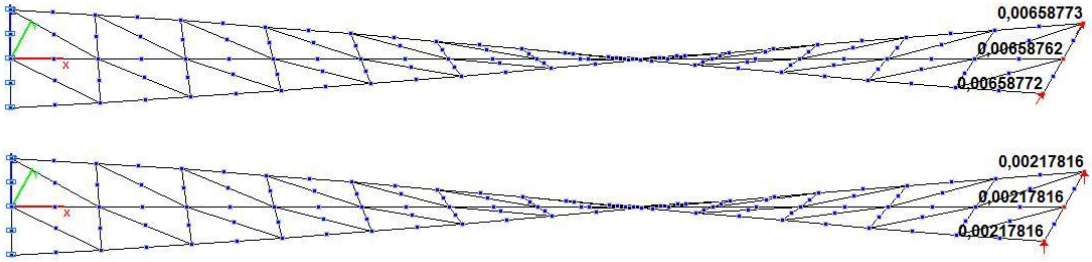
Модели 5 и 6. Расчетная схема



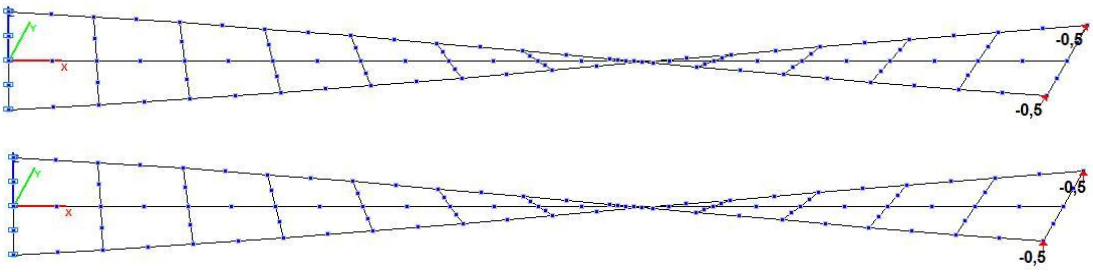
Модели 5 и 6. Деформированная схема



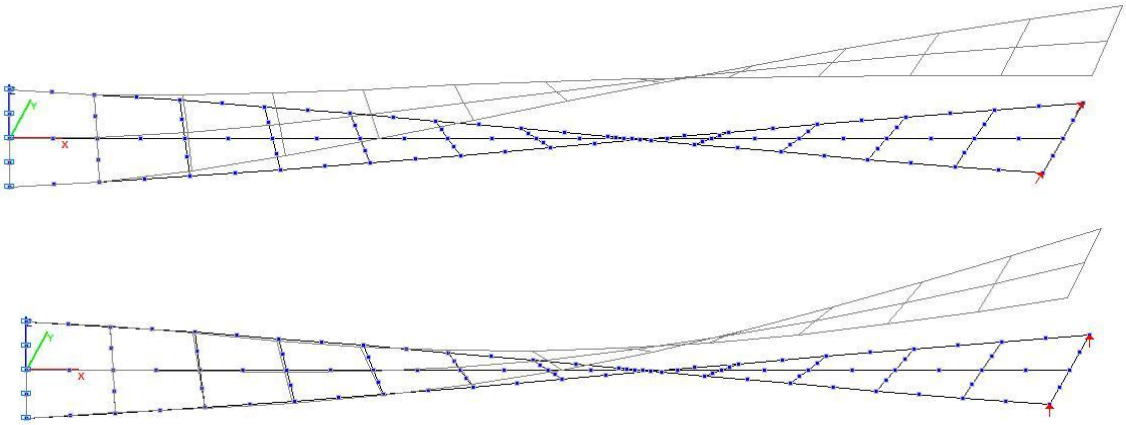
Модель 5. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



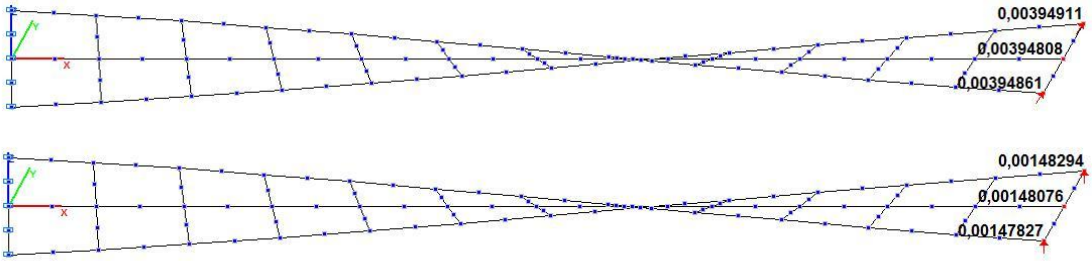
Модель 6. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



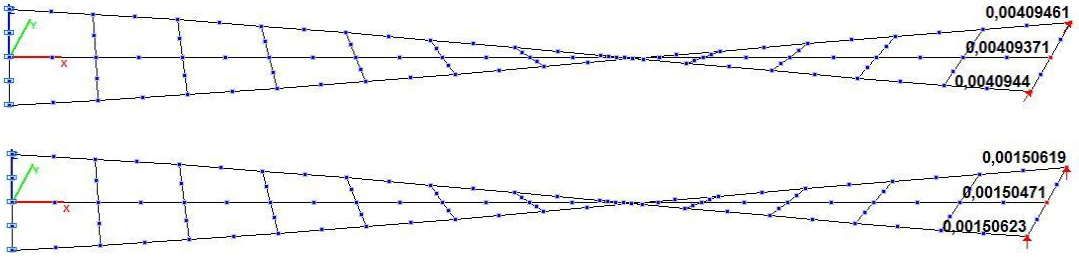
Модели 7 и 8. Расчетная схема



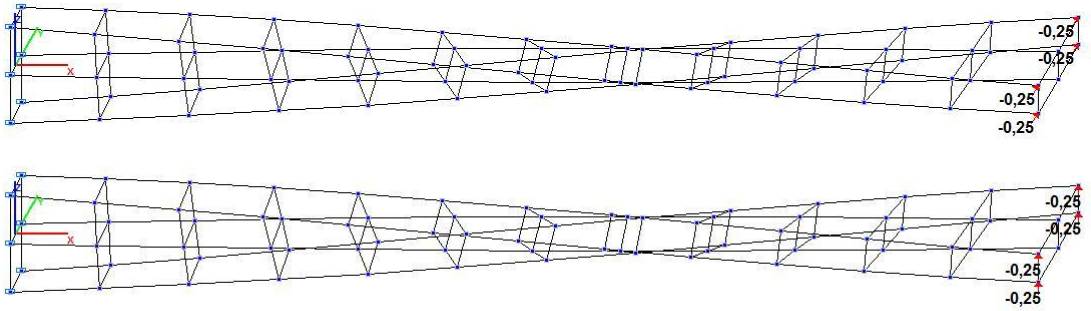
Модели 7 и 8. Деформированная схема



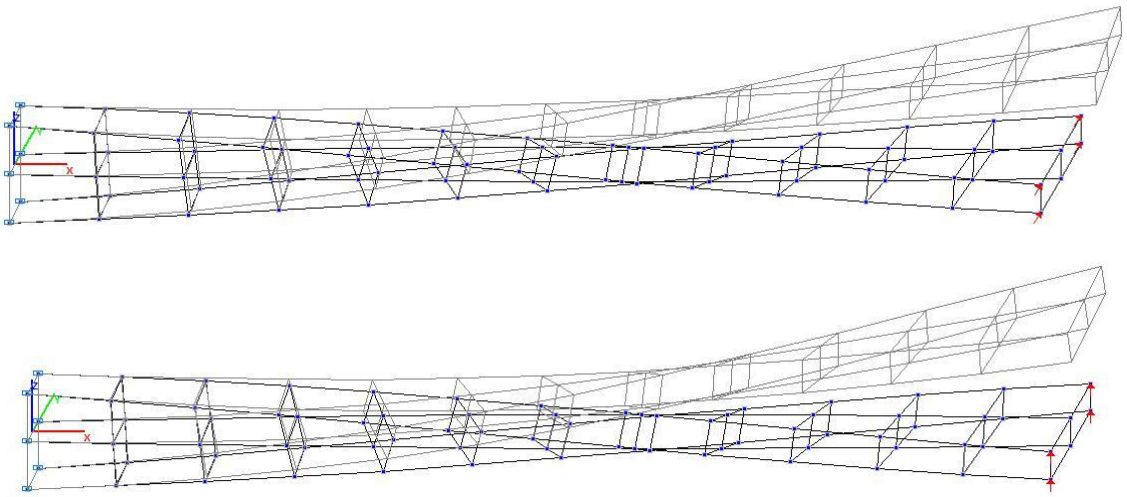
Модель 7. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



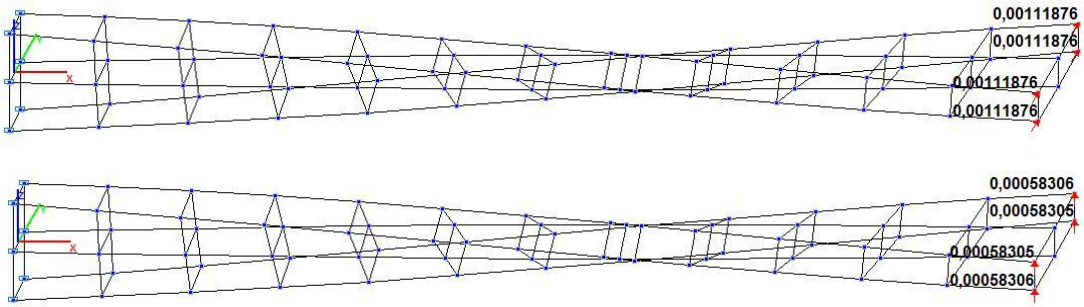
Модель 8. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



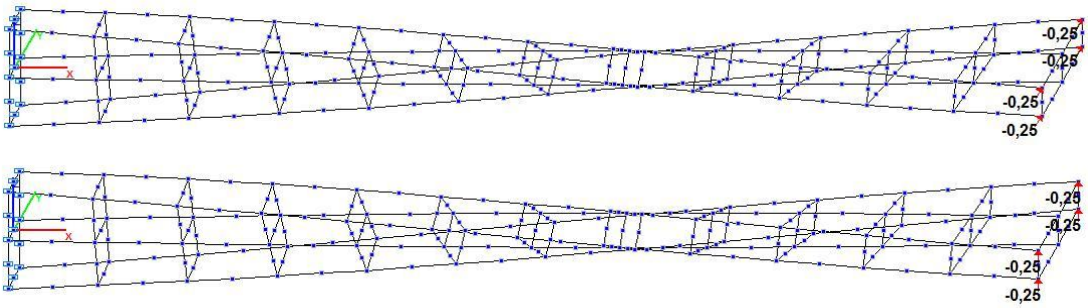
Модель 9. Расчетная схема



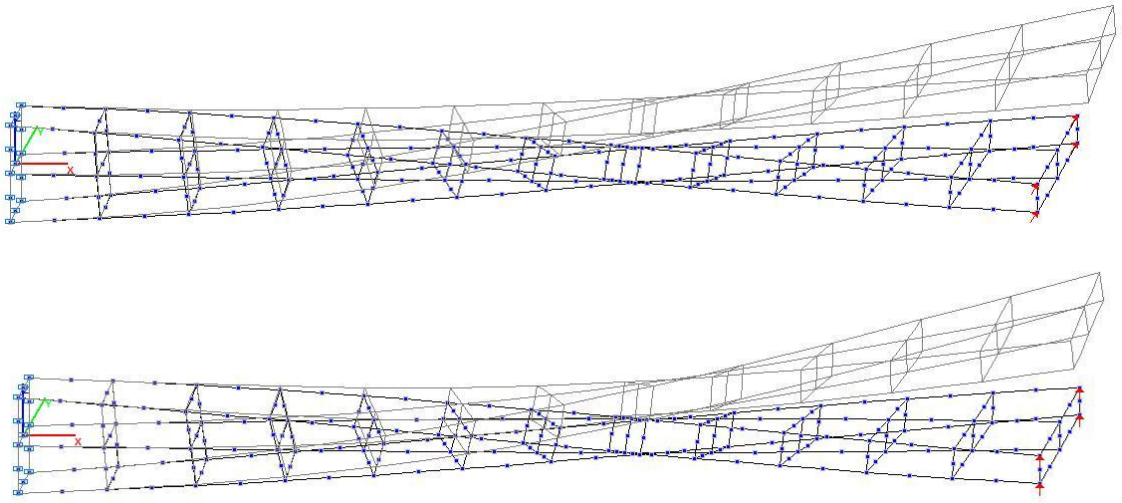
Модель 9. Деформированная схема



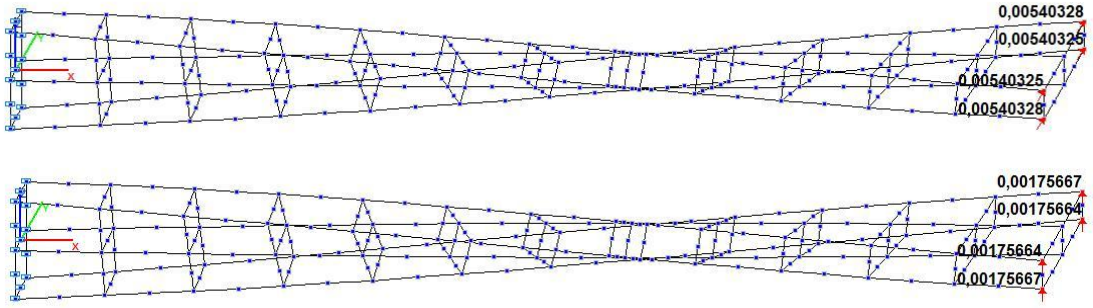
Модель 9. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)



Модель 10. Расчетная схема



Модель 10. Деформированная схема



Модель 10. Значения поперечных смещений Y, Z
свободного торца скрученной консольной балки (м, м)

Сравнение решений:

Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.005314	2.06
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.001463	16.21
2 (Тип элемента 142)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.006220	14.63
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.001710	2.06
3 (Тип элемента 44)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.001899	65.00
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.000906	48.11
4 (Тип элемента 144)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.002158	60.23
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.000961	44.96
5 (Тип элемента 45)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.005388	0.70
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.001750	0.23
6 (Тип элемента 145)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.006588	21.42
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.002178	24.74
7 (Тип элемента 50)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.003948	27.24
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.001481	15.18

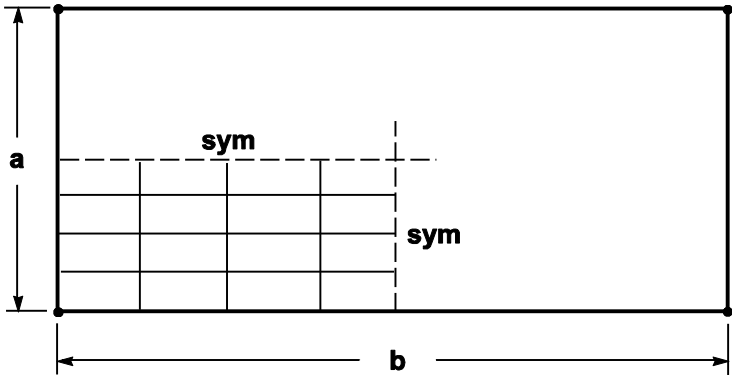
Модель	Параметр	Теория	SCAD	Отклонение, %
8 (Тип элемента 150)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.004094	24.55
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.001505	13.80
9 (Тип элемента 36)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.001119	79.38
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.000583	66.61
10 (Тип элемента 37)	Поперечное смещение Y свободного торца консольной балки, м	0.005426	0.005403	0.42
	Поперечное смещение Z свободного торца консольной балки, м	0.001746	0.001757	0.63

Замечания: При аналитическом решении значения поперечных смещений Y, Z свободного торца скрученной консольной балки от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$Y = \frac{12 \cdot P_y \cdot L^3}{E \cdot b^3 \cdot h^3} \cdot \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) \cdot h^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \right) \cdot b^2 \right];$$

$$Z = \frac{12 \cdot P_z \cdot L^3}{E \cdot b^3 \cdot h^3} \cdot \left[\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \right) \cdot h^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) \cdot b^2 \right].$$

Свободно опертая плоская квадратная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре.



***Цель*:** Проверка точного воспроизведения значений поперечных перемещений в центре свободно опертой плоской квадратной пластины от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_42_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_42_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_42_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_44_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_44_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_44_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_50_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_50_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_50_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_8x8.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_16x16.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_32x32.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_64x64.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_8x8.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_16x16.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_32x32.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_64x64.SPR Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128

Формулировка задачи: Свободно опертая плоская квадратная пластина подвергается воздействию равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q и сосредоточенной поперечной силы в центре P. Проверить: точное воспроизведение значений поперечных перемещений в центре свободно опертой плоской квадратной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

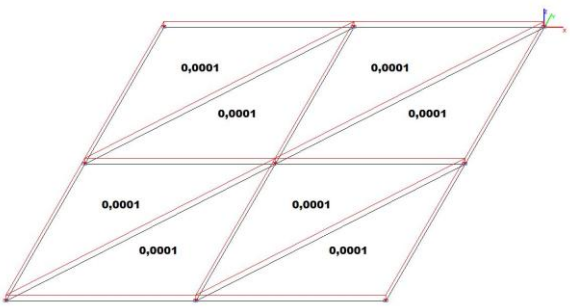
S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells, New York, McGraw-Hill,1959, p. 120, 143, 202, 206.

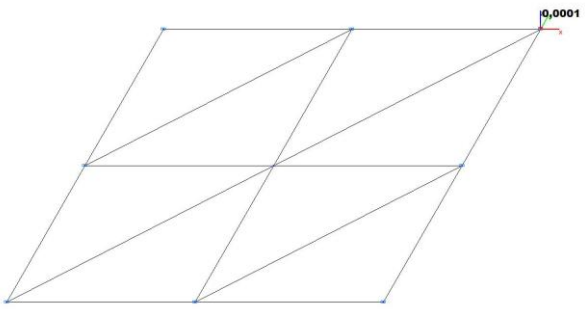
Исходные данные:

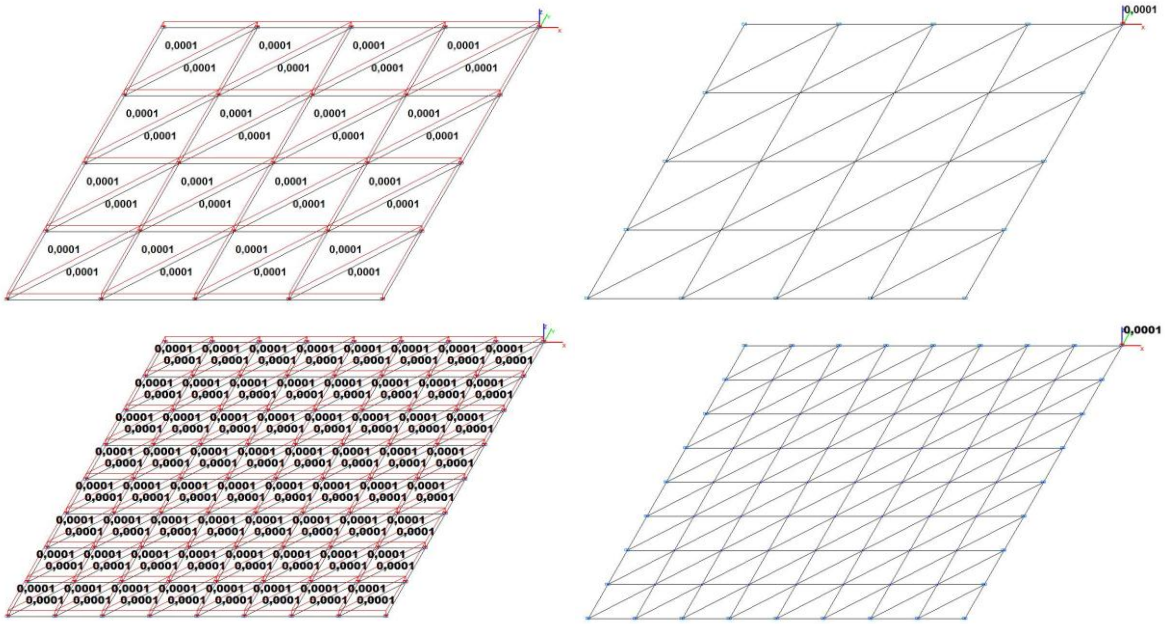
$E = 1.7472 \cdot 10^{7}$ кПа	- модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.30$	- коэффициент Пуассона;
$a = 2.00$ м	- ширина пластины;
$b = 2.00$ м	- длина пластины;
$h = 10^{-4}$ (10^{-2}) м	- толщина пластины;
$q = 1.0 \cdot 10^{-4}$ кН/м^2	- значение равномерно распределенной по всей площади пластины поперечной нагрузки;
$P = 4.0 \cdot 10^{-4}$ кН	- значение сосредоточенной поперечной силы в центре пластины.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема четверти пластины по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 8, 32, 128 трехузловых элементов оболочки типа 42 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 2 – 4, 16, 64 четырехузловых элемента оболочки типа 44 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 3 – 8, 32, 128 шестиузловых элементов оболочки типа 45 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 4 – 4, 16, 64 восьмиузловых элемента оболочки типа 50 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 5 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 восьмиузловых изопараметрических объемных элемента типа 36 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных ребер нижней поверхности пластины по направлению степени свободы Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 18, 50, 162, 578, 2178, 8450, 33282.
Модель 6 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 двадцатиузловых изопараметрических объемных элемента типа 37 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных ребер нижней поверхности пластины по направлению степени свободы Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 51, 155, 531, 1955, 7491, 29315, 115971.

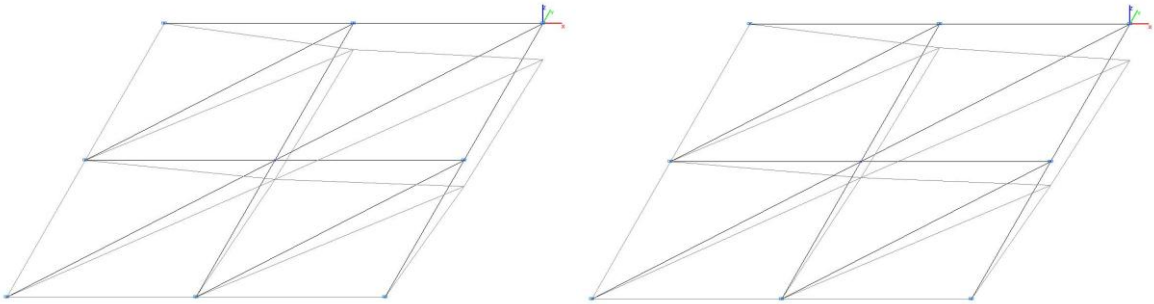
Результаты решения в SCAD

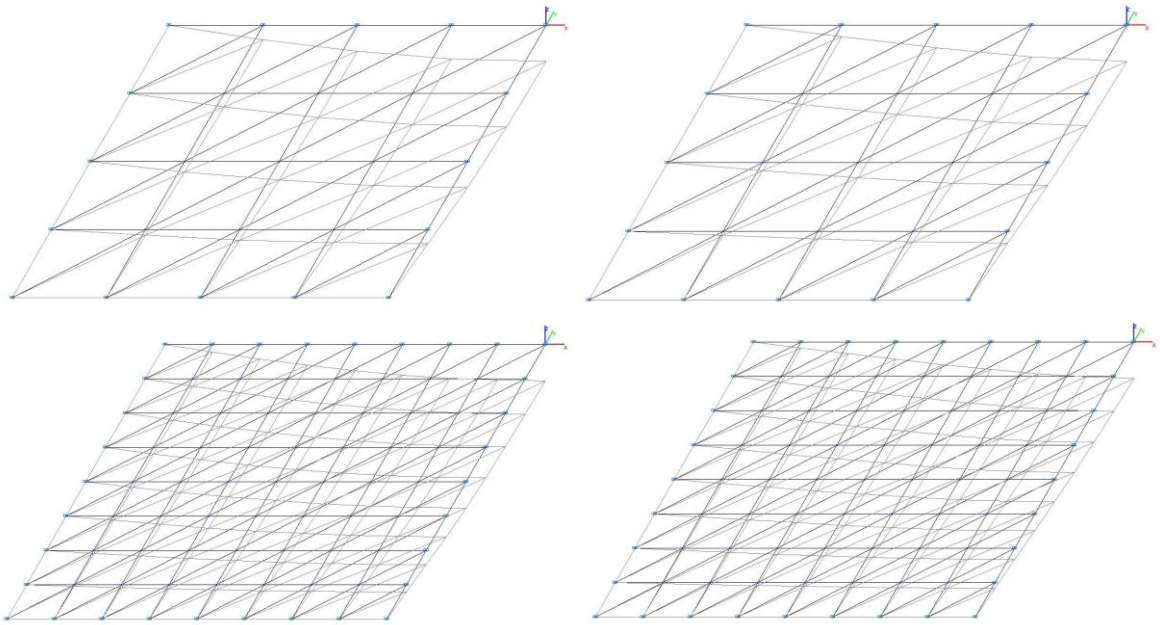




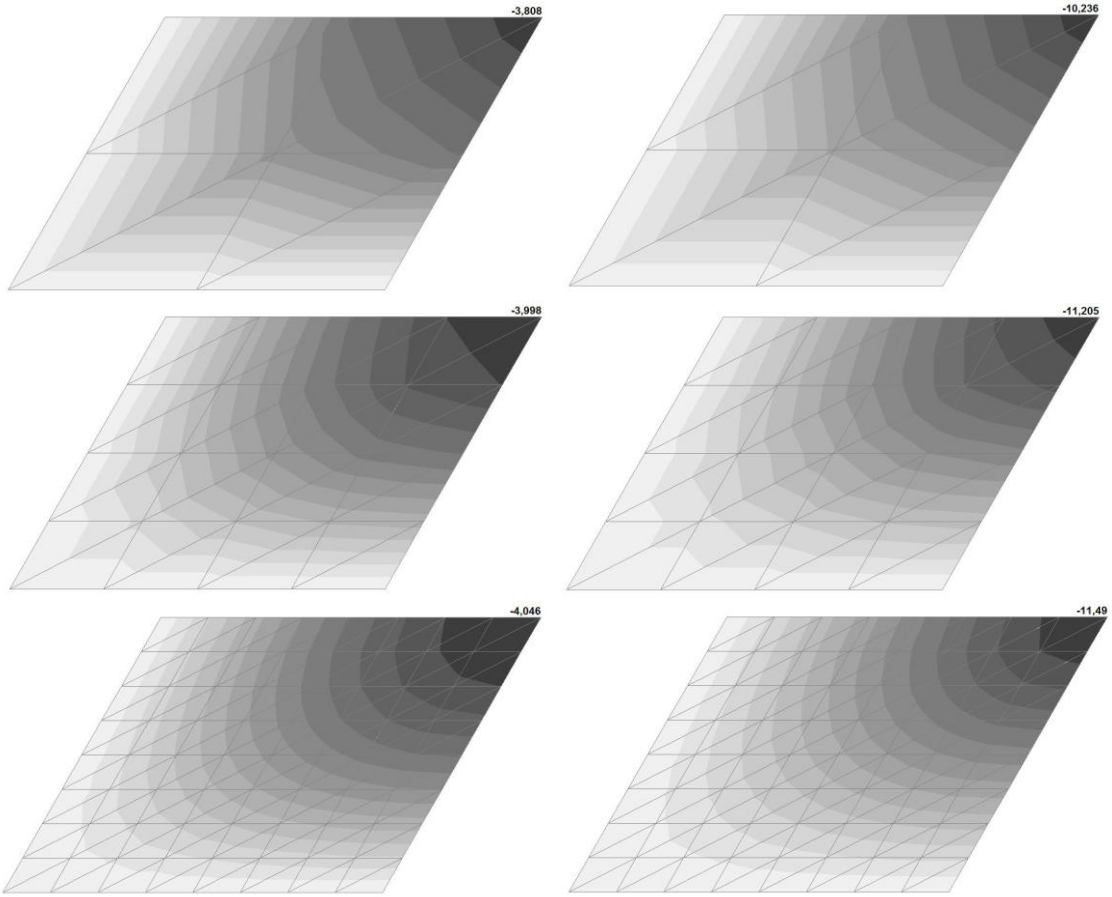


Модель 1. Расчетная схема

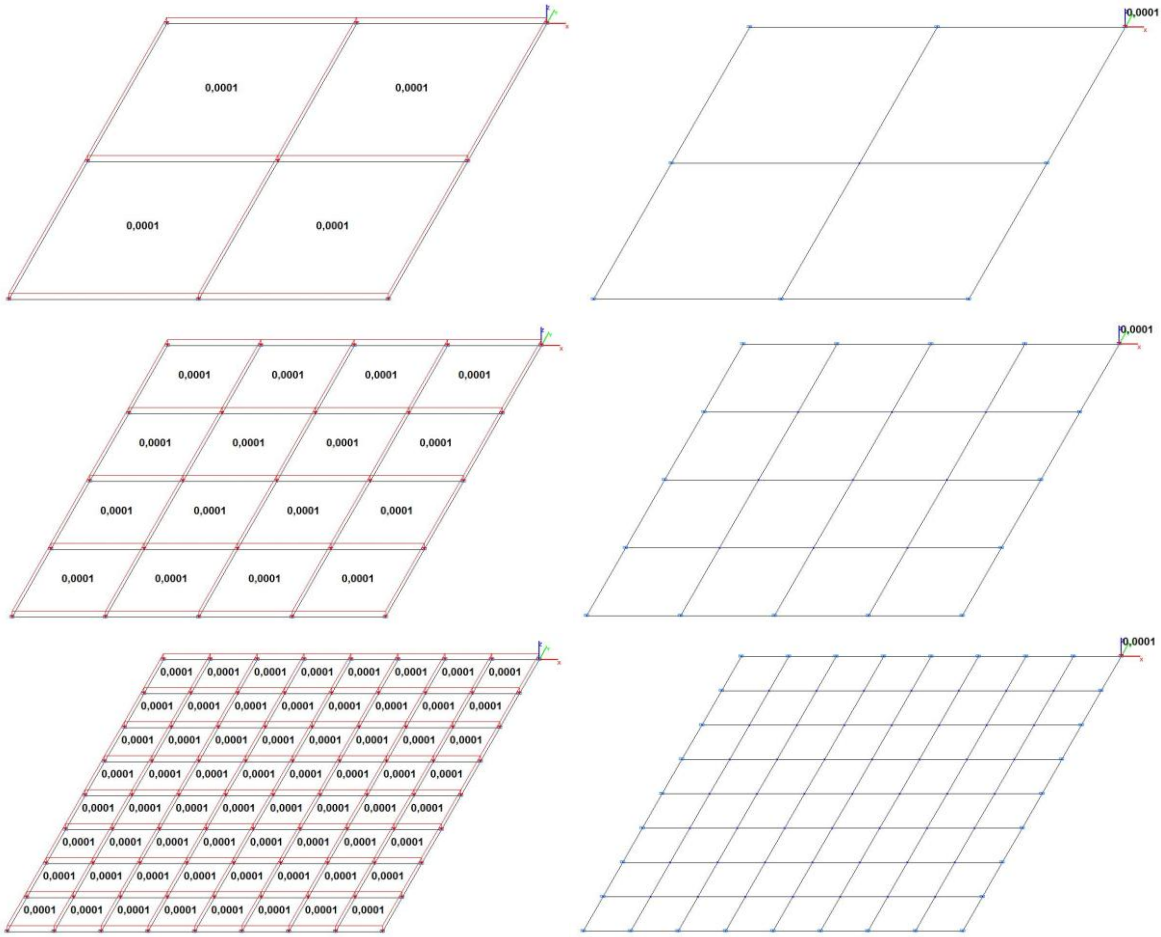




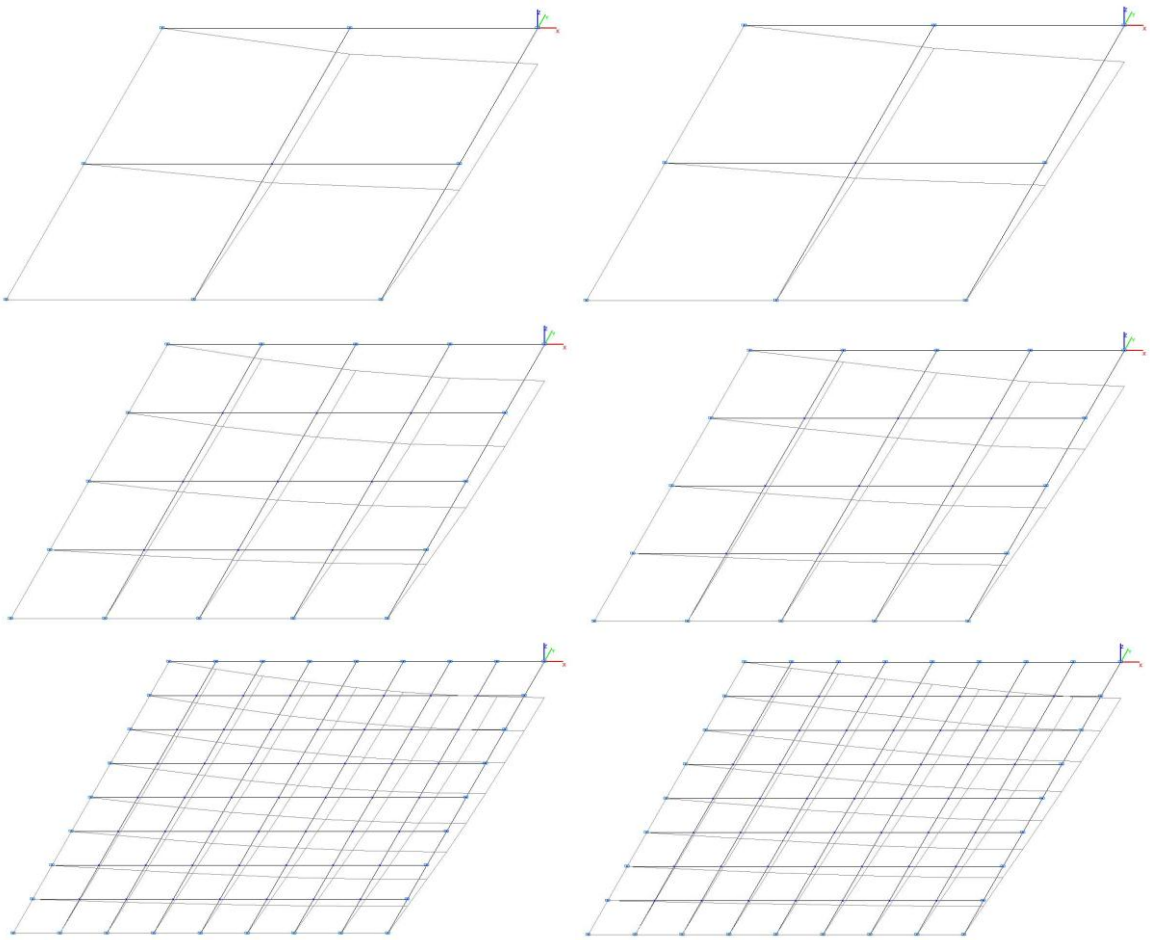
Модель 1. Деформированная схема



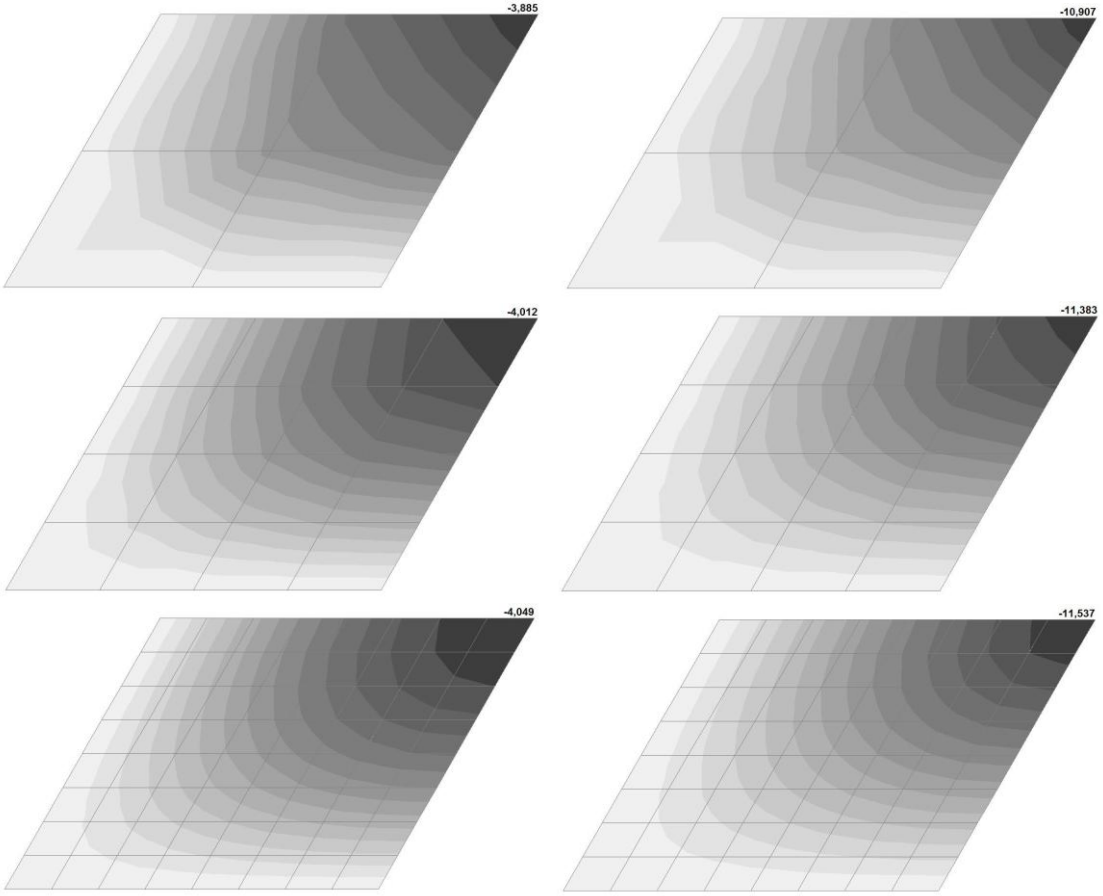
Модель 1. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



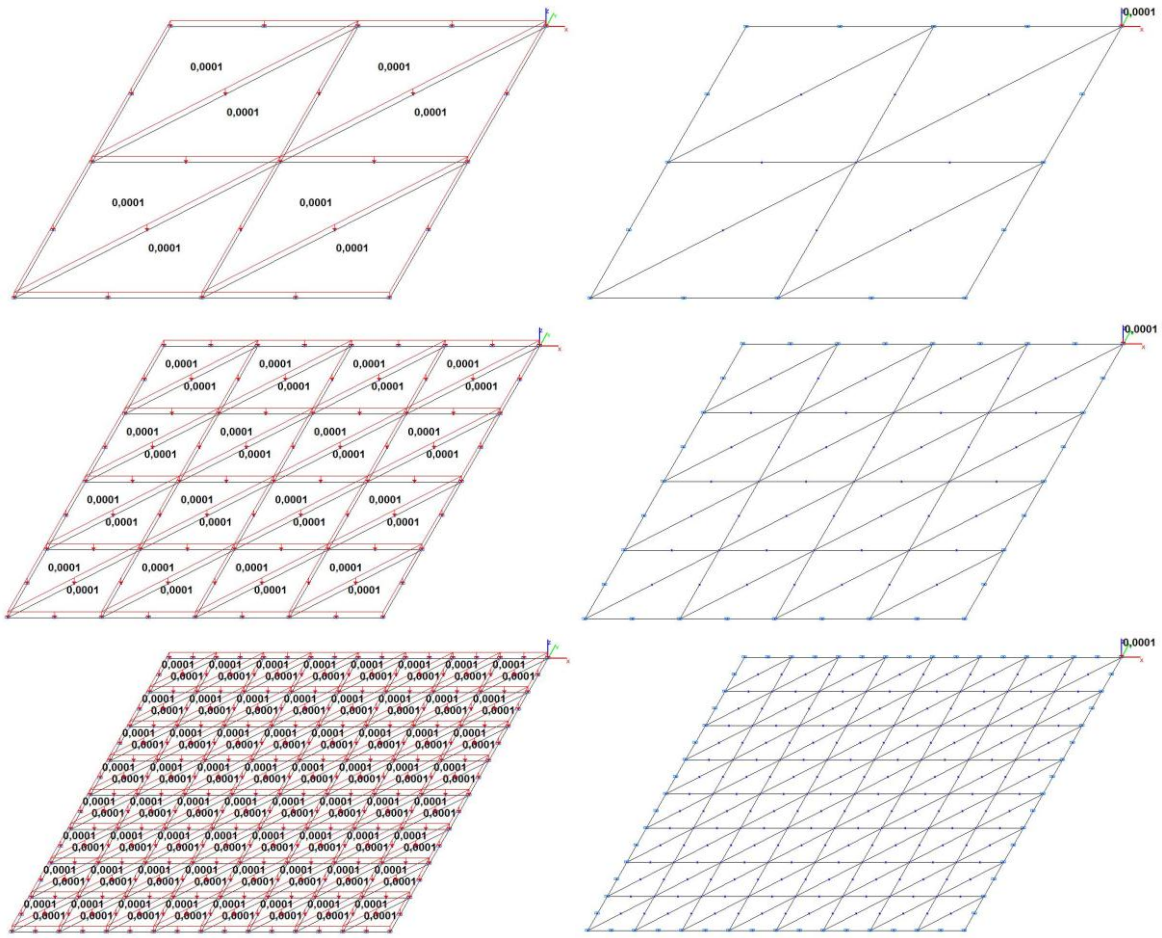
Модель 2. Расчетная схема



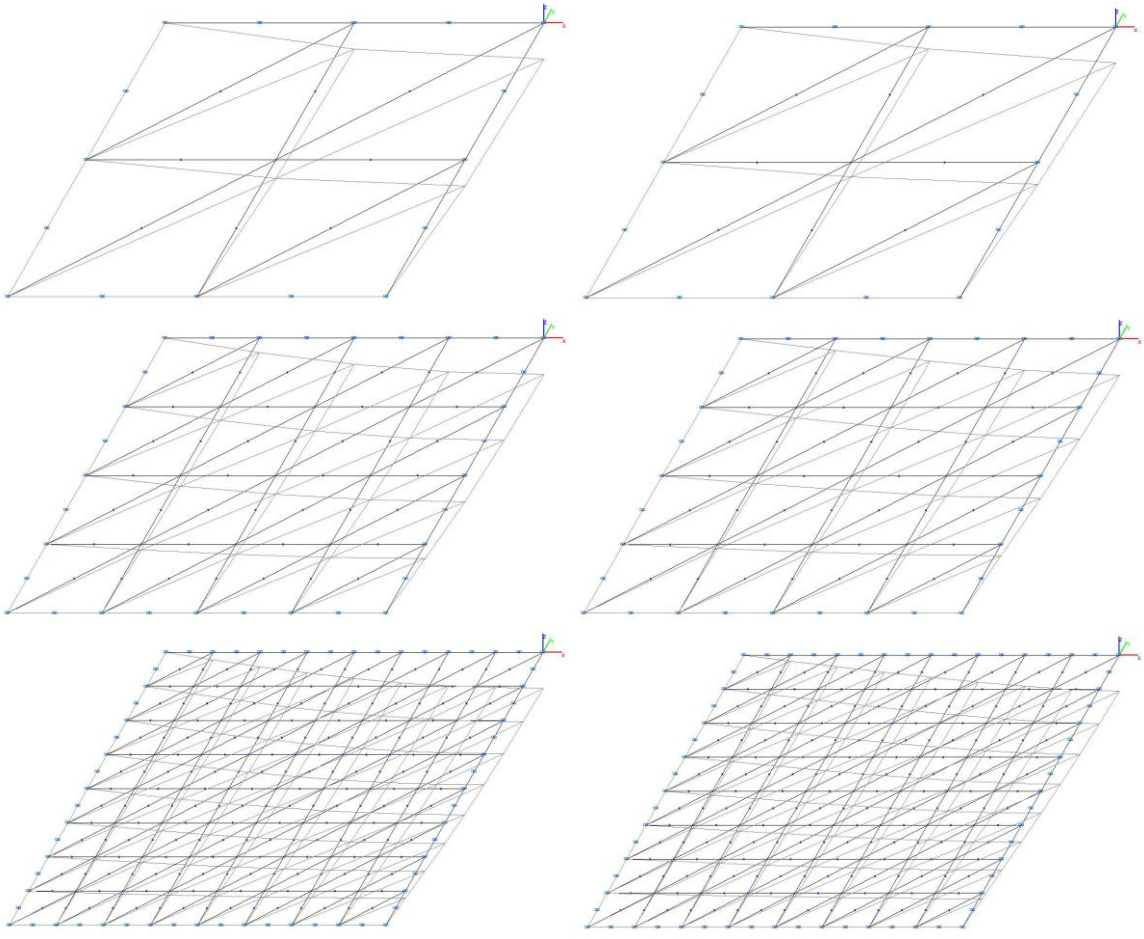
Модель 2. Деформированная схема



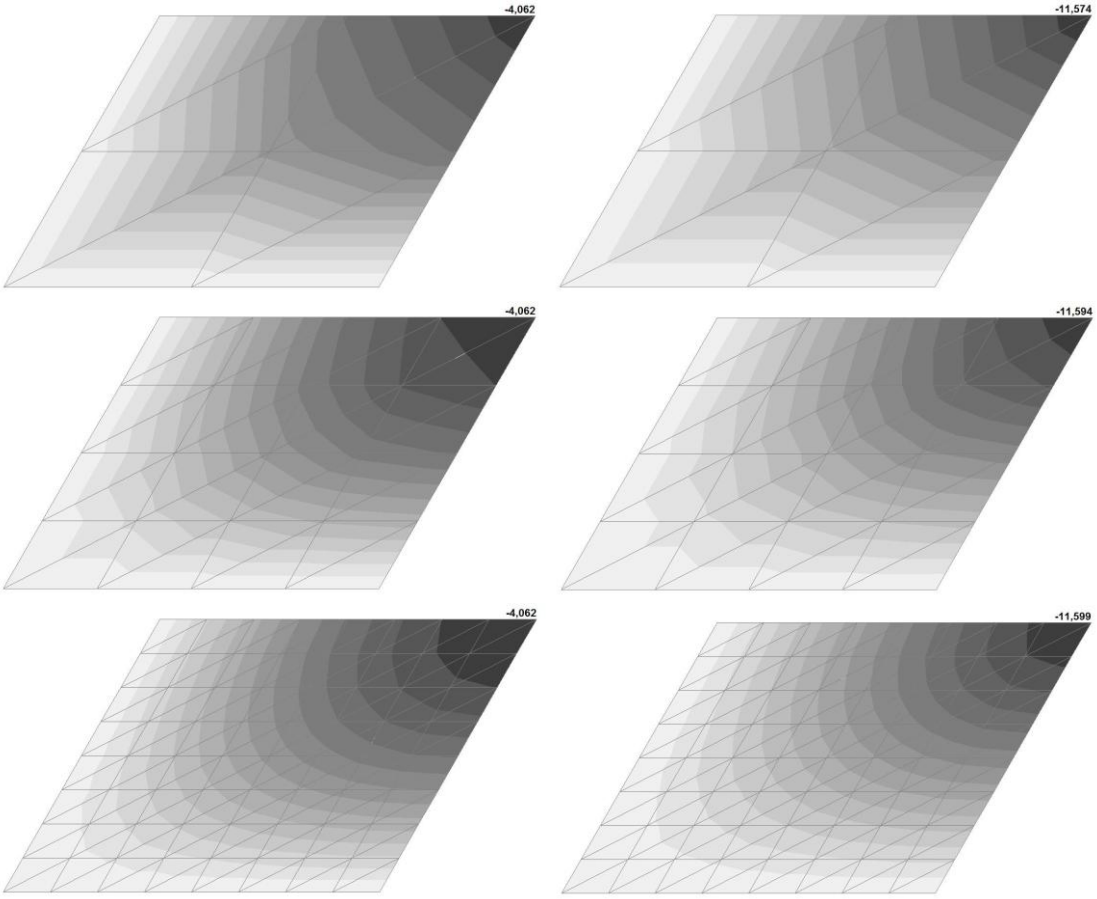
Модель 2. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



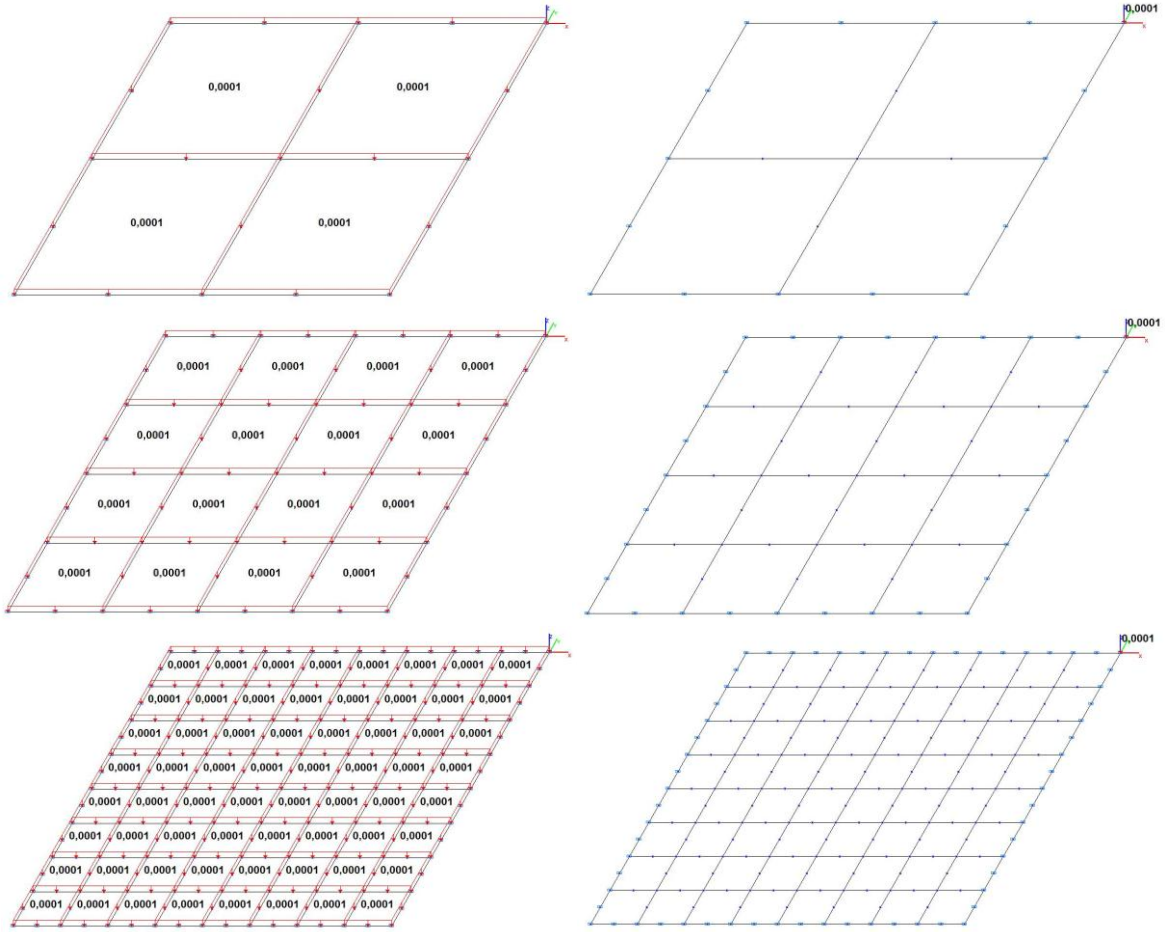
Модель 3. Расчетная схема



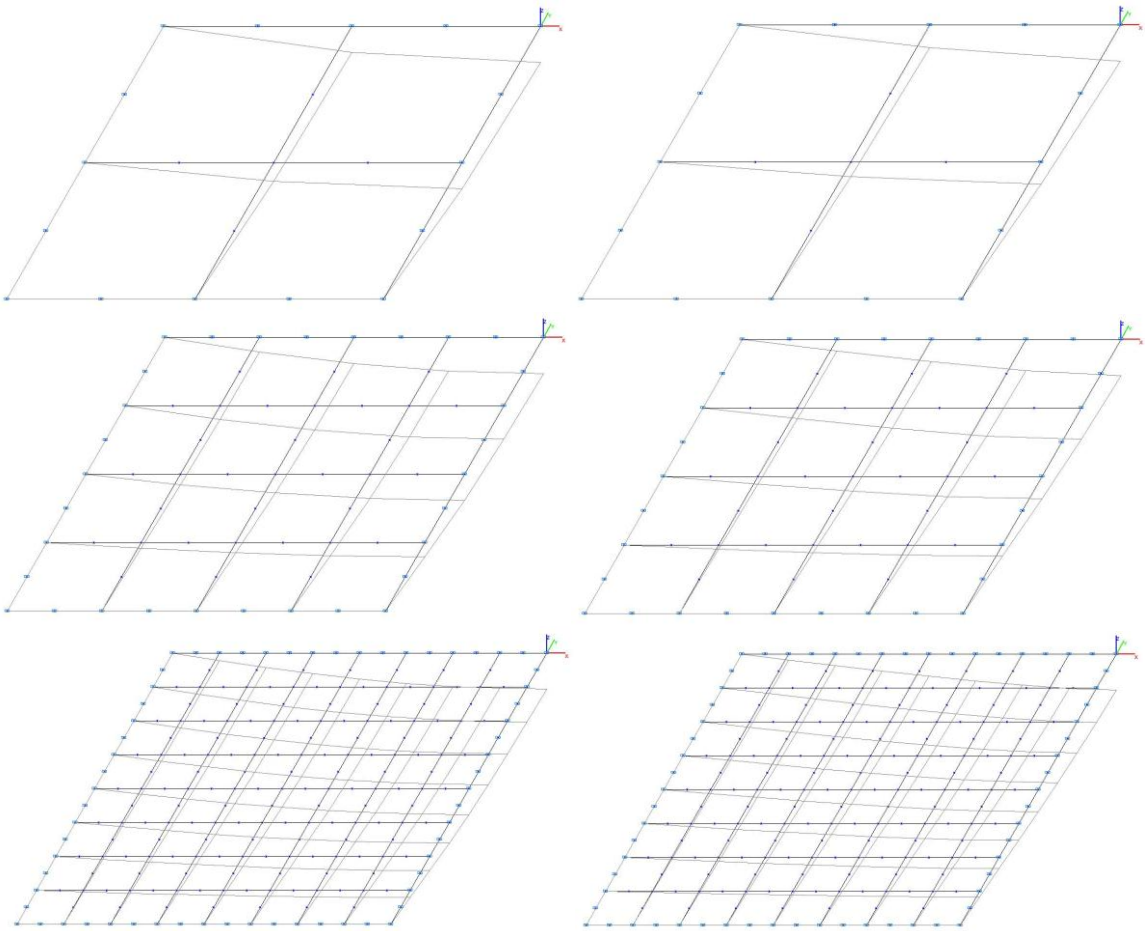
Модель 3. Деформированная схема



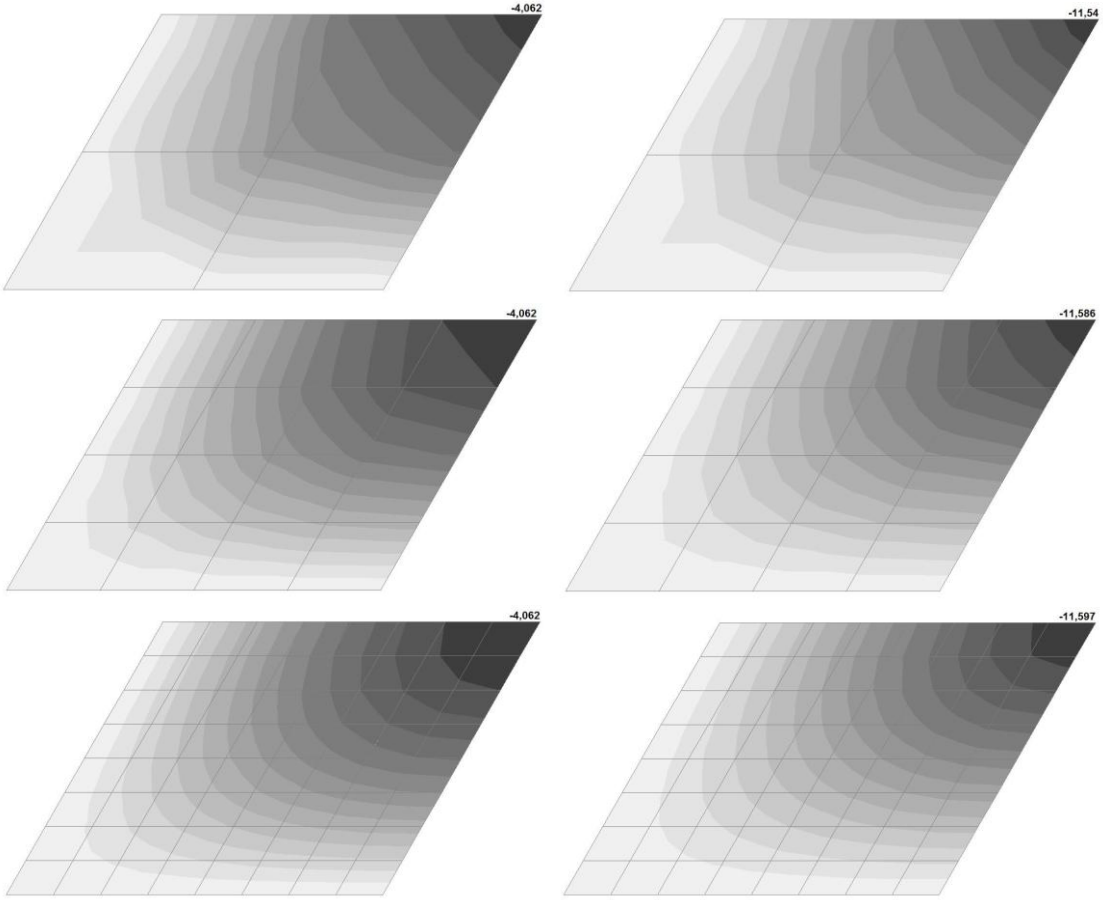
Модель 3. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



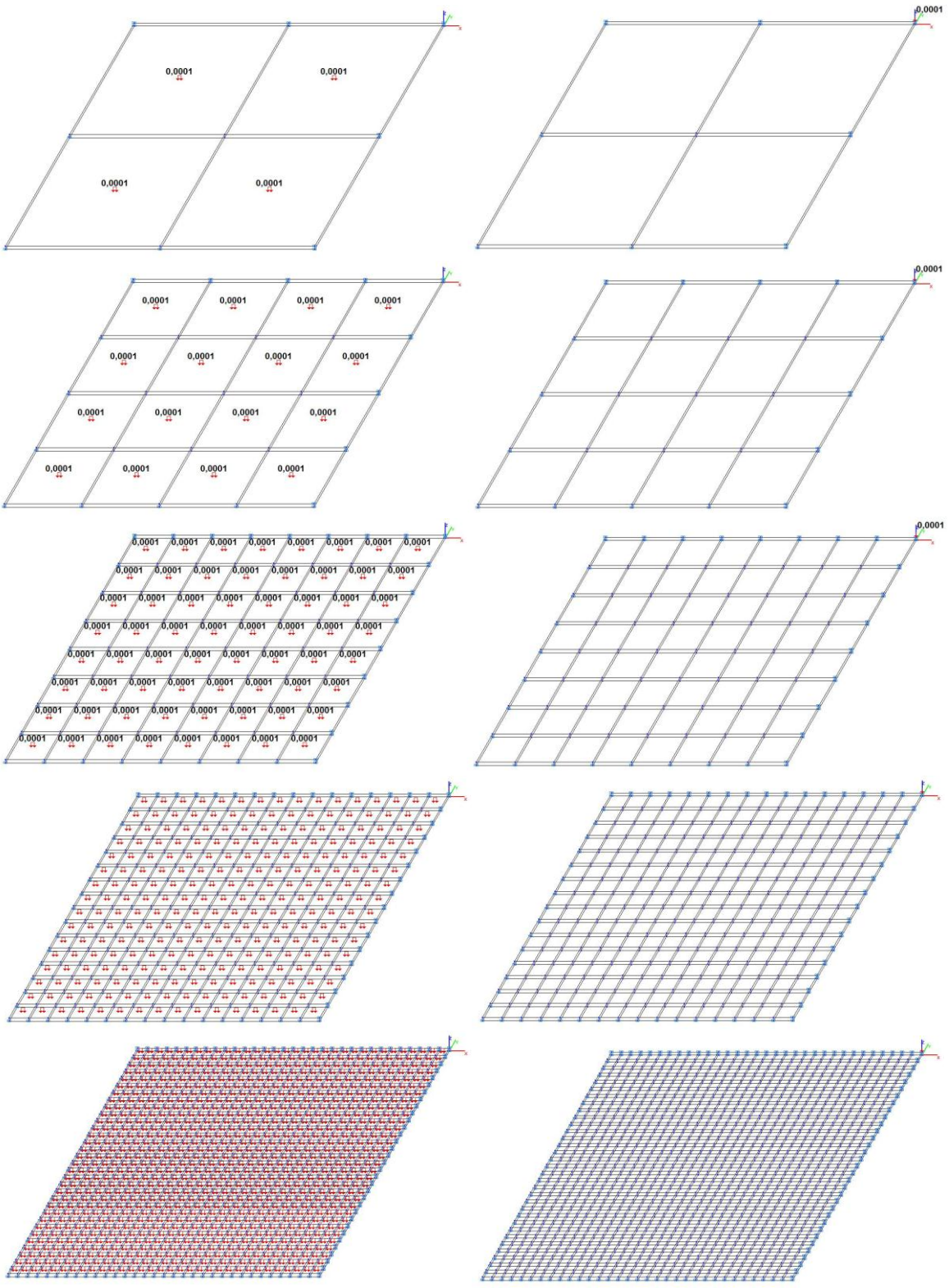
Модель 4. Расчетная схема

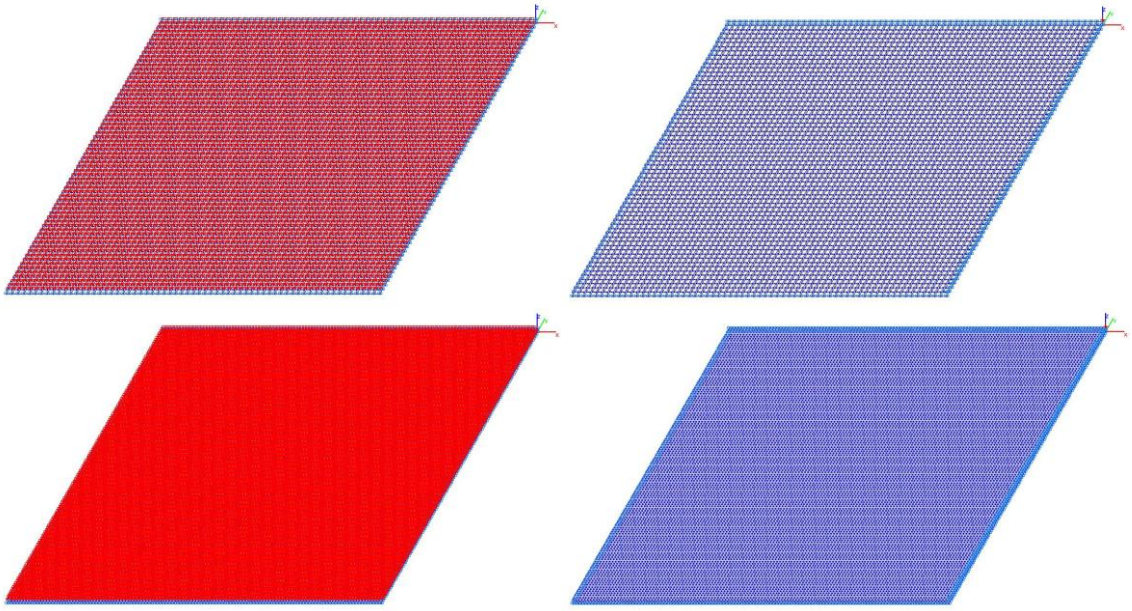


Модель 4. Деформированная схема

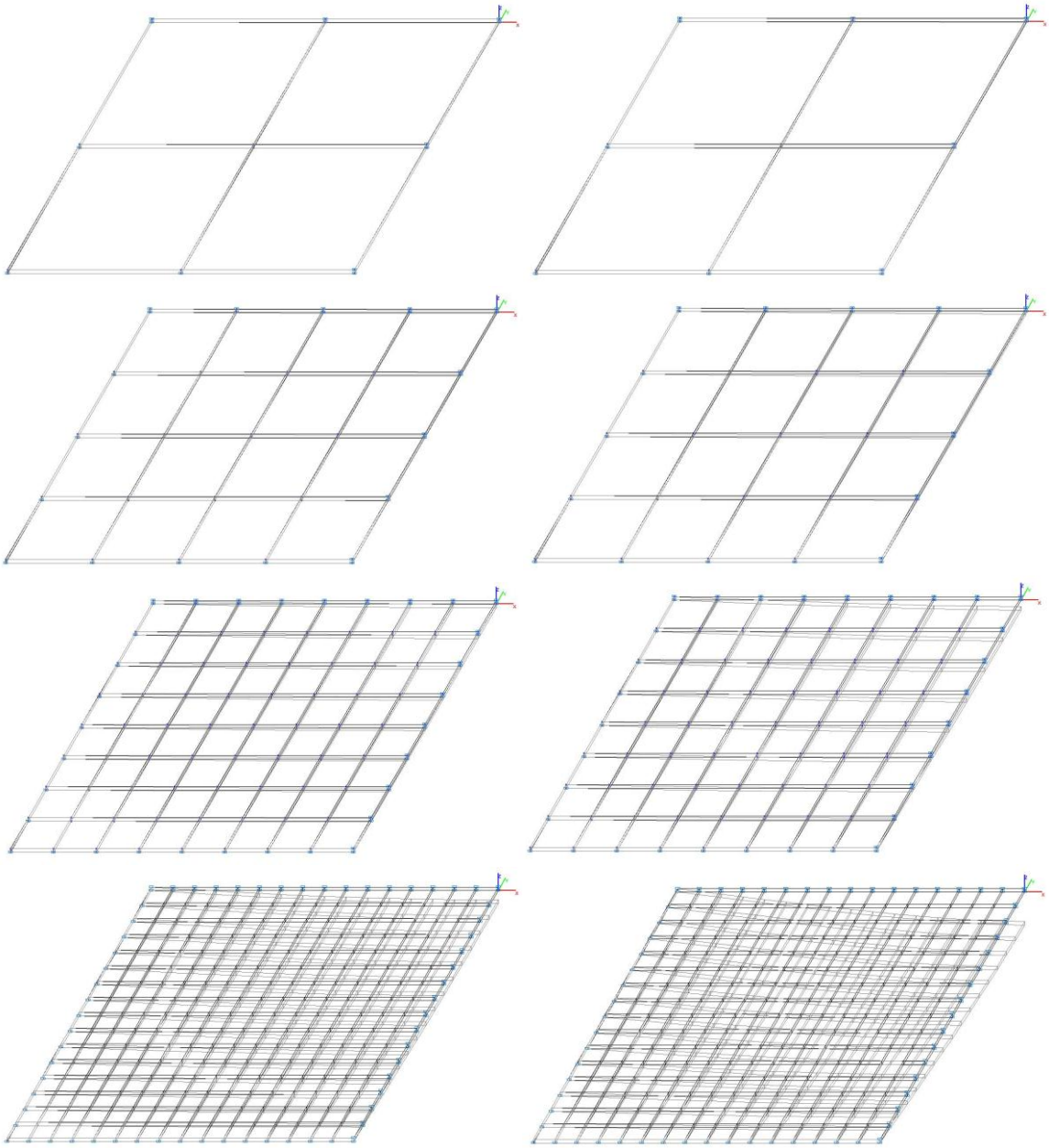


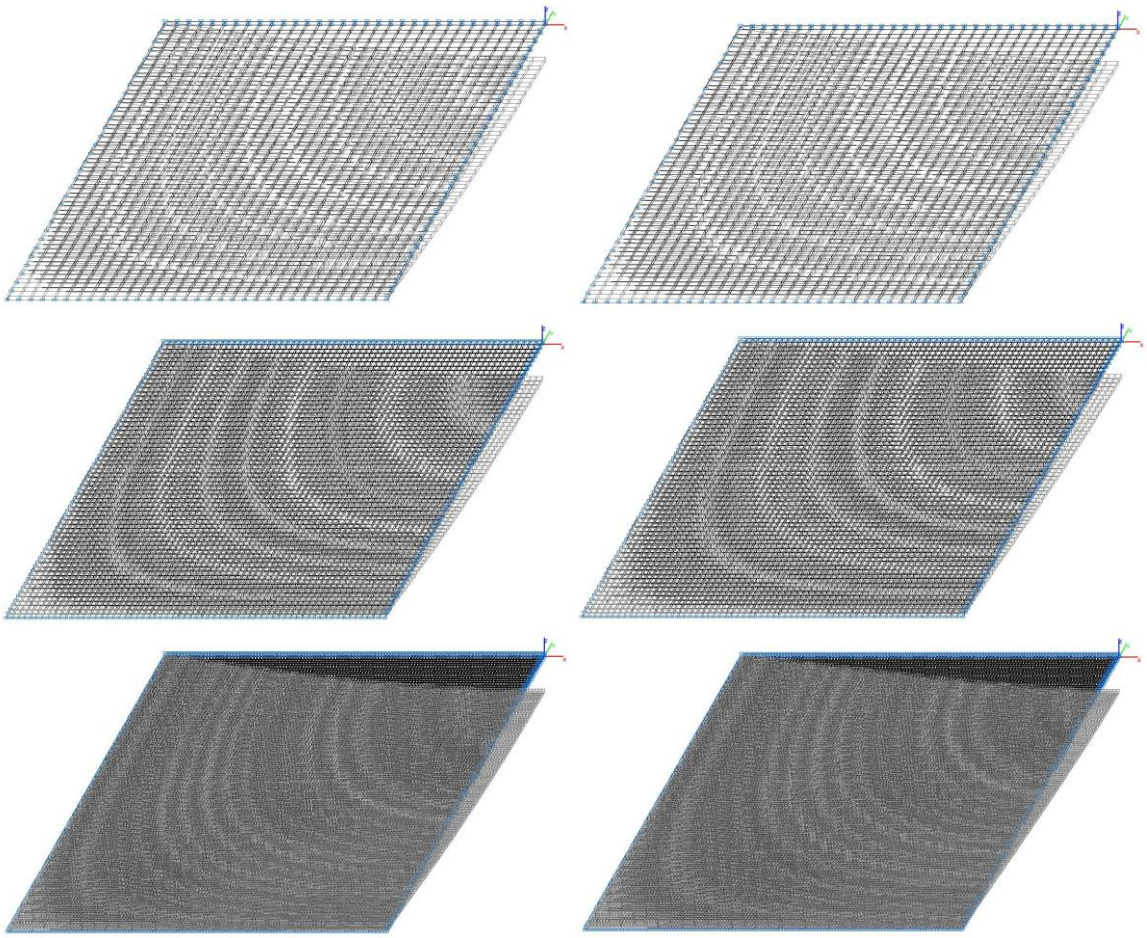
Модель 4. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой квадратной пластины w_q и w_P (м, м)


0,0001

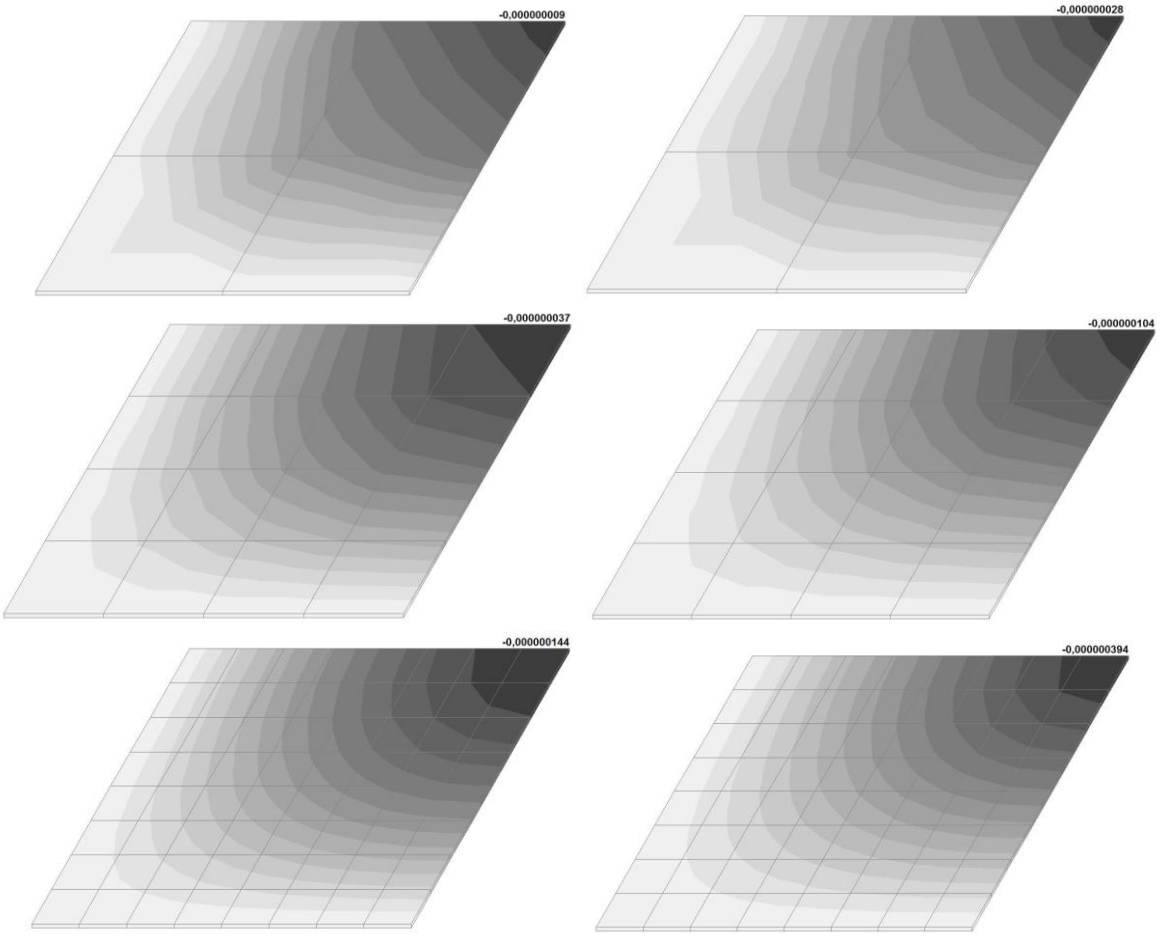


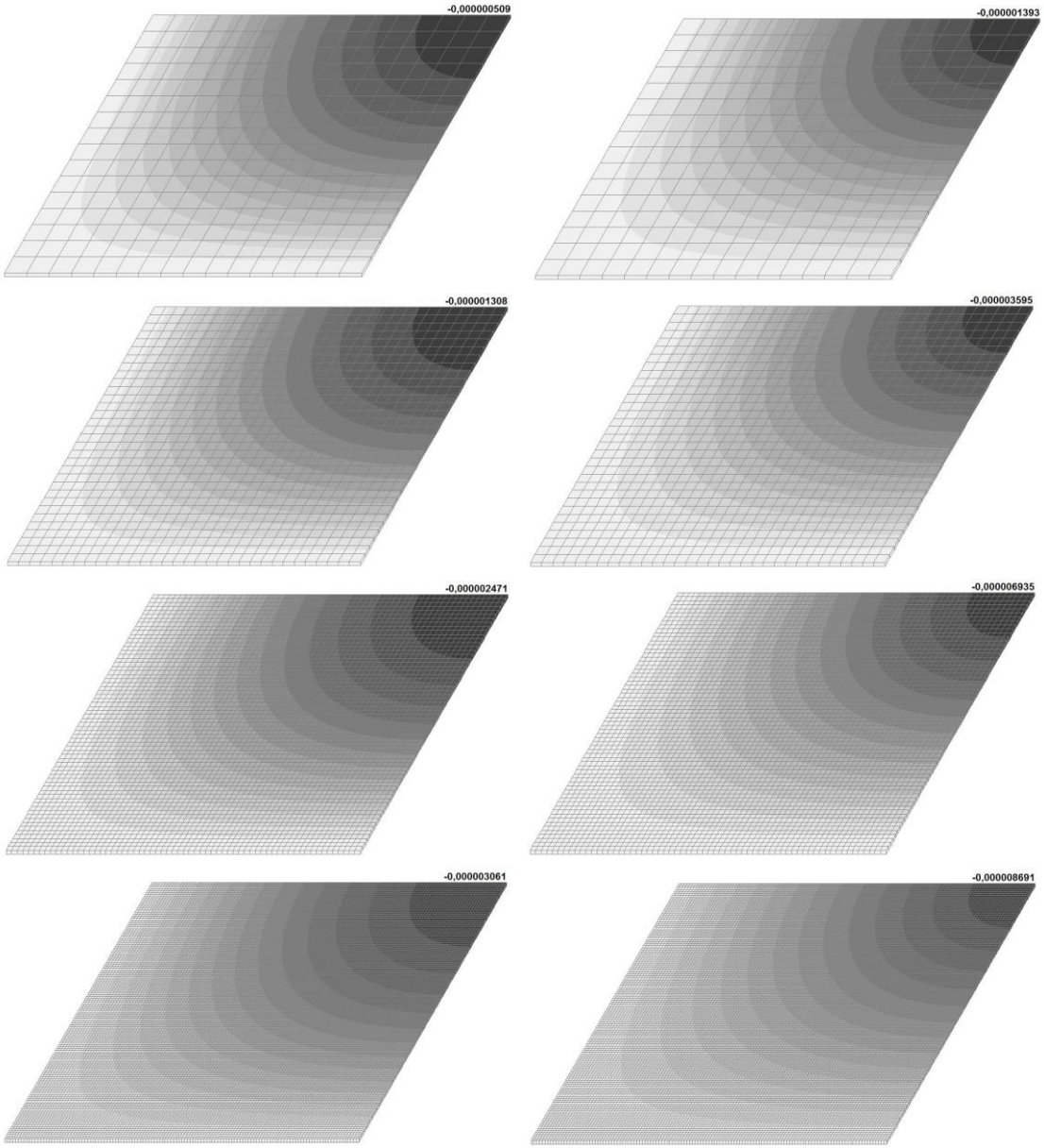
Модель 5. Расчетная схема



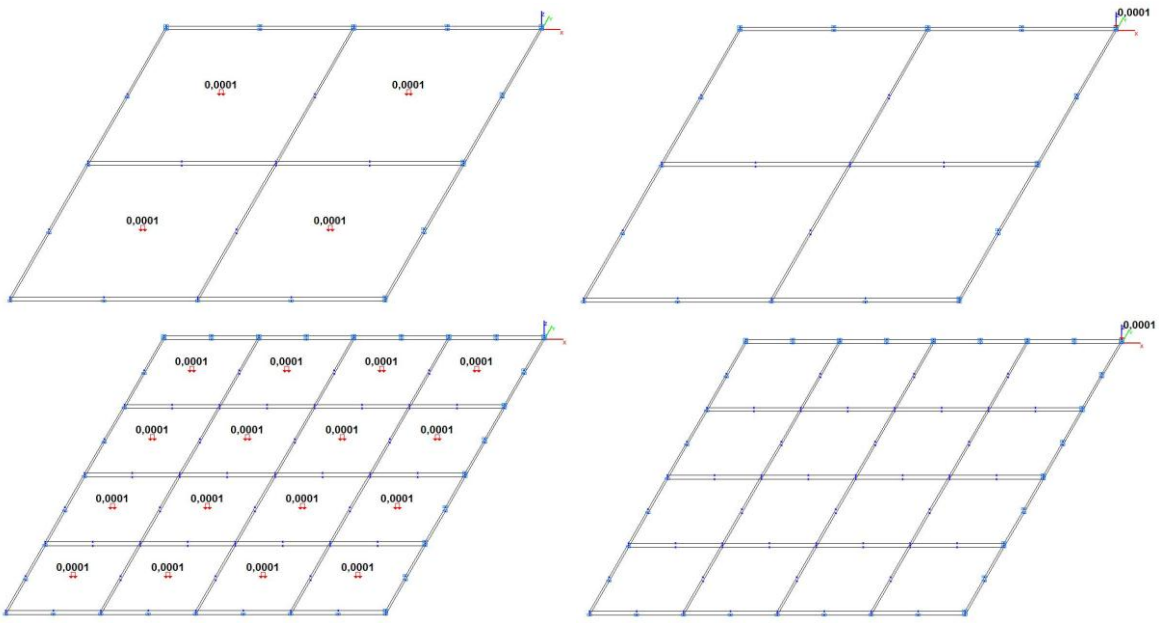


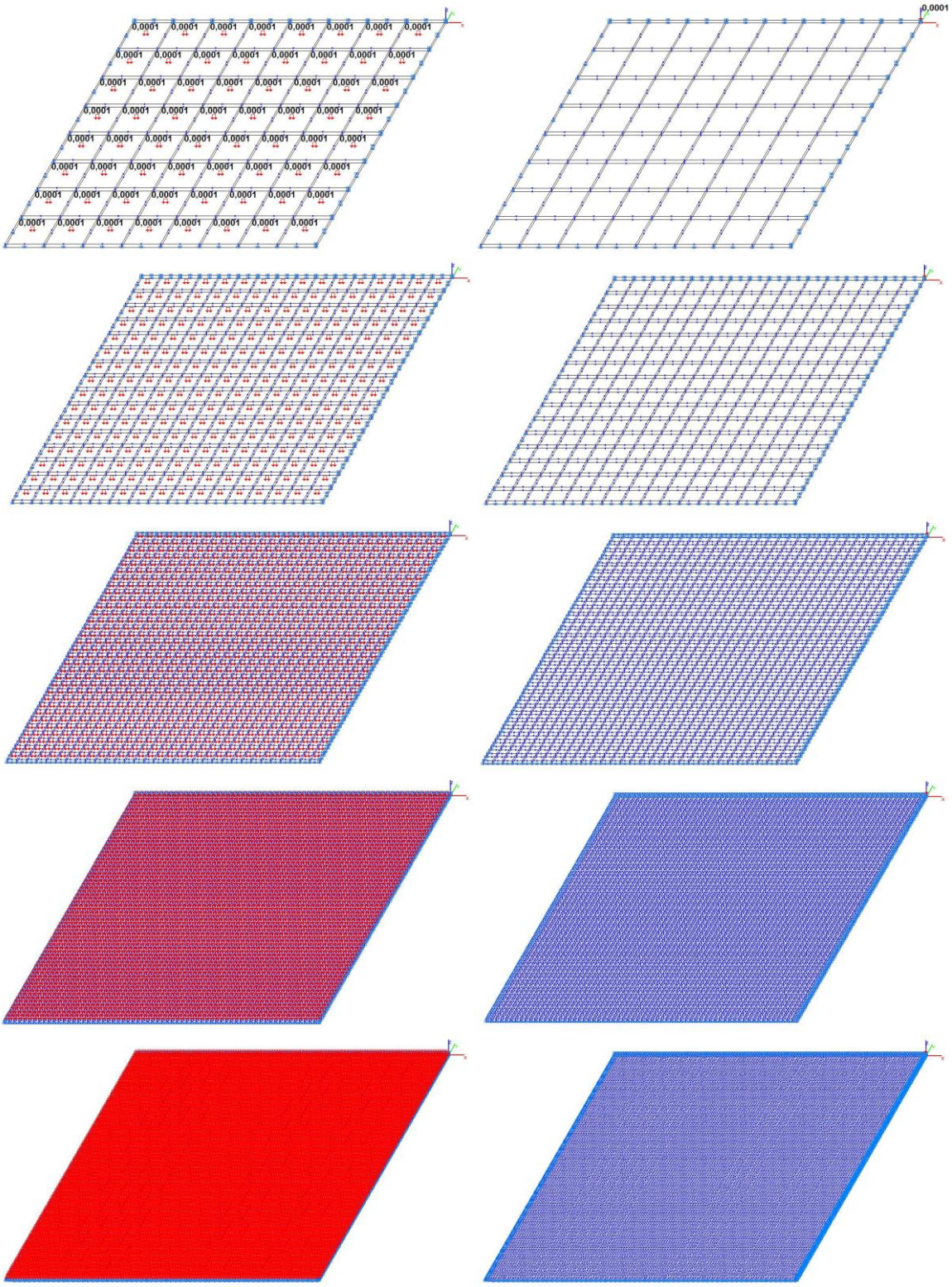
Модель 5. Деформированная схема



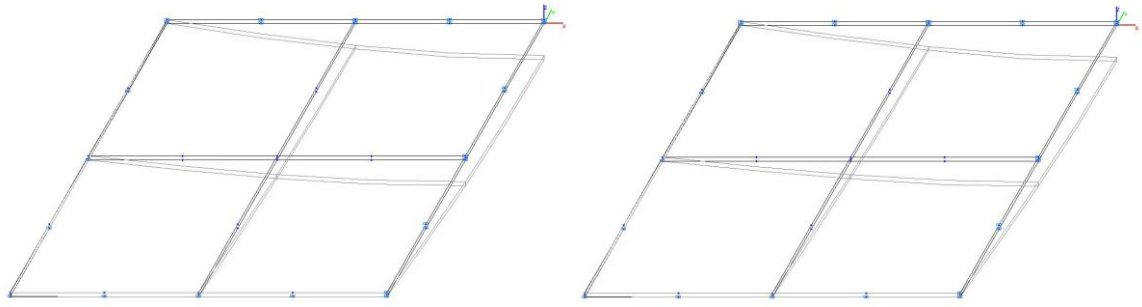


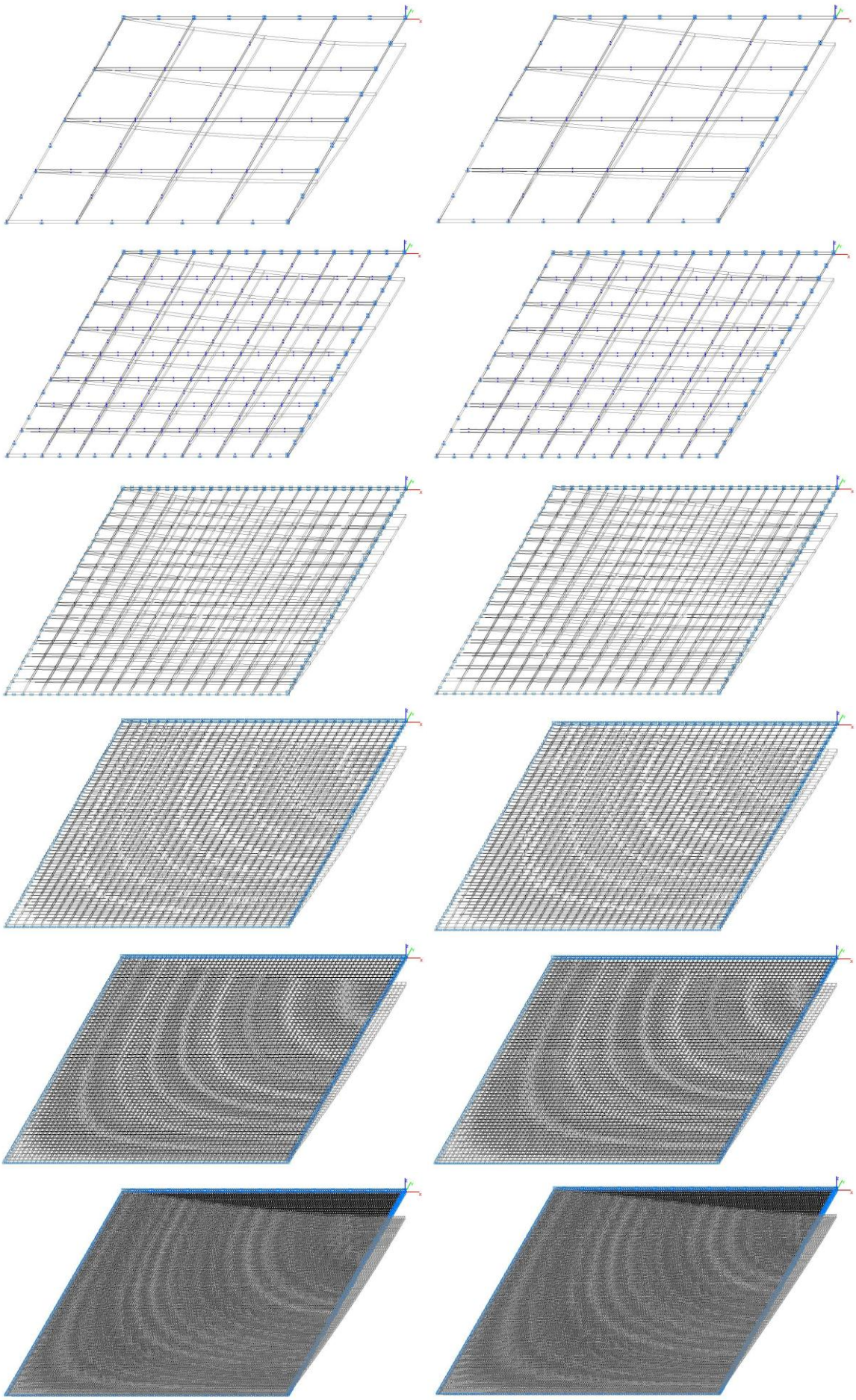
Модель 5. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



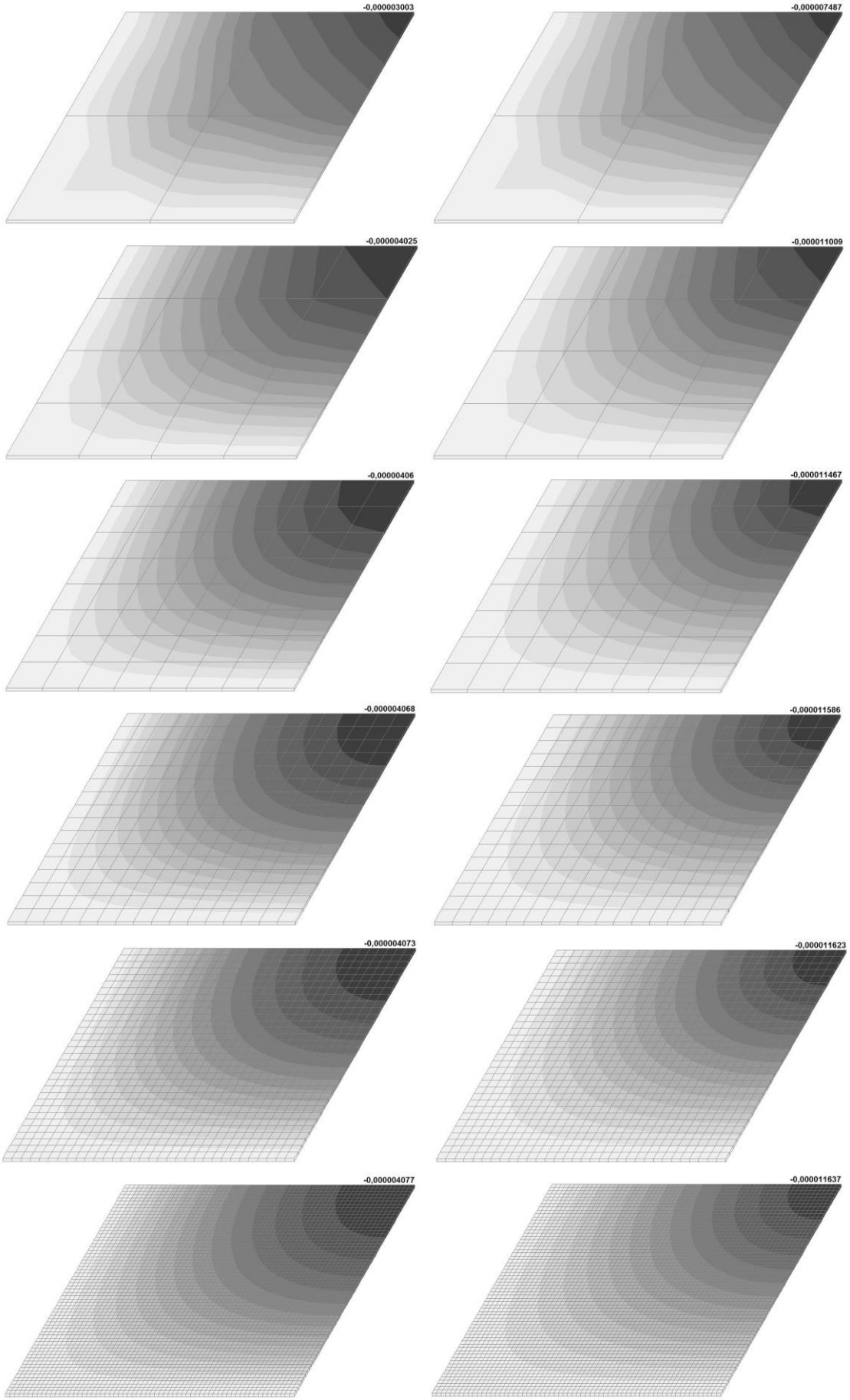


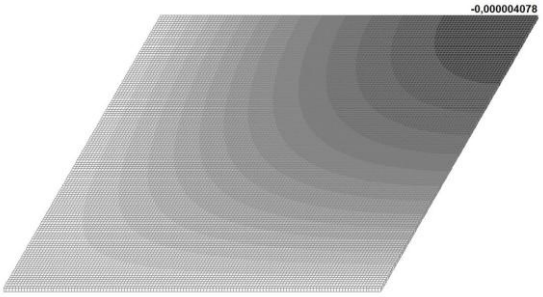
Модель 6. Расчетная схема

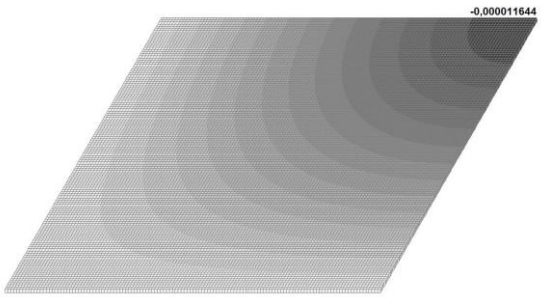




Модель 6. Деформированная схема


-0,000003303
-0,000007487
-0,000004025
-0,000011009
-0,00000406
-0,000011467
-0,000004068
-0,000011586
-0,000004073
-0,000011623
-0,000004077
-0,000011637





Модель 6. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой квадратной пластины w_q и w_P (м, м)

Сравнение решений:

Поперечные перемещения в центре свободно опертой плоской квадратной пластины w_q от воздействия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	4.062	3.808	6.25
	4x4		3.998	1.58
	8x8		4.046	0.39
2 (Тип элемента 44)	2x2	4.062	3.885	4.36
	4x4		4.012	1.23
	8x8		4.049	0.32
3 (Тип элемента 45)	2x2	4.062	4.062	0.00
	4x4		4.062	0.00
	8x8		4.062	0.00
4 (Тип элемента 50)	2x2	4.062	4.062	0.00
	4x4		4.062	0.00
	8x8		4.062	0.00
5 (Тип элемента 36)	2x2	$4.062 \cdot 10^{-6}$	$0.009 \cdot 10^{-6}$	99.78
	4x4		$0.037 \cdot 10^{-6}$	99.09
	8x8		$0.144 \cdot 10^{-6}$	96.45
	16x16		$0.509 \cdot 10^{-6}$	87.47
	32x32		$1.308 \cdot 10^{-6}$	67.80
	64x64		$2.471 \cdot 10^{-6}$	39.17
	128x128		$3.061 \cdot 10^{-6}$	24.64
6 (Тип элемента 37)	2x2	$4.062 \cdot 10^{-6}$	$3.003 \cdot 10^{-6}$	26.07
	4x4		$4.025 \cdot 10^{-6}$	0.91
	8x8		$4.060 \cdot 10^{-6}$	0.05
	16x16		$4.068 \cdot 10^{-6}$	0.15
	32x32		$4.073 \cdot 10^{-6}$	0.27
	64x64		$4.077 \cdot 10^{-6}$	0.37
	128x128		$4.078 \cdot 10^{-6}$	0.39

Поперечные перемещения в центре свободно опертой плоской квадратной пластины w_P от воздействия сосредоточенной поперечной силы в центре P

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	11.600	10.236	11.76
	4x4		11.205	3.41
	8x8		11.490	0.95
2 (Тип элемента 44)	2x2	11.600	10.907	5.97
	4x4		11.383	1.87
	8x8		11.537	0.54
3 (Тип элемента 45)	2x2	11.600	11.574	0.22
	4x4		11.594	0.05
	8x8		11.599	0.01

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
4 (Тип элемента 50)	2x2	11.600	11.540	0.52
	4x4		11.586	0.12
	8x8		11.597	0.02
5 (Тип элемента 36)	2x2	$11.600 \cdot 10^{-6}$	$0.028 \cdot 10^{-6}$	99.76
	4x4		$0.104 \cdot 10^{-6}$	99.10
	8x8		$0.394 \cdot 10^{-6}$	96.60
	16x16		$1.393 \cdot 10^{-6}$	87.98
	32x32		$3.595 \cdot 10^{-6}$	69.01
	64x64		$6.935 \cdot 10^{-6}$	40.21
	128x128		$8.691 \cdot 10^{-6}$	25.08
6 (Тип элемента 37)	2x2	$11.600 \cdot 10^{-6}$	$7.487 \cdot 10^{-6}$	35.46
	4x4		$11.009 \cdot 10^{-6}$	5.09
	8x8		$11.467 \cdot 10^{-6}$	1.15
	16x16		$11.586 \cdot 10^{-6}$	0.12
	32x32		$11.623 \cdot 10^{-6}$	0.20
	64x64		$11.637 \cdot 10^{-6}$	0.32
	128x128		$11.644 \cdot 10^{-6}$	0.38

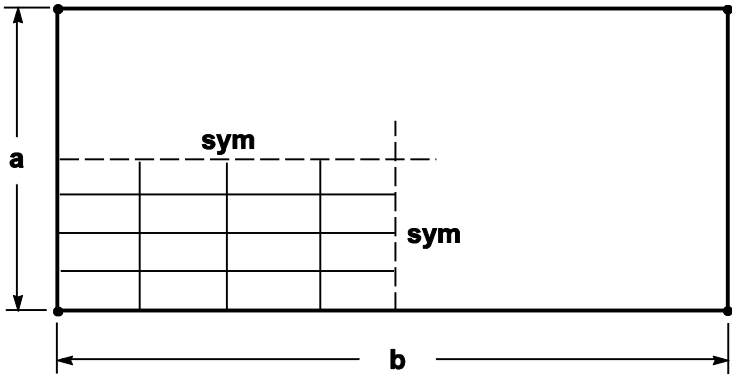
Замечания: При аналитическом решении значений поперечных перемещений в центре свободно опертой плоской квадратной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$w_q = \frac{4 \cdot q \cdot a^4}{\pi^5 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^5} \cdot \left[1 - \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \cdot th\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) + 2}{2 \cdot ch\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\};$$

$$w_P = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot \pi^3 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^3} \cdot \left[th\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) - \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a}}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\},$$ где:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}.$$

Заделанная по наружным кромкам плоская квадратная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре



Цель: Проверка точного воспроизведения значений поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам плоской квадратной пластины от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_42_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_42_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_42_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_44_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_44_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_44_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_45_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_45_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_50_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_50_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Shell_50_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_8x8.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_16x16.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_32x32.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_64x64.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128
Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_2x2.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_4x4.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_8x8.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_16x16.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_32x32.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_64x64.SPR Bending_of_square_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128

Формулировка задачи: Заделанная по наружным кромкам плоская квадратная пластина подвергается воздействию равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q и сосредоточенной поперечной силы в центре P. Проверить: точное воспроизведение значений поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам плоской квадратной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

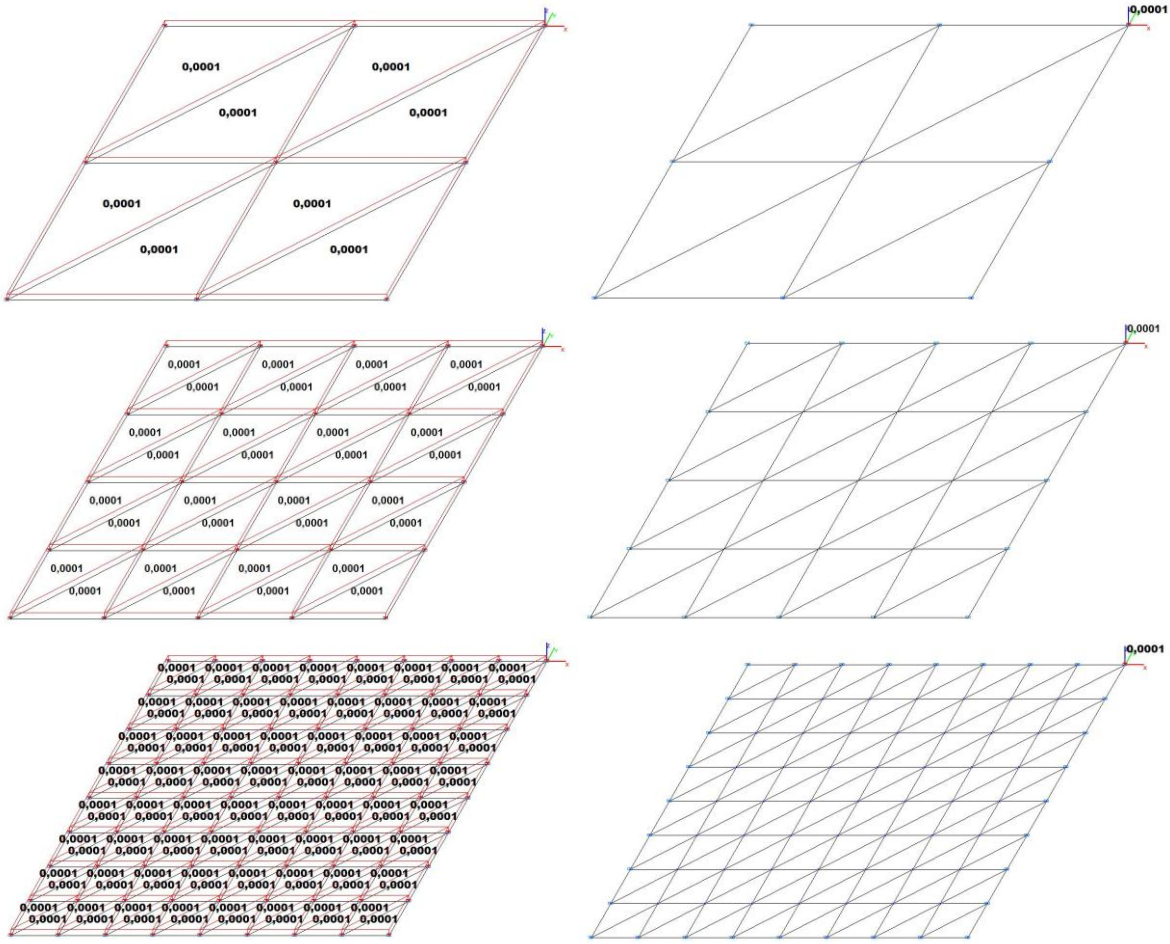
S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells, New York, McGraw-Hill,1959, p. 120, 143, 202, 206.

Исходные данные:

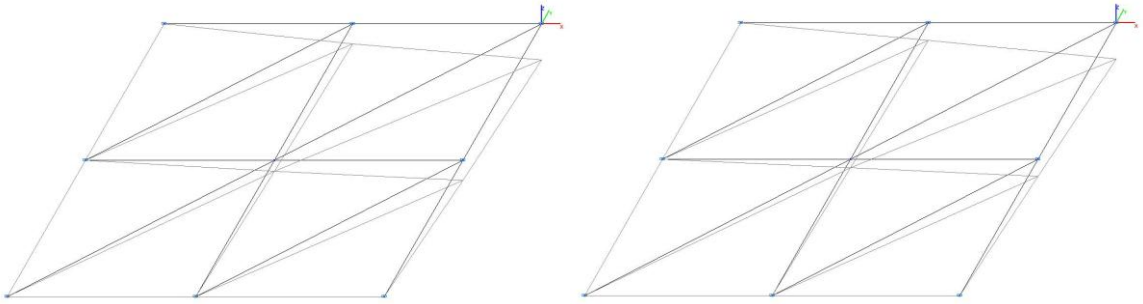
$E = 1.7472 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.30$ - коэффициент Пуассона;
$a = 2.00$ м - ширина пластины;
$b = 2.00$ м - длина пластины;
$h = 10^{-4}$ (10^{-2}) м - толщина пластины;
$q = 1.0 \cdot 10^{-4}$ кН/м^2 - значение равномерно распределенной по всей площади пластины поперечной нагрузки;
$P = 4.0 \cdot 10^{-4}$ кН - значение сосредоточенной поперечной силы в центре пластины.

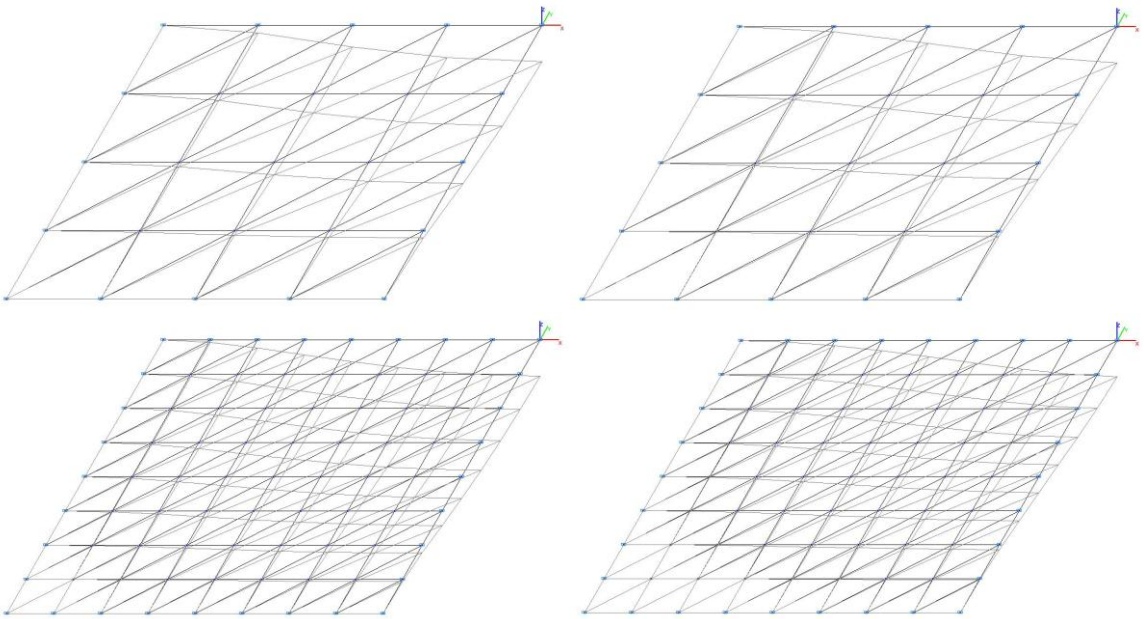
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема четверти пластины по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 8, 32, 128 трехузловых элементов оболочки типа 42 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 2 – 4, 16, 64 четырехузловых элемента оболочки типа 44 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 3 – 8, 32, 128 шестиузловых элементов оболочки типа 45 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 4 – 4, 16, 64 восьмиузловых элемента оболочки типа 50 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 5 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 восьмиузловых изопараметрических объемных элемента типа 36 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных ребер нижней поверхности пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси Y общей системы координат, по направлению степени свободы X, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси X общей системы координат, по направлению степени свободы Y и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 18, 50, 162, 578, 2178, 8450, 33282.
Модель 6 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 двадцатиузловых изопараметрических объемных элемента типа 37 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных ребер нижней поверхности пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси Y общей системы координат, по направлению степени свободы X, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси X общей системы координат, по направлению степени свободы Y и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 51, 155, 531, 1955, 7491, 29315, 115971.

Результаты решения в SCAD

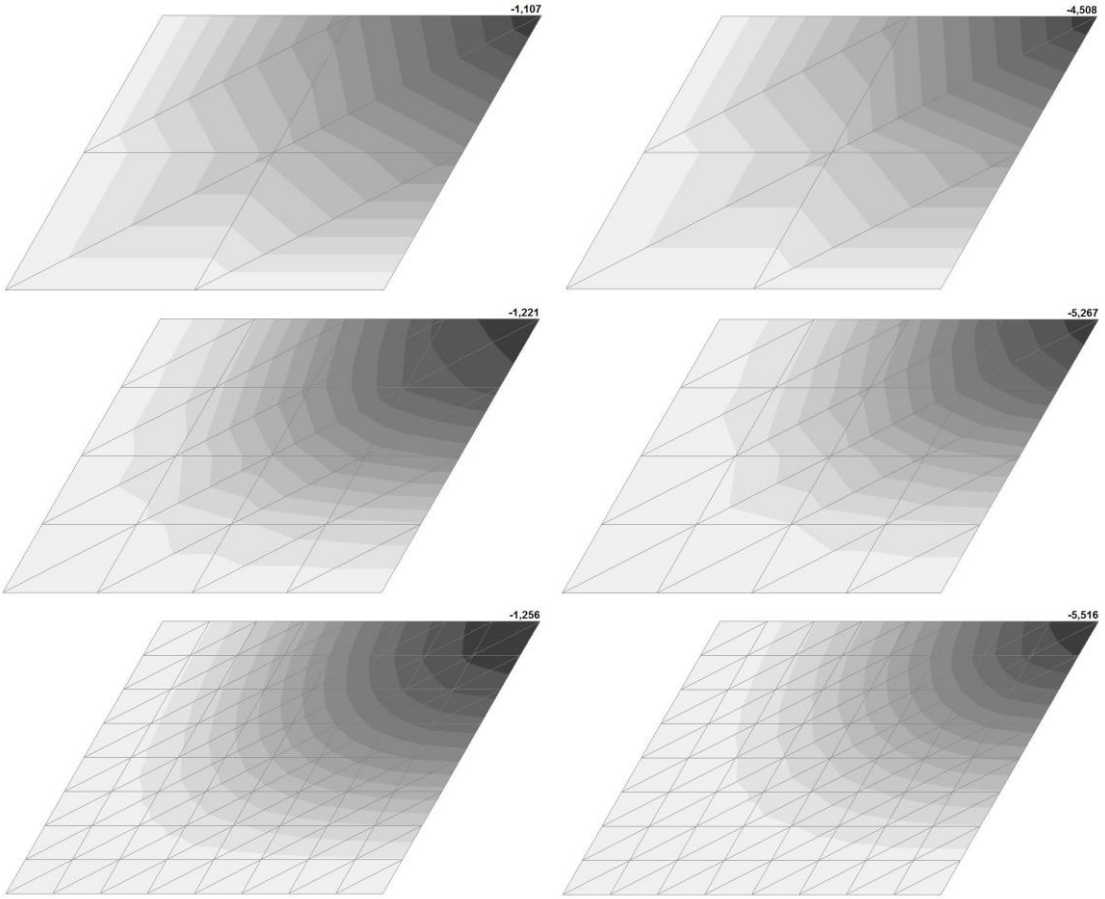


Модель 1. Расчетная схема

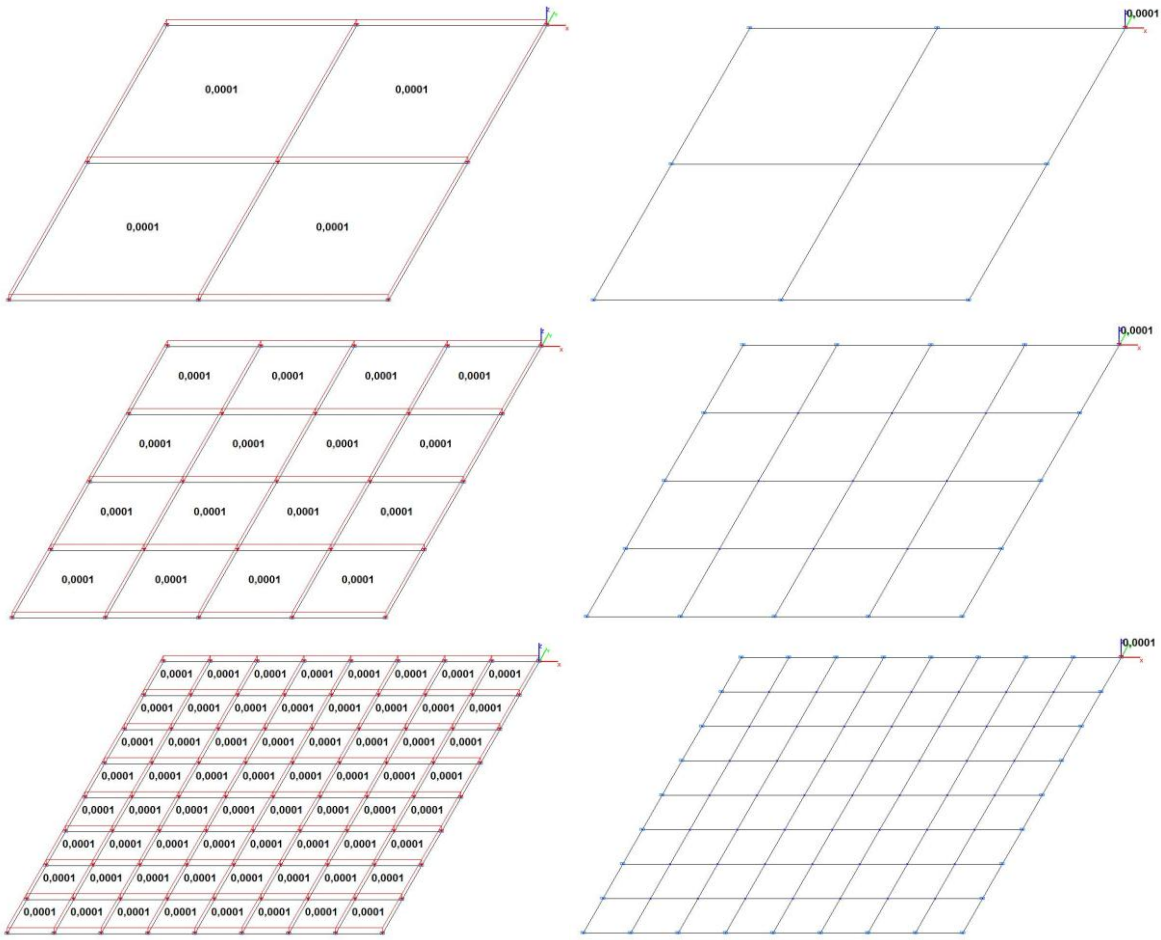




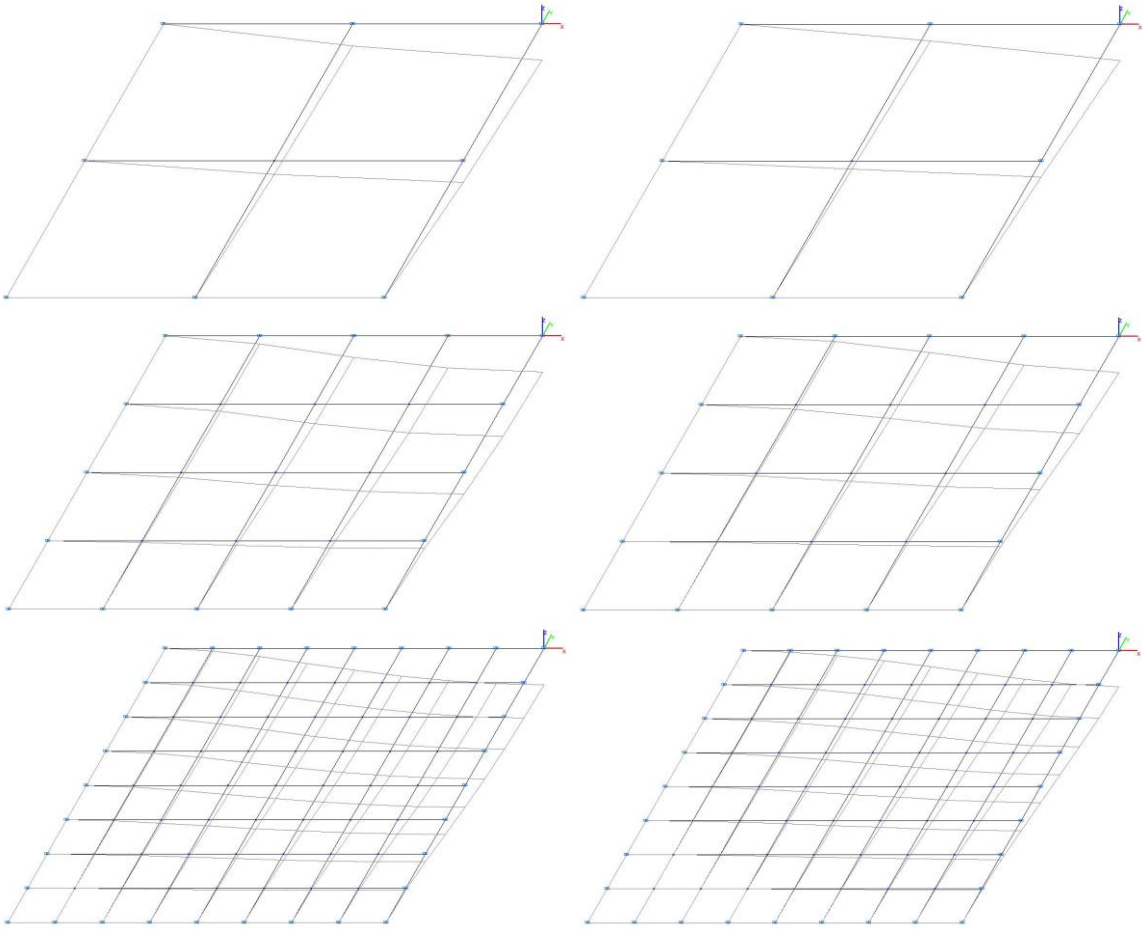
Модель 1. Деформированная схема



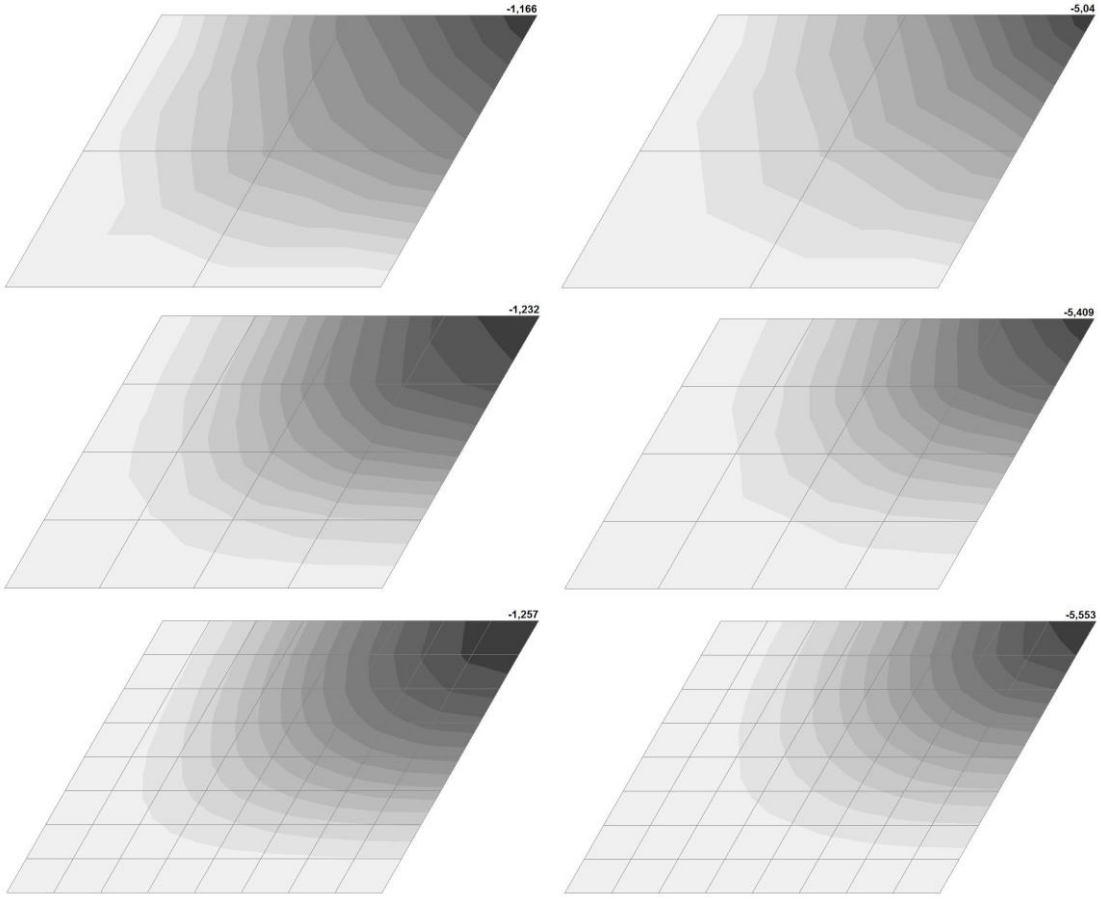
Модель 1. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



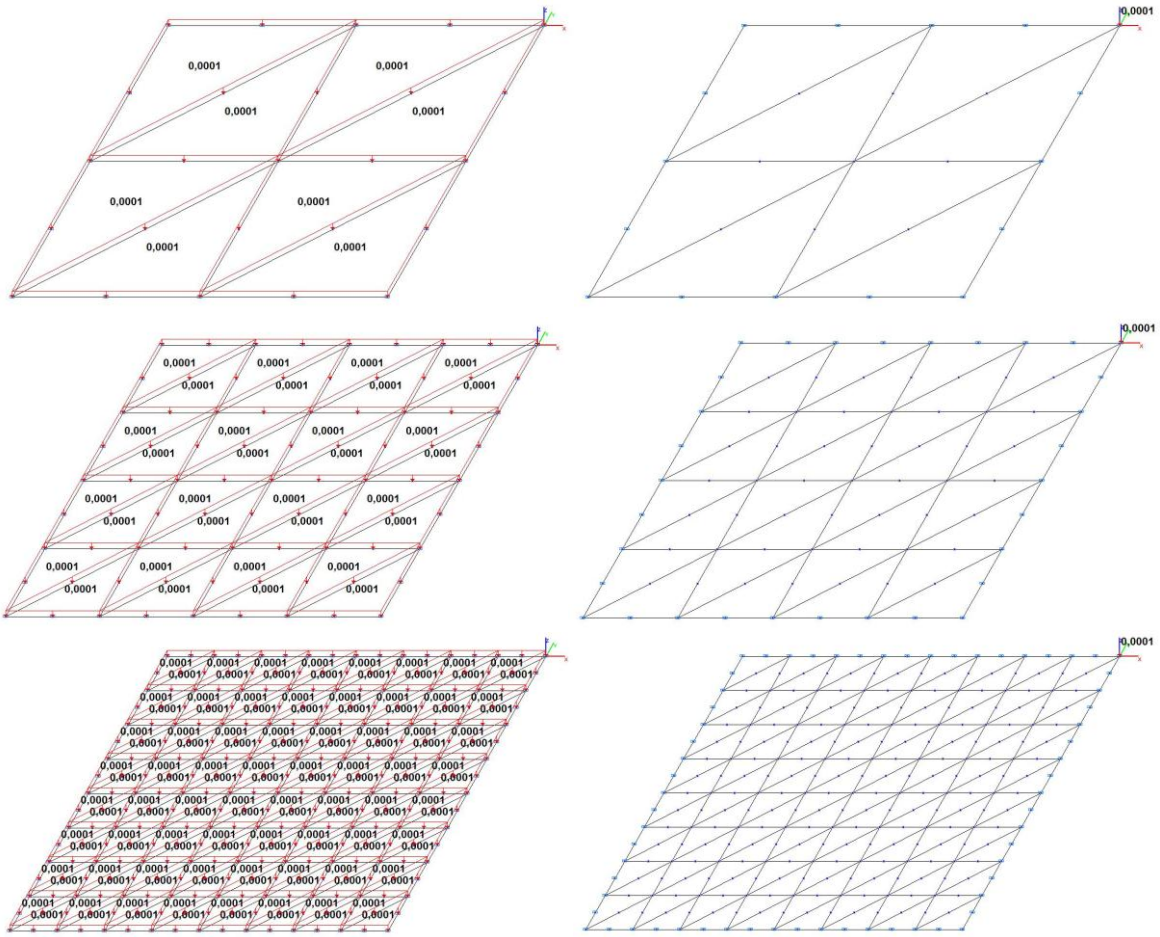
Модель 2. Расчетная схема



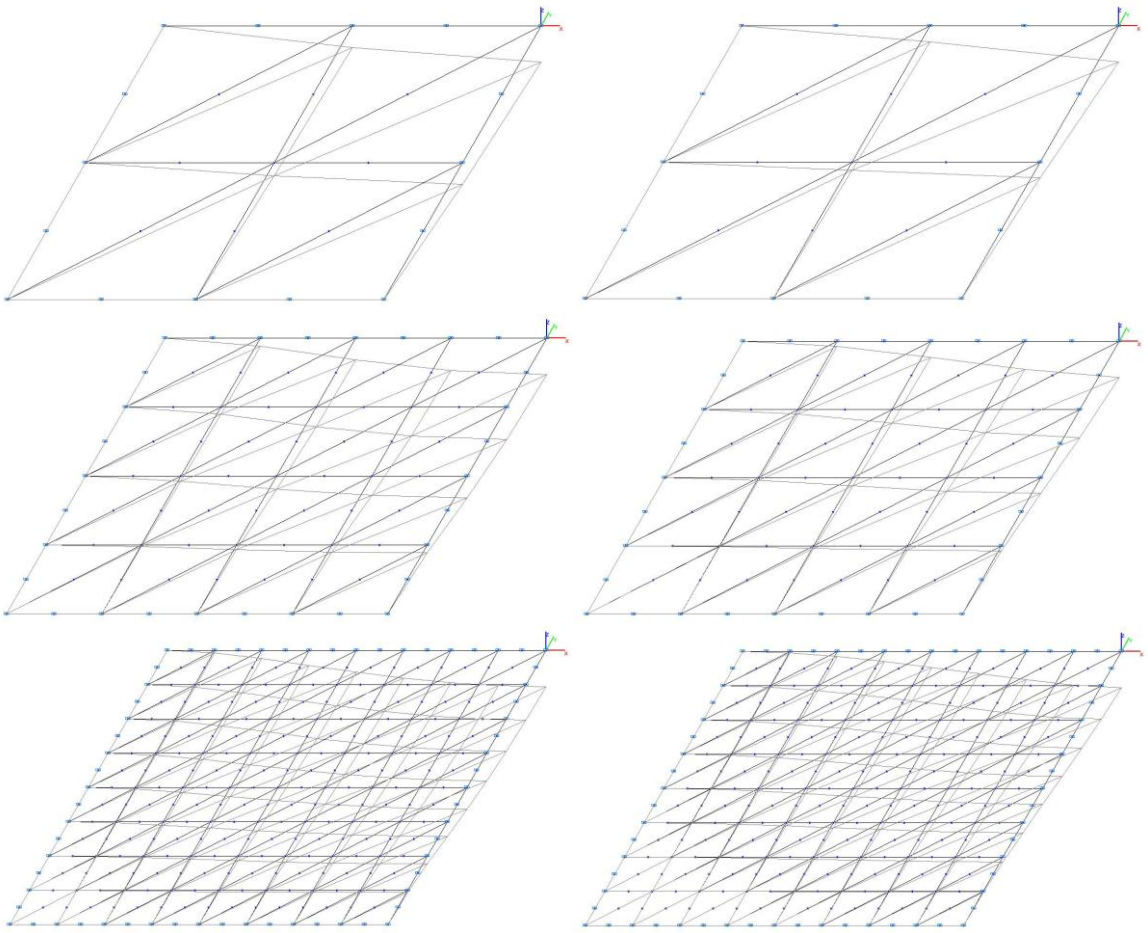
Модель 2. Деформированная схема



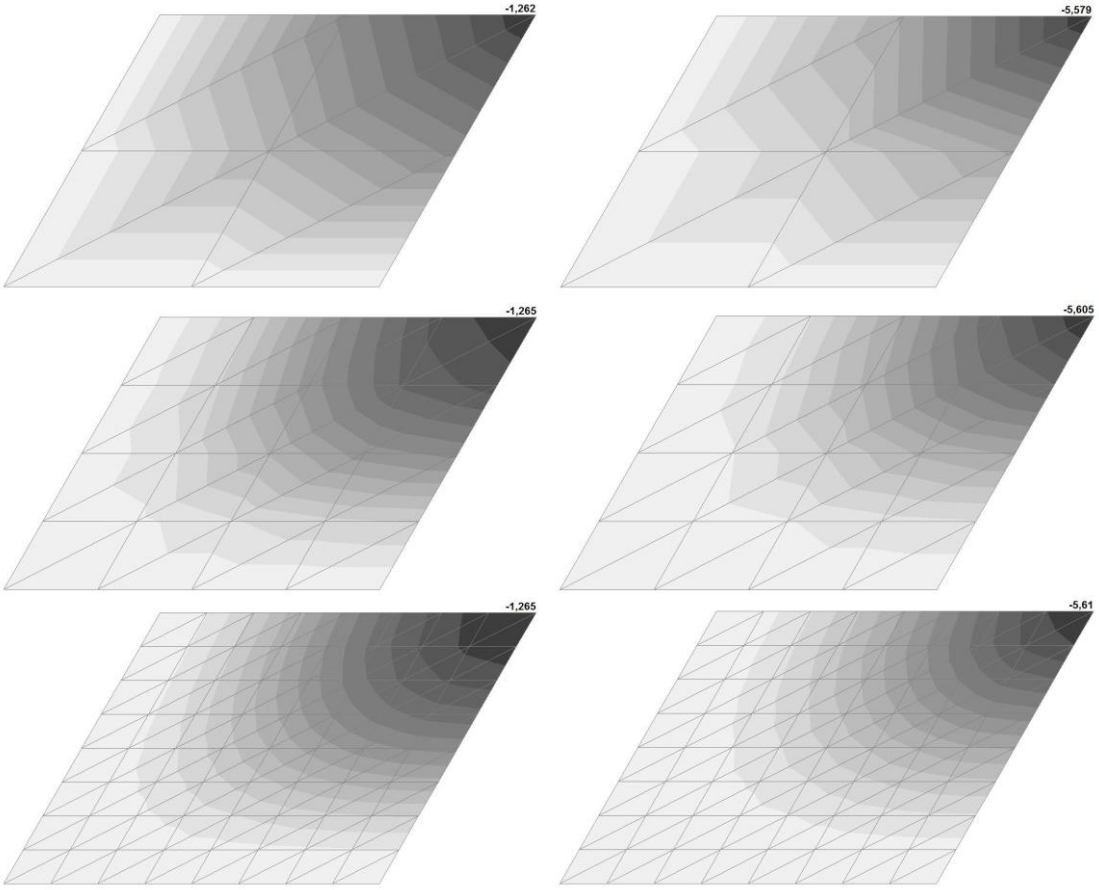
Модель 2. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



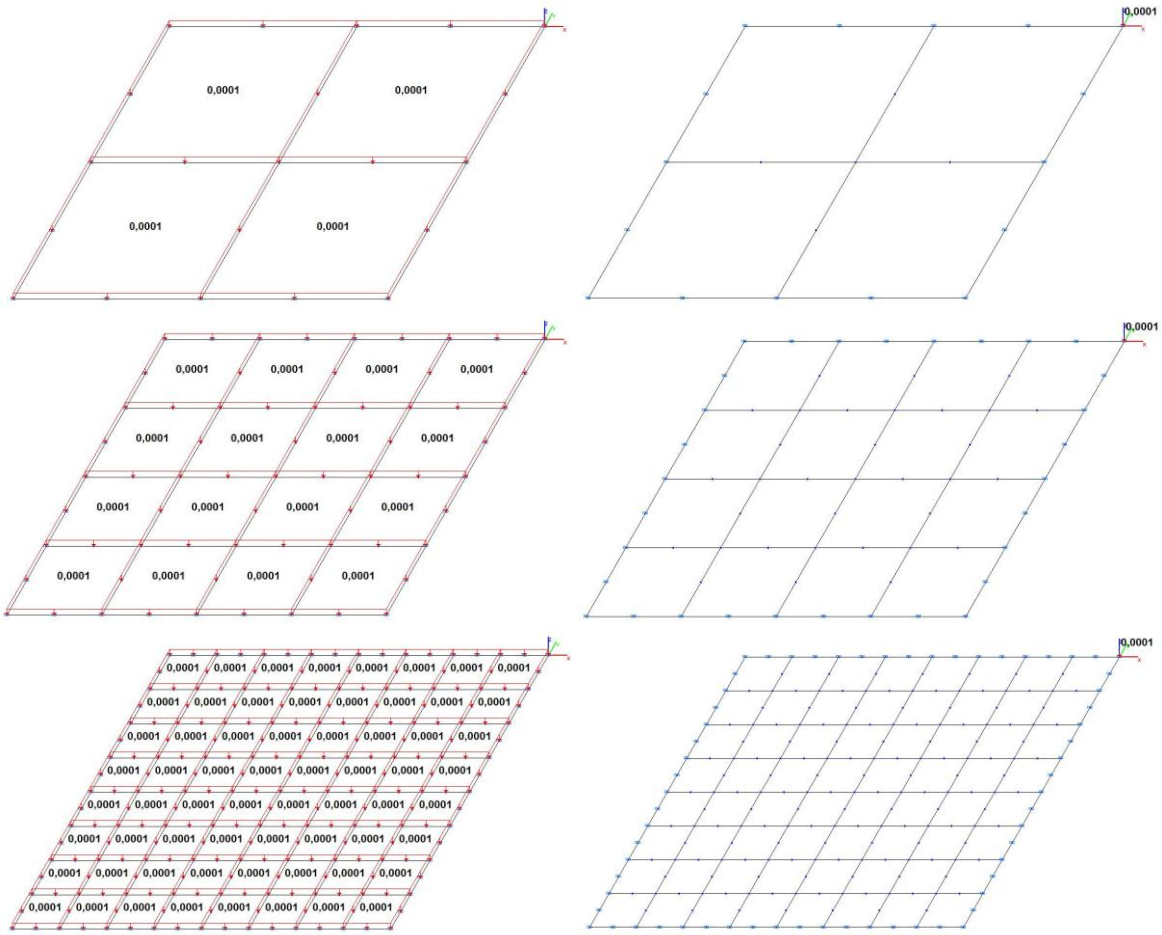
Модель 3. Расчетная схема



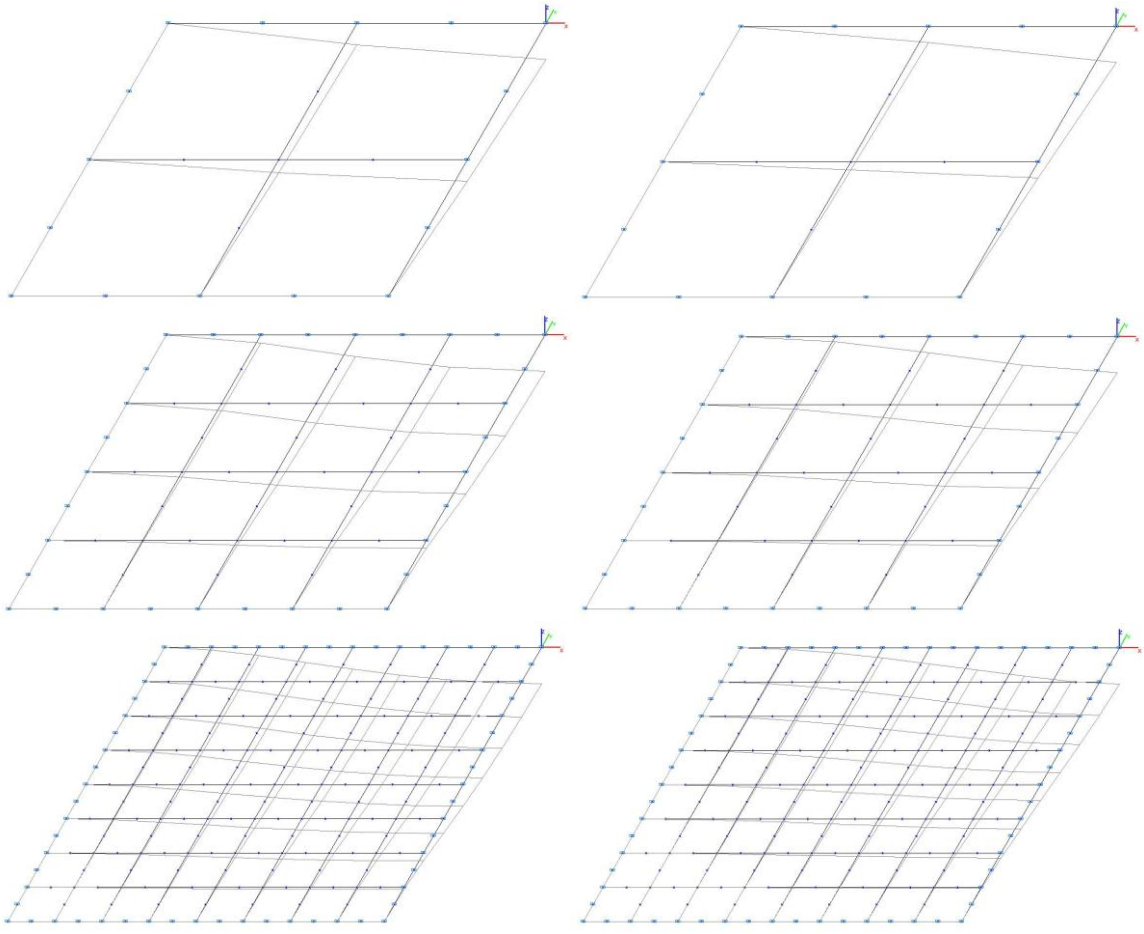
Модель 3. Деформированная схема



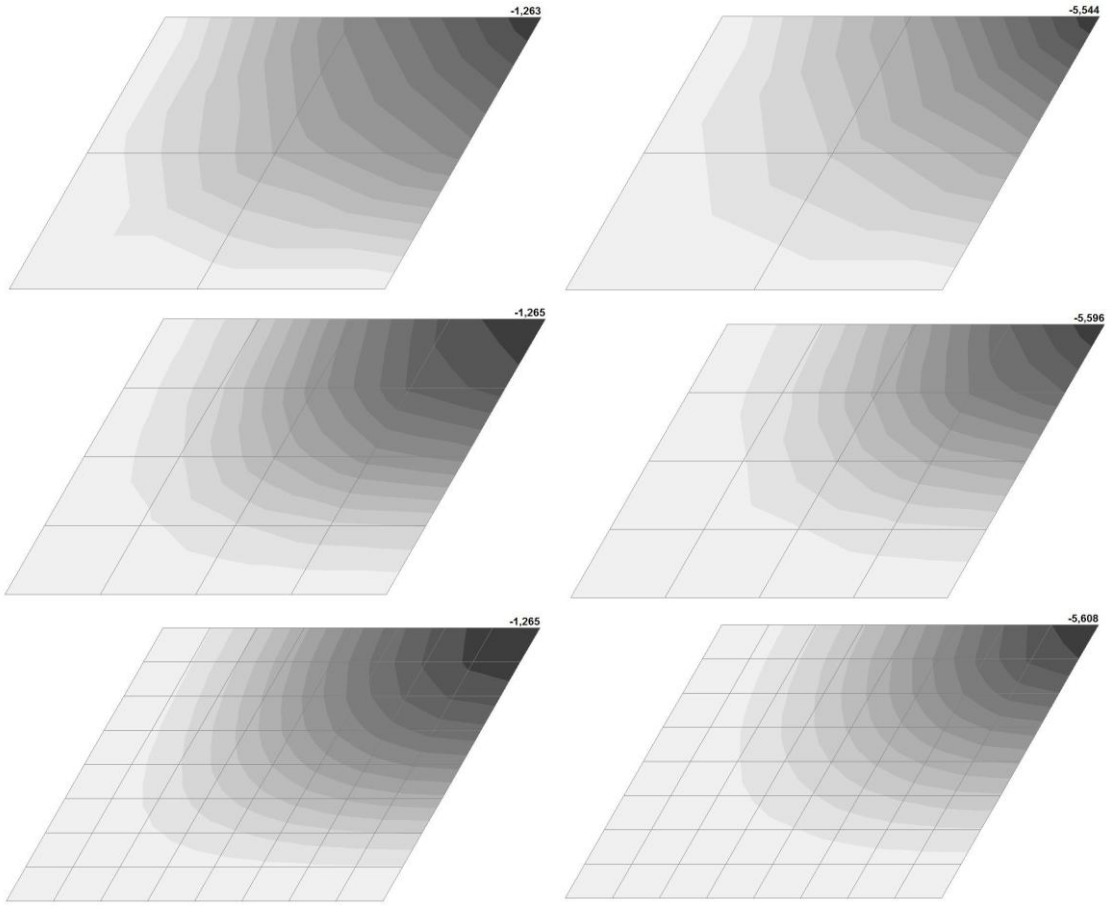
Модель 3. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



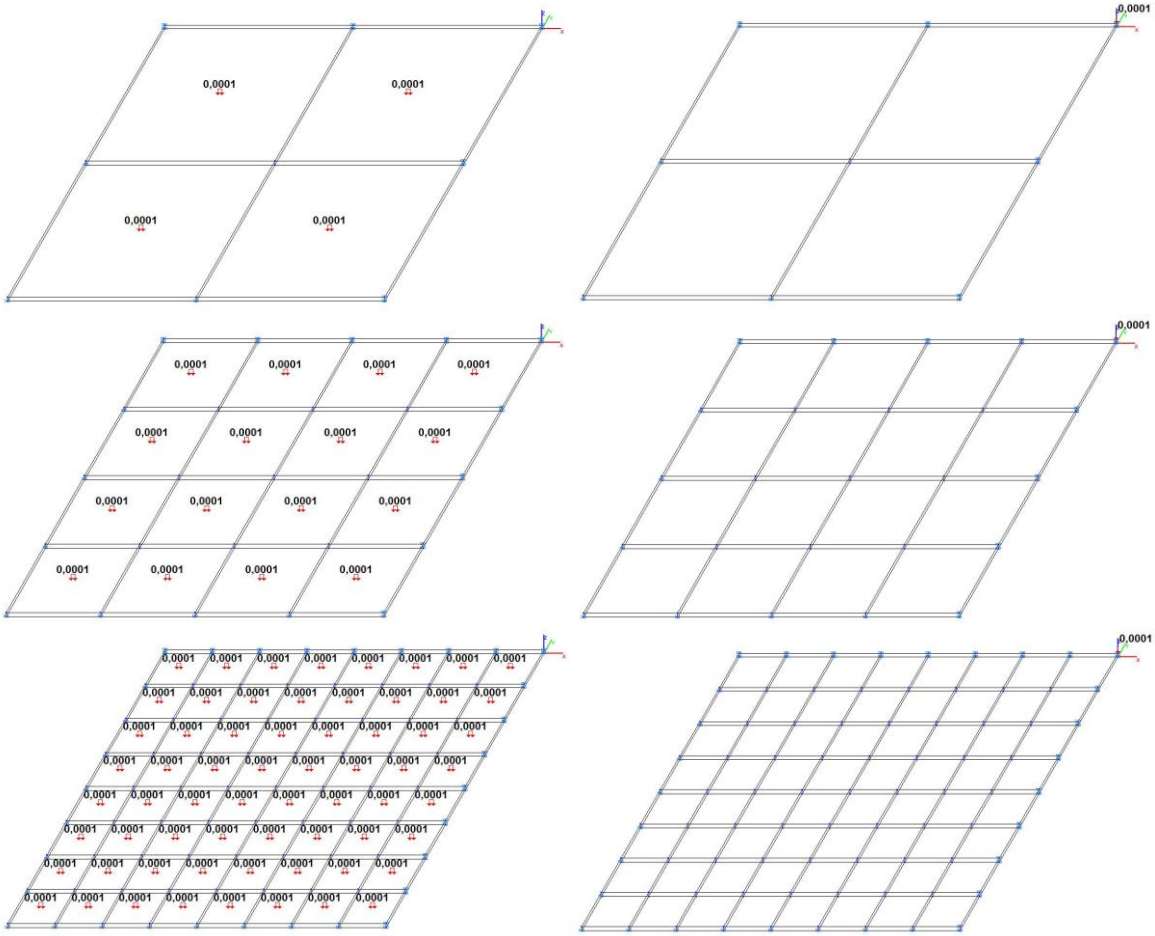
Модель 4. Расчетная схема

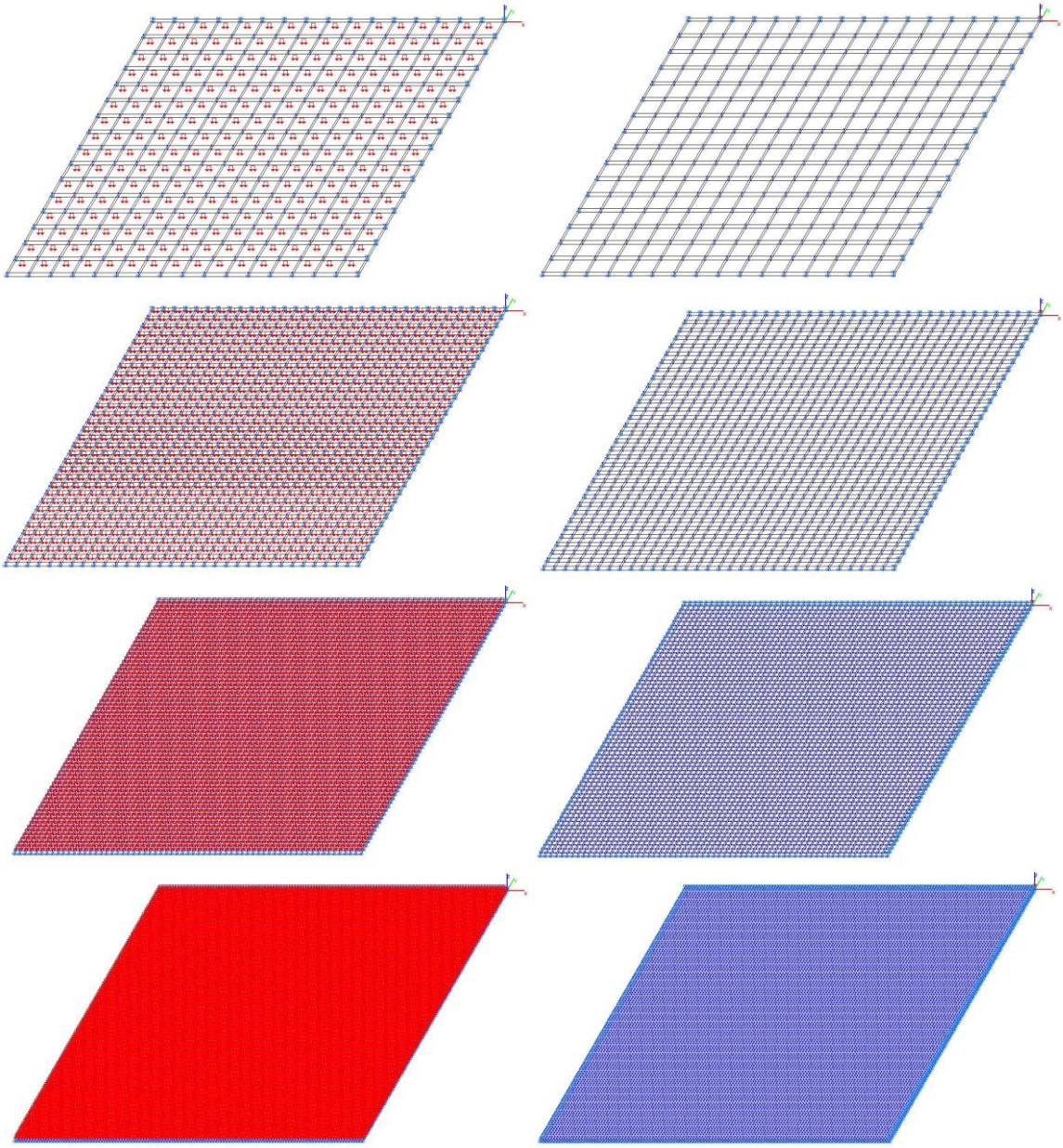


Модель 4. Деформированная схема

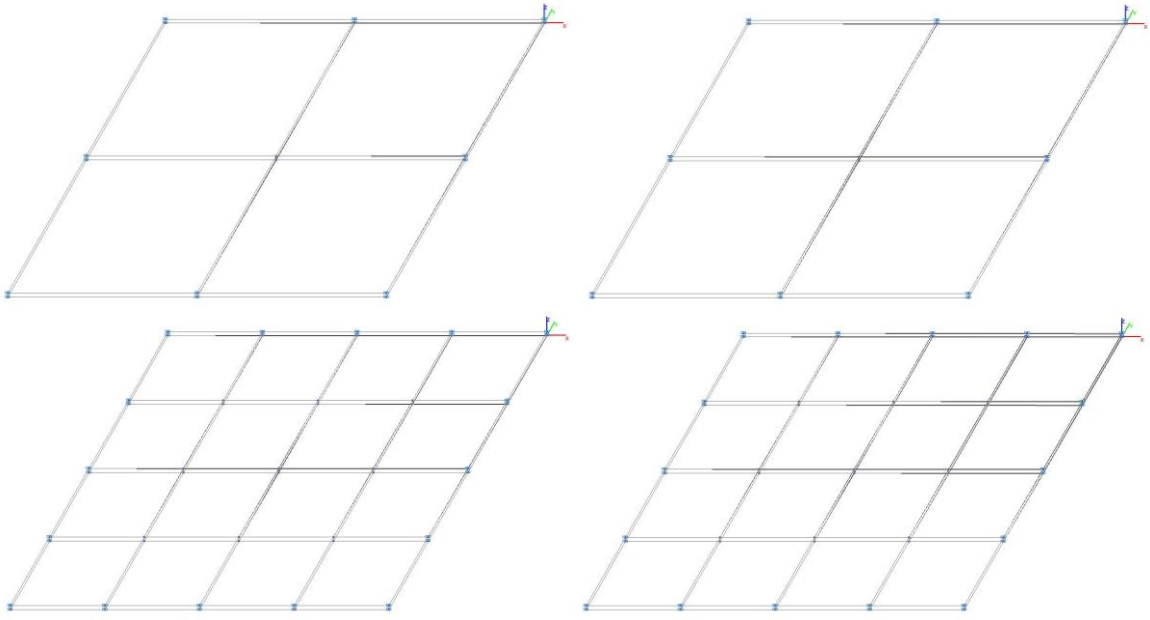


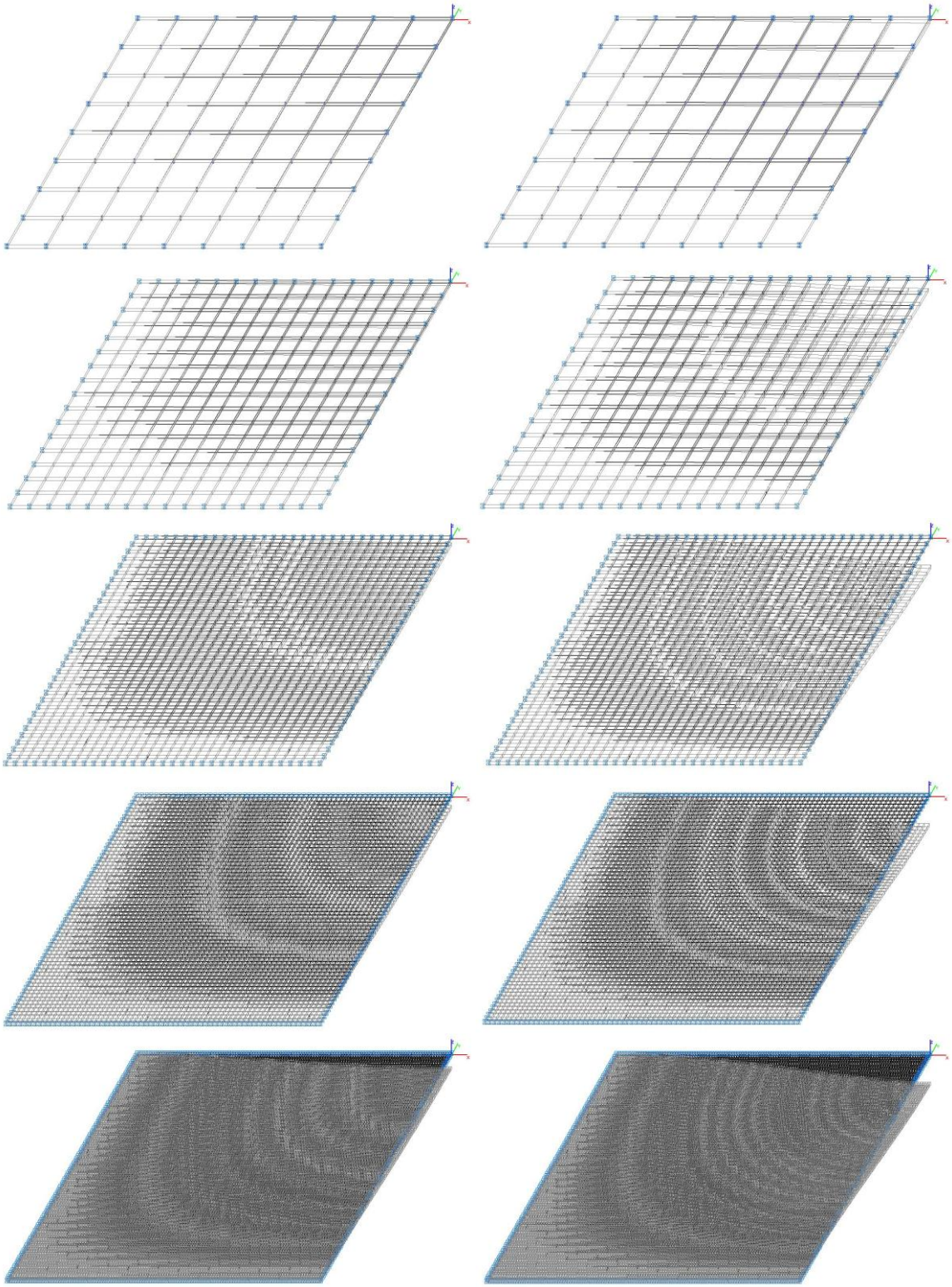
Модель 4. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам квадратной пластины w_q и w_P (м, м)



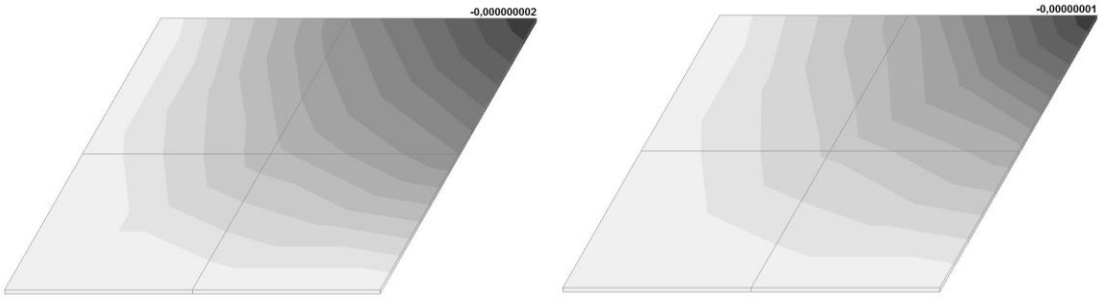


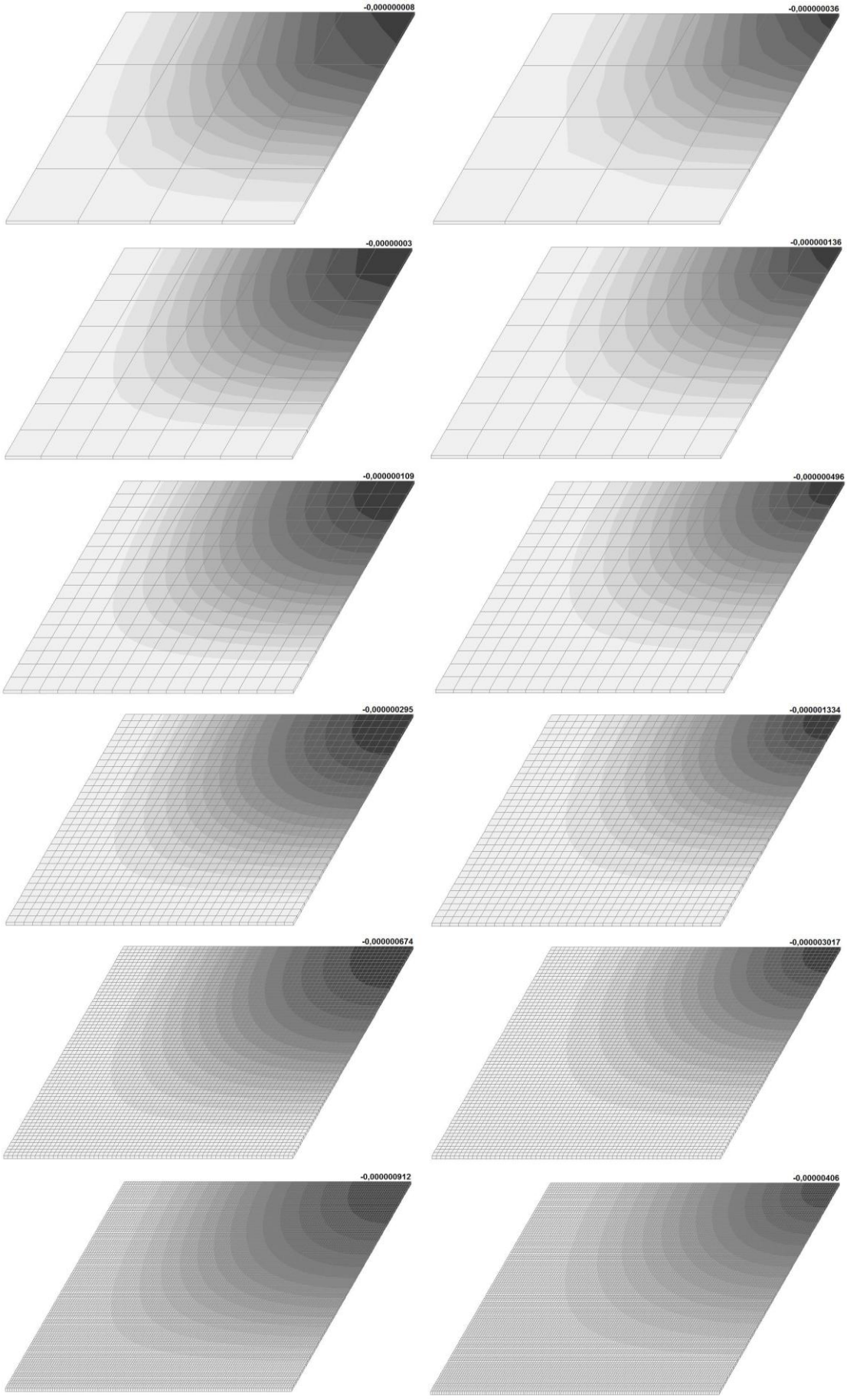
Модель 5. Расчетная схема



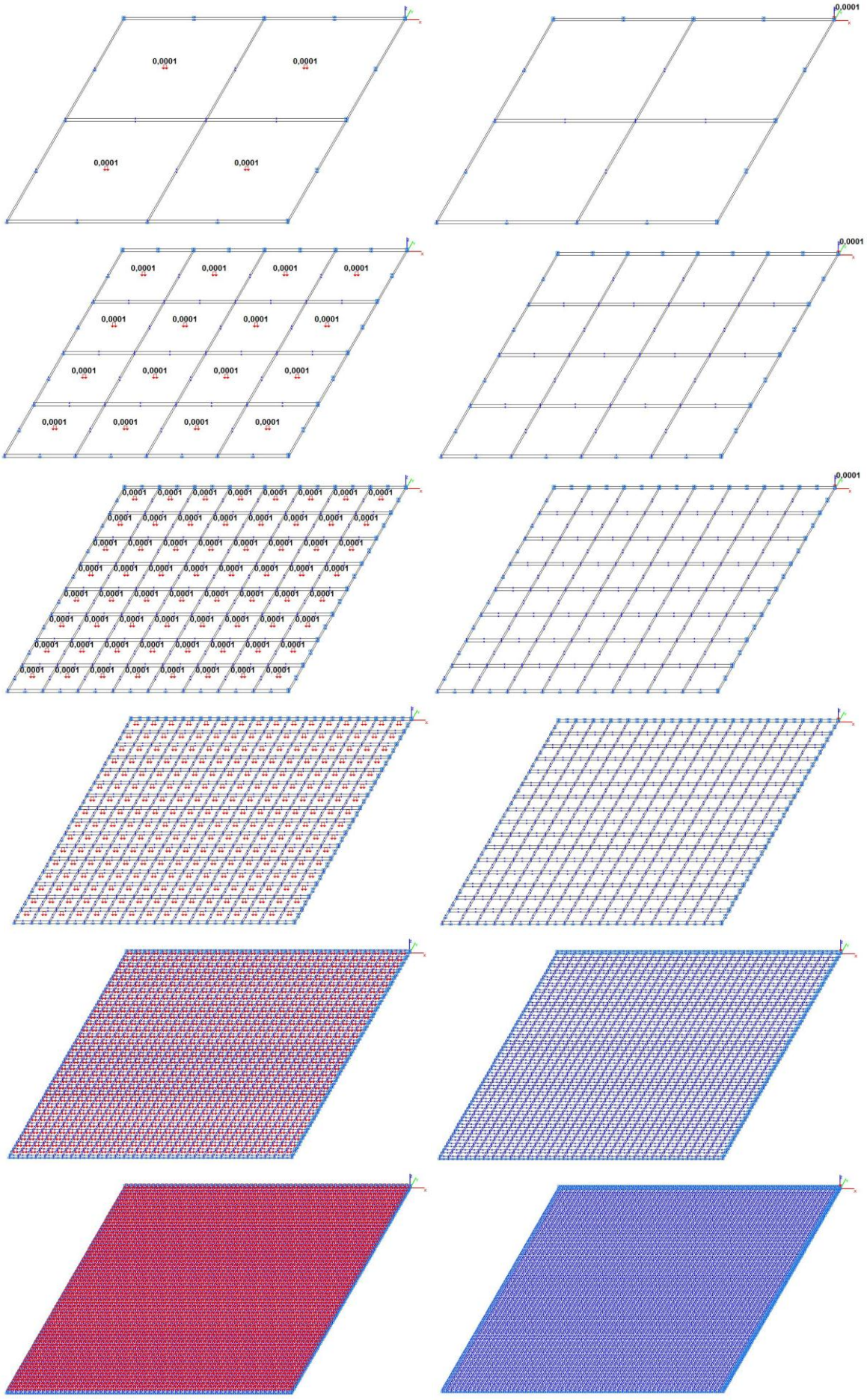


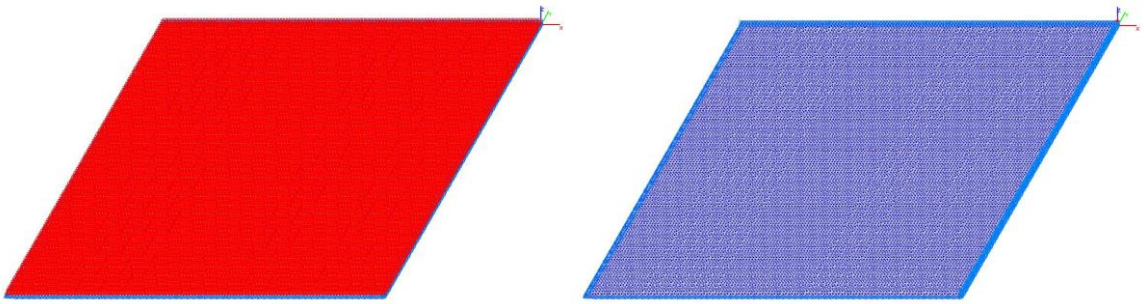
Модель 5. Деформированная схема



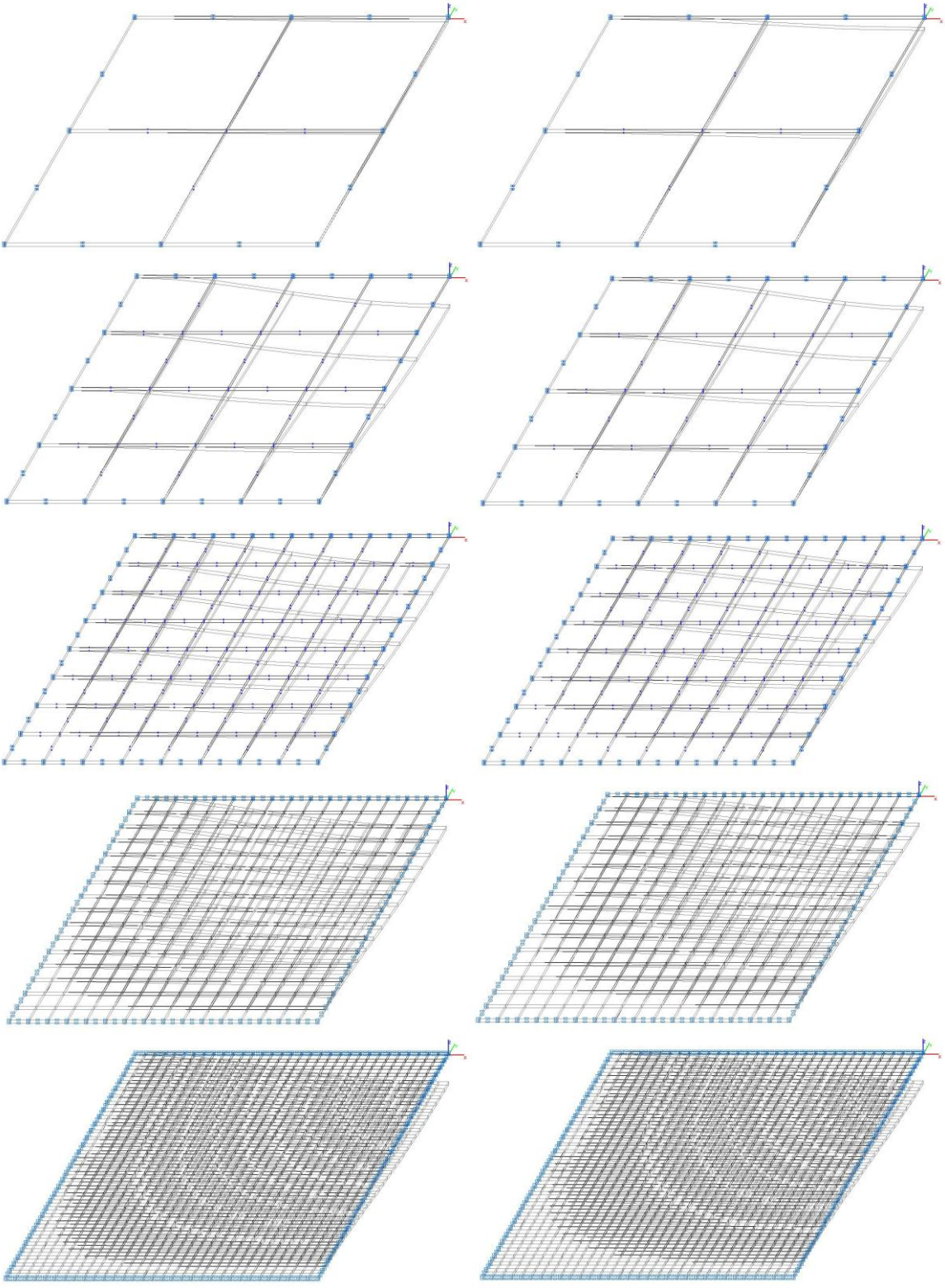


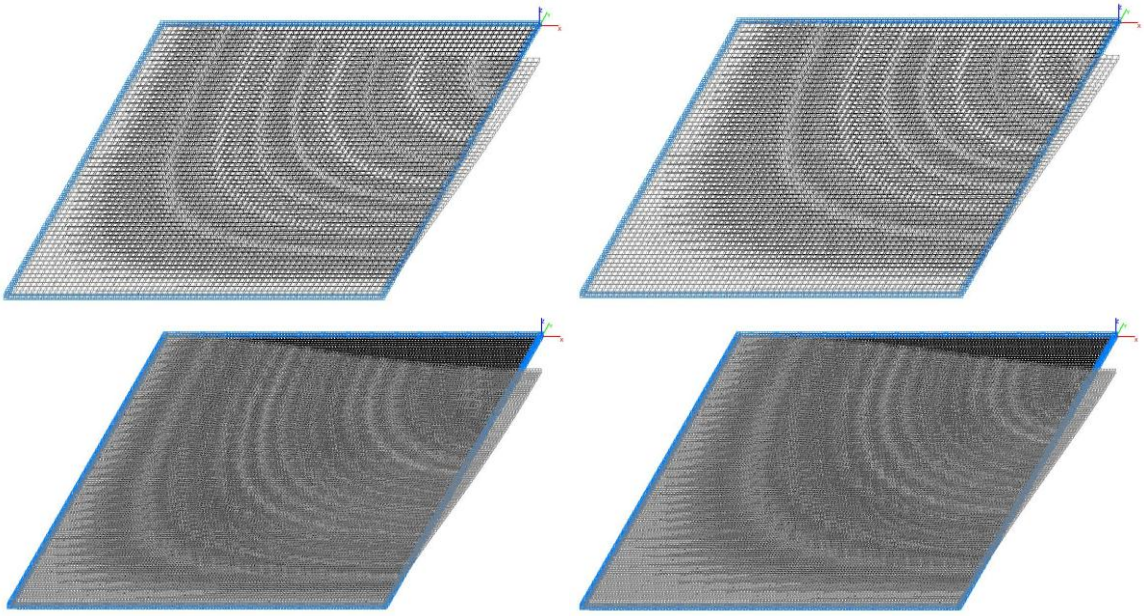
Модель 5. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам квадратной пластины w_q и w_P (м, м)


0,0001
0,0001
0,0001
0,0001
0,0001
0,0001

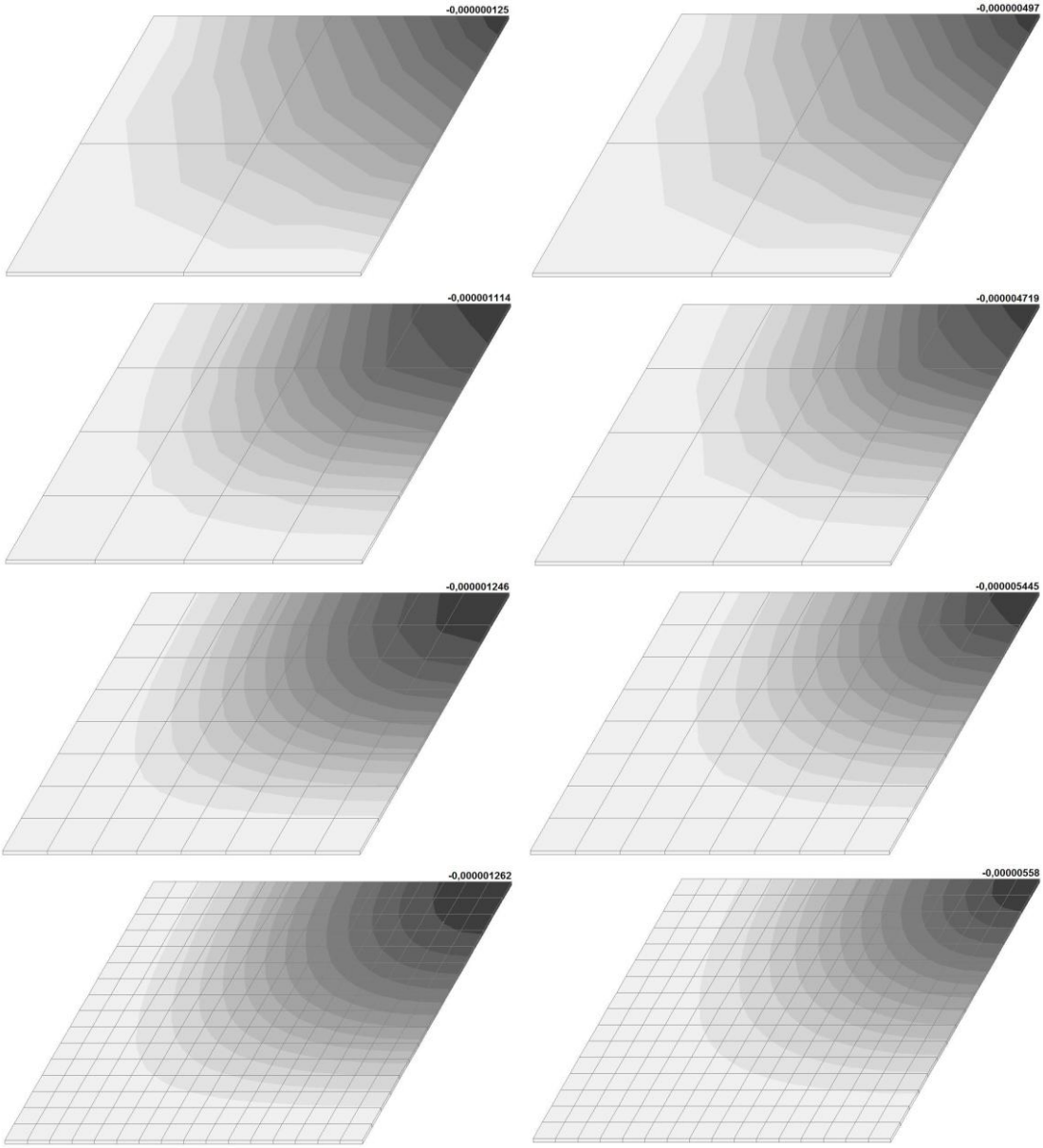


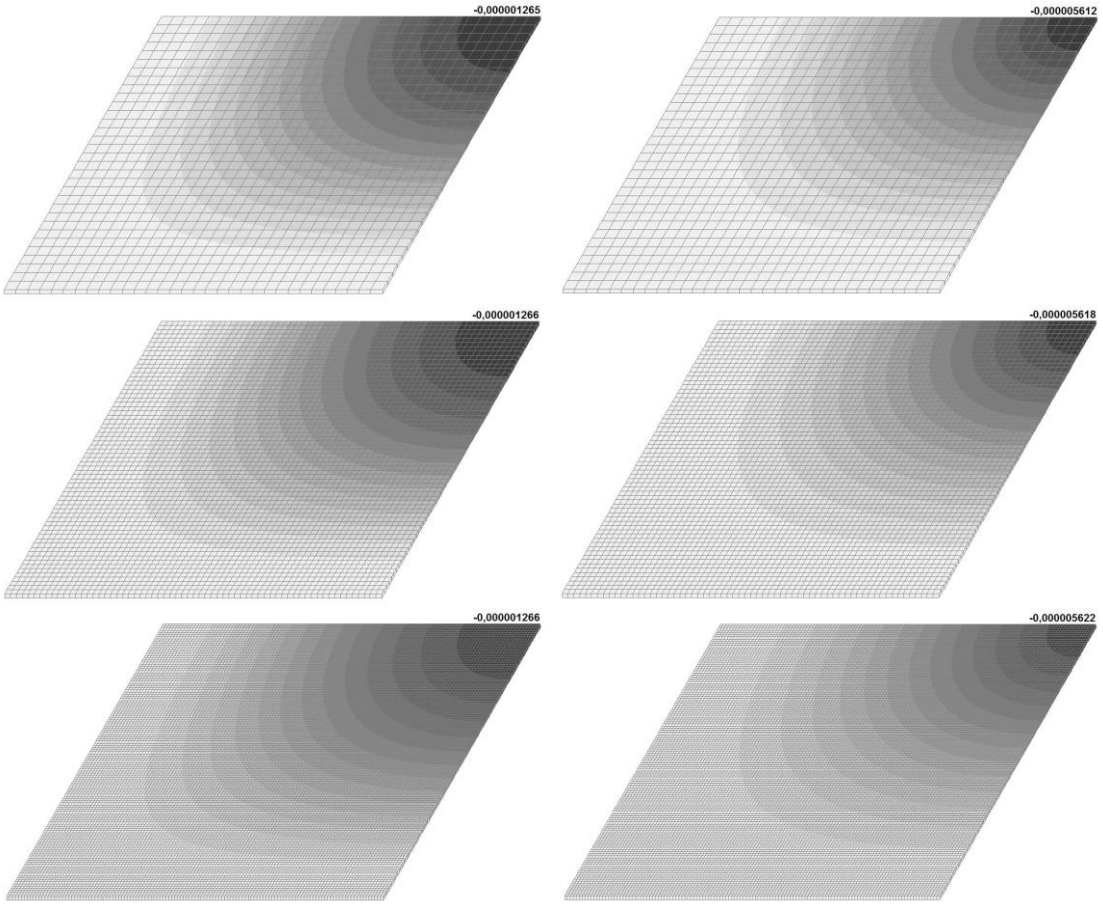
Модель 6. Расчетная схема





Модель 6. Деформированная схема





Модель 6. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам квадратной пластины w_q и w_P (м, м)

Сравнение решений:

Поперечные перемещения в центре заделанной по наружным кромкам плоской квадратной пластины w_q от воздействия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	1.265	1.107	12.49
	4x4		1.221	3.48
	8x8		1.256	0.71
2 (Тип элемента 44)	2x2	1.265	1.166	7.83
	4x4		1.232	2.61
	8x8		1.257	0.63
3 (Тип элемента 45)	2x2	1.265	1.262	0.24
	4x4		1.265	0.00
	8x8		1.265	0.00
4 (Тип элемента 50)	2x2	1.265	1.263	0.16
	4x4		1.265	0.00
	8x8		1.265	0.00
5 (Тип элемента 36)	2x2	$1.265 \cdot 10^{-6}$	$0.002 \cdot 10^{-6}$	99.84
	4x4		$0.008 \cdot 10^{-6}$	99.37
	8x8		$0.030 \cdot 10^{-6}$	97.63
	16x16		$0.109 \cdot 10^{-6}$	91.38
	32x32		$0.295 \cdot 10^{-6}$	76.68
	64x64		$0.674 \cdot 10^{-6}$	46.72
	128x128		$0.912 \cdot 10^{-6}$	27.91
6 (Тип элемента 37)	2x2	$1.265 \cdot 10^{-6}$	$0.125 \cdot 10^{-6}$	90.12
	4x4		$1.114 \cdot 10^{-6}$	11.94

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
	8x8		$1.246\cdot10^{-6}$	1.50
	16x16		$1.262\cdot10^{-6}$	0.24
	32x32		$1.265\cdot10^{-6}$	0.00
	64x64		$1.266\cdot10^{-6}$	0.08
	128x128		$1.266\cdot10^{-6}$	0.08

Поперечные перемещения в центре заделанной по наружным кромкам плоской квадратной пластины w_P от воздействия сосредоточенной поперечной силы в центре P

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	5.612	4.508	19.67
	4x4		5.267	6.15
	8x8		5.516	1.71
2 (Тип элемента 44)	2x2	5.612	5.040	10.19
	4x4		5.409	3.62
	8x8		5.553	1.05
3 (Тип элемента 45)	2x2	5.612	5.579	0.59
	4x4		5.605	0.12
	8x8		5.610	0.04
4 (Тип элемента 50)	2x2	5.612	5.554	1.03
	4x4		5.596	0.29
	8x8		5.608	0.07
5 (Тип элемента 36)	2x2	$5.612\cdot10^{-6}$	$0.010\cdot10^{-6}$	99.82
	4x4		$0.036\cdot10^{-6}$	99.36
	8x8		$0.136\cdot10^{-6}$	97.58
	16x16		$0.496\cdot10^{-6}$	91.16
	32x32		$1.334\cdot10^{-6}$	76.23
	64x64		$3.017\cdot10^{-6}$	46.24
	128x128		$4.060\cdot10^{-6}$	27.66
6 (Тип элемента 37)	2x2	$5.612\cdot10^{-6}$	$0.497\cdot10^{-6}$	91.14
	4x4		$4.719\cdot10^{-6}$	15.91
	8x8		$5.445\cdot10^{-6}$	2.98
	16x16		$5.580\cdot10^{-6}$	0.57
	32x32		$5.612\cdot10^{-6}$	0.00
	64x64		$5.618\cdot10^{-6}$	0.11
	128x128		$5.622\cdot10^{-6}$	0.18

Замечания: При аналитическом решении значений поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам плоской квадратной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$w_q = \frac{4\cdot q\cdot a^4}{\pi^5\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\{\frac{1}{m^5}\cdot\left[1-\frac{\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\cdot th\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)+2}{2\cdot ch\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}\right]\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right\}+$$

$$\frac{a^2}{2\cdot\pi^2\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\{E_m\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\cdot sh\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}{ch^2\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right\}+$$

$$\frac{b^2}{2\cdot\pi^2\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\{F_m\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\frac{m\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\cdot sh\left(\frac{m\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}{ch^2\left(\frac{m\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right\}$$

Значения коэффициентов E_m и F_m определяются из решения системы 2·M уравнений:

$$\frac{4\cdot q\cdot a^2}{\pi^3}\cdot\frac{1}{i^4}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}-th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)\right)-\frac{E_i}{i}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}+th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)\right)-\frac{8\cdot i\cdot a}{\pi\cdot b}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left[F_m\cdot\frac{1}{m^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cdot sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right]\Bigg\};$$

$$\frac{4\cdot q\cdot b^2}{\pi^3}\cdot\frac{1}{i^4}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}-th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)\right)-\frac{F_i}{i}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}+th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)\right)-\frac{8\cdot i\cdot b}{\pi\cdot a}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left[E_m\cdot\frac{1}{m^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cdot sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right]\Bigg\};$$

$$w_P=\frac{P\cdot a^2}{2\cdot\pi^3\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\{\frac{1}{m^3}\cdot\left[th\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)-\frac{\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}}{ch^2\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}\right]\cdot\sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right\}+$$

$$\frac{a^2}{2\cdot\pi^2\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\{E_m\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\cdot sh\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}{ch^2\left(\frac{m\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right\}+$$

$$\frac{b^2}{2\cdot\pi^2\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\{F_m\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\frac{m\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\cdot sh\left(\frac{m\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}{ch^2\left(\frac{m\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right\}$$

Значения коэффициентов E_m и F_m определяются из решения системы 2·M уравнений:

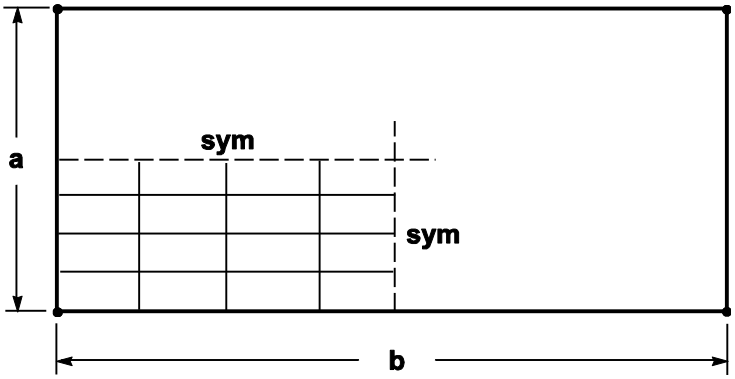
$$-\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\cdot sh\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}\cdot sin\left(\frac{i\cdot\pi}{2}\right)-\frac{E_i}{i}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}+th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)\right)-\frac{8\cdot i\cdot a}{\pi\cdot b}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left[F_m\cdot\frac{1}{m^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cdot sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right]\Bigg\};$$

$$-\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\cdot sh\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}\cdot sin\left(\frac{i\cdot\pi}{2}\right)-\frac{F_i}{i}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}+th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)\right)-\frac{8\cdot i\cdot b}{\pi\cdot a}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left[E_m\cdot\frac{1}{m^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cdot sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right]\Bigg\}$$

$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}.$$

Тот факт, что для густых сеток (64x64, 128x128) точность решения ухудшилась связана с тем, что начинает сказываться накопление вычислительных ошибок.

Свободно опертая плоская прямоугольная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре



***Цель*:** Проверка точного воспроизведения значений поперечных перемещений в центре свободно опертой плоской прямоугольной пластины от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_42_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_42_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_42_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_44_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_44_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_44_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_45_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_50_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_50_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Shell_50_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_8x8.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_16x16.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_32x32.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_64x64.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_36_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128
Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_8x8.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_16x16.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_32x32.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_64x64.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Simply_supported_Solid_37_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128

Формулировка задачи: Свободно опертая плоская прямоугольная пластина подвергается воздействию равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q и сосредоточенной поперечной силы в центре P. Проверить: точное воспроизведение значений поперечных перемещений в центре свободно опертой плоской прямоугольной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий.

***Ссылки*:** R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

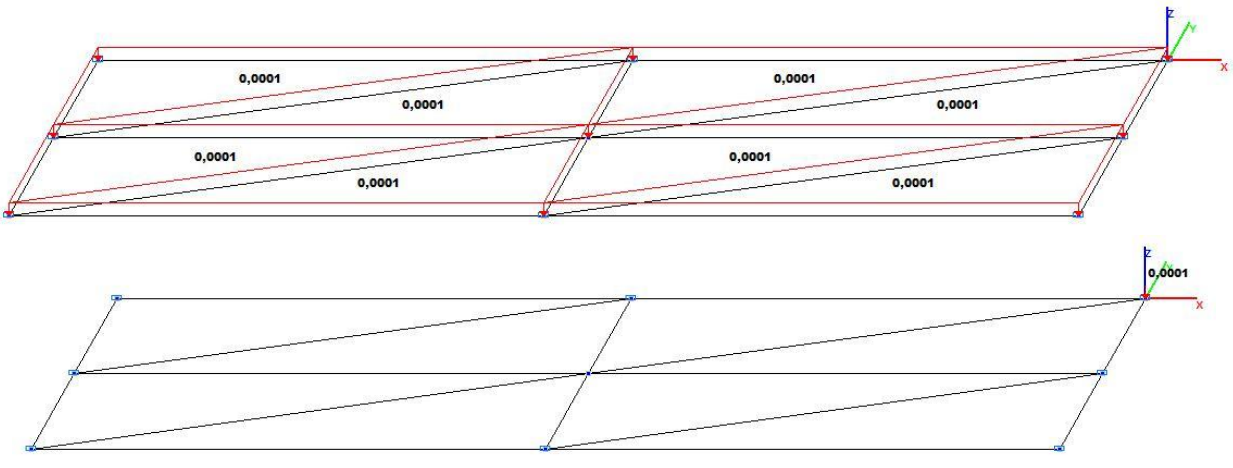
S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells, New York, McGraw-Hill,1959, p. 120, 143, 202, 206.

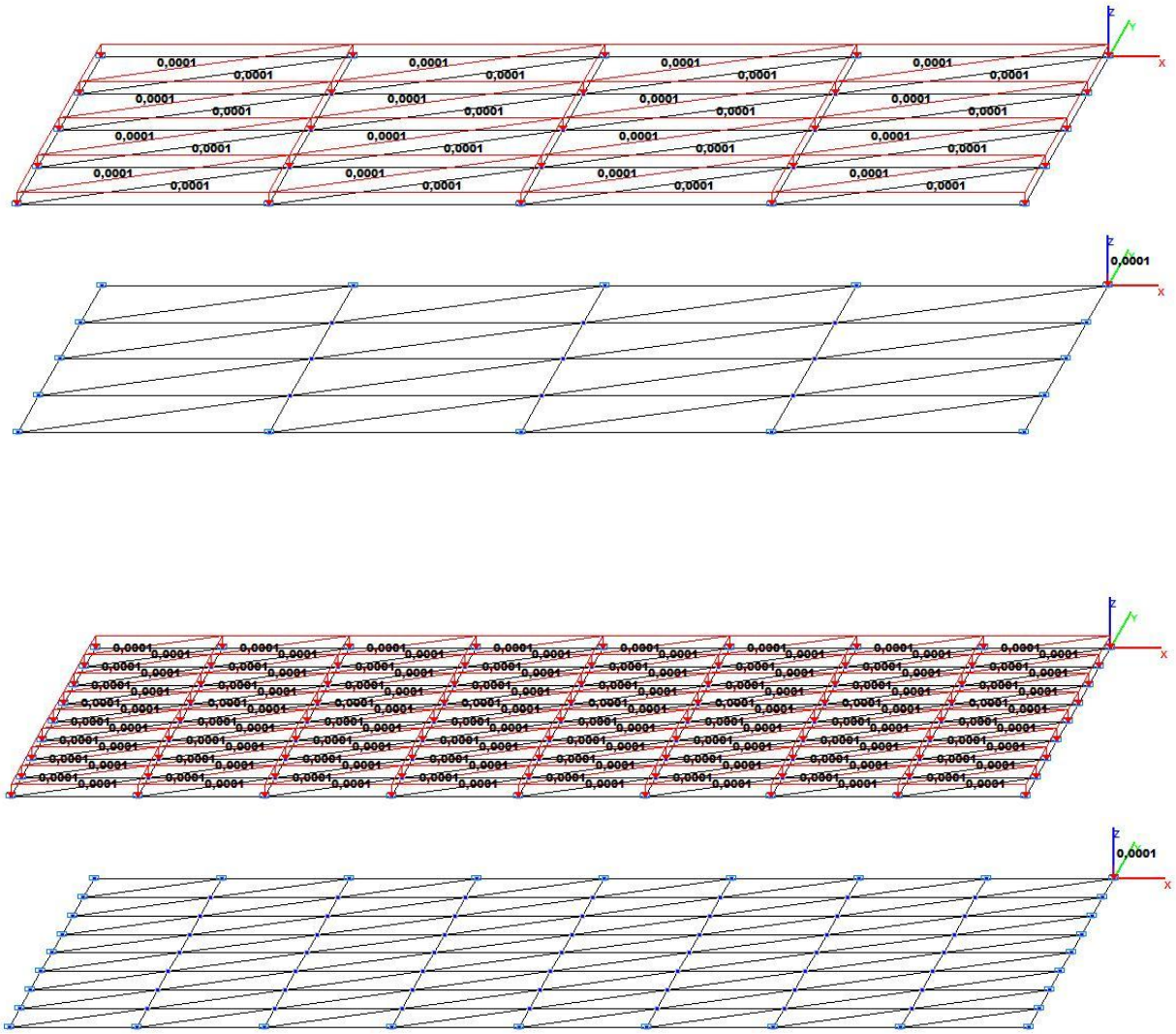
***Исходные данные*:**

$E = 1.7472 \cdot 10^{7}$ кПа - модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.30$ - коэффициент Пуассона;
$a = 2.00$ м - ширина пластины;
$b = 10.00$ м - длина пластины;
$h = 10^{-4}$ (10^{-2}) м - толщина пластины;
$q = 1.0 \cdot 10^{-4}$ кН/м^2 - значение равномерно распределенной по всей площади пластины поперечной нагрузки;
$P = 4.0 \cdot 10^{-4}$ кН - значение сосредоточенной поперечной силы в центре пластины.

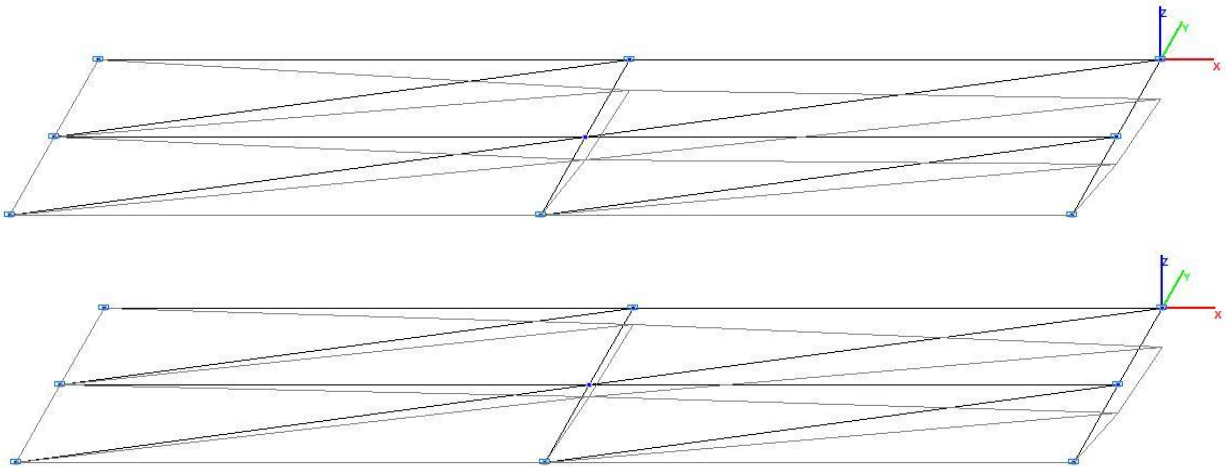
***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема четверти пластины по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 8, 32, 128 трехузловых элементов оболочки типа 42 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 2 – 4, 16, 64 четырехузловых элементов оболочки типа 44 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 3 – 8, 32, 128 шестиузловых элементов оболочки типа 45 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 4 – 4, 16, 64 восьмиузловых элементов оболочки типа 50 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 5 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 восьмиузловых изопараметрических объемных элементов типа 36 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных ребер нижней поверхности пластины по направлению степени свободы Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 18, 50, 162, 578, 2178, 8450, 33282.
Модель 6 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 двадцатиузловых изопараметрических объемных элементов типа 37 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных ребер нижней поверхности пластины по направлению степени свободы Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 51, 155, 531, 1955, 7491, 29315, 115971.

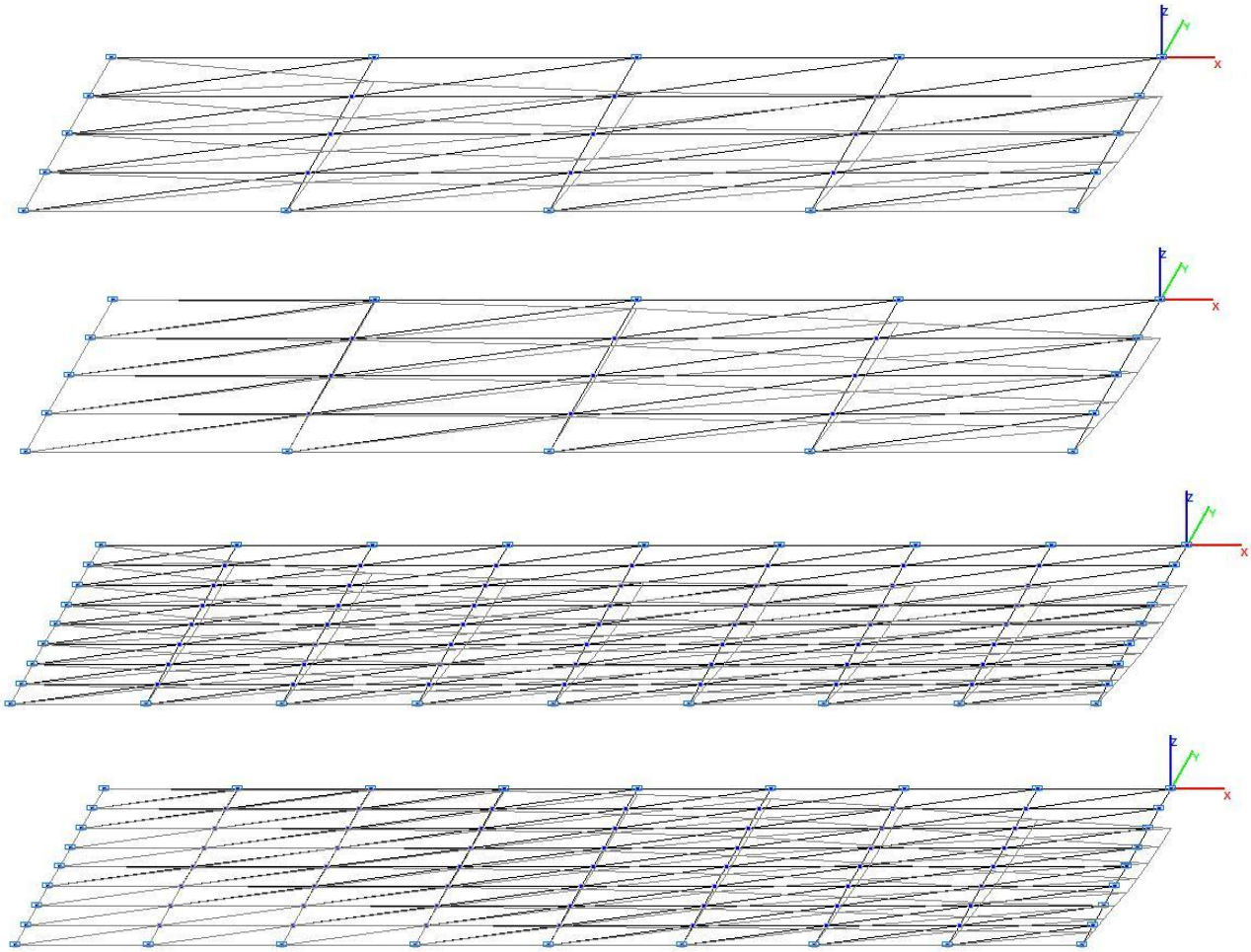
Результаты решения в SCAD



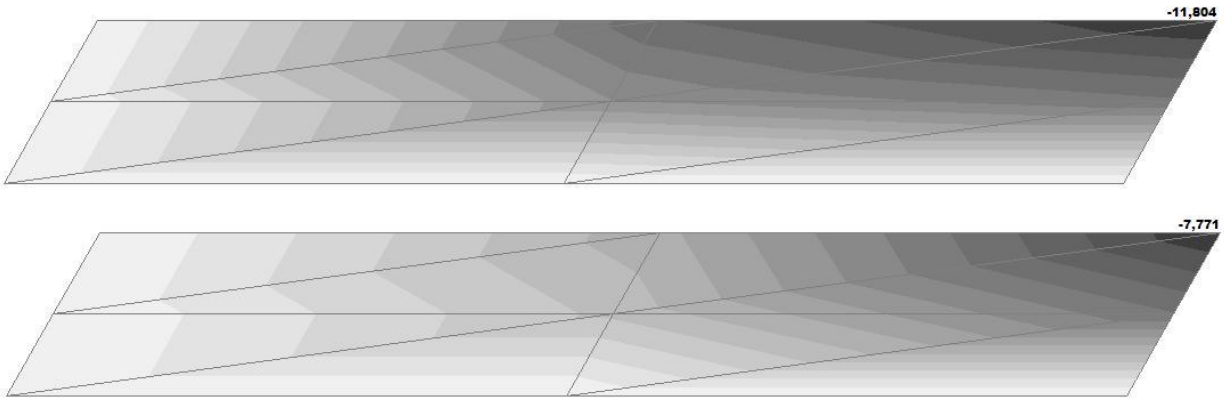


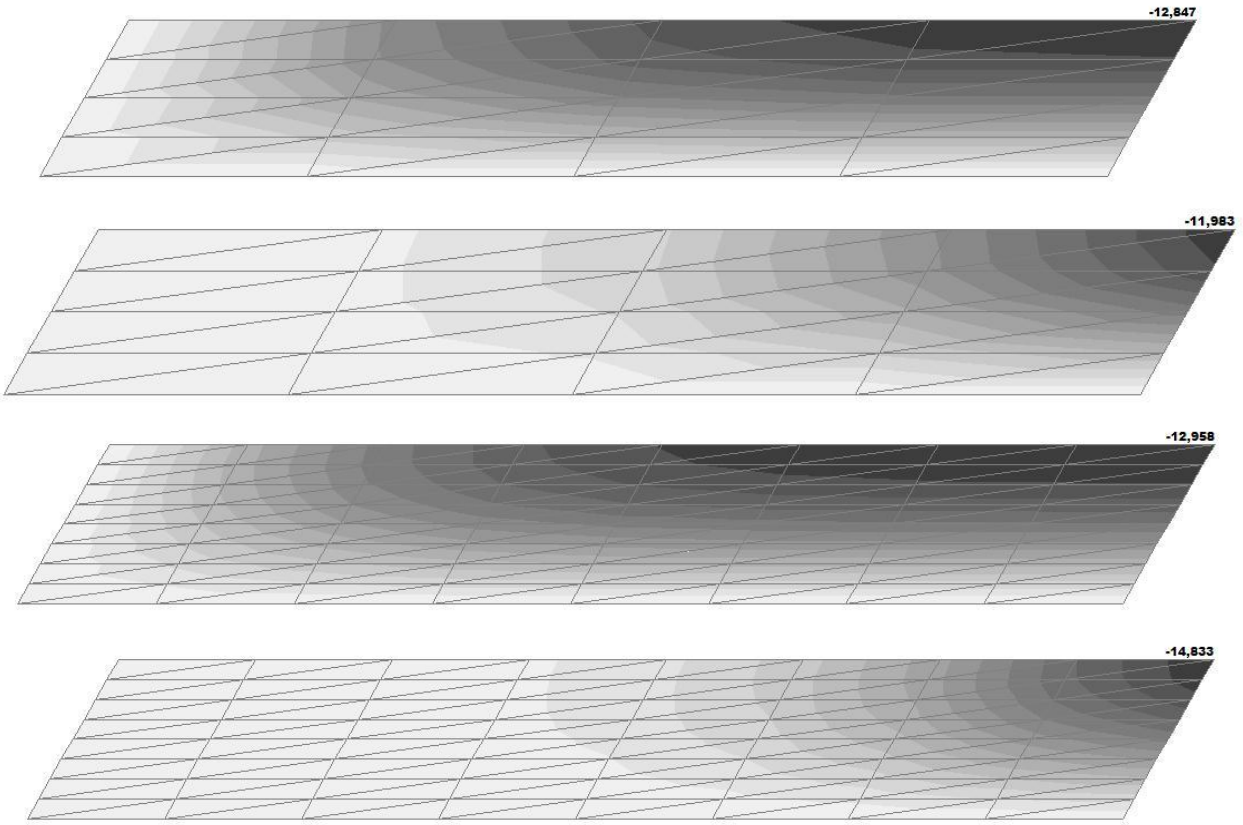
Модель 1. Расчетная схема



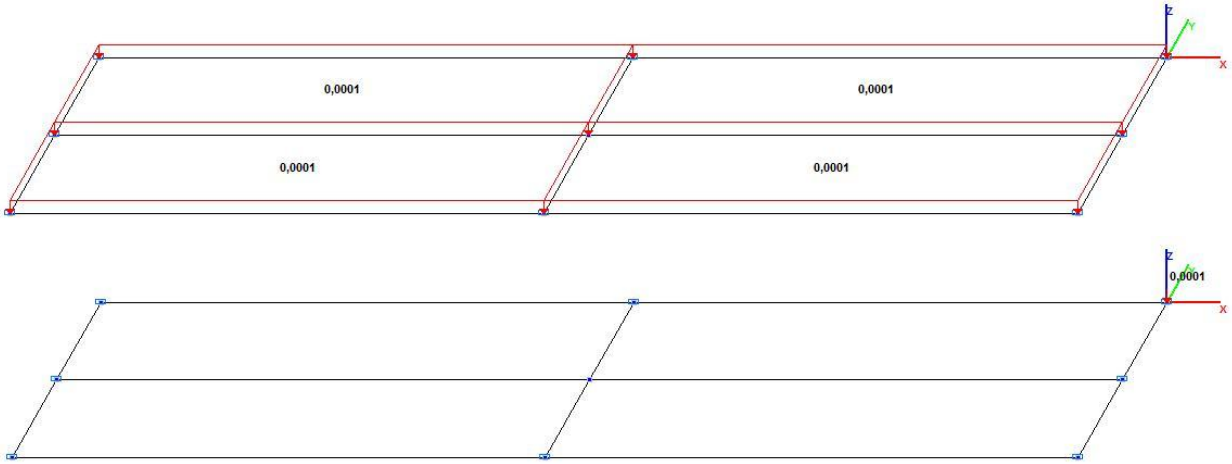


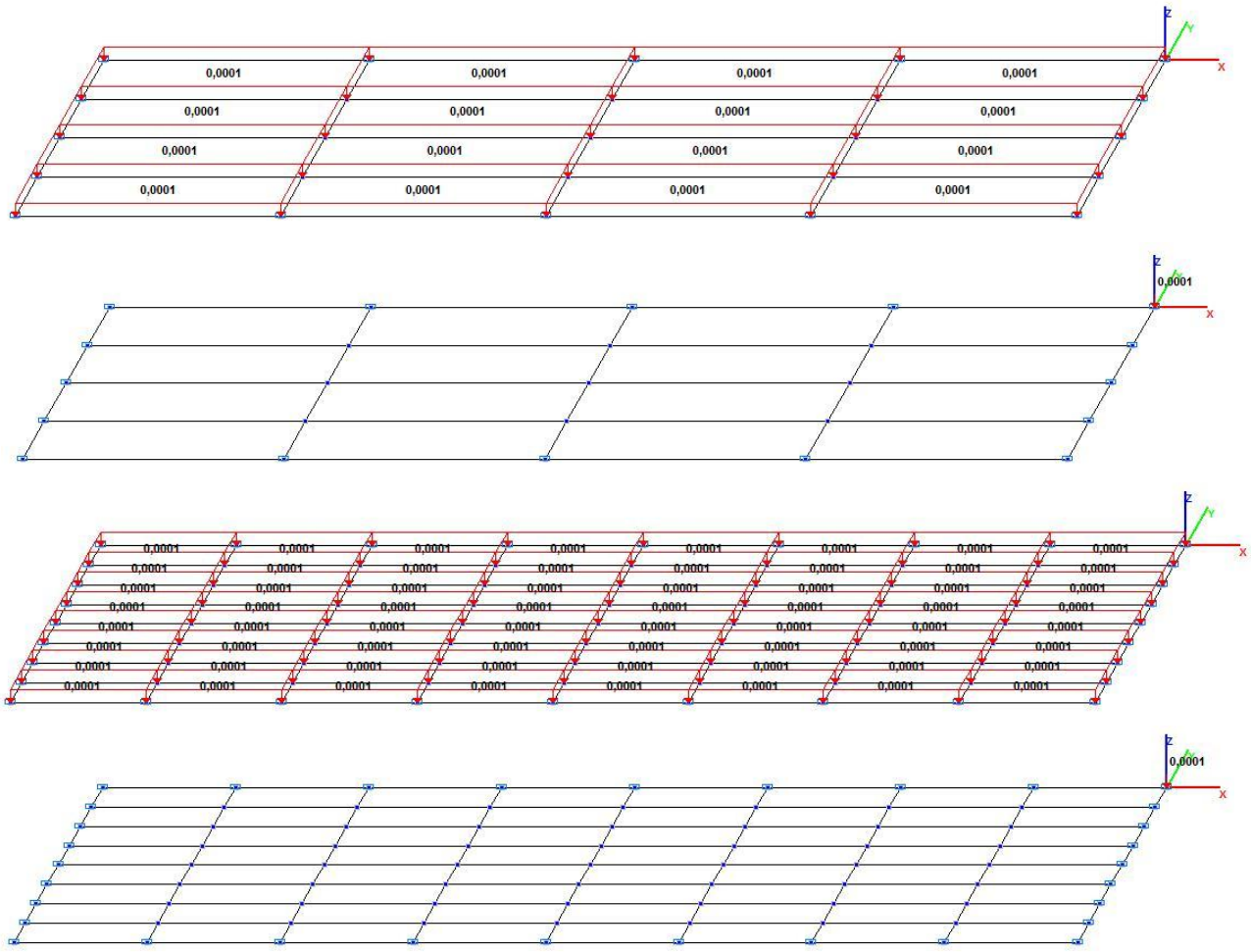
Модель 1. Деформированная схема



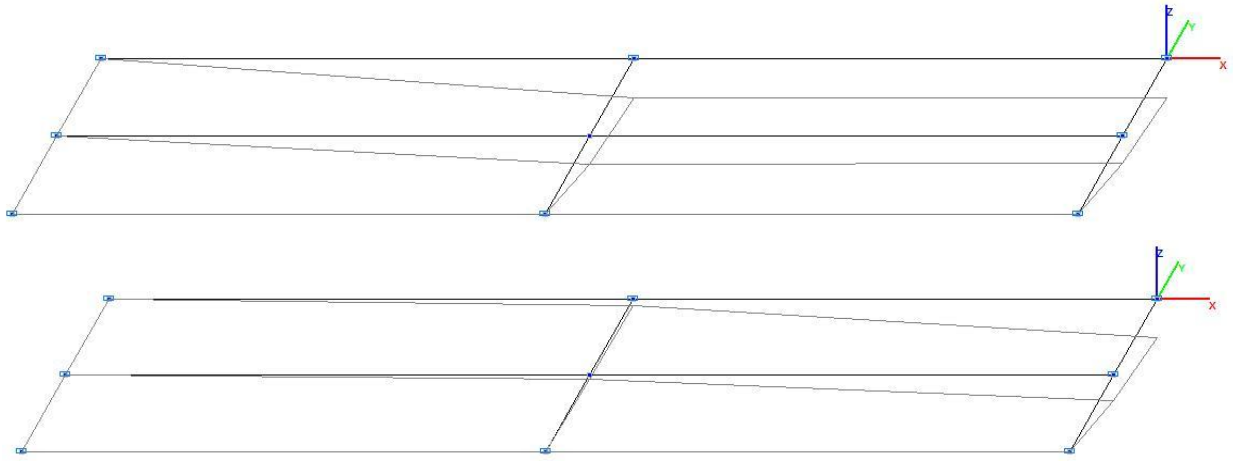


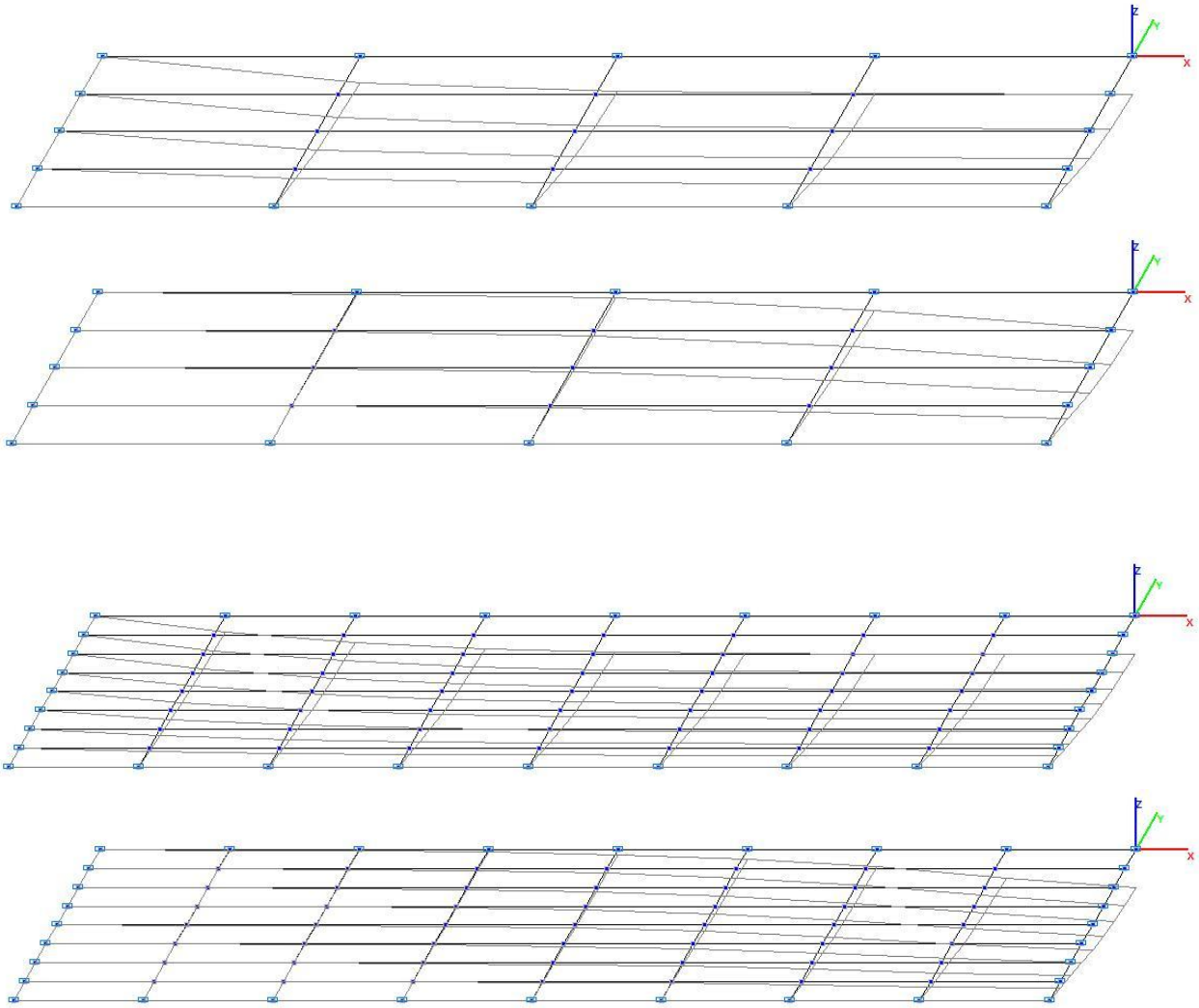
Модель 1. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)



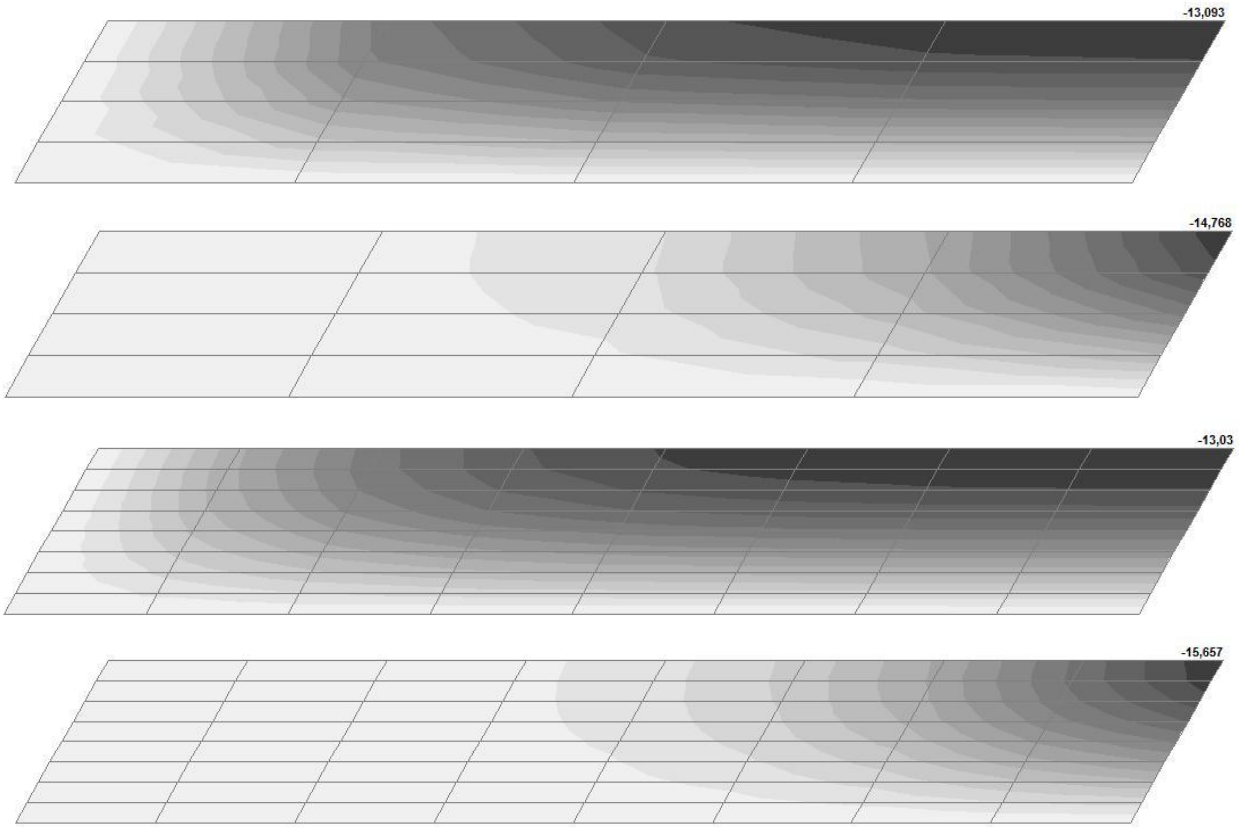


Модель 2. Расчетная схема

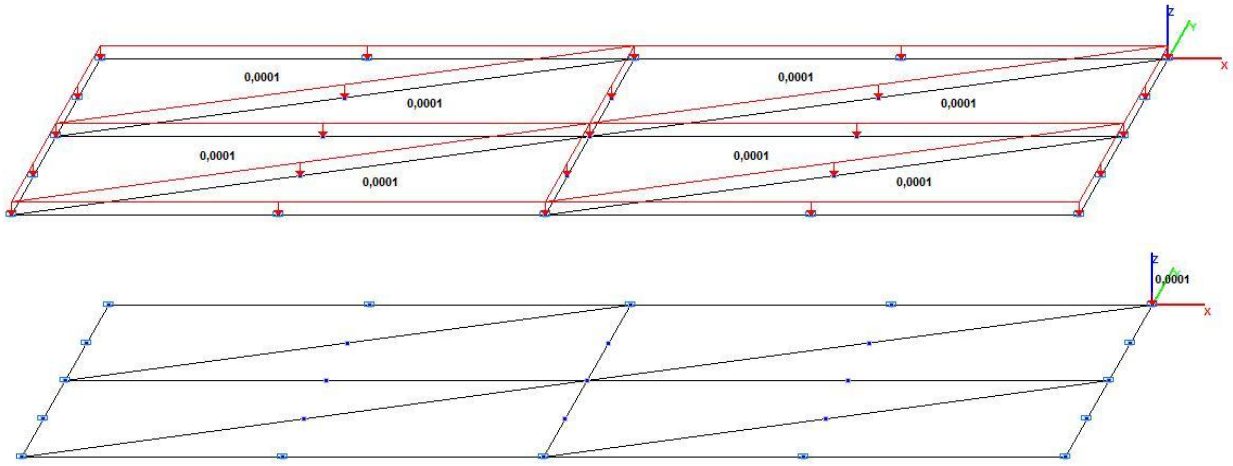


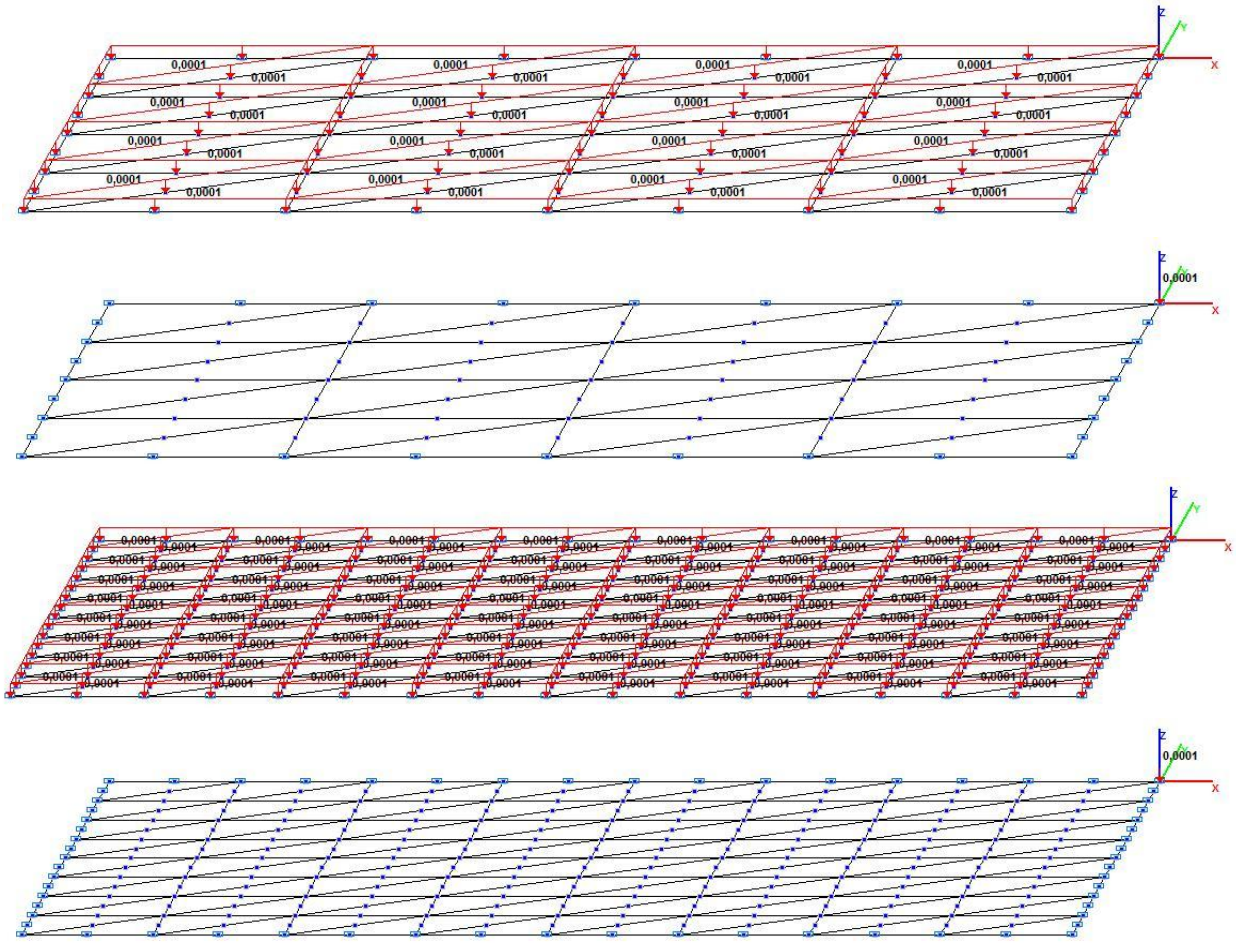


Модель 2. Деформированная схема

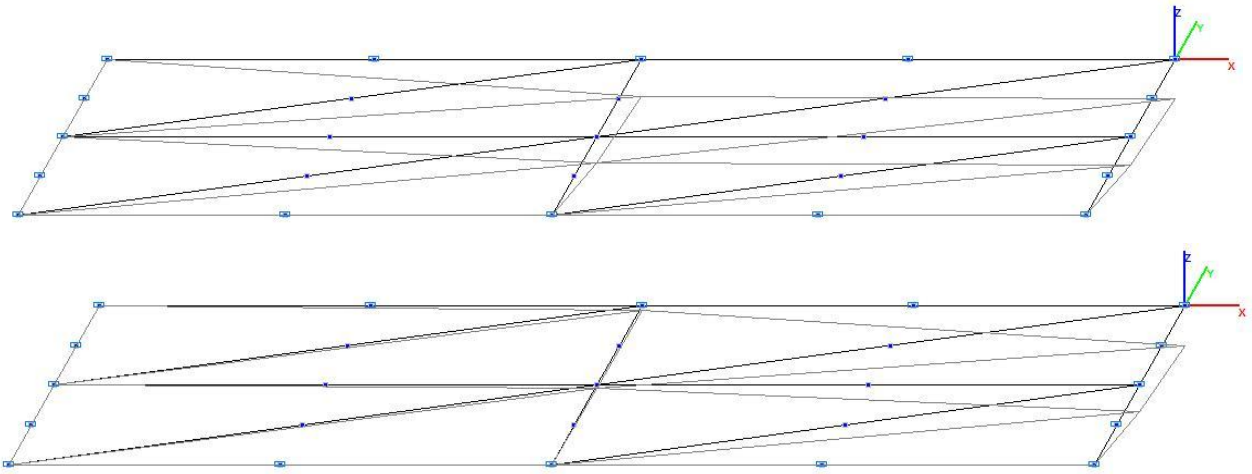


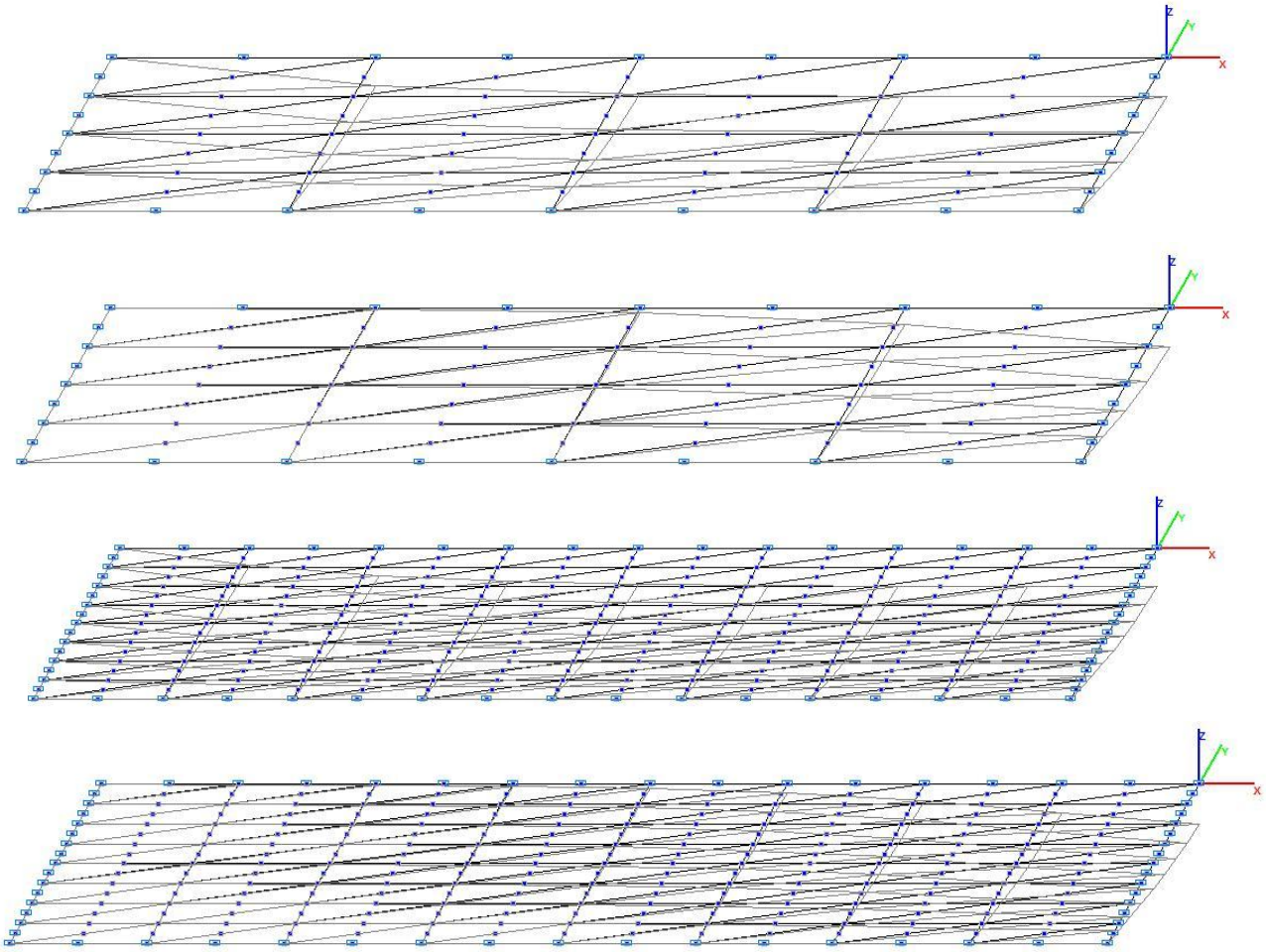
Модель 2.
Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)



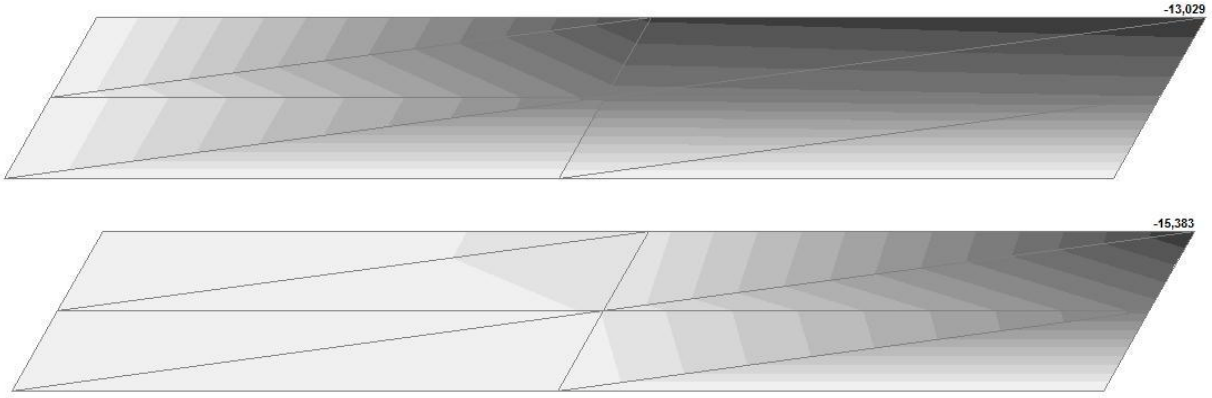


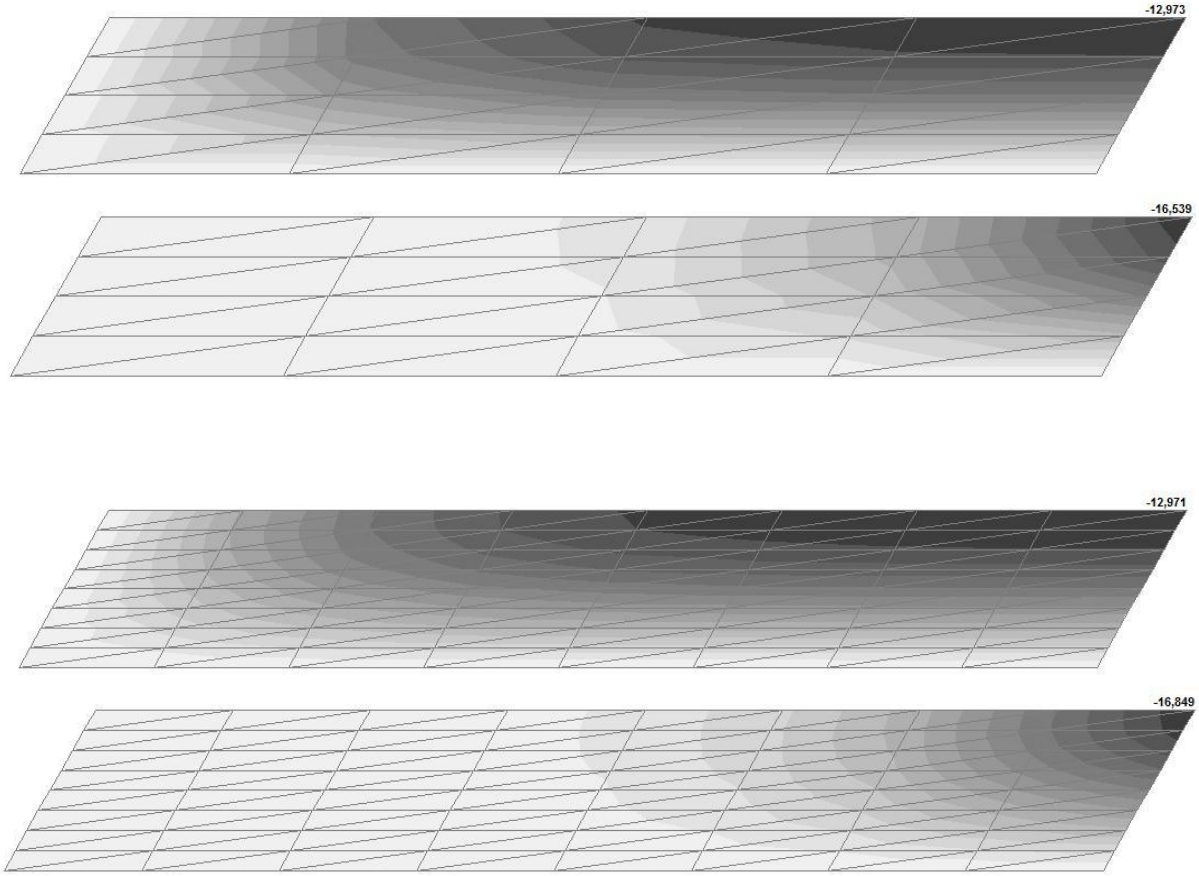
Модель 3. Расчетная схема



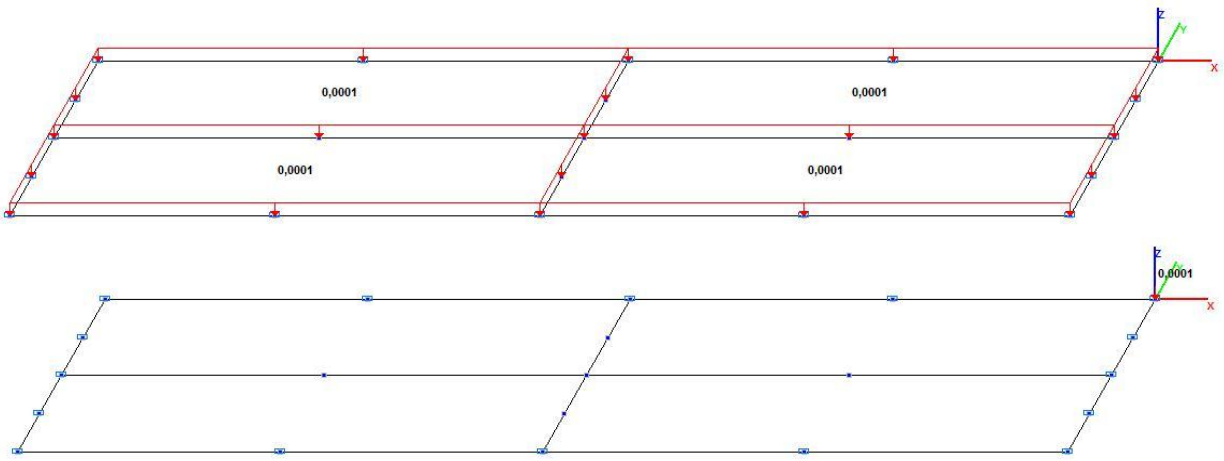


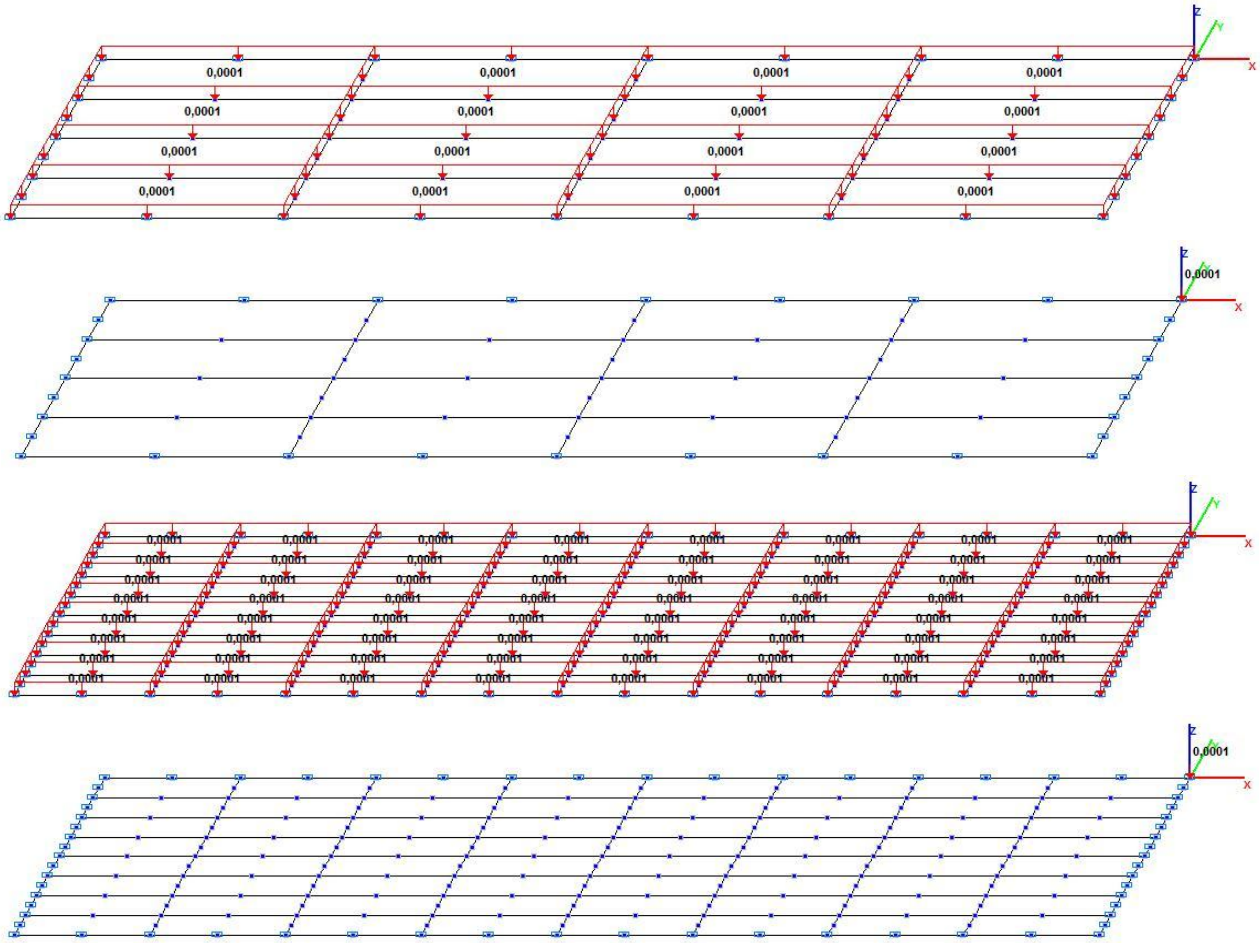
Модель 3. Деформированная схема



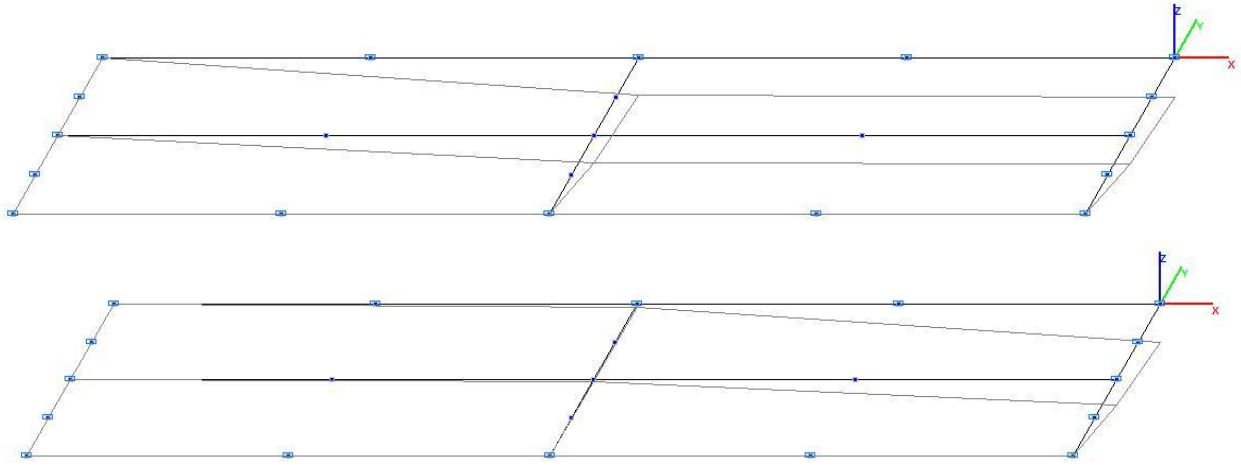


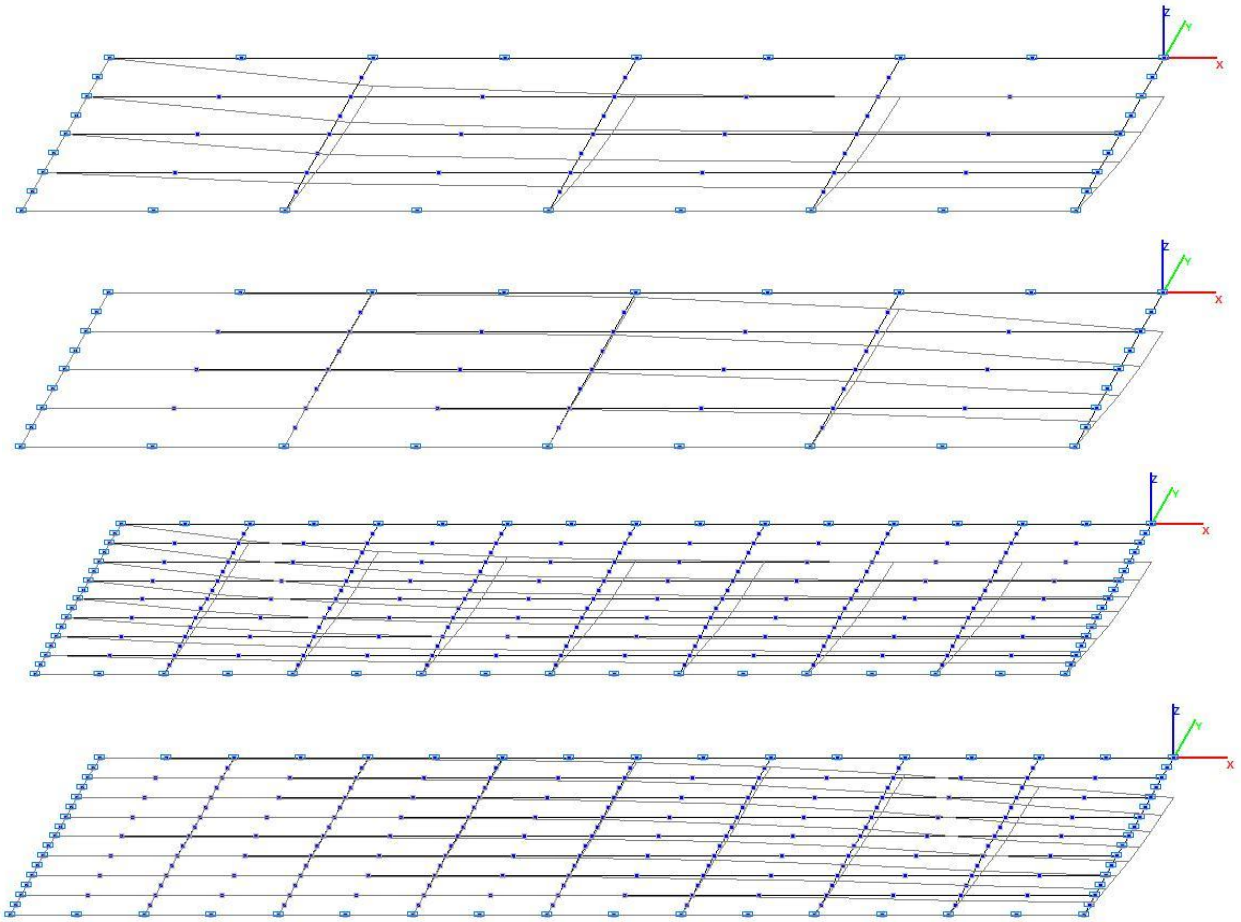
Модель 3.
Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)



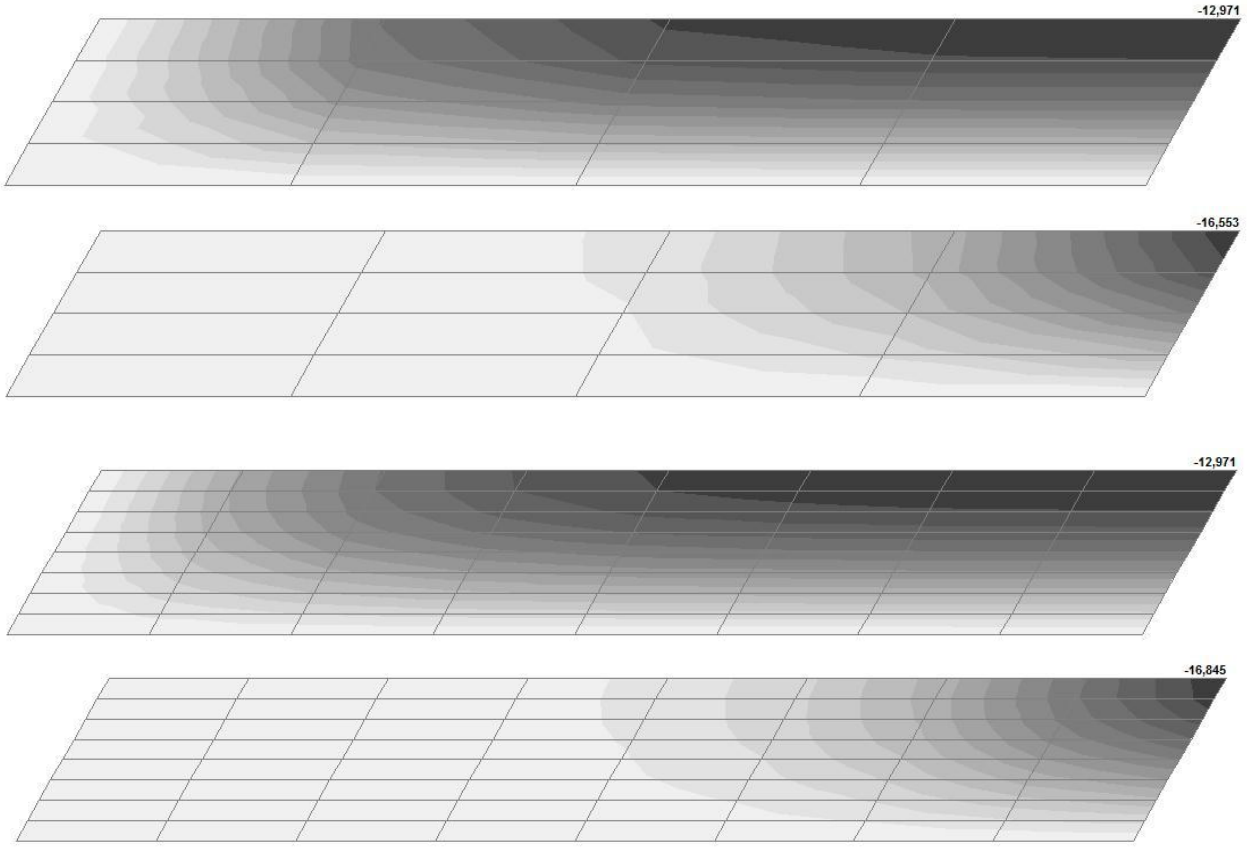


Модель 4. Расчетная схема

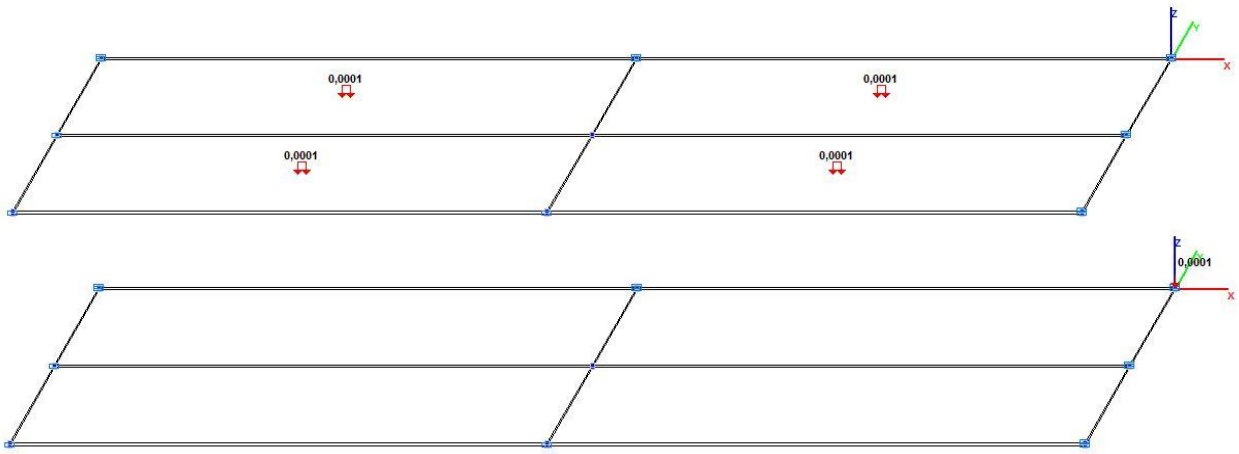


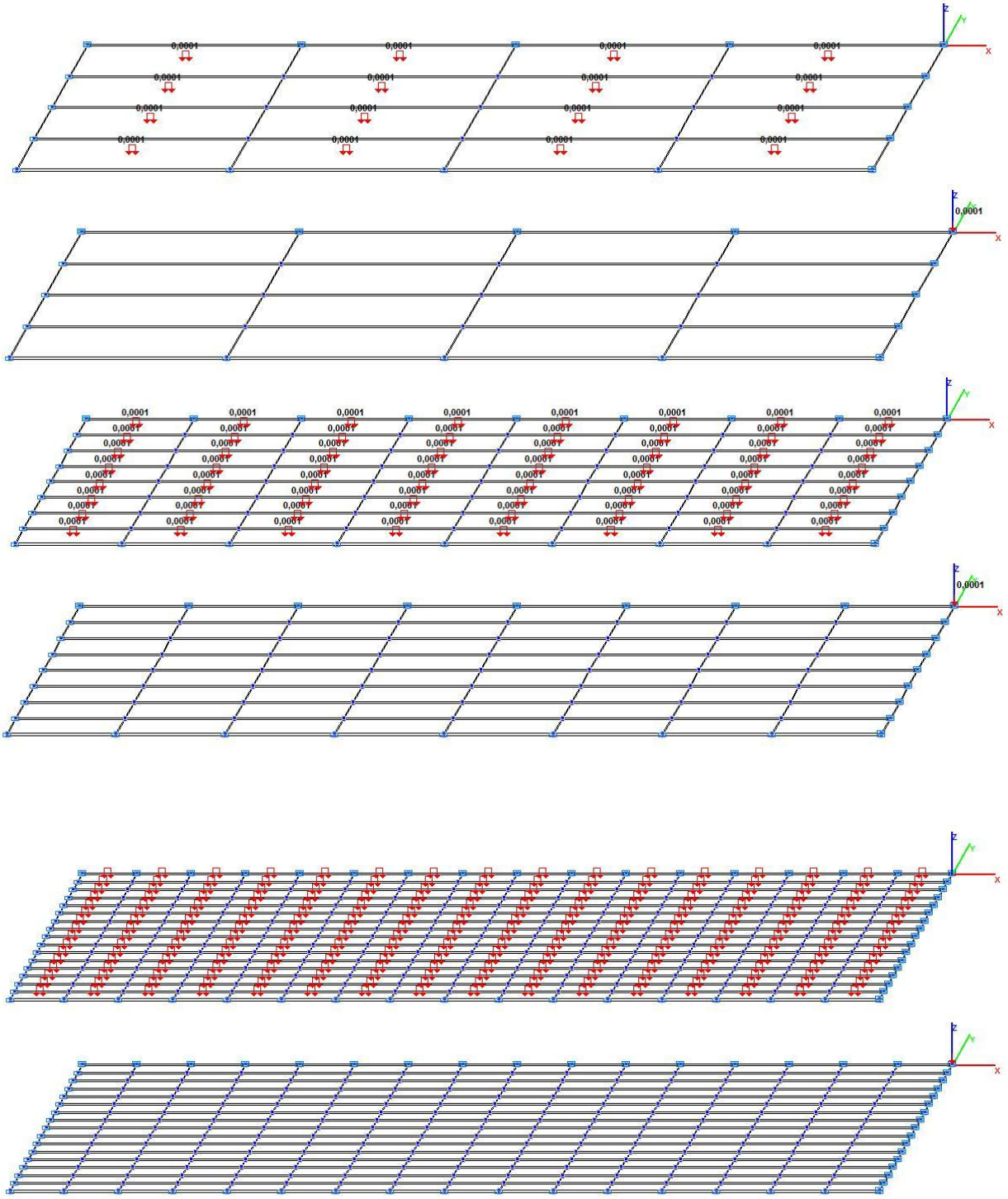


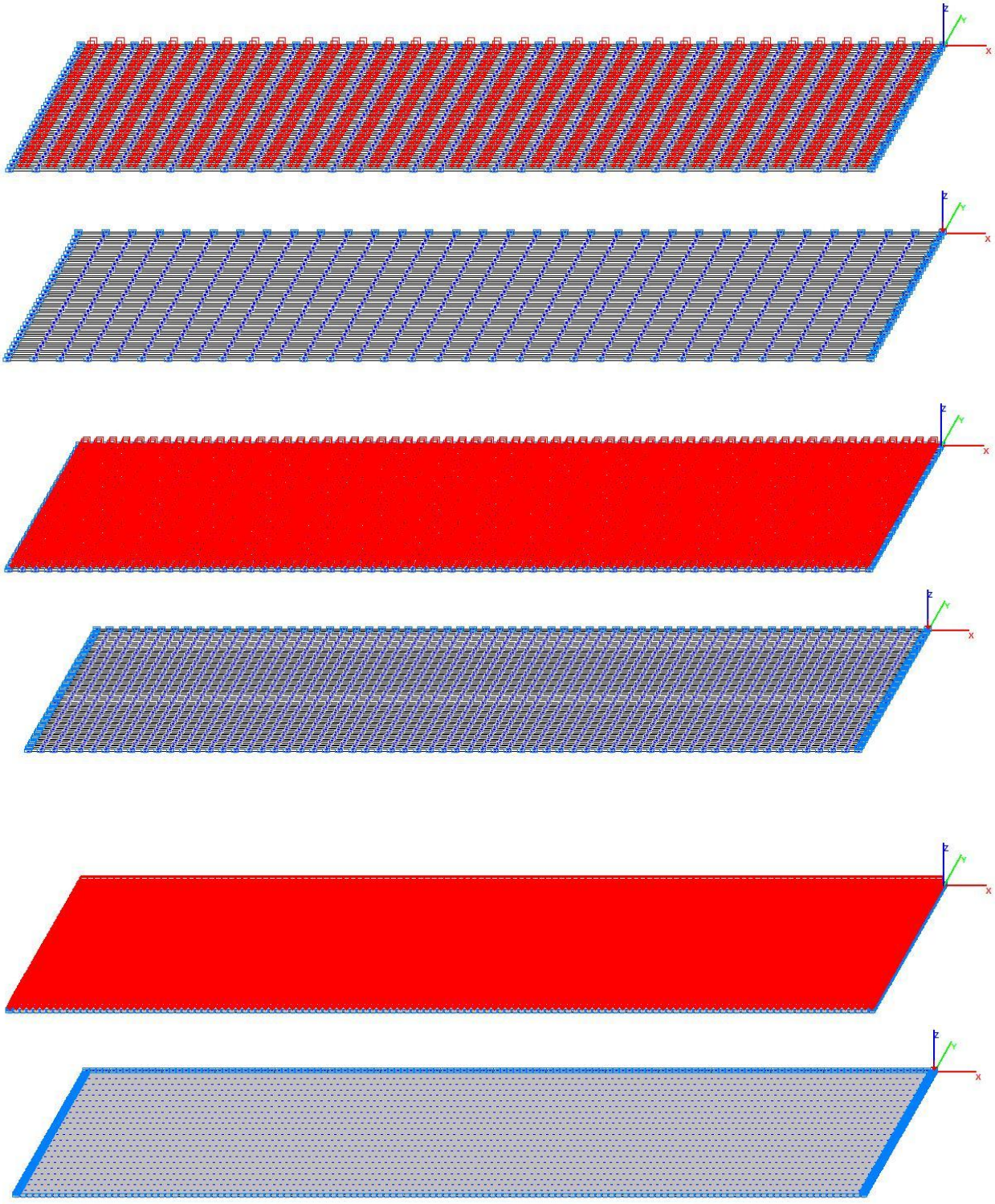
Модель 4. Деформированная схема



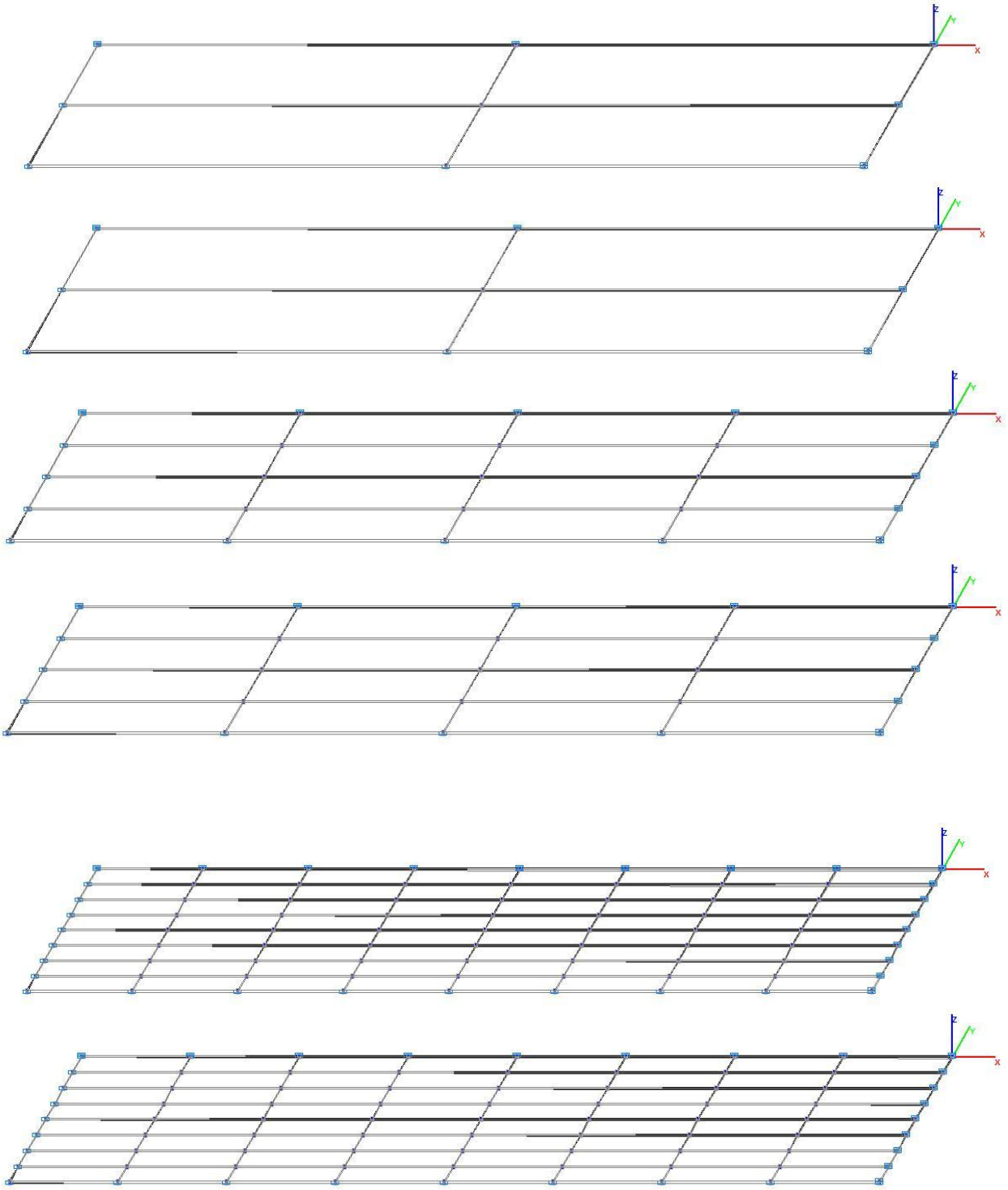
Модель 4. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)

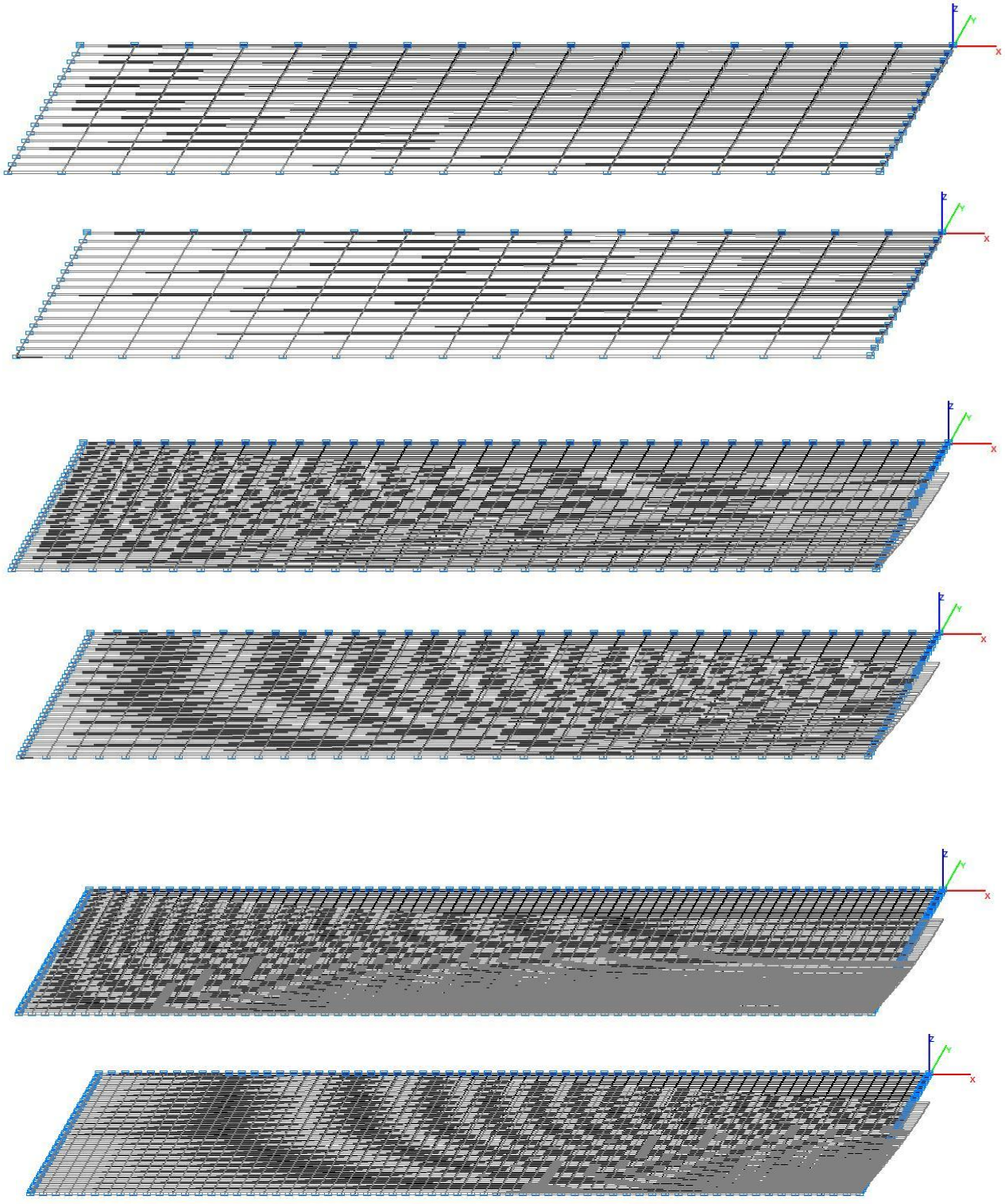


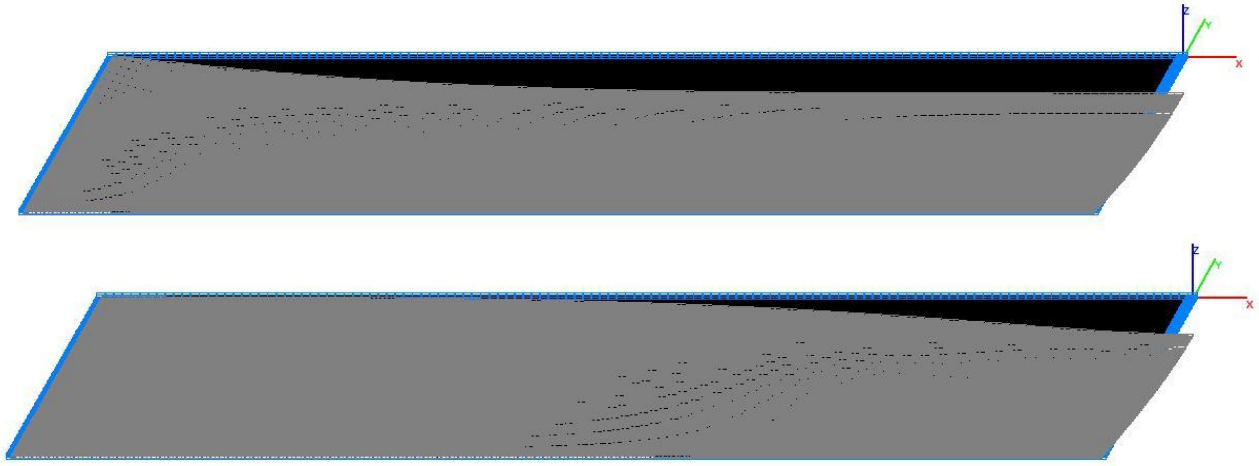




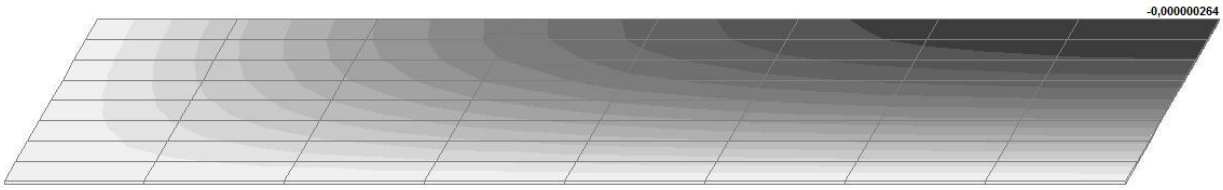
Модель 5. Расчетная схема

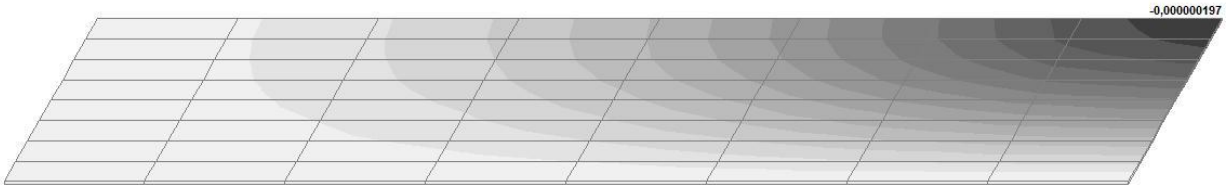


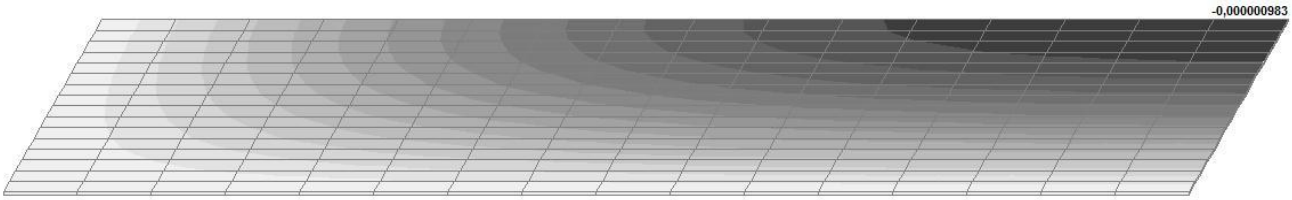


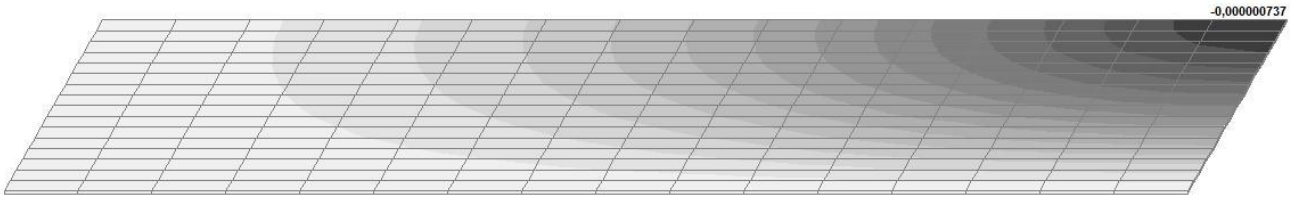


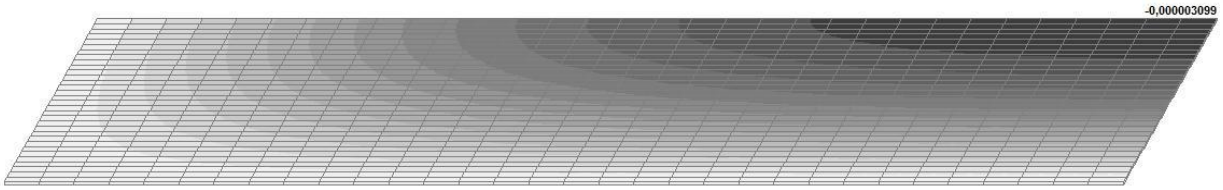
Модель 5. Деформированная схема

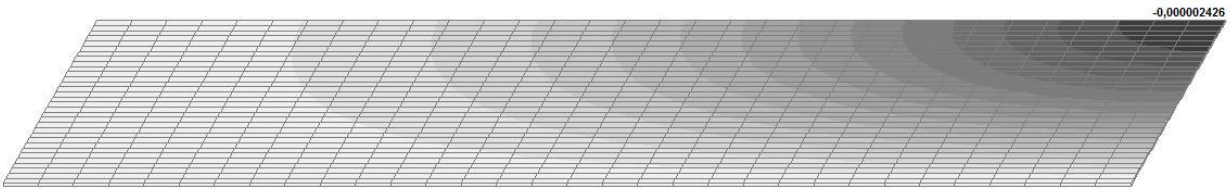

-0,000000264

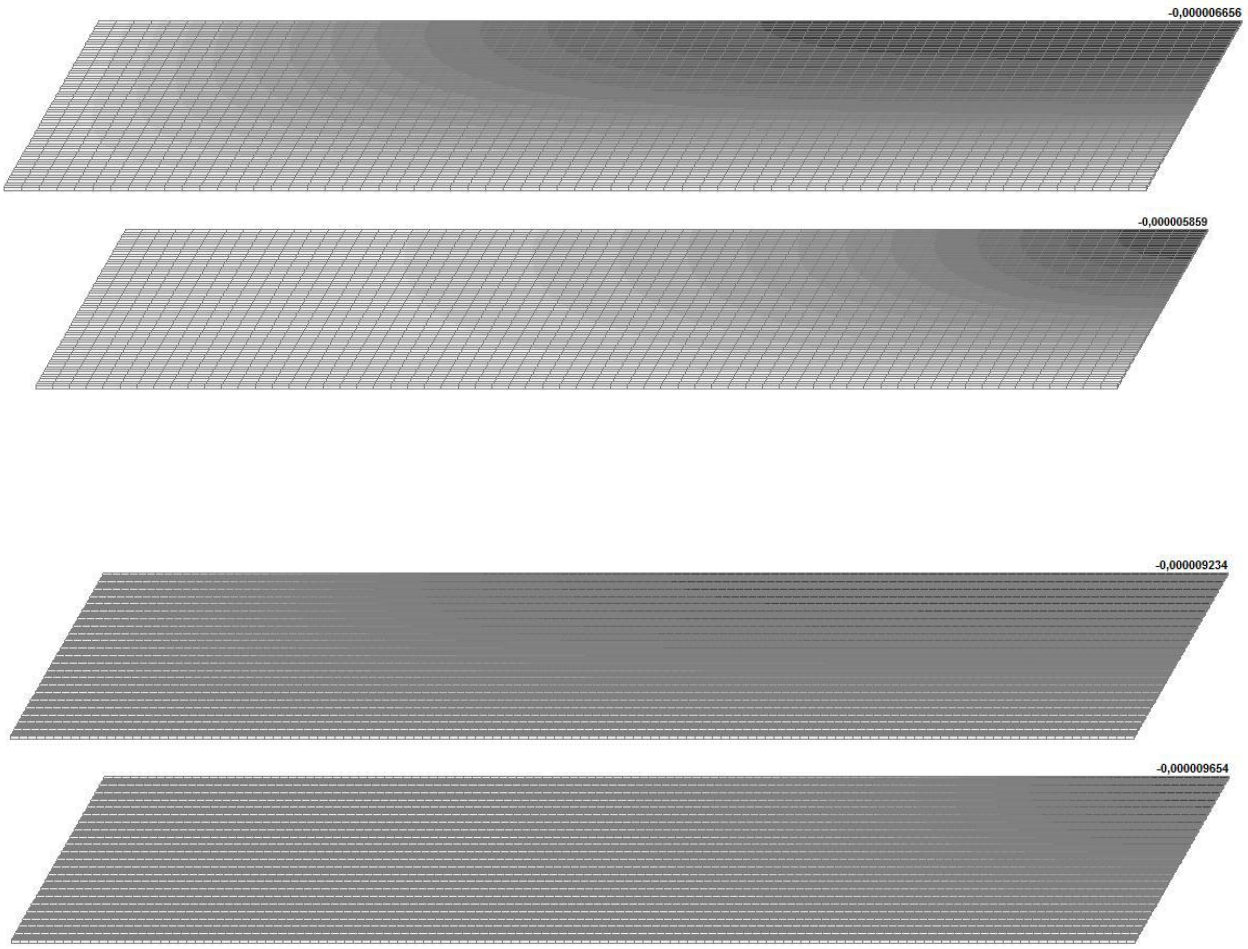

-0,000000197


-0,000000983

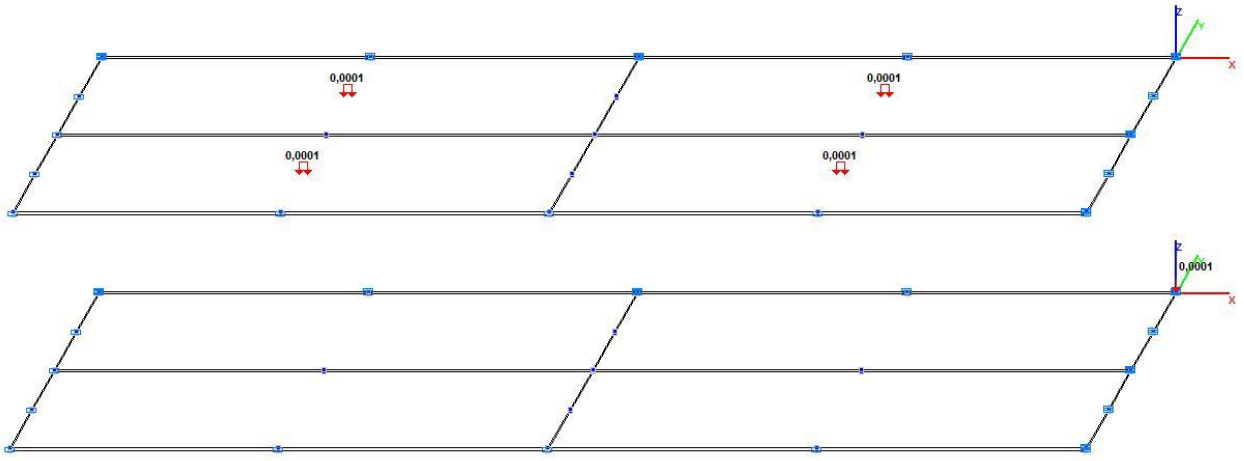

-0,000000737

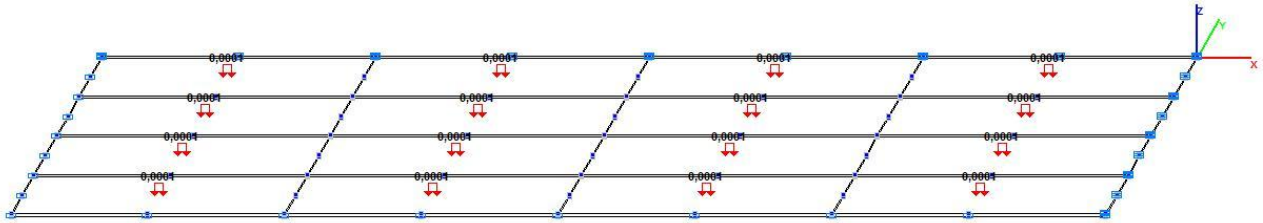

-0,000003099

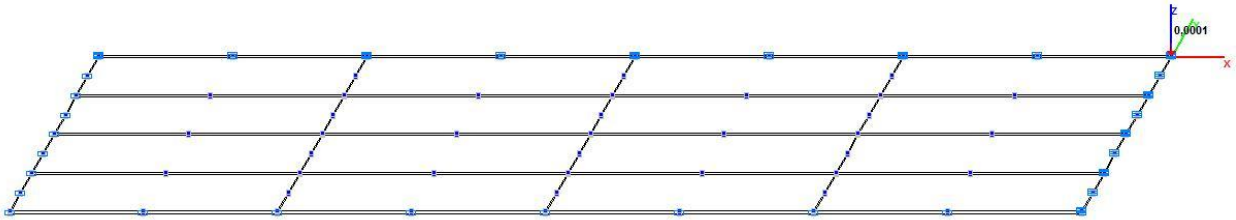

-0,000002426

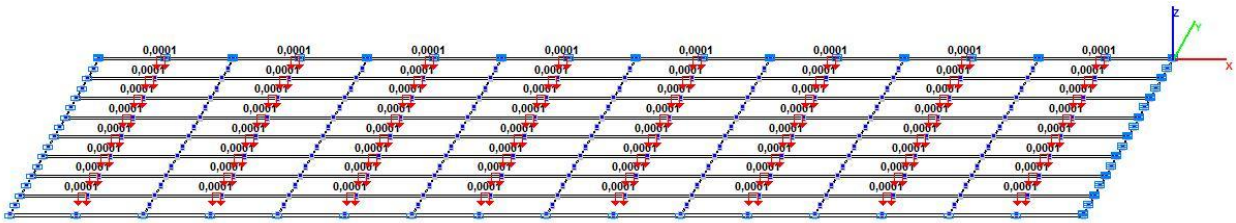


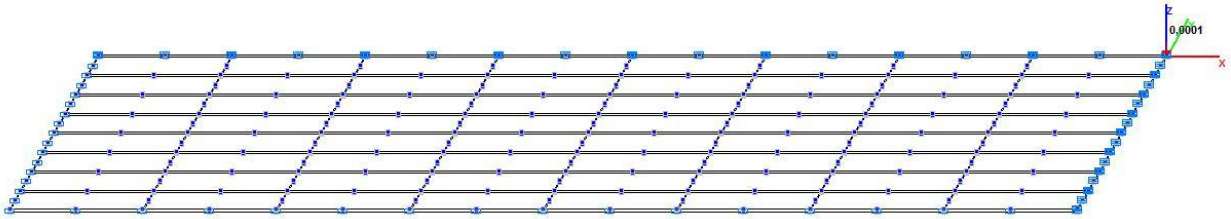
Модель 5. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)

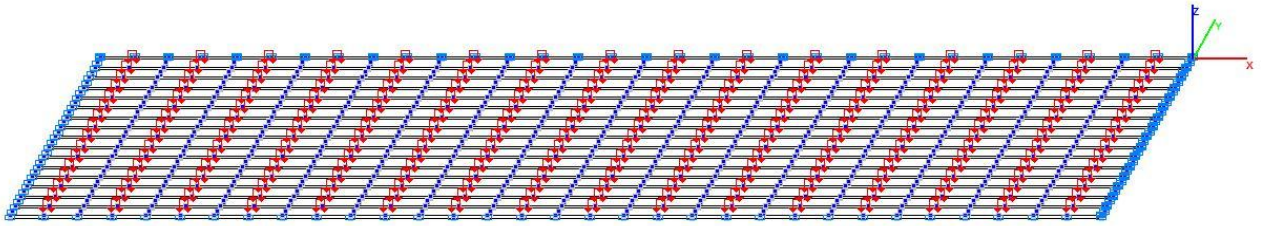


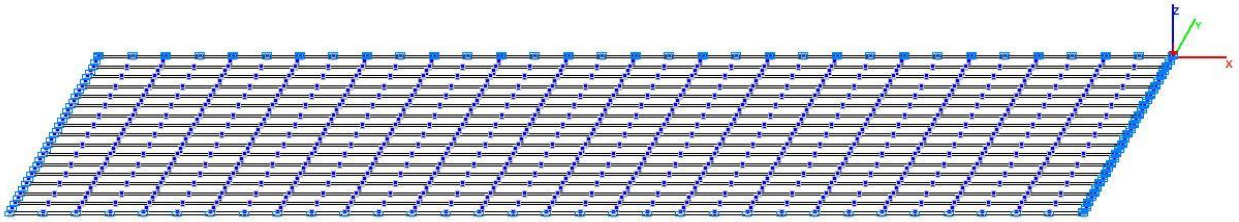

0,0001

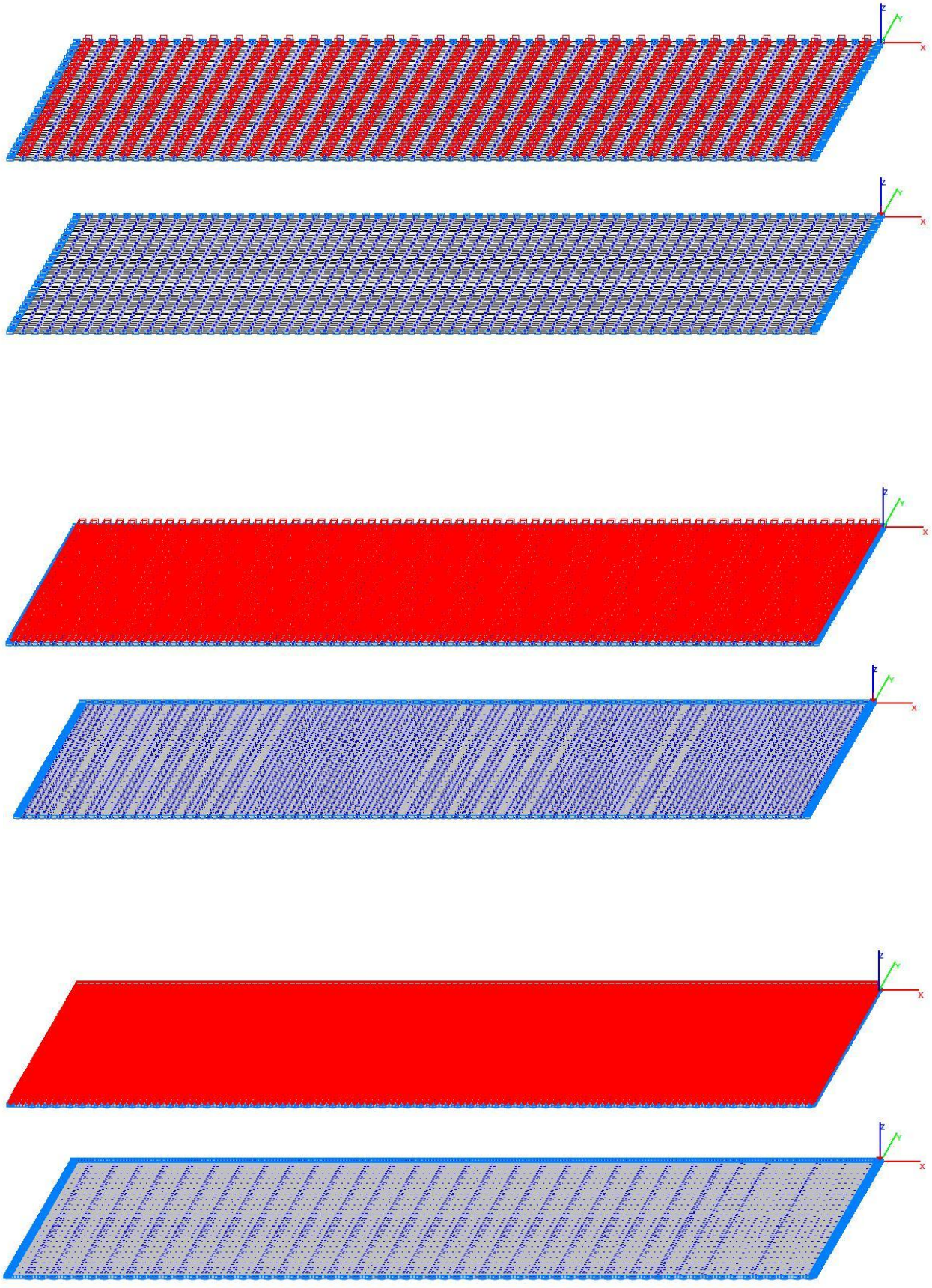

0,0001


0,0001

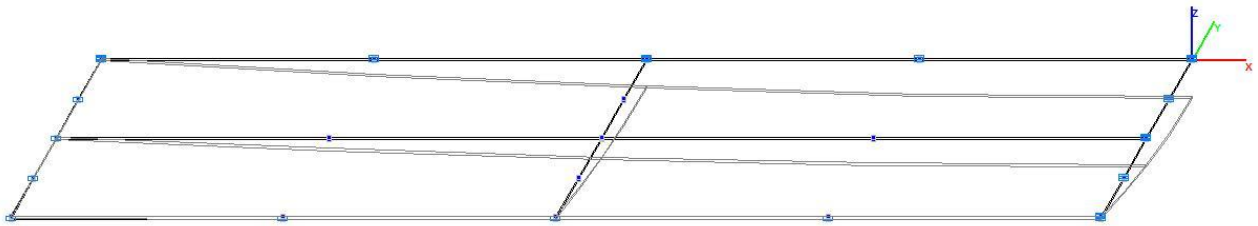

0,0001

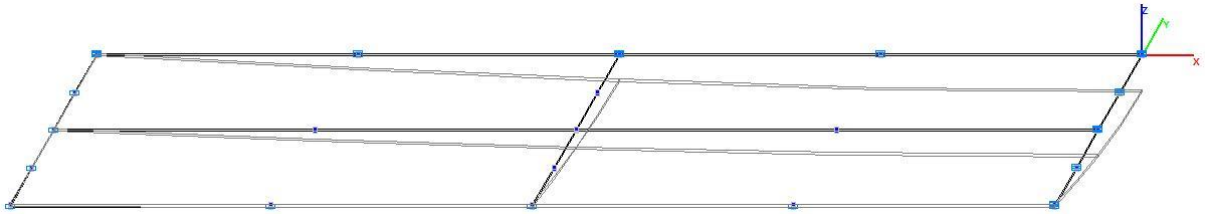


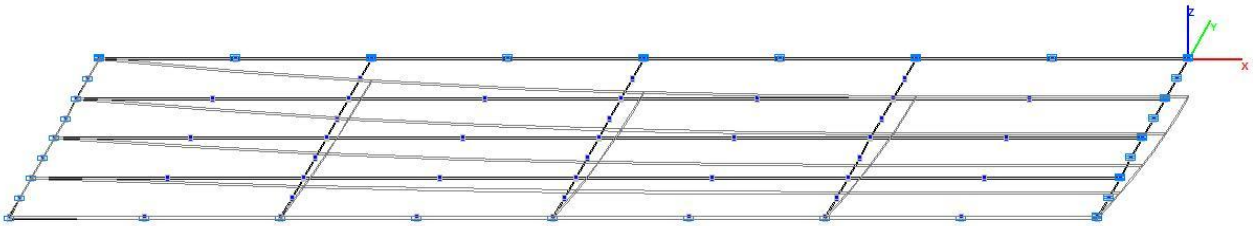


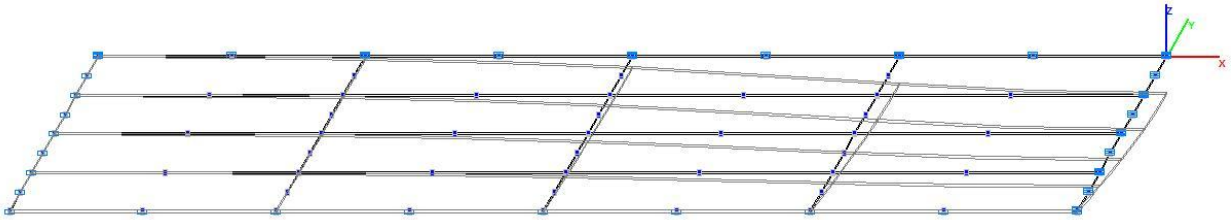


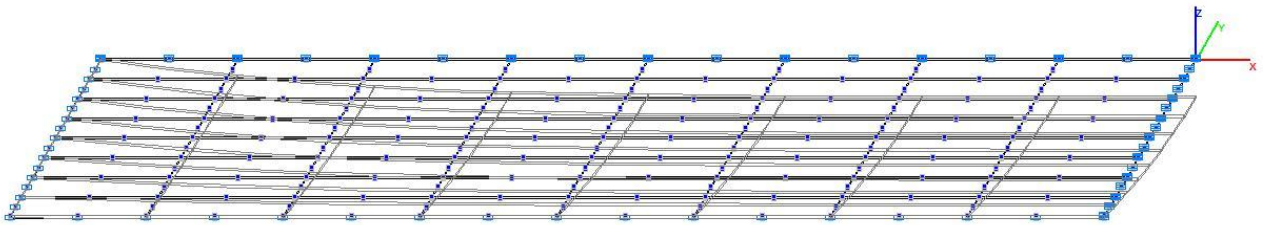
Модель 6. Расчетная схема

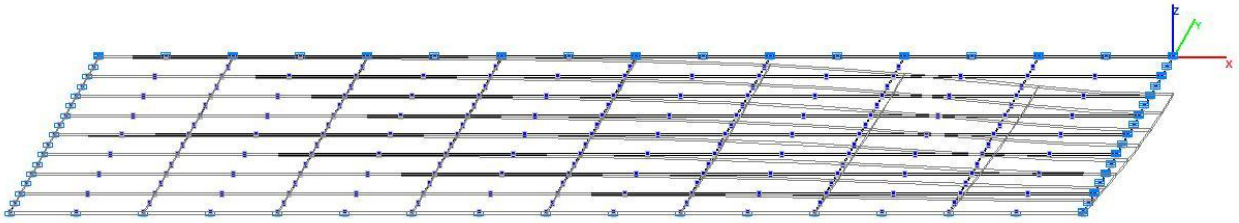


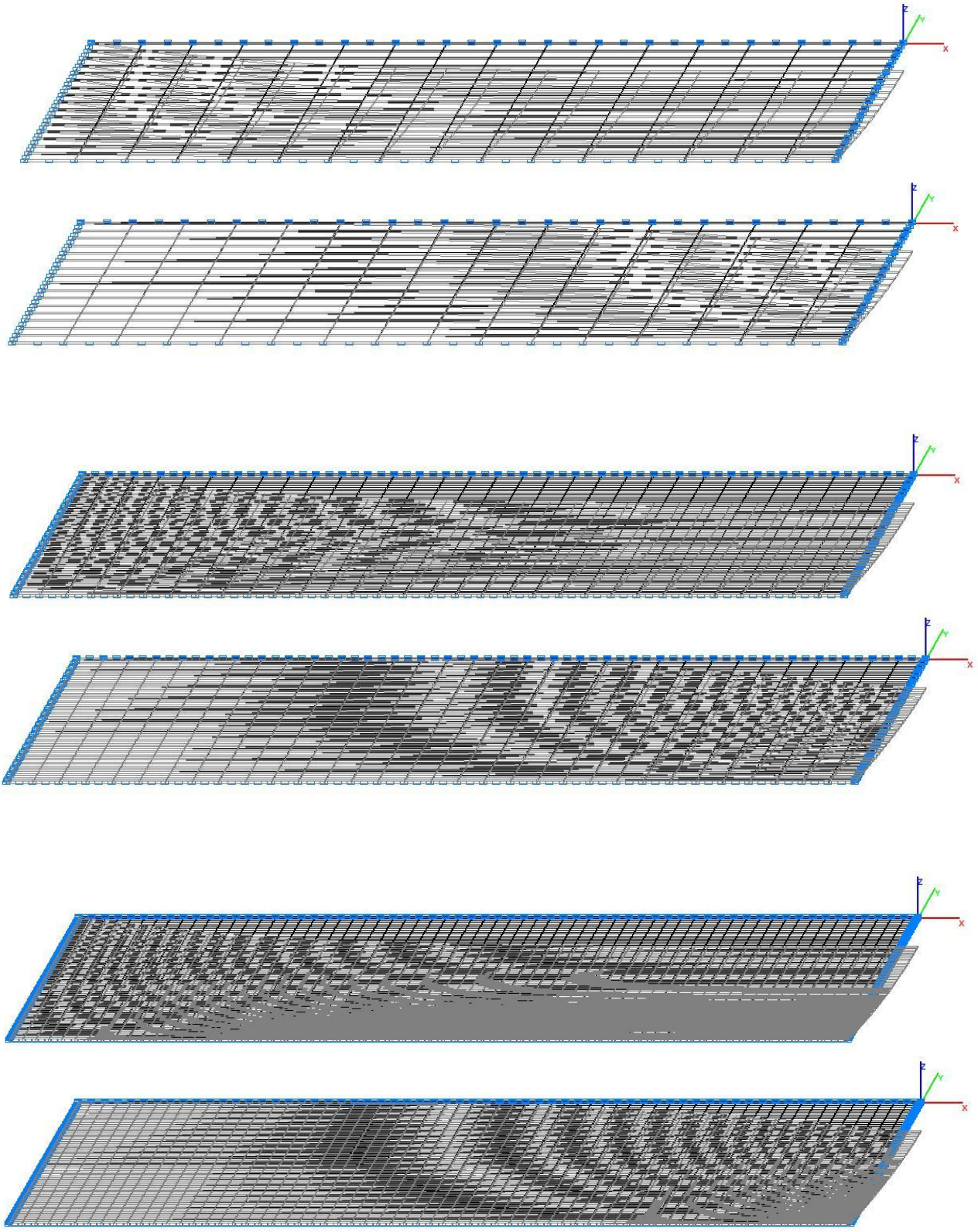




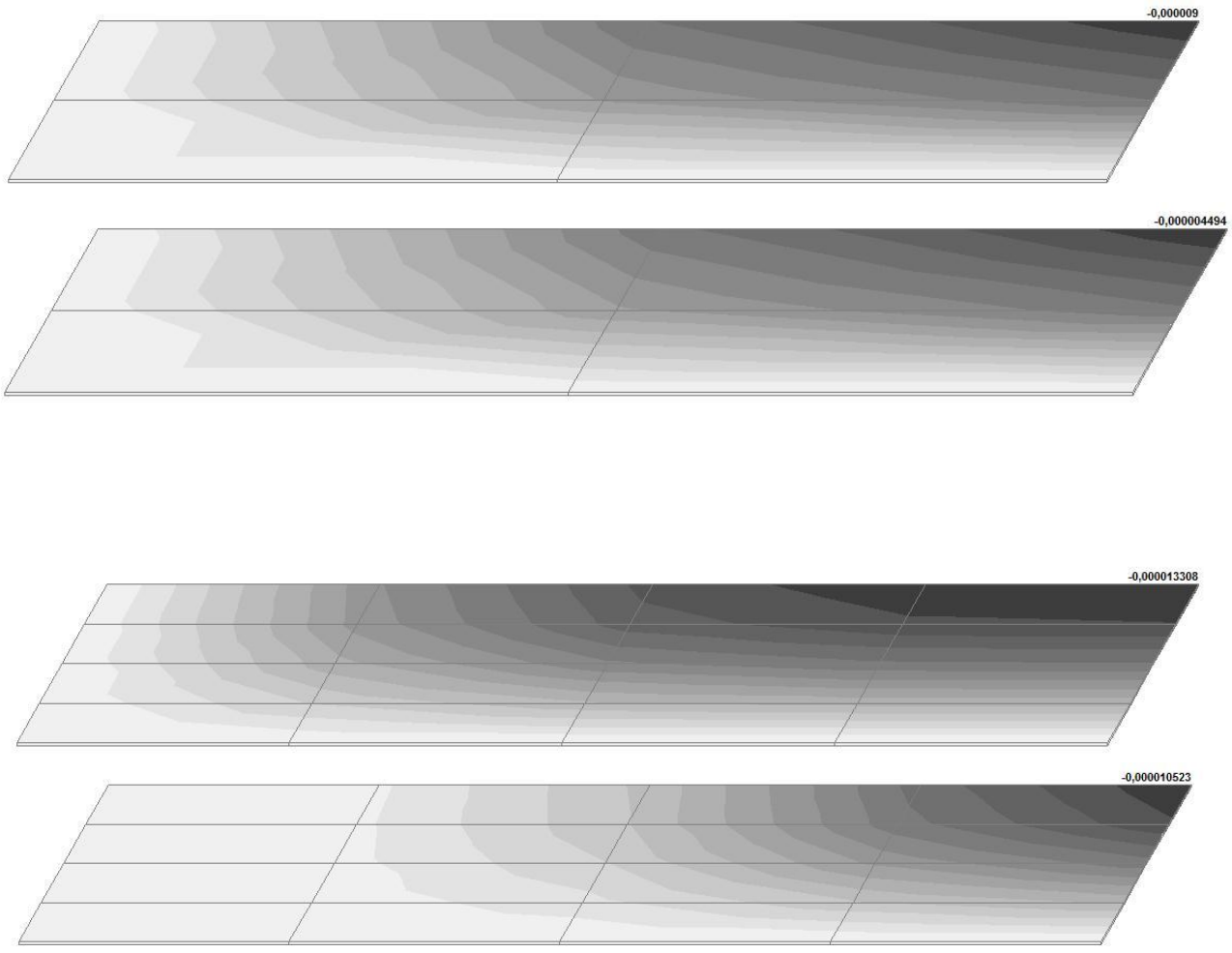


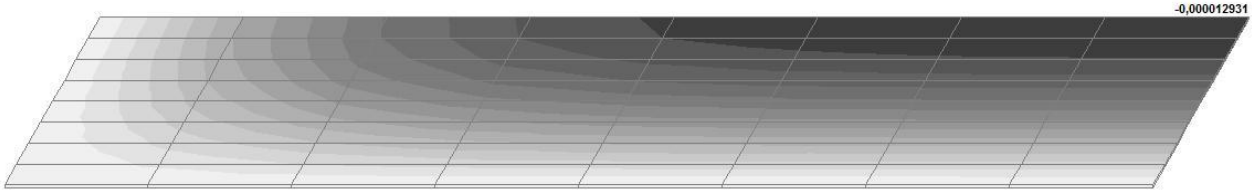




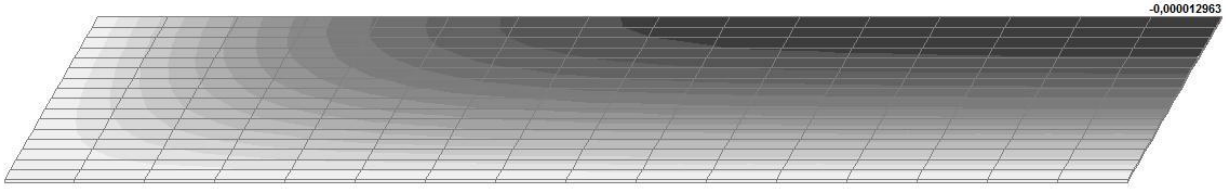


Модель 6. Деформированная схема

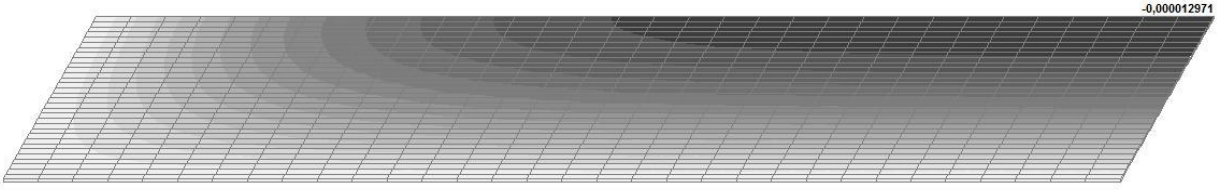


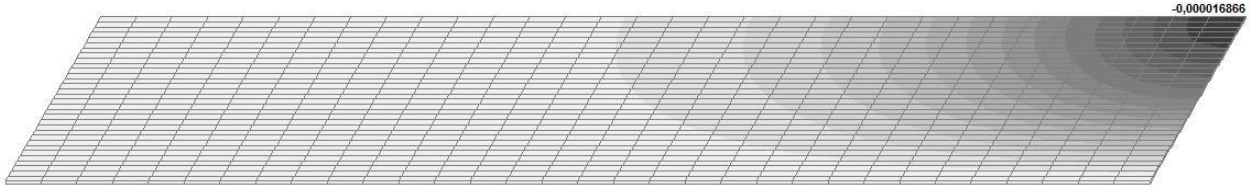

-0,000012931

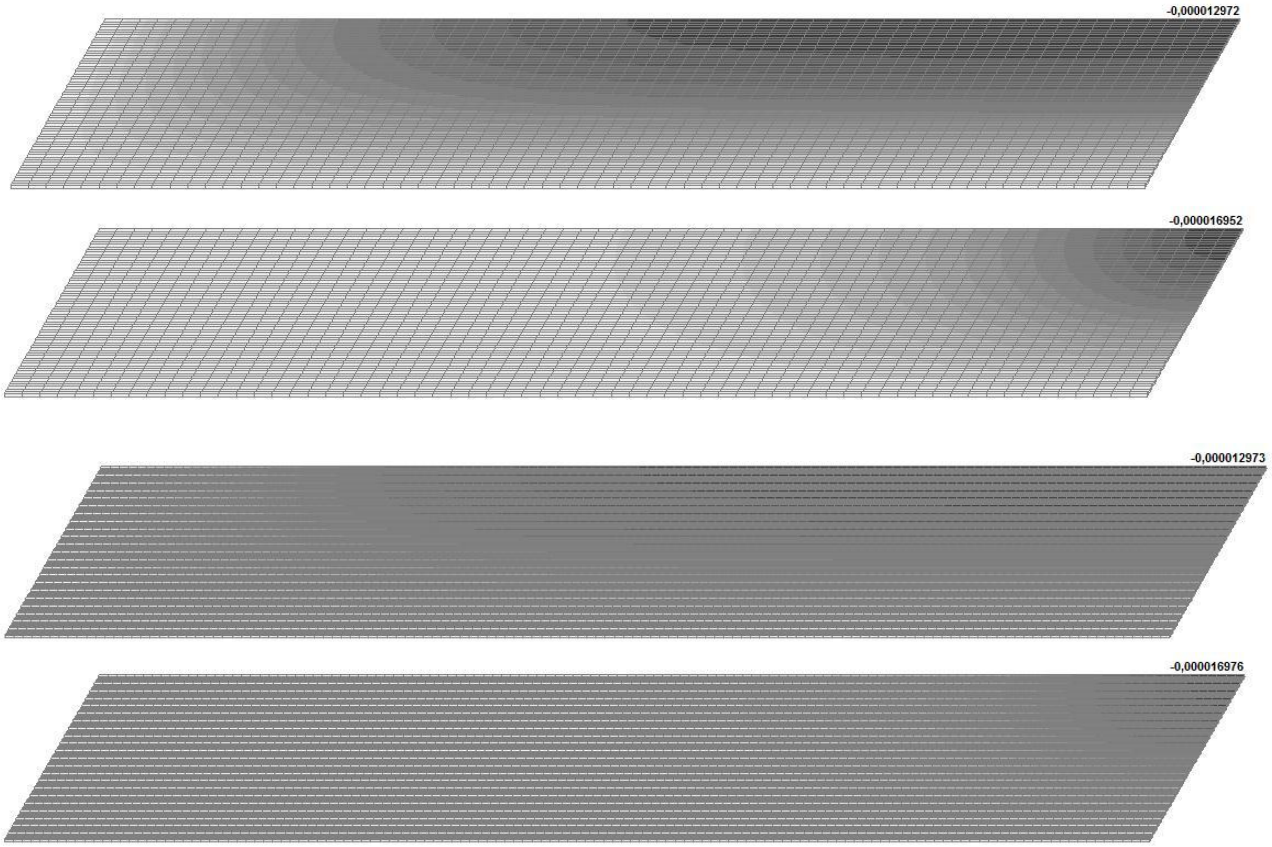
-0,00001548


-0,000012963

-0,000016572


-0,000012971


-0,000016866



Модель 6. Значения поперечных перемещений в центре свободно опертой прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)

Сравнение решений:

Поперечные перемещения в центре свободно опертой плоской прямоугольной пластины w_q от воздействия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	12.971	11.804	9.00
	4x4		12.847	0.96
	8x8		12.958	0.10
2 (Тип элемента 44)	2x2	12.971	12.528	3.42
	4x4		13.093	0.94
	8x8		13.030	0.45
3 (Тип элемента 45)	2x2	12.971	13.029	0.45
	4x4		12.973	0.02
	8x8		12.971	0.00
4 (Тип элемента 50)	2x2	12.971	13.020	0.38
	4x4		12.971	0.00
	8x8		12.971	0.00
5 (Тип элемента 36)	2x2	$12.971 \cdot 10^{-6}$	$0.017 \cdot 10^{-6}$	99.87
	4x4		$0.067 \cdot 10^{-6}$	99.48
	8x8		$0.264 \cdot 10^{-6}$	97.96
	16x16		$0.983 \cdot 10^{-6}$	92.42
	32x32		$3.099 \cdot 10^{-6}$	76.11
	64x64		$6.656 \cdot 10^{-6}$	48.69
	128x128		$9.234 \cdot 10^{-6}$	28.81
6 (Тип элемента 37)	2x2	$12.971 \cdot 10^{-6}$	$9.000 \cdot 10^{-6}$	30.61
	4x4		$13.308 \cdot 10^{-6}$	2.60
	8x8		$12.931 \cdot 10^{-6}$	0.31
	16x16		$12.963 \cdot 10^{-6}$	0.06
	32x32		$12.971 \cdot 10^{-6}$	0.00
	64x64		$12.972 \cdot 10^{-6}$	0.01

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
	128x128		$12.973 \cdot 10^{-6}$	0.02

Поперечные перемещения в центре свободно опертой плоской прямоугольной пластины w_P от воздействия сосредоточенной поперечной силы в центре P

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	16.960	7.771	54.18
	4x4		11.983	29.34
	8x8		14.833	12.54
2 (Тип элемента 44)	2x2	16.960	12.674	25.27
	4x4		14.768	12.92
	8x8		15.657	7.68
3 (Тип элемента 45)	2x2	16.960	15.383	9.30
	4x4		16.539	2.48
	8x8		16.849	0.65
4 (Тип элемента 50)	2x2	16.960	15.862	6.47
	4x4		16.553	2.40
	8x8		16.845	0.68
5 (Тип элемента 36)	2x2	$16.960 \cdot 10^{-6}$	$0.014 \cdot 10^{-6}$	99.92
	4x4		$0.051 \cdot 10^{-6}$	99.70
	8x8		$0.197 \cdot 10^{-6}$	98.84
	16x16		$0.737 \cdot 10^{-6}$	95.65
	32x32		$2.426 \cdot 10^{-6}$	85.70
	64x64		$5.859 \cdot 10^{-6}$	65.45
	128x128		$9.654 \cdot 10^{-6}$	43.08
6 (Тип элемента 37)	2x2	$16.960 \cdot 10^{-6}$	$4.494 \cdot 10^{-6}$	73.50
	4x4		$10.523 \cdot 10^{-6}$	37.95
	8x8		$15.480 \cdot 10^{-6}$	8.73
	16x16		$16.572 \cdot 10^{-6}$	2.29
	32x32		$16.866 \cdot 10^{-6}$	0.55
	64x64		$16.952 \cdot 10^{-6}$	0.05
	128x128		$16.976 \cdot 10^{-6}$	0.09

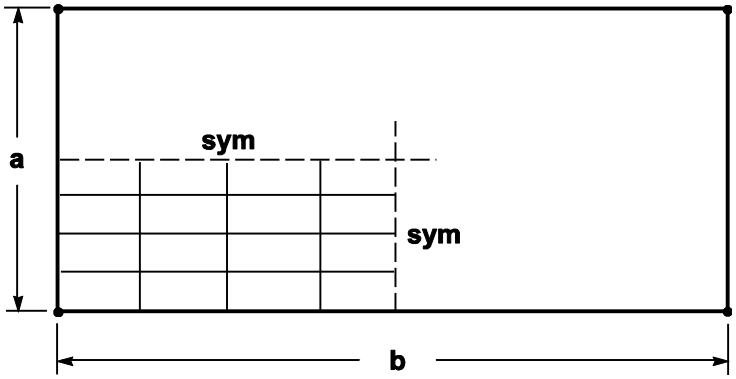
Замечания: При аналитическом решении значений поперечных перемещений в центре свободно опертой плоской прямоугольной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$w_q = \frac{4 \cdot q \cdot a^4}{\pi^5 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^5} \cdot \left[1 - \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \cdot th\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) + 2}{2 \cdot ch\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \right] \cdot sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\};$$

$$w_P = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot \pi^3 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^3} \cdot \left[th\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) - \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a}}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \right] \cdot sin^2\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\},$$ где:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}.$$

Заделанная по наружным кромкам плоская прямоугольная пластина под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре.



Цель: Проверка точного воспроизведения значений поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам плоской прямоугольной пластины от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки и сосредоточенной поперечной силы в центре.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	**Описание файла расчета**
Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_42_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_42_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_42_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_44_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_44_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_44_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_45_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_45_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_45_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_50_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_50_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Shell_50_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_8x8.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_16x16.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_32x32.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_64x64.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_36_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128
Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_2x2.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_4x4.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_8x8.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_16x16.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_32x32.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_64x64.SPR Bending_of_rectangular_flat_plate_Clamped_supported_Solid_37_Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128

Формулировка задачи: Заделанная по наружным кромкам плоская прямоугольная пластина подвергается воздействию равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q и сосредоточенной поперечной силы в центре P. Проверить: точное воспроизведение значений поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам плоской прямоугольной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

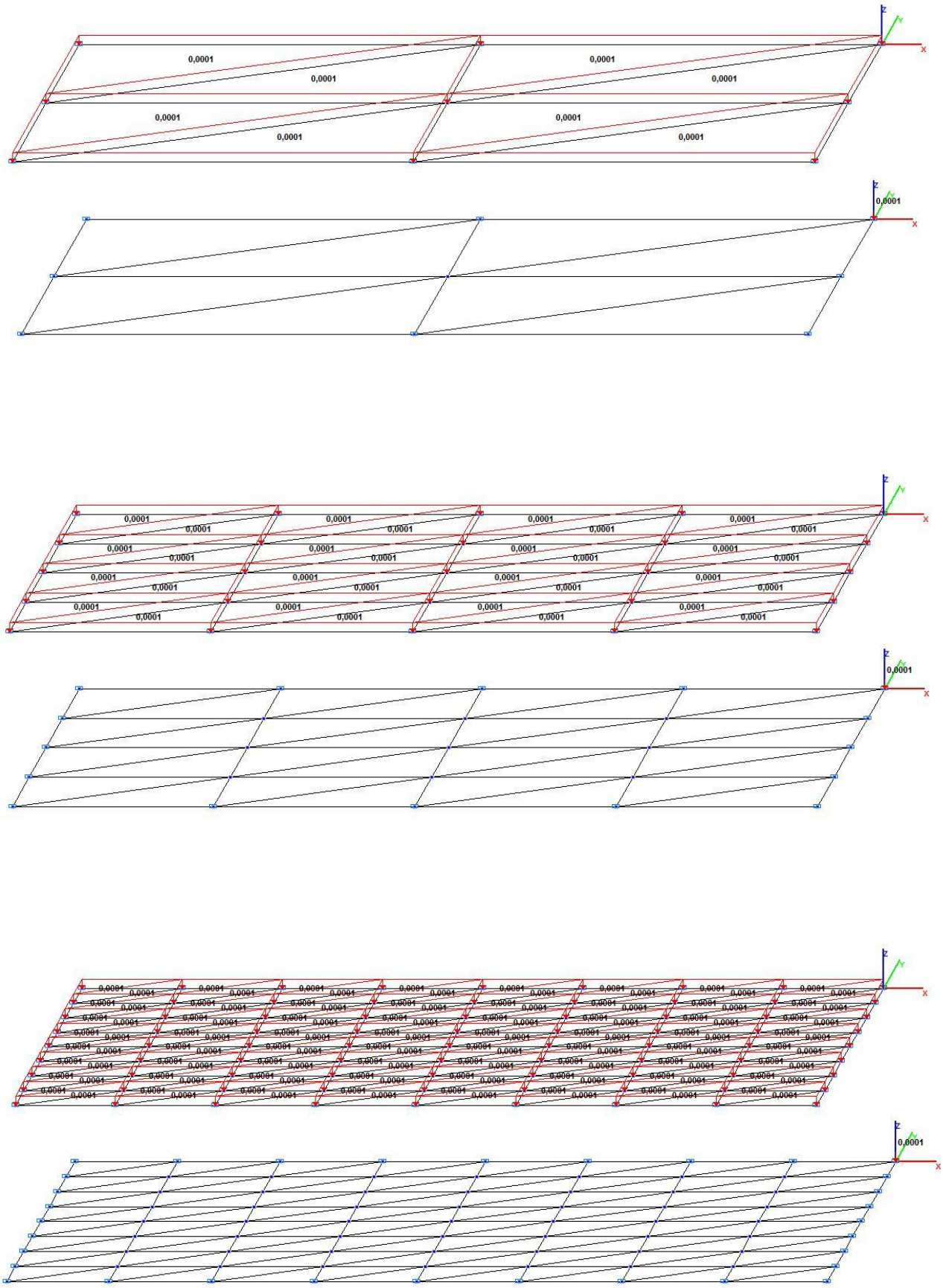
S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells, New York, McGraw-Hill,1959, p. 120, 143, 202, 206.

Исходные данные:

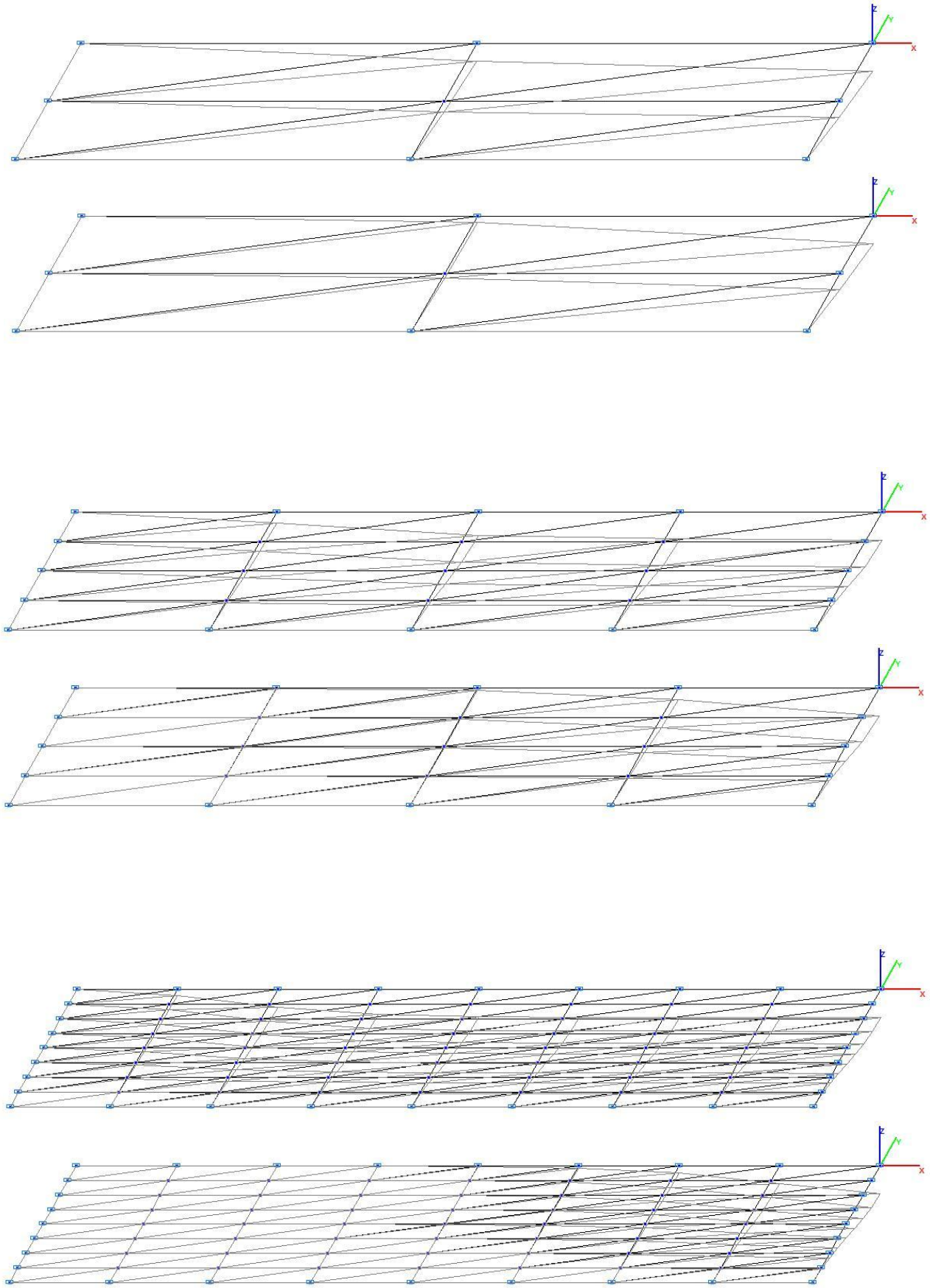
$E = 1.7472 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости материала пластины;
$\nu = 0.30$ - коэффициент Пуассона;
$a = 2.00$ м - ширина пластины;
$b = 10.00$ м - длина пластины;
$h = 10^{-4}$ (10^{-2}) м - толщина пластины;
$q = 1.0 \cdot 10^{-4}$ кН/м^2 - значение равномерно распределенной по всей площади пластины поперечной нагрузки;
$P = 4.0 \cdot 10^{-4}$ кН - значение сосредоточенной поперечной силы в центре пластины.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема четверти пластины по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 8, 32, 128 трехузловых элементов оболочки типа 42 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 2 – 4, 16, 64 четырехузловых элемента оболочки типа 44 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 3 – 8, 32, 128 шестиузловых элементов оболочки типа 45 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 4 – 4, 16, 64 восьмиузловых элемента оболочки типа 50 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Толщина пластины – 10^{-4} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных кромок пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 5 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 восьмиузловых изопараметрических объемных элемента типа 36 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных ребер нижней поверхности пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси Y общей системы координат, по направлению степени свободы X, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси X общей системы координат, по направлению степени свободы Y и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 18, 50, 162, 578, 2178, 8450, 33282.
Модель 6 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 двадцатиузловых изопараметрических объемных элемента типа 37 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Толщина пластины – 10^{-2} м. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы заделанных ребер нижней поверхности пластины по направлениям степеней свободы X, Y, Z, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси Y общей системы координат, по направлению степени свободы X, на узлы заделанных ребер верхней поверхности пластины, параллельных оси X общей системы координат, по направлению степени свободы Y и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 51, 155, 531, 1955, 7491, 29315, 115971.

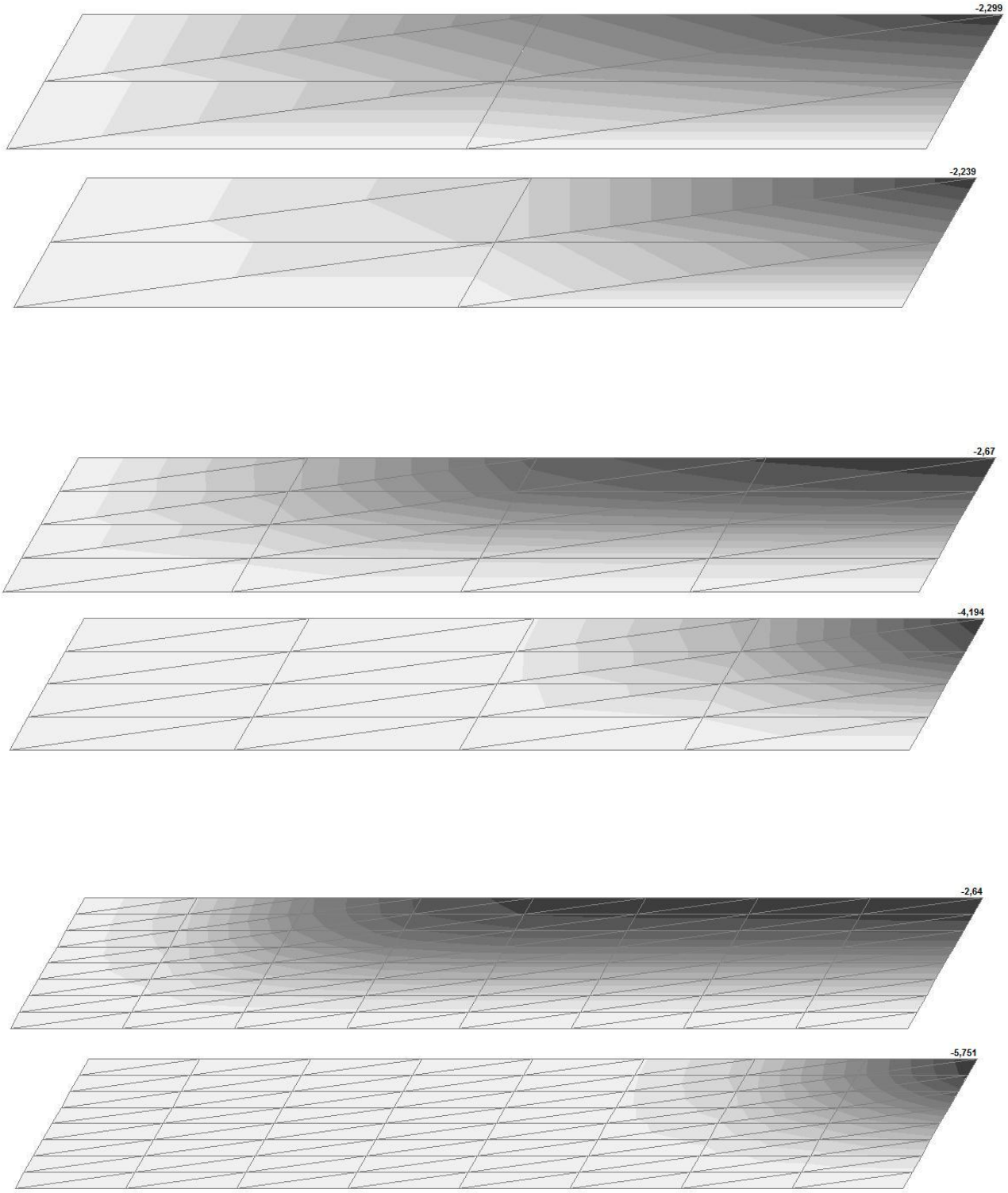
Результаты решения в SCAD



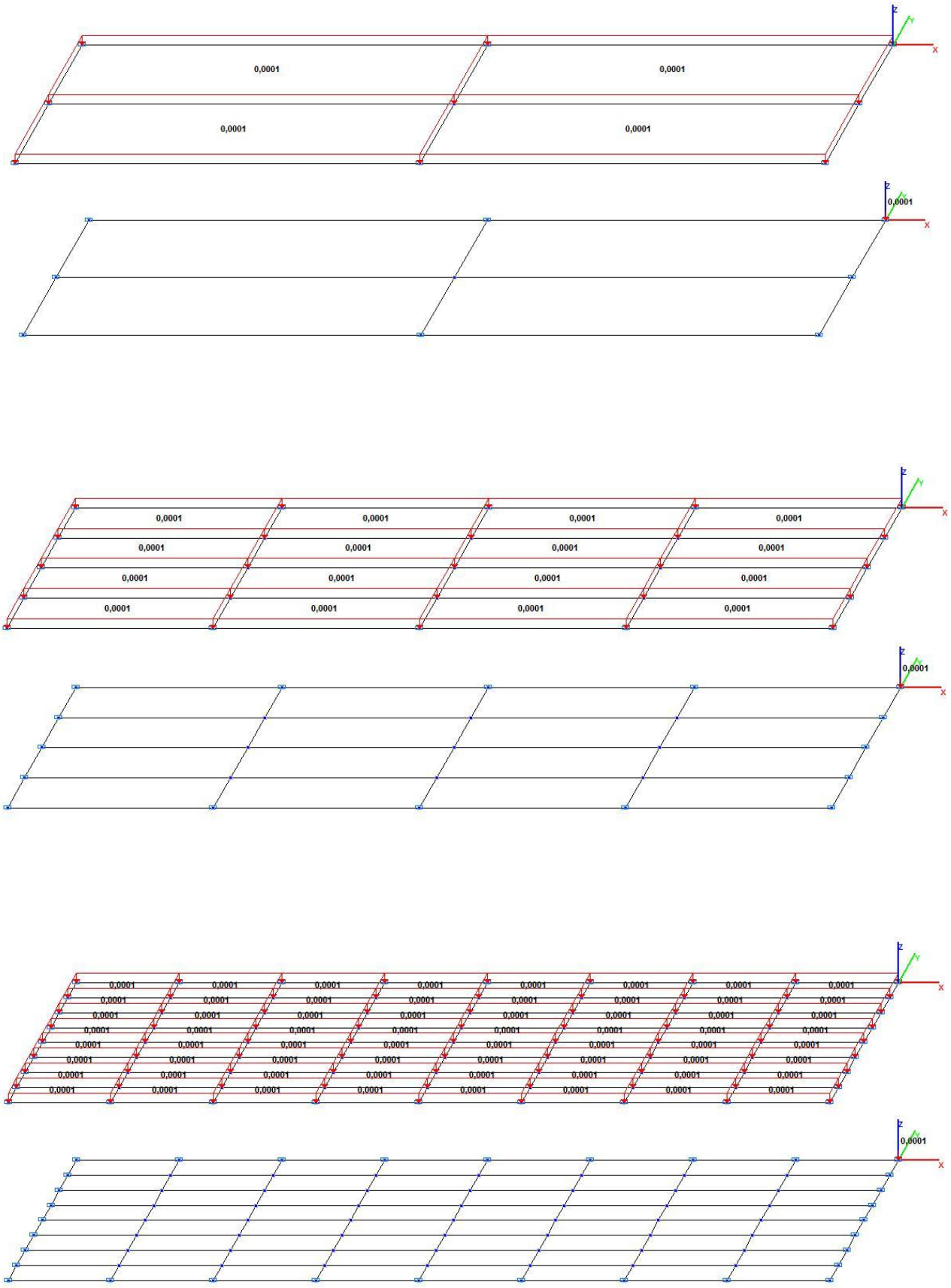
Модель 1. Расчетная схема



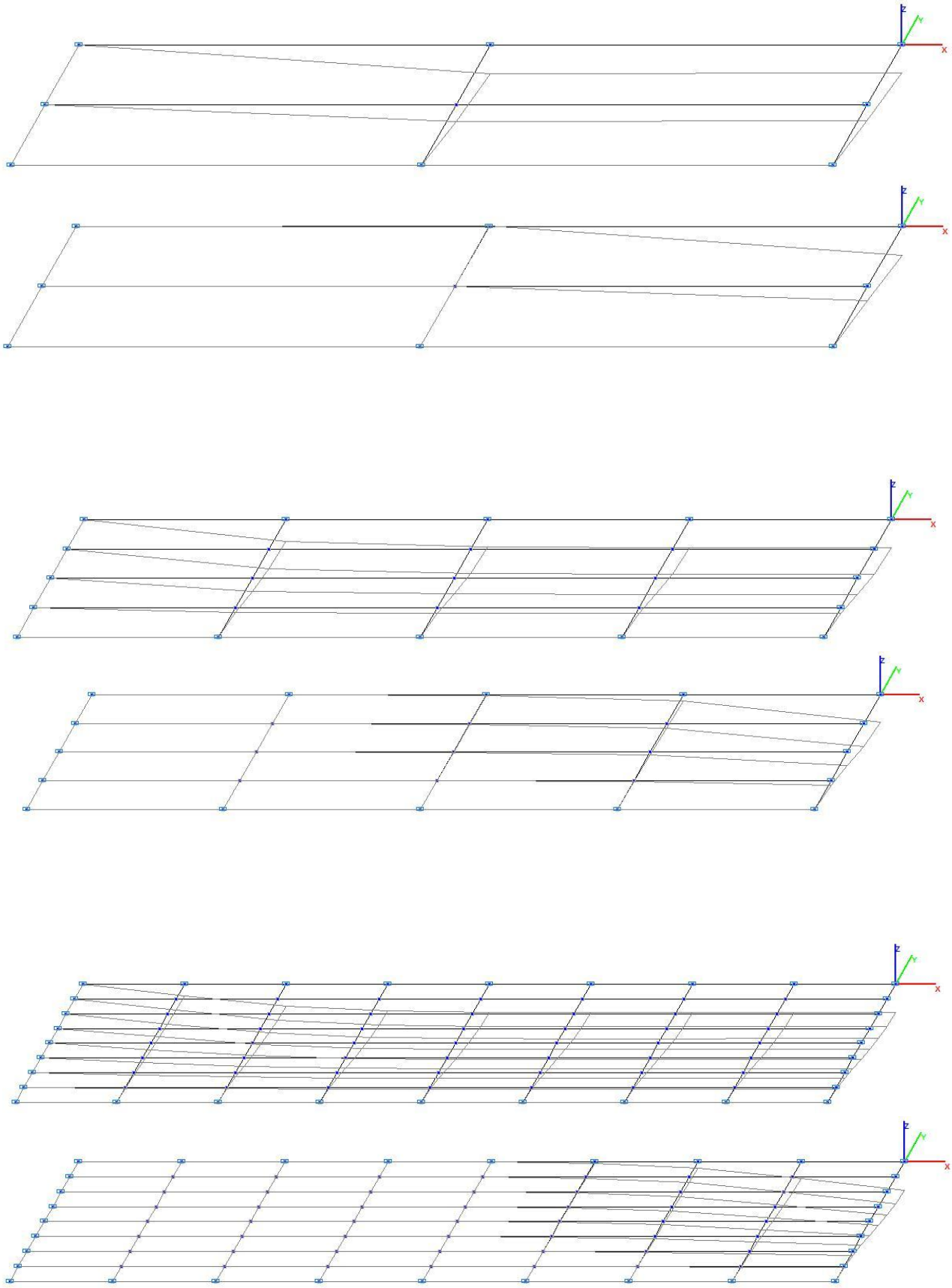
Модель 1. Деформированная схема



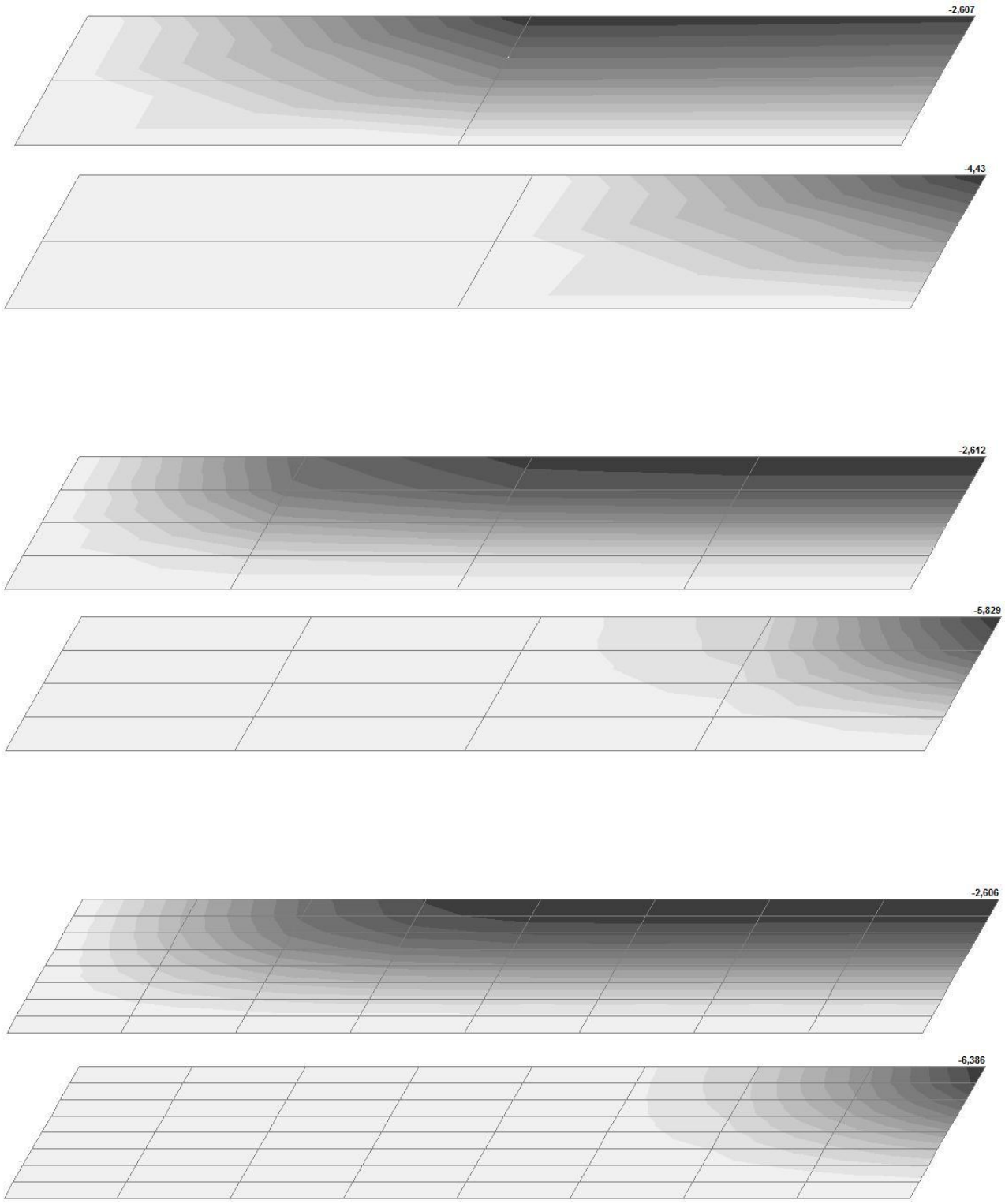
Модель 1. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)



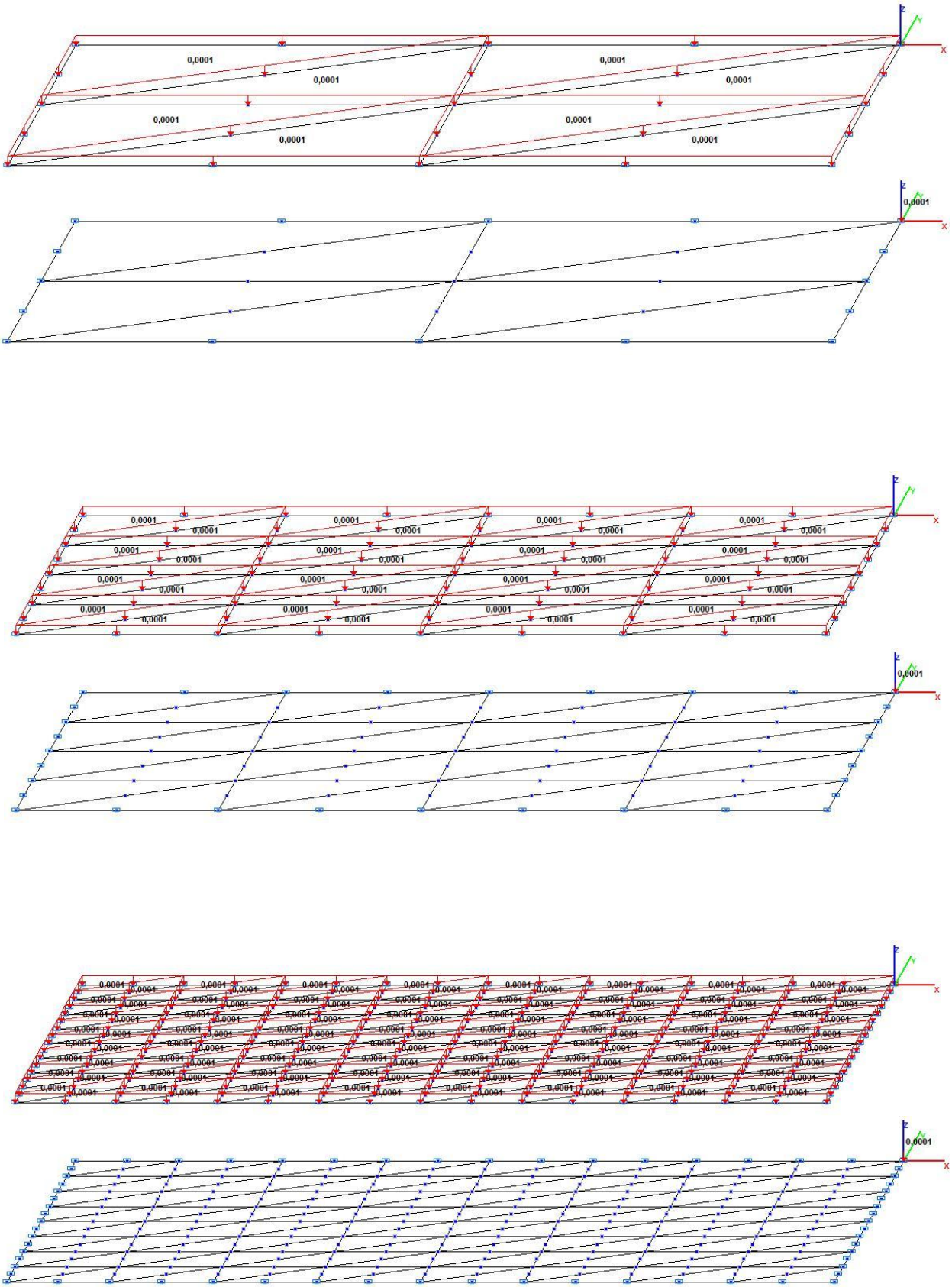
Модель 2. Расчетная схема



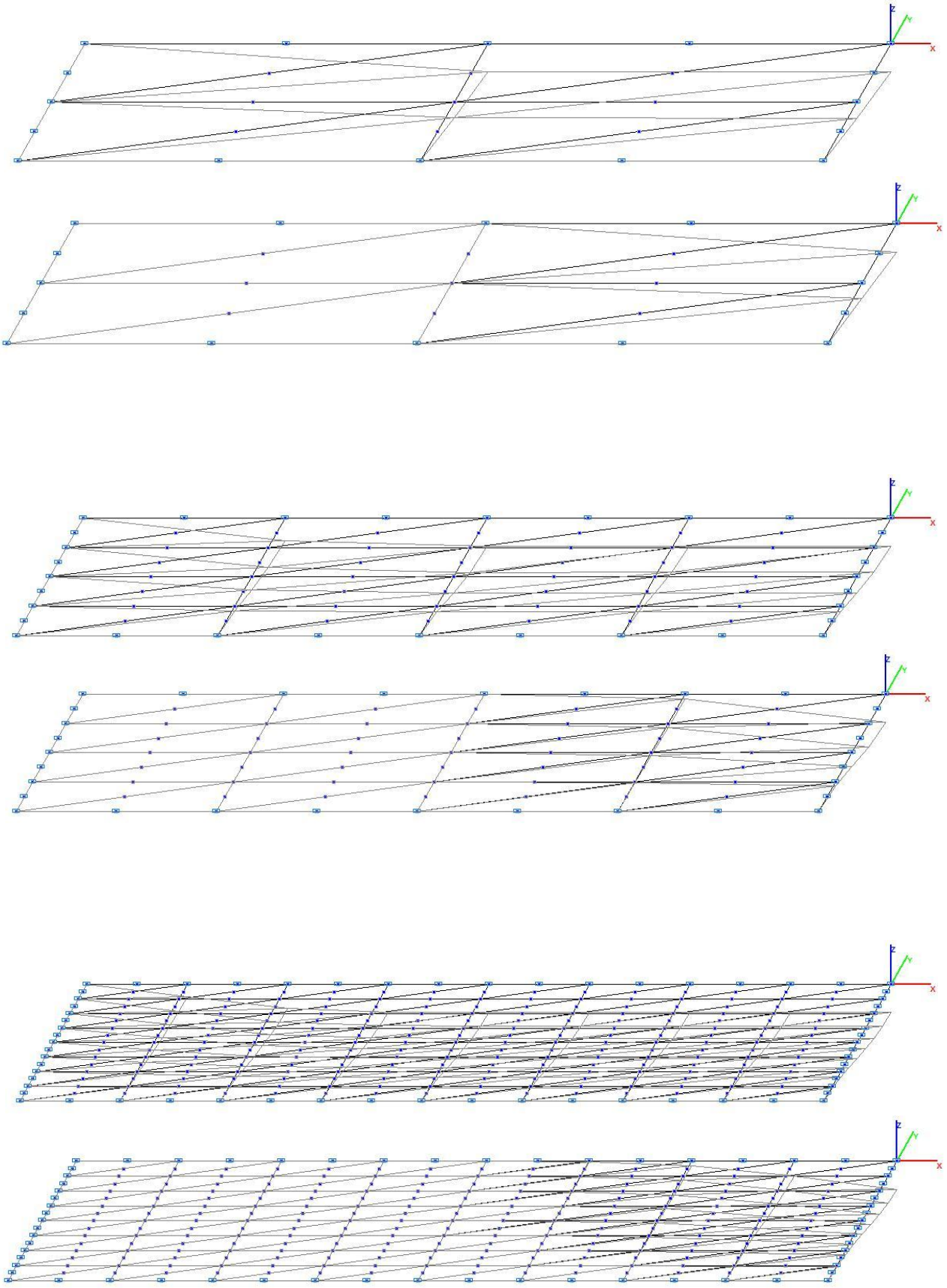
Модель 2. Деформированная схема



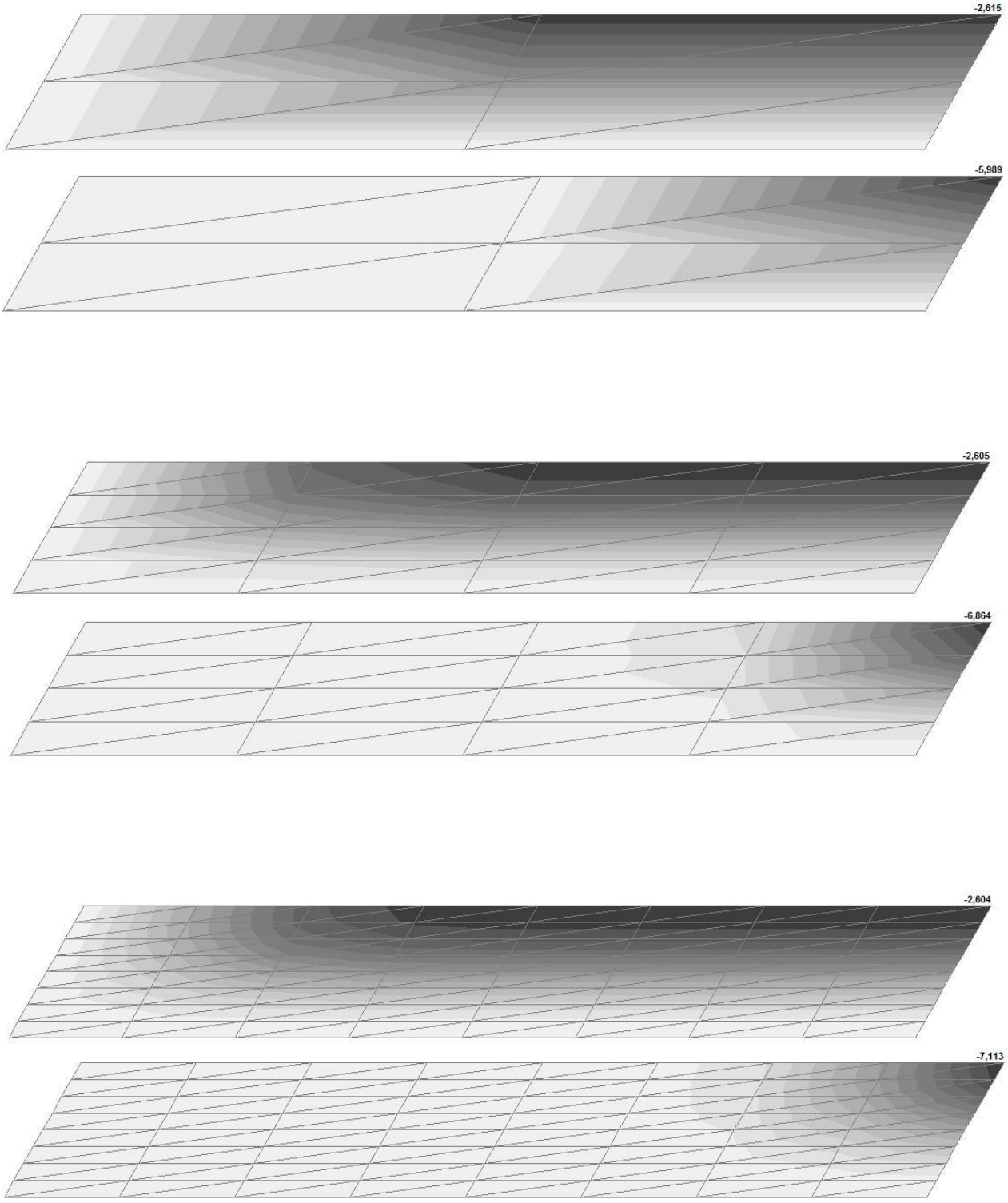
Модель 2. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)



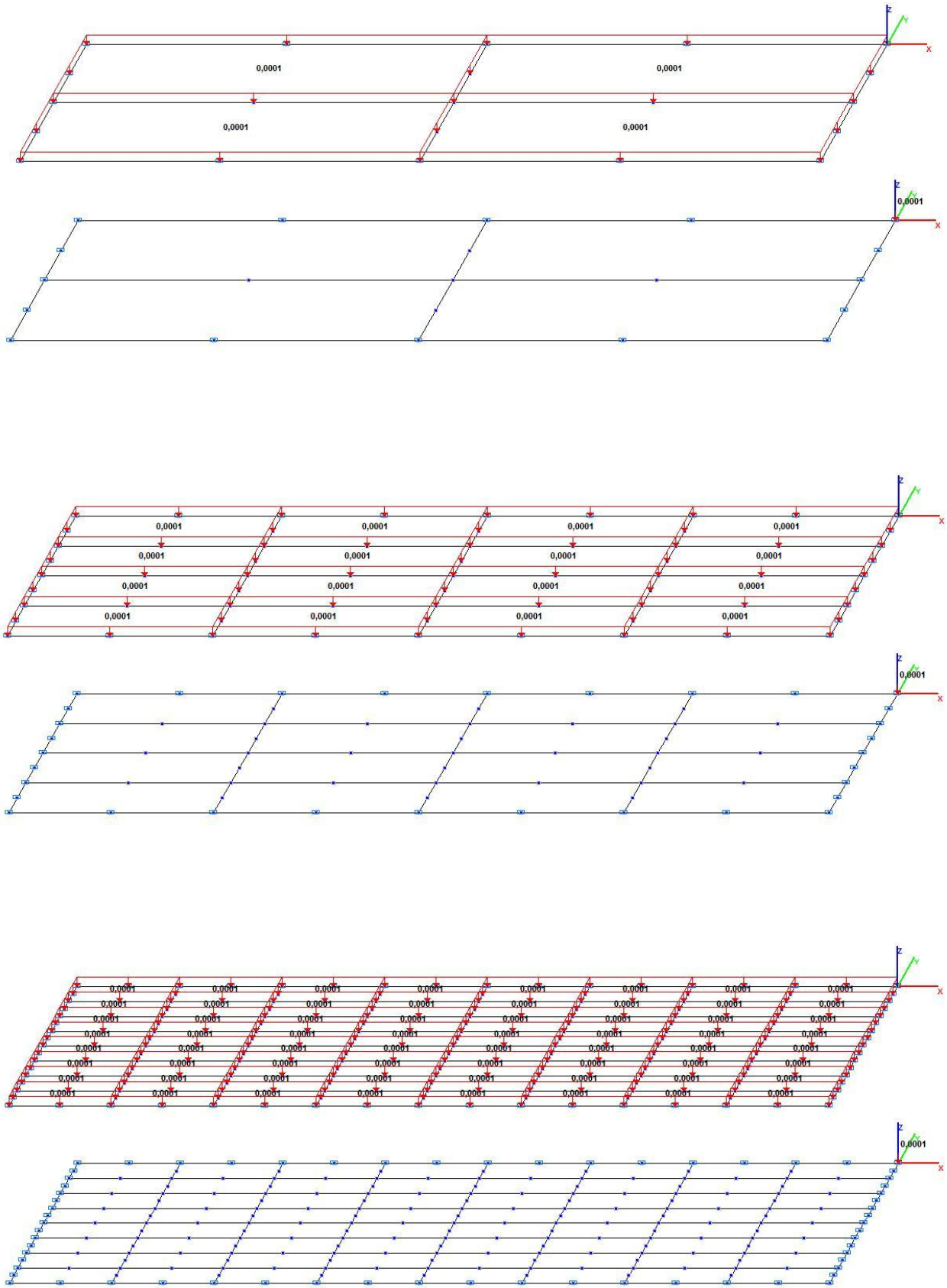
Модель 3. Расчетная схема



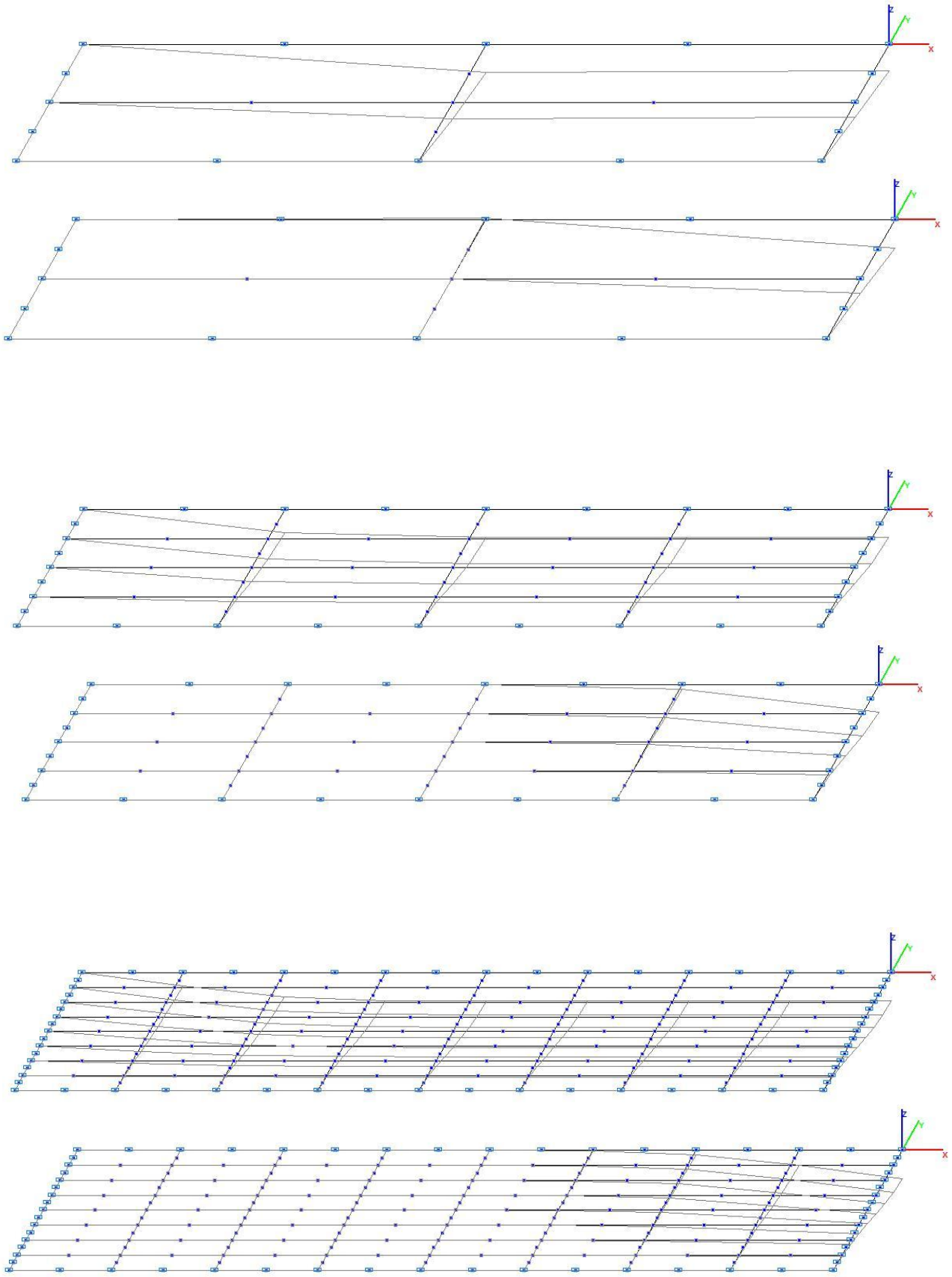
Модель 3. Деформированная схема



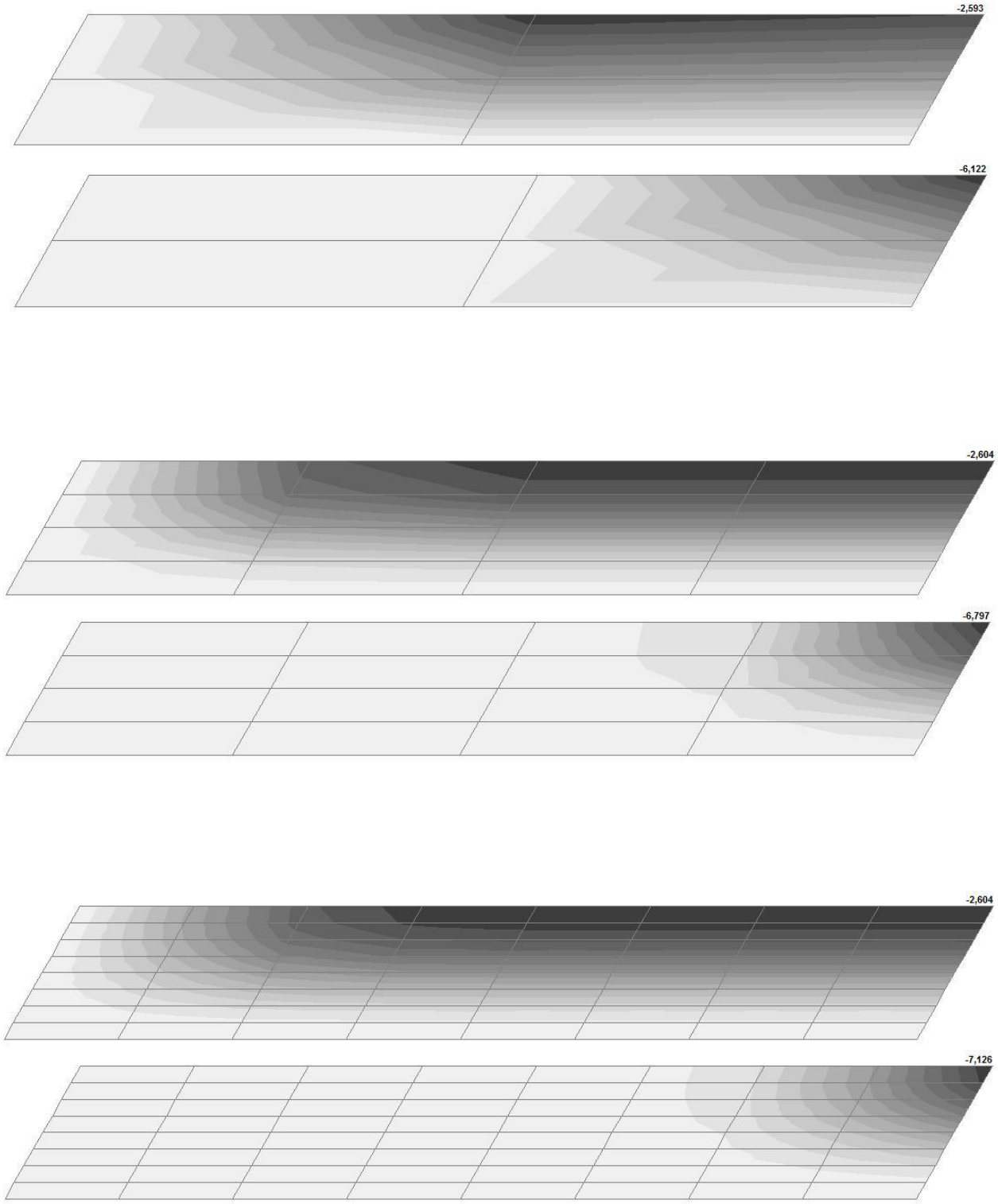
Модель 3. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)



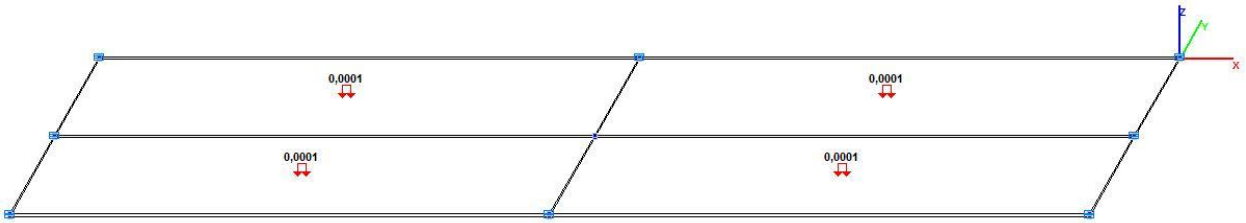
Модель 4. Расчетная схема

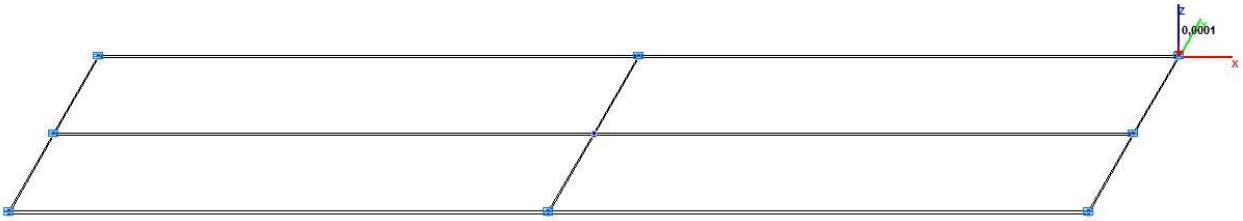


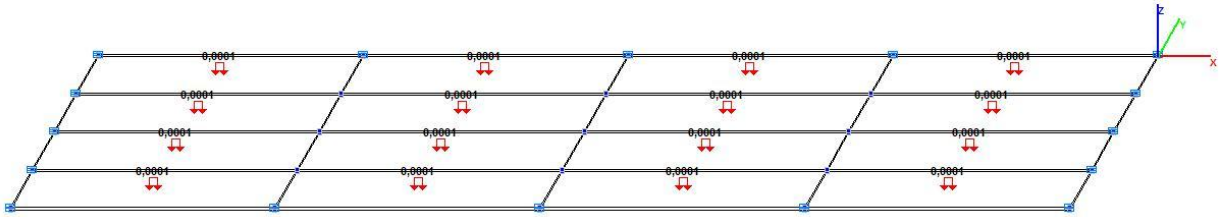
Модель 4. Деформированная схема

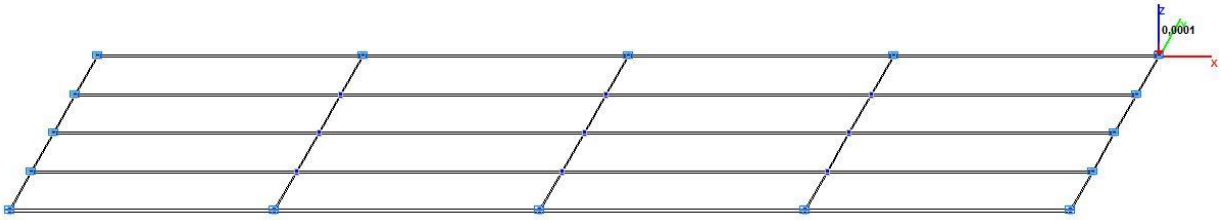


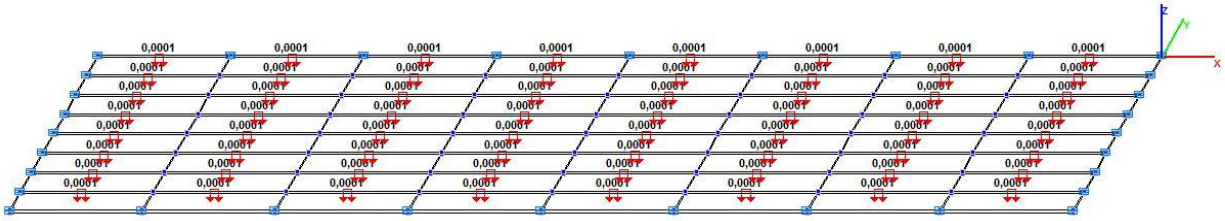
Модель 4. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)

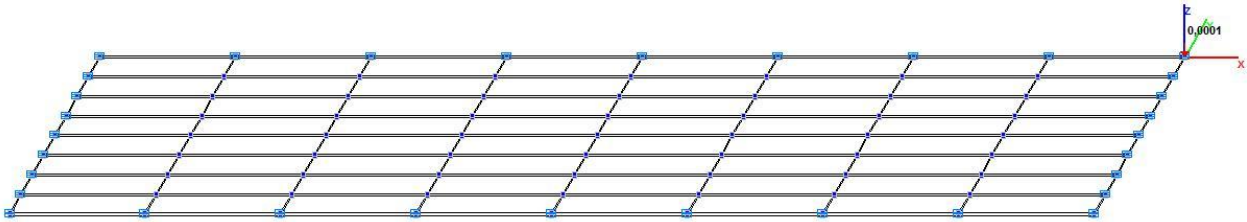

0,0001
0,0001
0,0001
0,0001

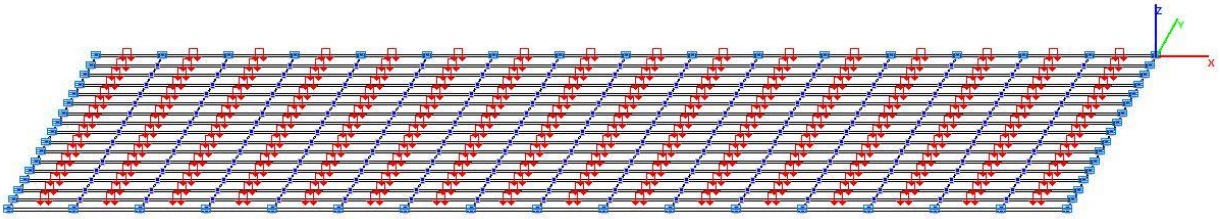

0,0001

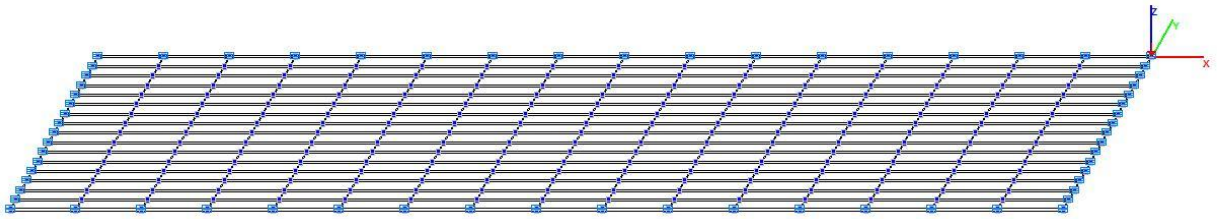

0,0001

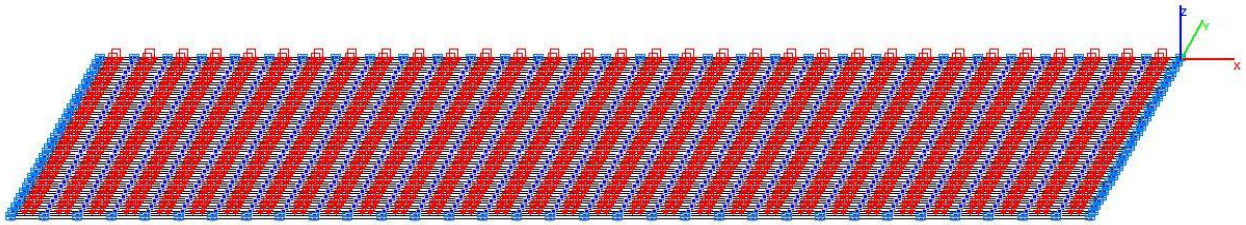

0,0001

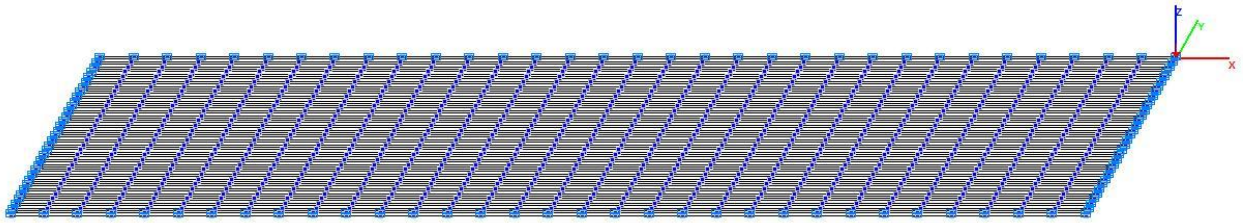

0,0001

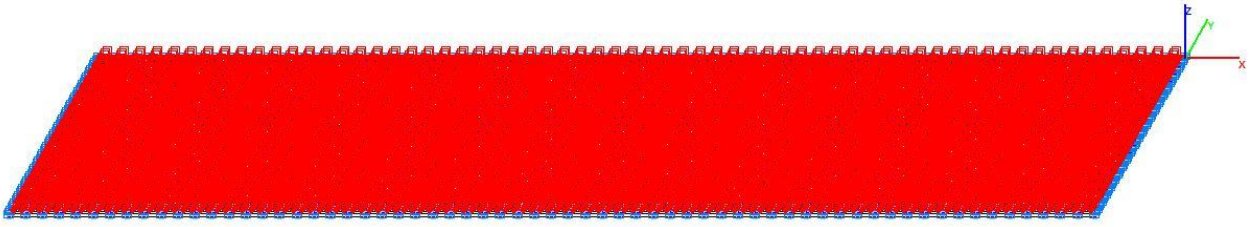

0,0001

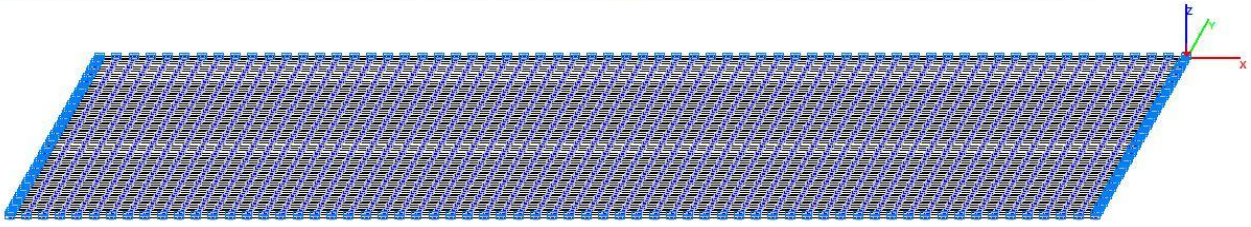


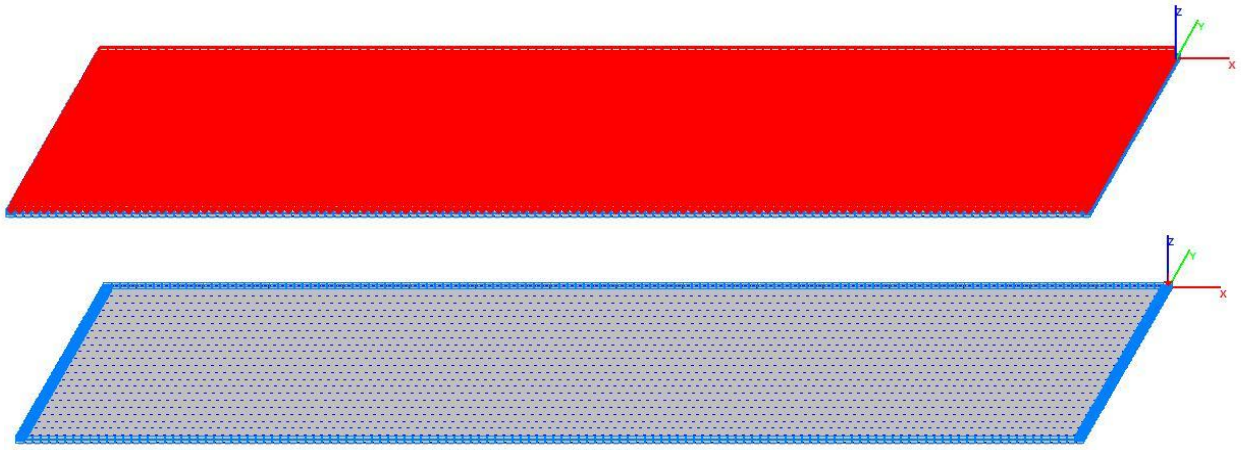




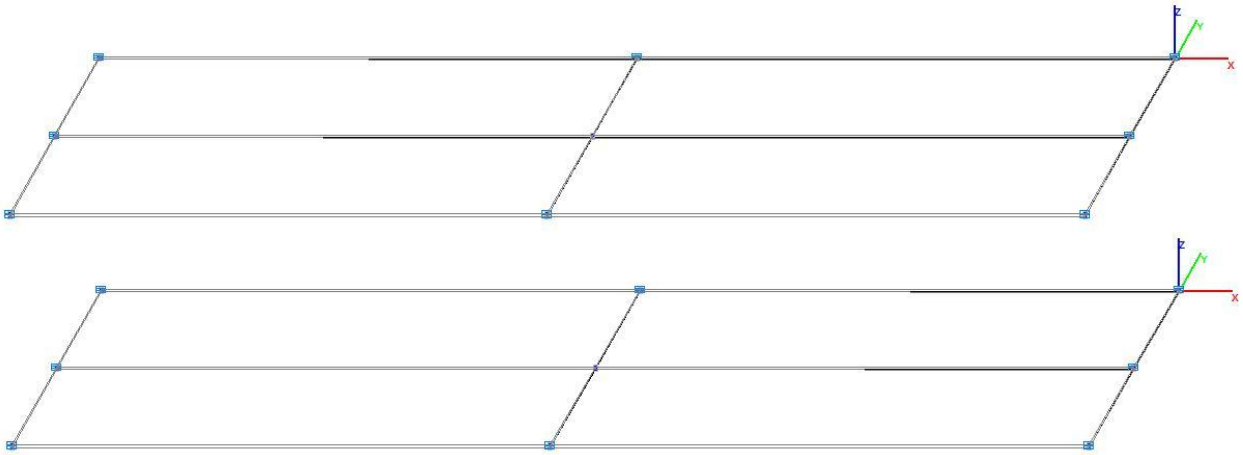


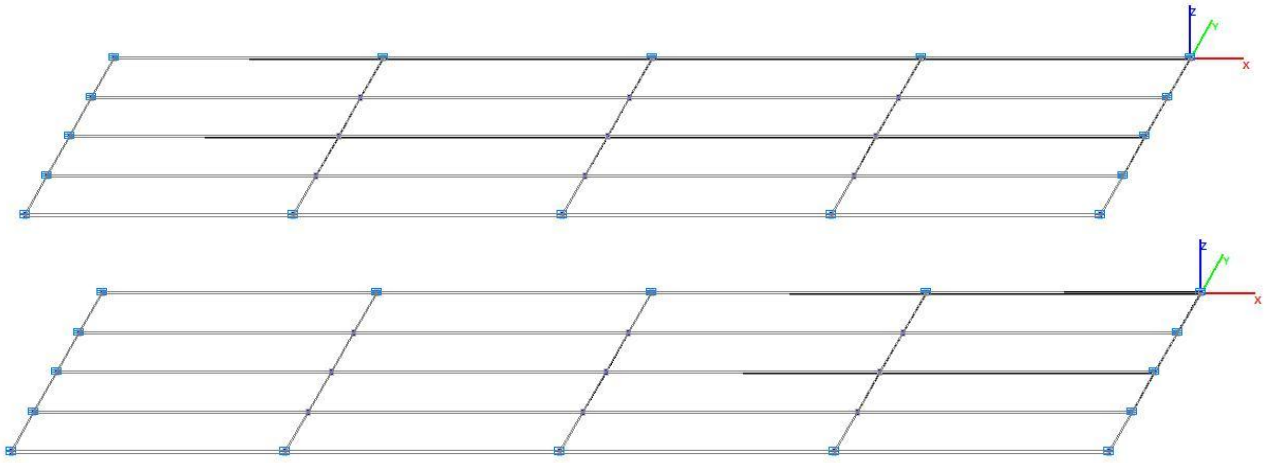


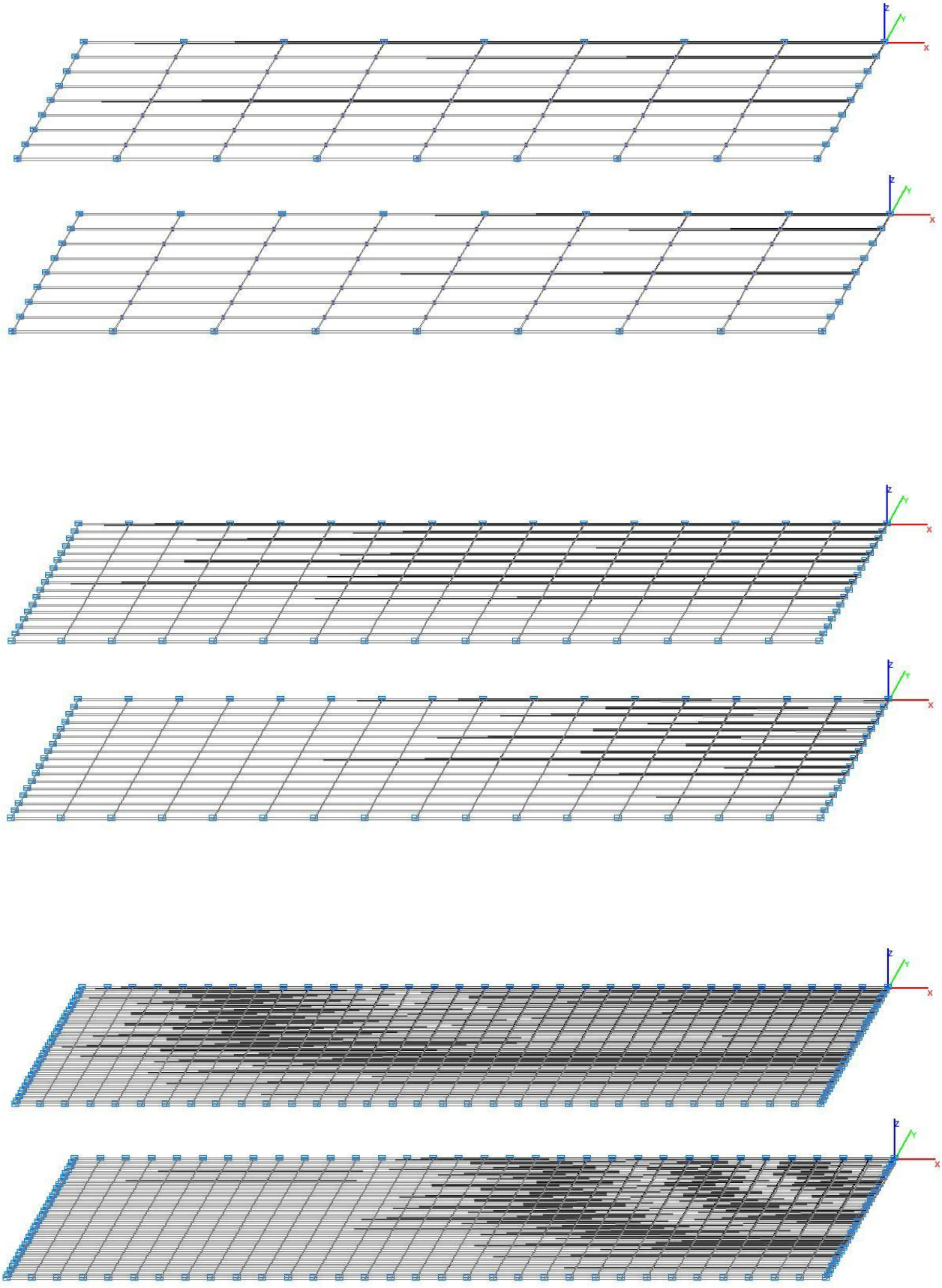


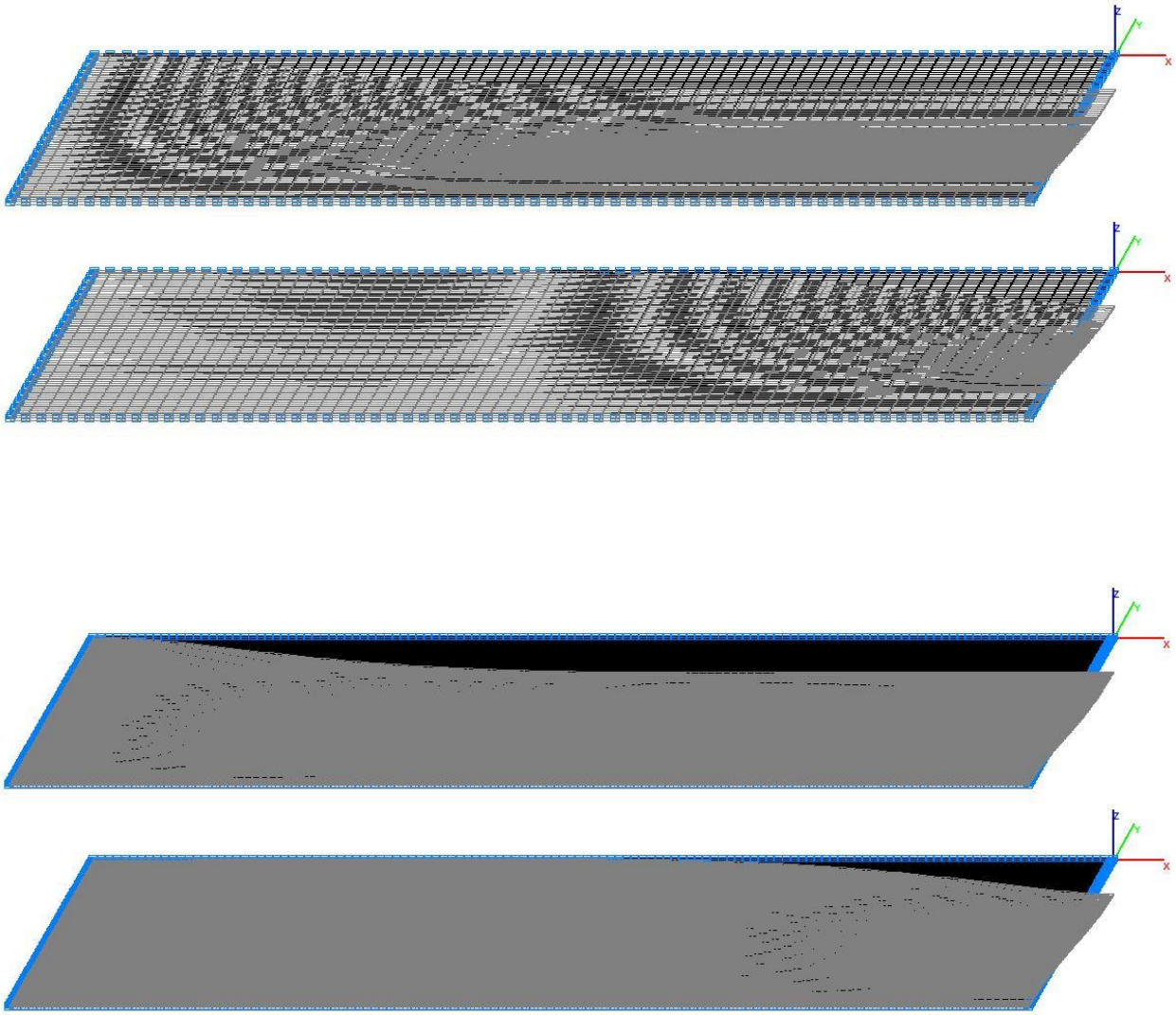


Модель 5. Расчетная схема

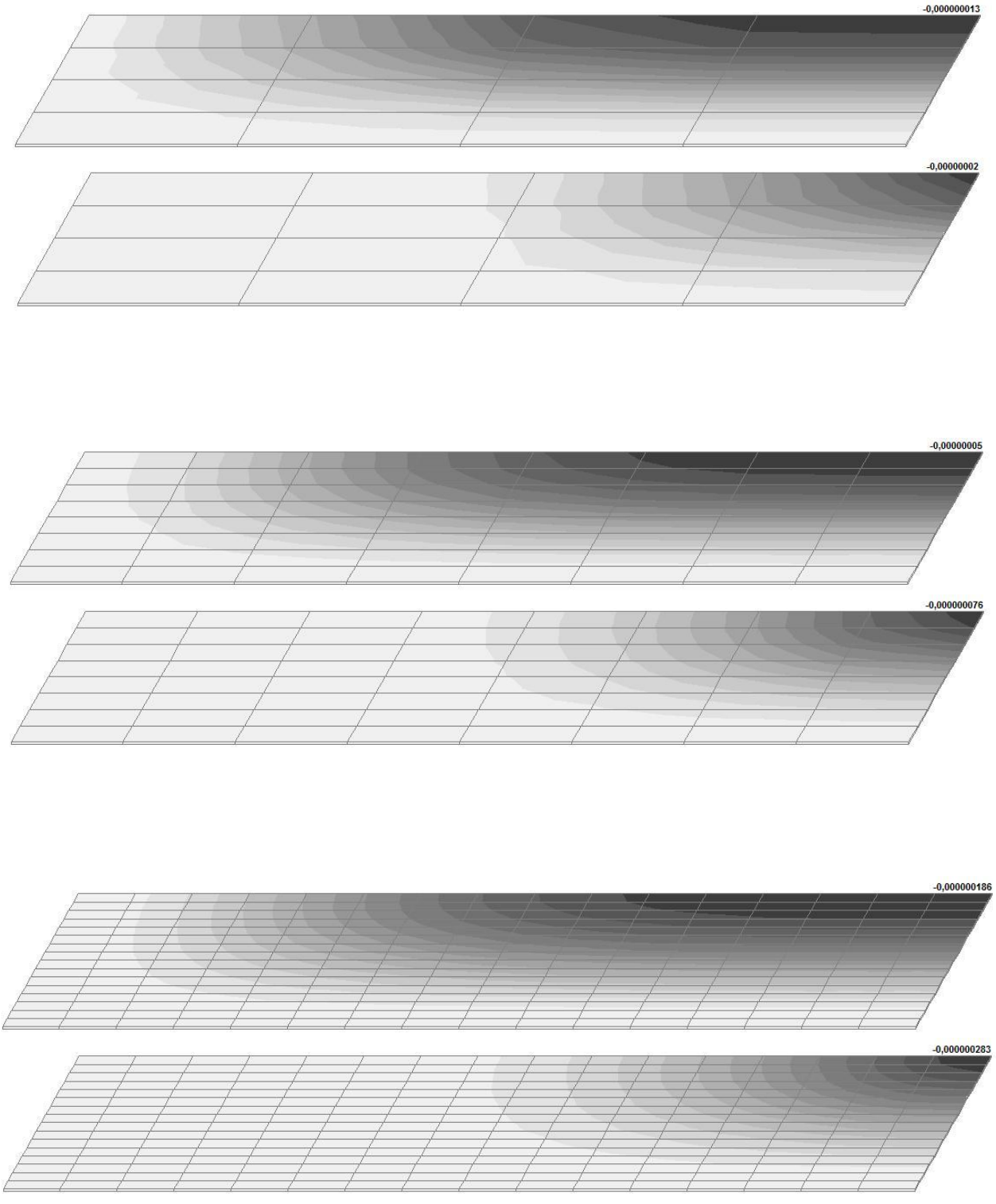


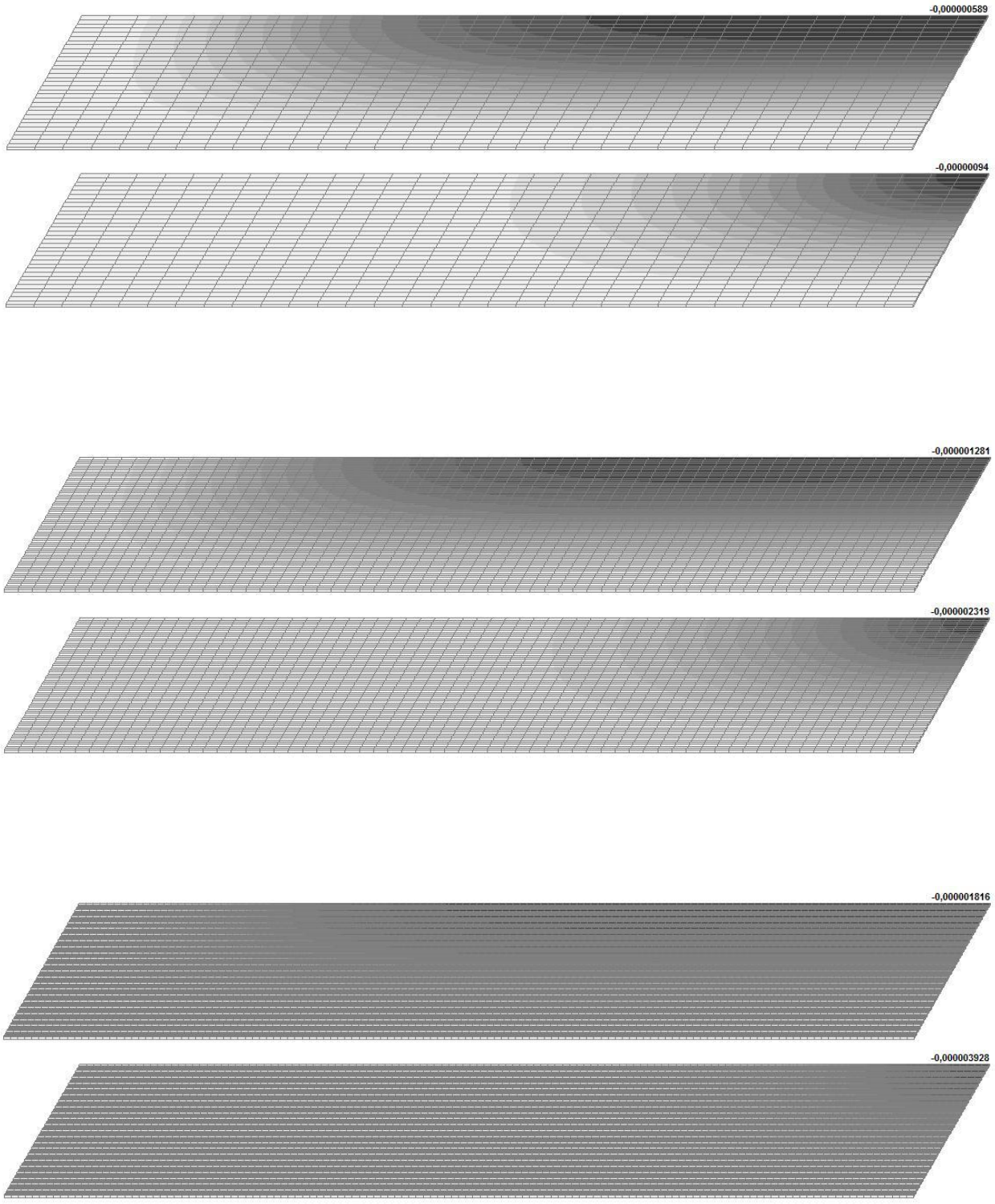




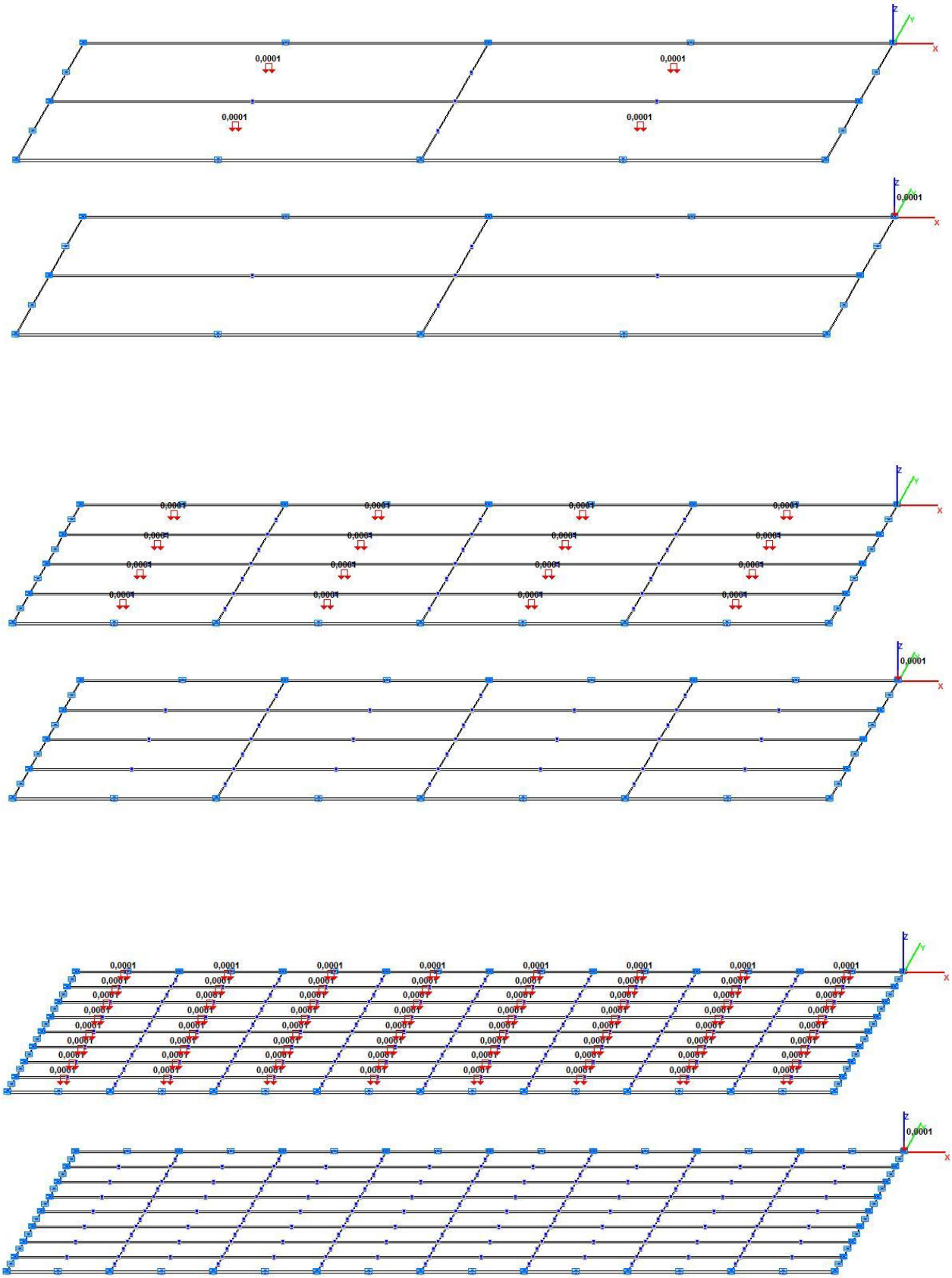


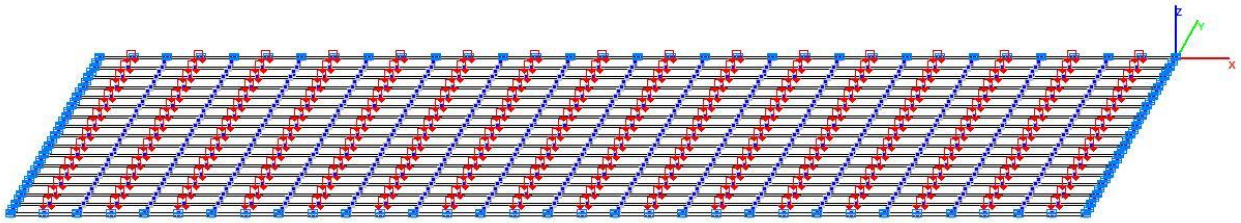
Модель 5. Деформированная схема

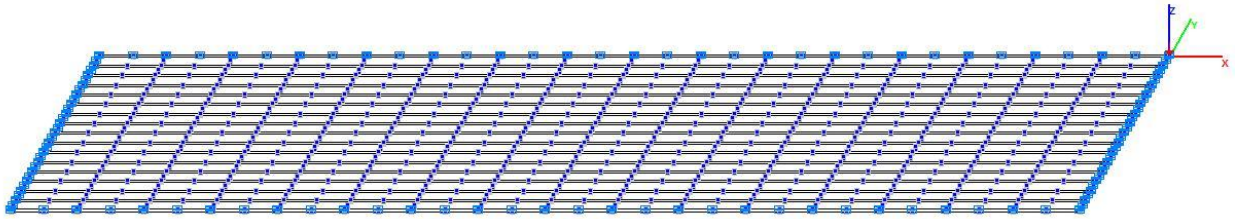

-0,000000013
-0,00000002
-0,00000005
-0,000000076
-0,000000186
-0,000000283

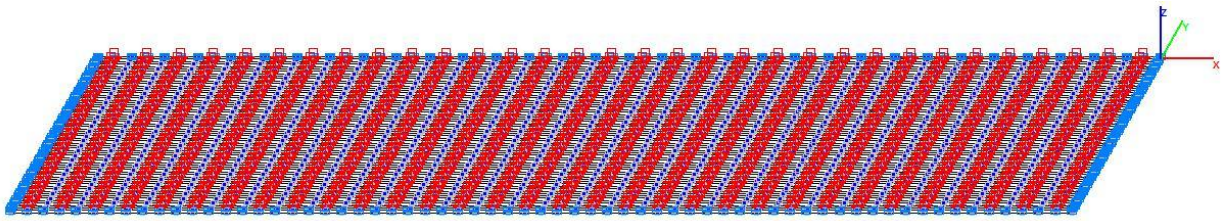


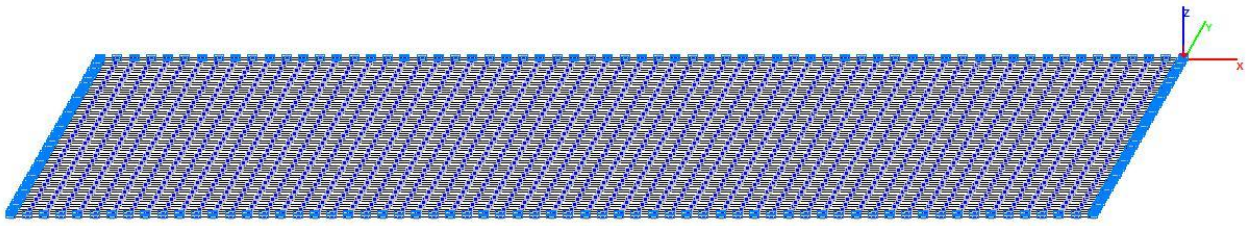
Модель 5. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)

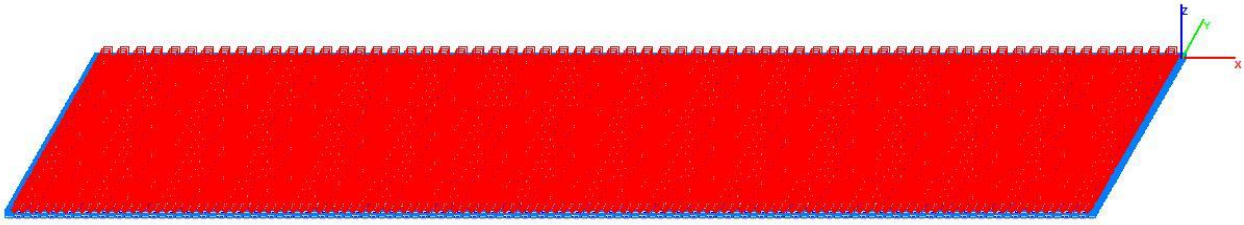

0,0001
Z
Y
X

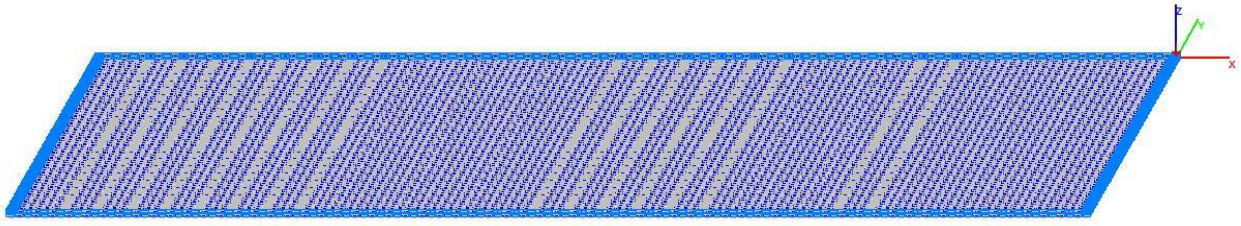


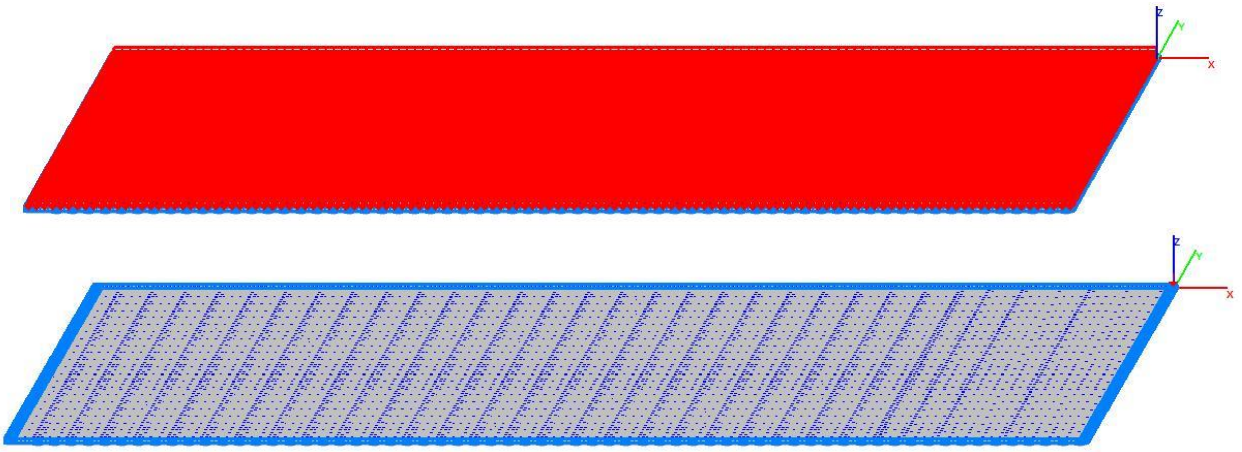




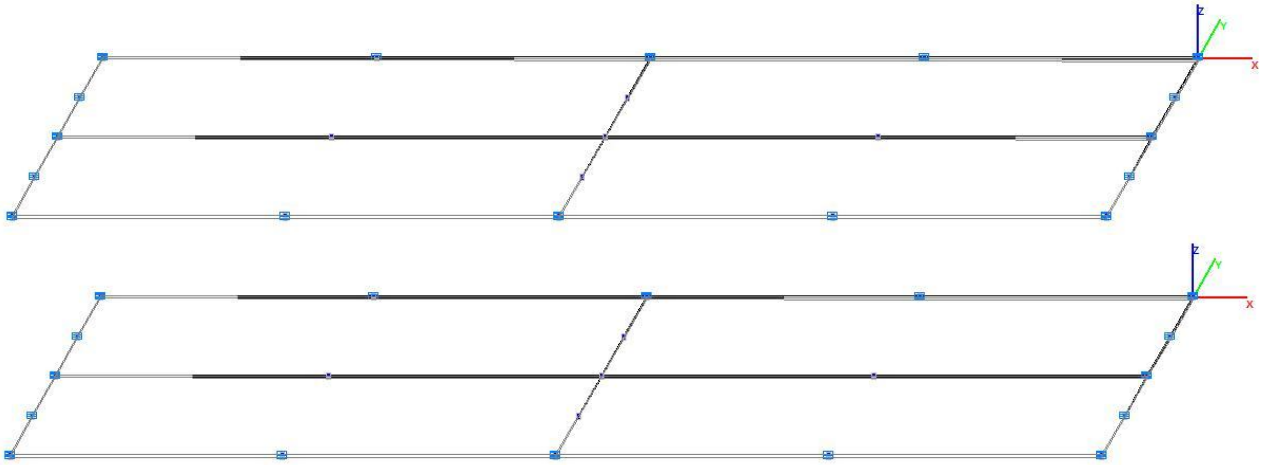


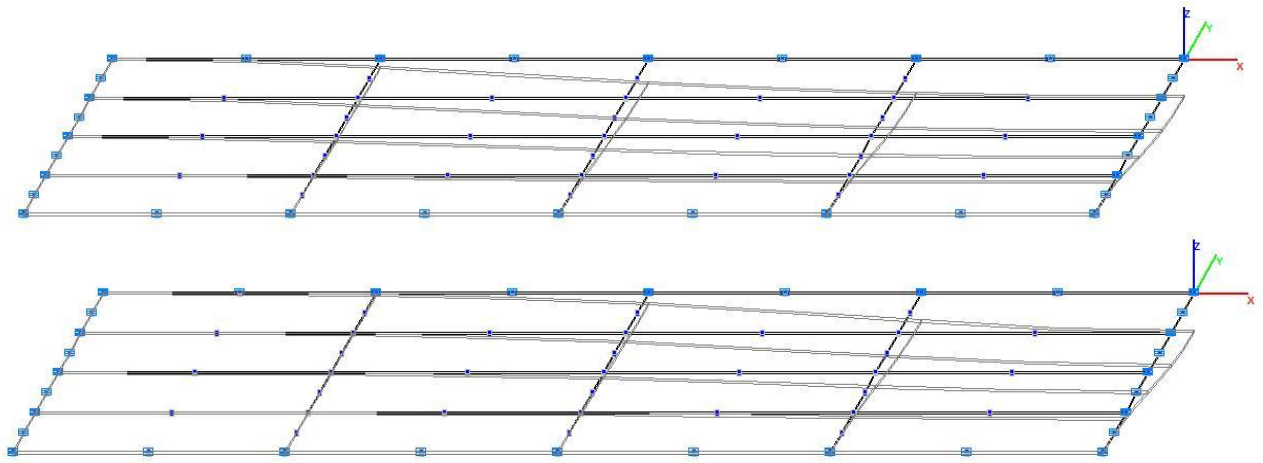


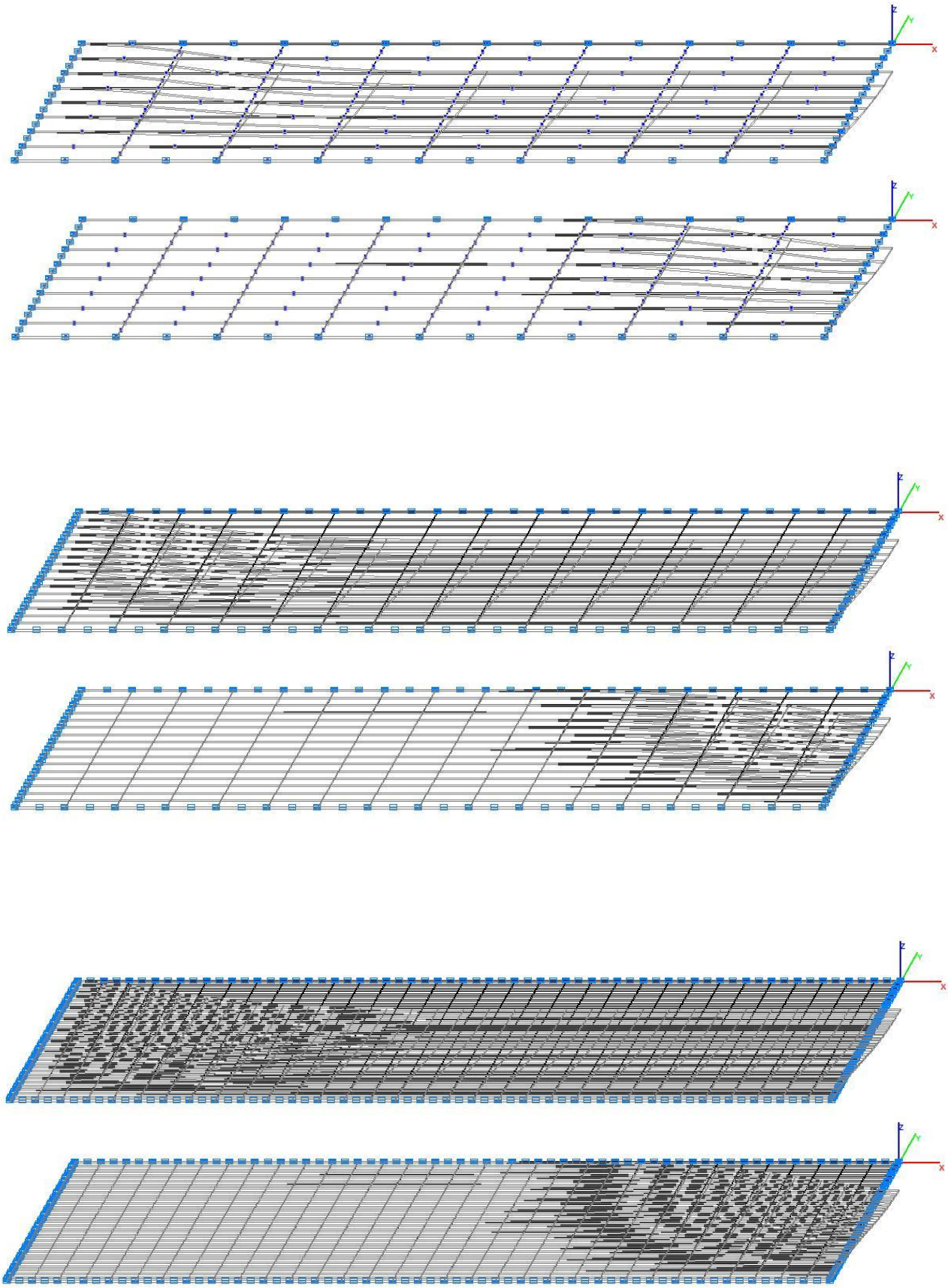


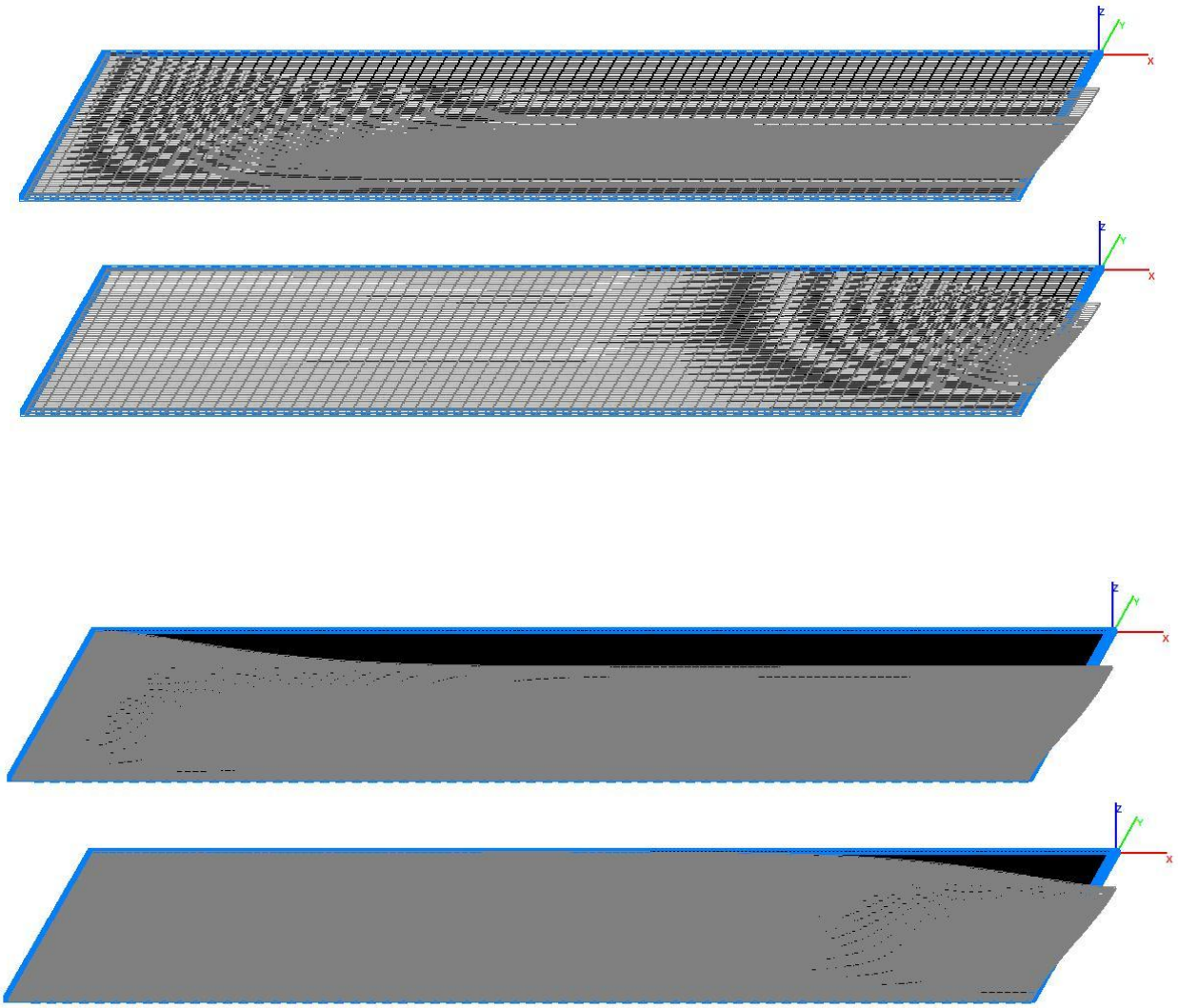


Модель 6. Расчетная схема

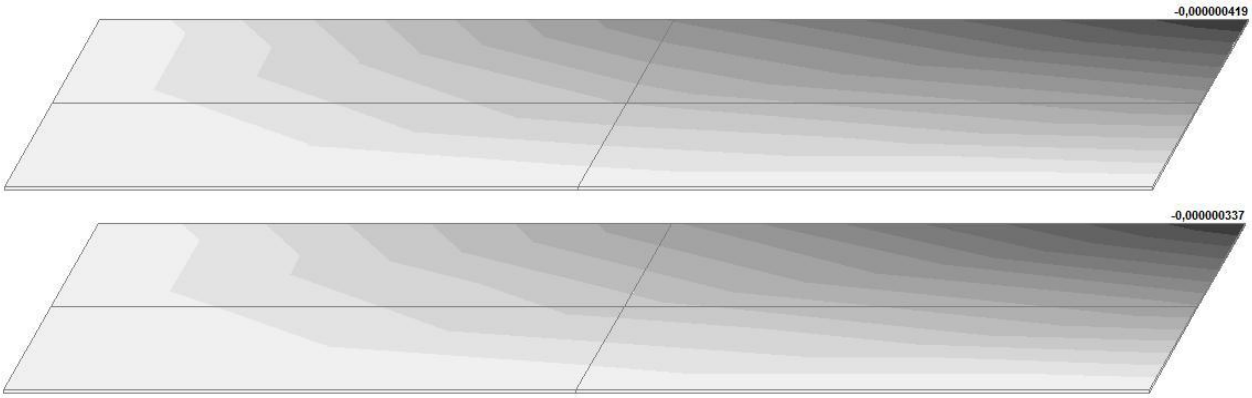


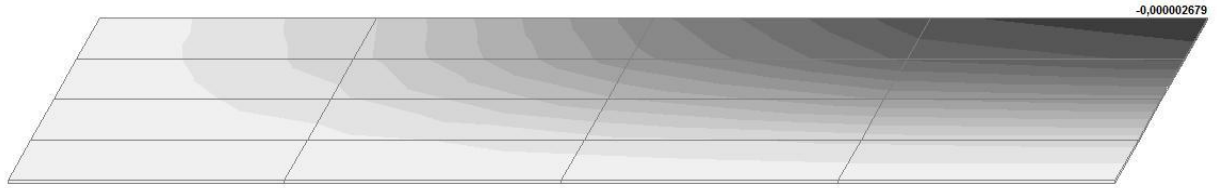




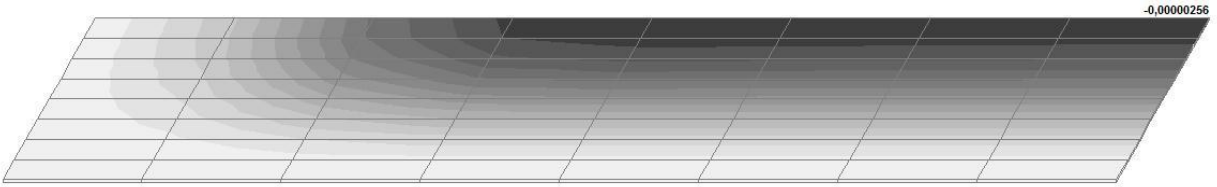


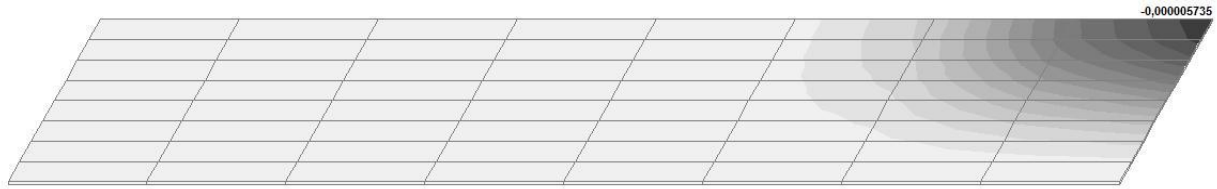
Модель 6. Деформированная схема

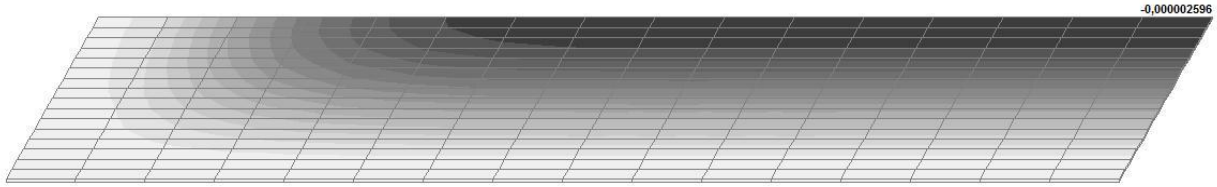


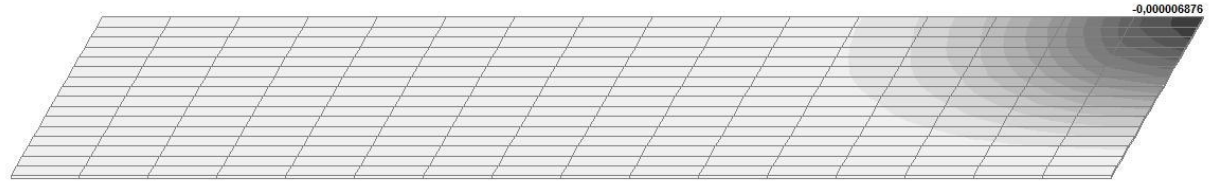

-0,000002679

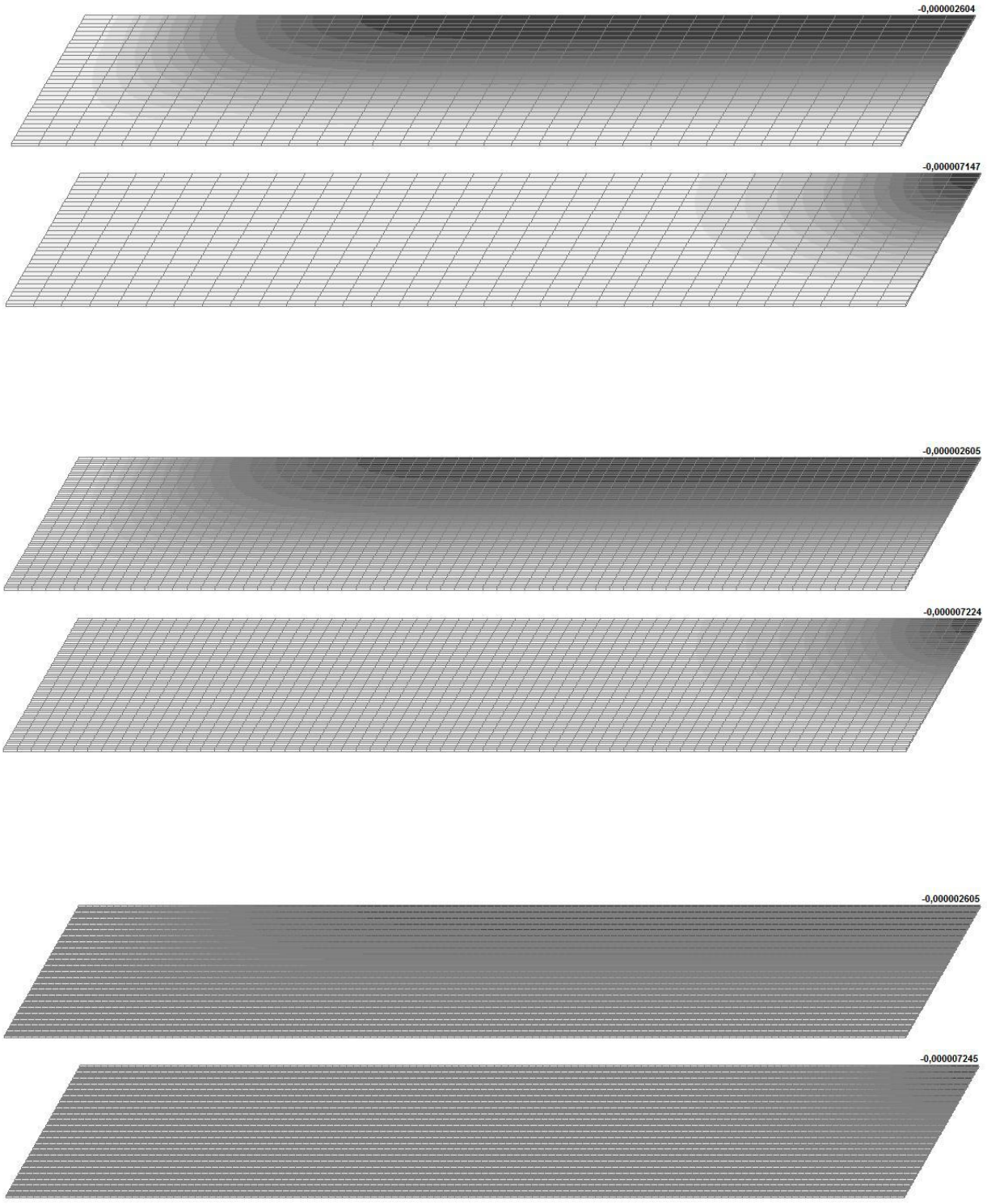
-0,000002788


-0,00000256


-0,000005735


-0,000002596


-0,000006876



Модель 6. Значения поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам прямоугольной пластины w_q и w_P (м, м)

Сравнение решений:

Поперечные перемещения в центре заделанной по наружным кромкам плоской прямоугольной пластины w_q
от воздействия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	2.605	2.299	11.75
	4x4		2.670	2.50
	8x8		2.640	1.34
2 (Тип элемента 44)	2x2	2.605	2.607	0.08
	4x4		2.612	0.27
	8x8		2.606	0.04
3 (Тип элемента 45)	2x2	2.605	2.615	0.38
	4x4		2.605	0.00
	8x8		2.604	0.04
4 (Тип элемента 50)	2x2	2.605	2.593	0.46
	4x4		2.604	0.04
	8x8		2.604	0.04
5 (Тип элемента 36)	2x2	$2.605 \cdot 10^{-6}$	$0.003 \cdot 10^{-6}$	99.88
	4x4		$0.013 \cdot 10^{-6}$	99.50
	8x8		$0.050 \cdot 10^{-6}$	98.08
	16x16		$0.186 \cdot 10^{-6}$	92.86
	32x32		$0.589 \cdot 10^{-6}$	77.39
	64x64		$1.281 \cdot 10^{-6}$	50.83
	128x128		$1.816 \cdot 10^{-6}$	30.29
6 (Тип элемента 37)	2x2	$2.605 \cdot 10^{-6}$	$0.419 \cdot 10^{-6}$	83.92
	4x4		$2.679 \cdot 10^{-6}$	2.84
	8x8		$2.560 \cdot 10^{-6}$	1.73
	16x16		$2.596 \cdot 10^{-6}$	0.35
	32x32		$2.604 \cdot 10^{-6}$	0.04
	64x64		$2.605 \cdot 10^{-6}$	0.00
	128x128		$2.605 \cdot 10^{-6}$	0.00

Поперечные перемещения в центре заделанной по наружным кромкам плоской прямоугольной пластины w_P
от воздействия сосредоточенной поперечной силы в центре P

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	7.260	2.239	69.16
	4x4		4.194	42.23
	8x8		5.751	20.79
2 (Тип элемента 44)	2x2	7.260	4.430	38.98
	4x4		5.829	19.71
	8x8		6.386	12.04
3 (Тип элемента 45)	2x2	7.260	5.989	17.51
	4x4		6.864	5.45
	8x8		7.113	2.02
4 (Тип элемента 50)	2x2	7.260	6.122	15.67
	4x4		6.797	6.38
	8x8		7.126	1.85
5 (Тип элемента 36)	2x2	$7.260 \cdot 10^{-6}$	$0.005 \cdot 10^{-6}$	99.93
	4x4		$0.020 \cdot 10^{-6}$	99.72
	8x8		$0.076 \cdot 10^{-6}$	98.95
	16x16		$0.283 \cdot 10^{-6}$	96.10
	32x32		$0.940 \cdot 10^{-6}$	87.05
	64x64		$2.319 \cdot 10^{-6}$	68.06
	128x128		$3.928 \cdot 10^{-6}$	45.90
6 (Тип элемента 37)	2x2	$7.260 \cdot 10^{-6}$	$0.337 \cdot 10^{-6}$	95.36
	4x4		$2.788 \cdot 10^{-6}$	61.60
	8x8		$5.735 \cdot 10^{-6}$	21.01

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
	16x16		$6.876 \cdot 10^{-6}$	5.29
	32x32		$7.147 \cdot 10^{-6}$	1.56
	64x64		$7.224 \cdot 10^{-6}$	0.50
	128x128		$7.245 \cdot 10^{-6}$	0.21

***Замечания*:** При аналитическом решении значений поперечных перемещений в центре заделанной по наружным кромкам плоской прямоугольной пластины w_q и w_P от соответствующих воздействий определяются по следующим формулам:

$$w_q = \frac{4 \cdot q \cdot a^4}{\pi^5 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left\{ \frac{1}{m^5} \cdot \left[1 - \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \cdot th\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) + 2}{2 \cdot ch\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{a^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left\{ E_m \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \cdot sh\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\} + \quad .$$

$$+ \frac{b^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left\{ F_m \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \cdot sh\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right)}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right)} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\} +$$

Значения коэффициентов E_m и F_m определяются из решения системы 2·M уравнений:

$$\begin{cases} \frac{4 \cdot q \cdot a^2}{\pi^3} \cdot \frac{1}{i^4} \cdot \left(\frac{\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a}}{ch^2\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} - th\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) \right) - \frac{E_i}{i} \cdot \left(\frac{\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a}}{ch^2\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} + th\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) \right) - \frac{8 \cdot i \cdot a}{\pi \cdot b} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left[F_m \cdot \frac{1}{m^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right] \\ \frac{4 \cdot q \cdot b^2}{\pi^3} \cdot \frac{1}{i^4} \cdot \left(\frac{\frac{i \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b}}{ch^2\left(\frac{i \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right)} - th\left(\frac{i \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right) \right) - \frac{F_i}{i} \cdot \left(\frac{\frac{i \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b}}{ch^2\left(\frac{i \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right)} + th\left(\frac{i \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right) \right) - \frac{8 \cdot i \cdot b}{\pi \cdot a} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left[E_m \cdot \frac{1}{m^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right] \end{cases};$$

$$w_P = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot \pi^3 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left\{ \frac{1}{m^3} \cdot \left[th\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right) - \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a}}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{a^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left\{ E_m \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \cdot sh\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot a} \right)} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\} + \quad .$$

$$+ \frac{b^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left\{ F_m \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \cdot sh\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right)}{ch^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot b} \right)} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\} +$$

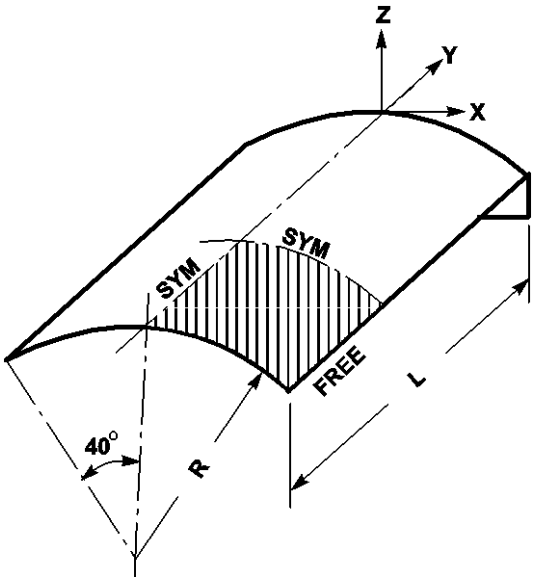
Значения коэффициентов E_m и F_m определяются из решения системы 2·M уравнений:

$$-\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\cdot sh\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}\cdot sin\left(\frac{i\cdot\pi}{2}\right)-\frac{E_i}{i}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)}+th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot b}{2\cdot a}\right)\right)-\frac{8\cdot i\cdot a}{\pi\cdot b}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left[F_m\cdot\frac{1}{m^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cdot sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right]\Bigg\};$$

$$-\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\cdot sh\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}\cdot sin\left(\frac{i\cdot\pi}{2}\right)-\frac{F_i}{i}\cdot\left(\frac{\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}}{ch^2\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)}+th\left(\frac{i\cdot\pi\cdot a}{2\cdot b}\right)\right)-\frac{8\cdot i\cdot b}{\pi\cdot a}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left[E_m\cdot\frac{1}{m^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cdot sin^2\left(\frac{m\cdot\pi}{2}\right)\right]\Bigg\};$$

$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}.$$

Открытая цилиндрическая оболочка прямоугольная в плане и свободно опертая по криволинейным кромкам под действием равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки



Цель: Проверка точного воспроизведения значений поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки прямоугольной в плане и свободно опертой по криволинейным кромкам от действия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Scordelis-Lo_roof _Shell_42_Mesh_2x2.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_42_Mesh_4x4.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_42_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Scordelis-Lo_roof _Shell_44_Mesh_2x2.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_44_Mesh_4x4.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_44_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Scordelis-Lo_roof _Shell_45_Mesh_2x2.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_45_Mesh_4x4.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_45_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Scordelis-Lo_roof _Shell_50_Mesh_2x2.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_50_Mesh_4x4.SPR Scordelis-Lo_roof _Shell_50_Mesh_8x8.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для сеток 2x2, 4x4, 8x8
Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_2x2.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_4x4.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_8x8.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_16x16.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_32x32.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_64x64.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _36.SPR _Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128
Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_2x2.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_4x4.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_8x8.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_16x16.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_32x32.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_64x64.SPR Scordelis-Lo_roof _ Solid _37.SPR _Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128

Формулировка задачи: Открытая цилиндрическая оболочка прямоугольная в плане и свободно опертая по криволинейным кромкам через торцевые идеальные диафрагмы абсолютно жесткие в их плоскости и абсолютно податливые из их плоскости подвергается воздействию равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q. Проверить: точное воспроизведение

значений поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q.

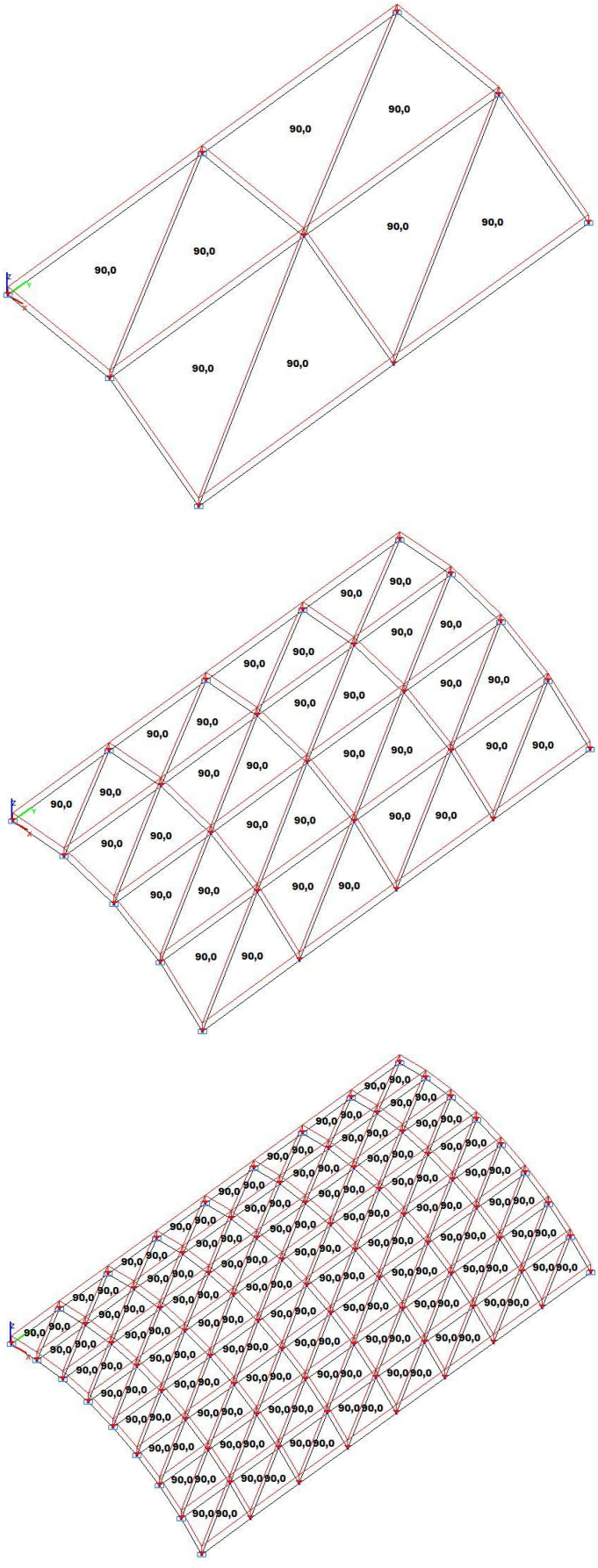
Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.
A. C. Scordelis, K. S. Lo, Computer analysis of cylindrical shells, Journal of the American concrete institute, Title No 61-33, May 1964, p. 539-561.
Design of cylindrical concrete shell roofs, New York, Manual No 31 American society of civil engineers, 1952.

Исходные данные:

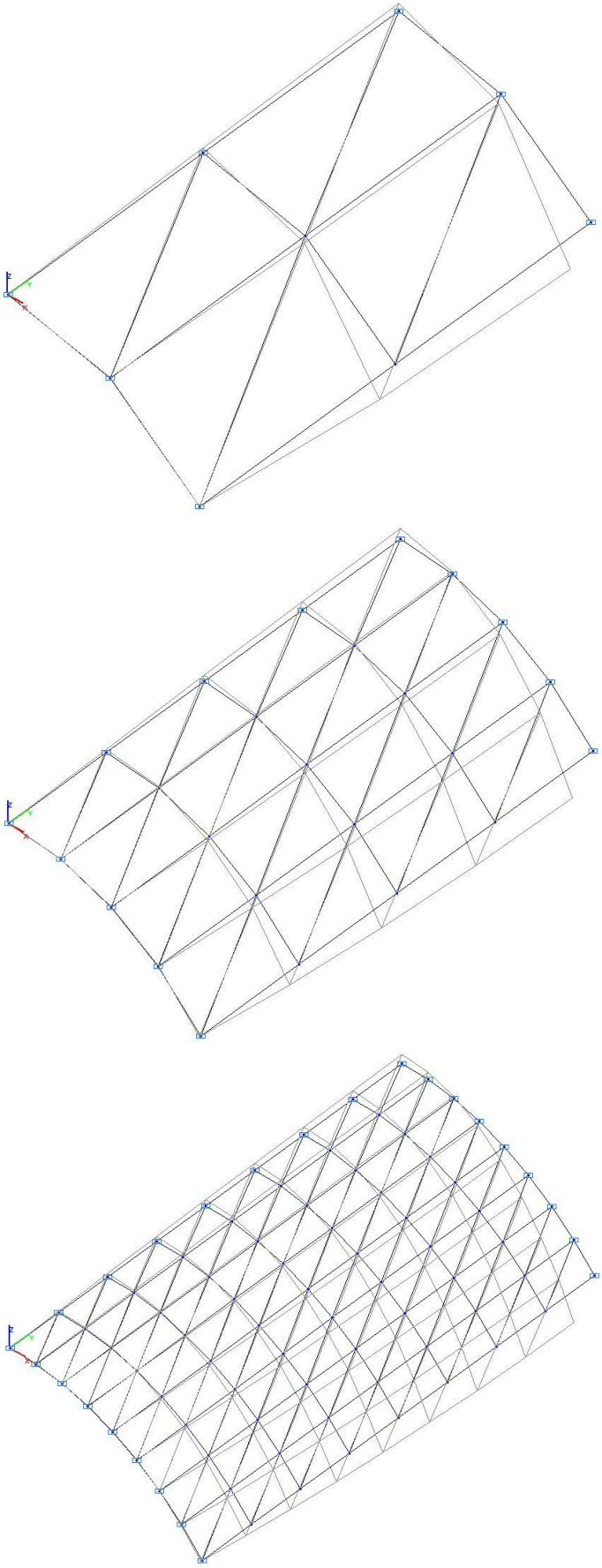
$E = 4.32 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости материала цилиндрической оболочки;
$\nu = 0.00$	- коэффициент Пуассона;
$L = 50.00$ м	- длина образующей цилиндрической оболочки;
$R = 25.00$ м	- радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки;
$2 \cdot \theta = 2 \cdot 40°$	- центральный угол дуги направляющей цилиндрической оболочки;
$h = 0.25$ м	- толщина цилиндрической оболочки;
$q = 90.0$ кН/м^2	- значение равномерно распределенной по всей площади цилиндрической оболочки поперечной нагрузки.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема четверти цилиндрической оболочки по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 8, 32, 128 трехузловых элементов оболочки типа 42 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных криволинейных кромок цилиндрической оболочки по направлениям степеней свободы X, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 2 – 4, 16, 64 четырехузловых элемента оболочки типа 44 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных криволинейных кромок цилиндрической оболочки по направлениям степеней свободы X, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81.
Модель 3 – 8, 32, 128 шестиузловых элементов оболочки типа 45 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных криволинейных кромок цилиндрической оболочки по направлениям степеней свободы X, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 4 – 4, 16, 64 восьмиузловых элемента оболочки типа 50 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных криволинейных кромок цилиндрической оболочки по направлениям степеней свободы X, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289.
Модель 5 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 восьмиузловых изопараметрических объемных элемента типа 36 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных криволинейных ребер цилиндрической оболочки по направлению степеней свободы X, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 18, 50, 162, 578, 2178, 8450, 33282.
Модель 6 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 двадцатиузловых изопараметрических объемных элемента типа 37 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Обеспечение граничных условий достигается за счет наложения связей на узлы опорных криволинейных ребер цилиндрической оболочки по направлению степеней свободы X, Z и связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 51, 155, 531, 1955, 7491, 29315, 115971.

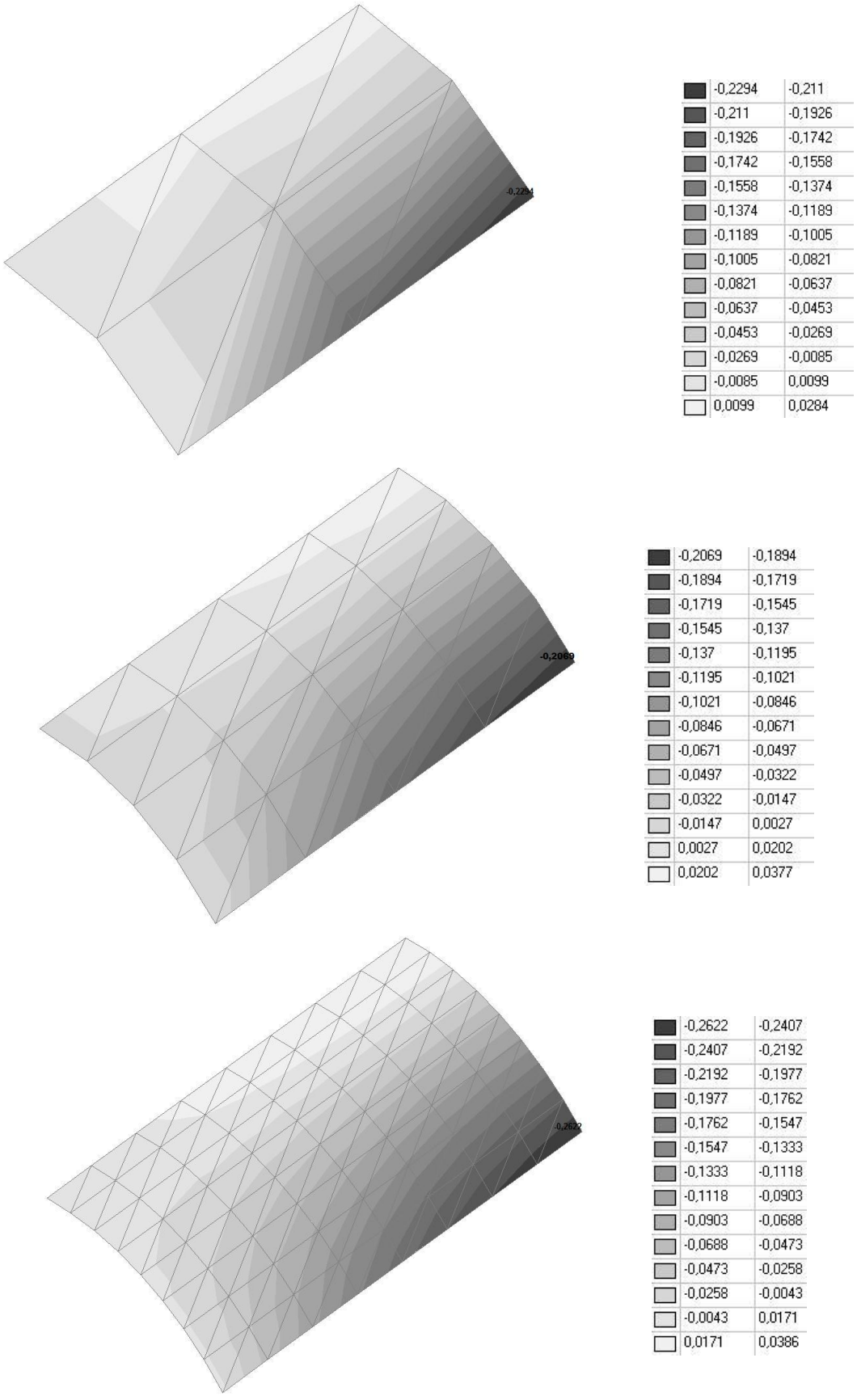
Результаты решения в SCAD



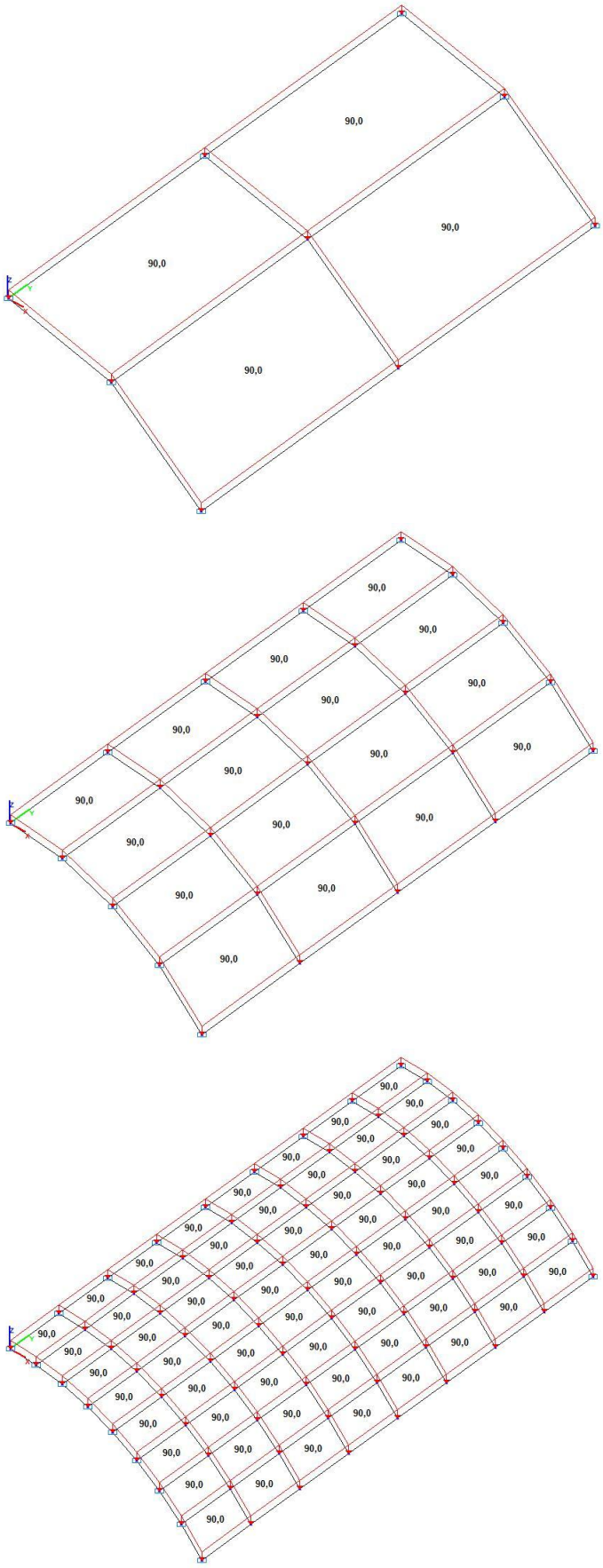
Модель 1. Расчетная схема



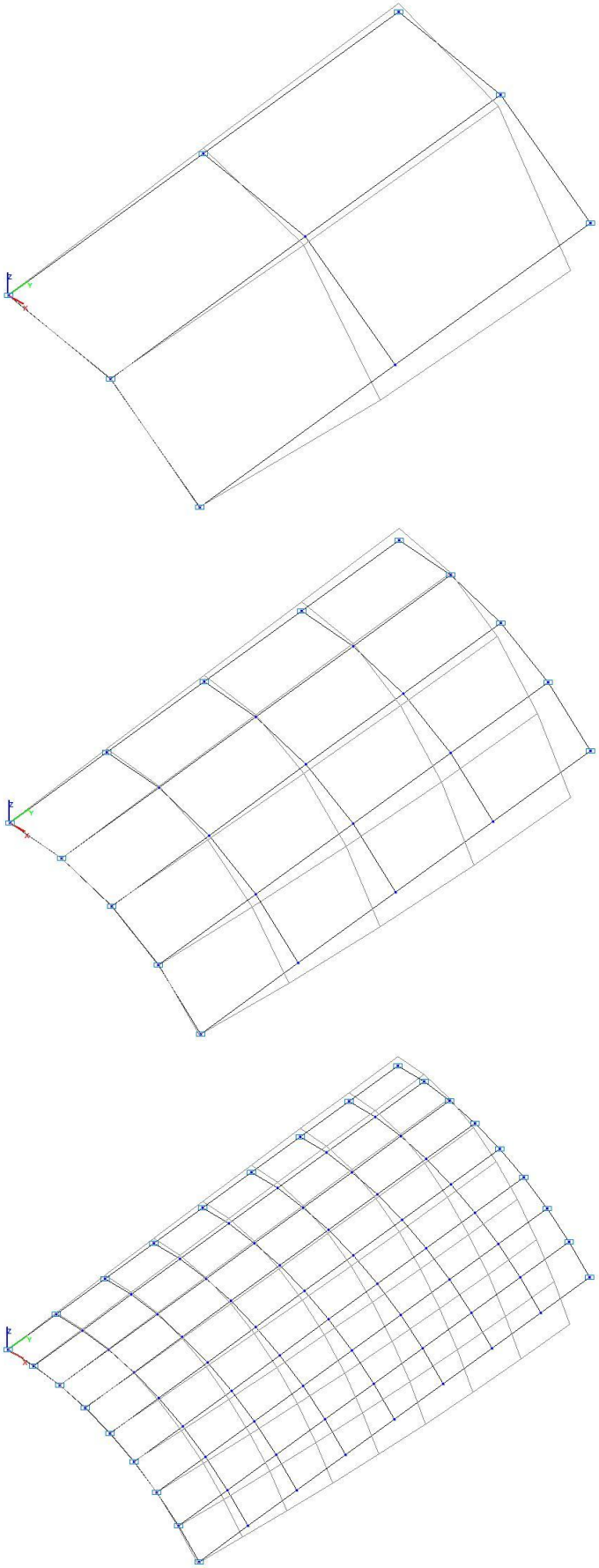
Модель 1. Деформированная схема



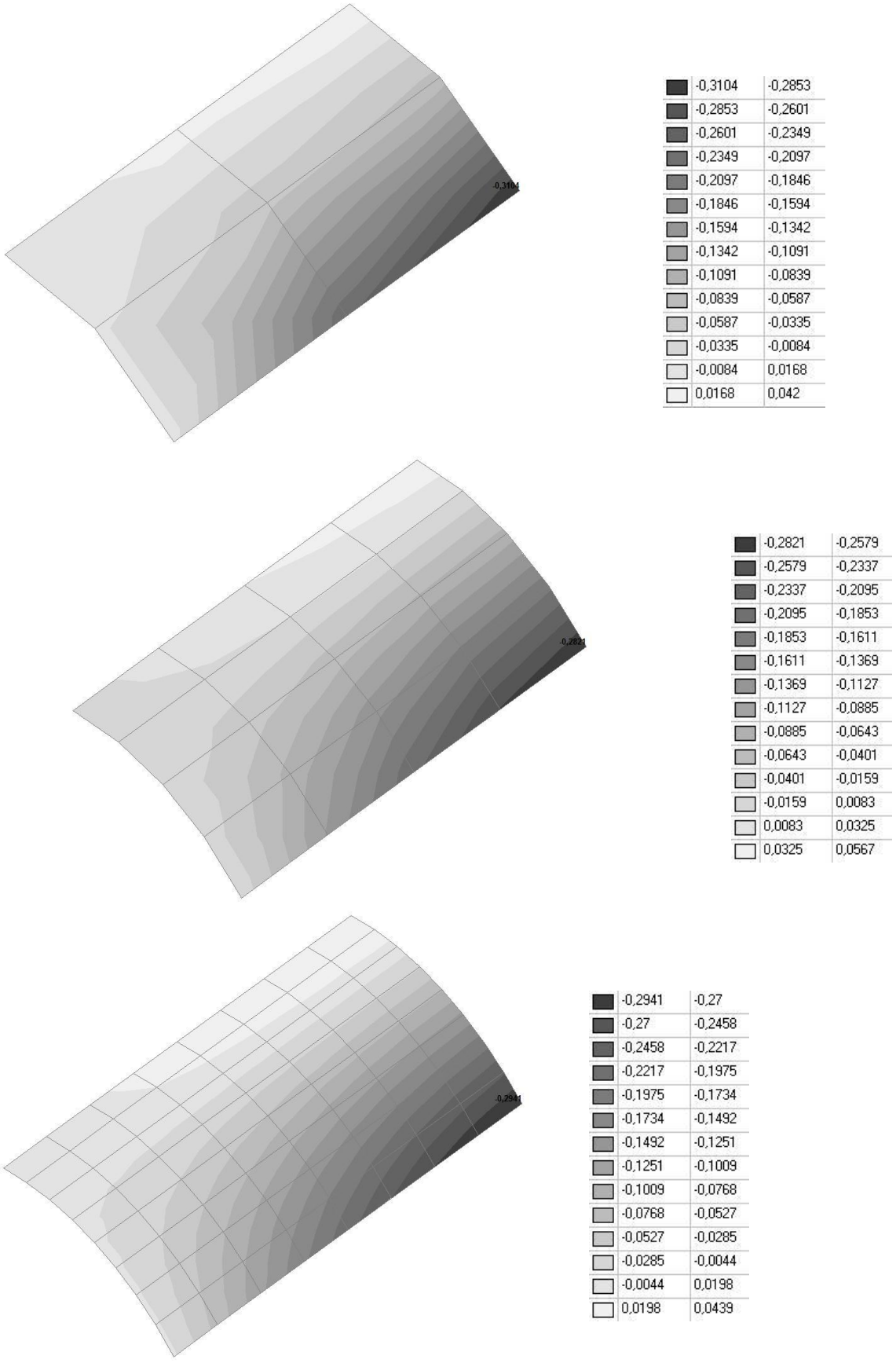
Модель 1. Значения поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q (м)



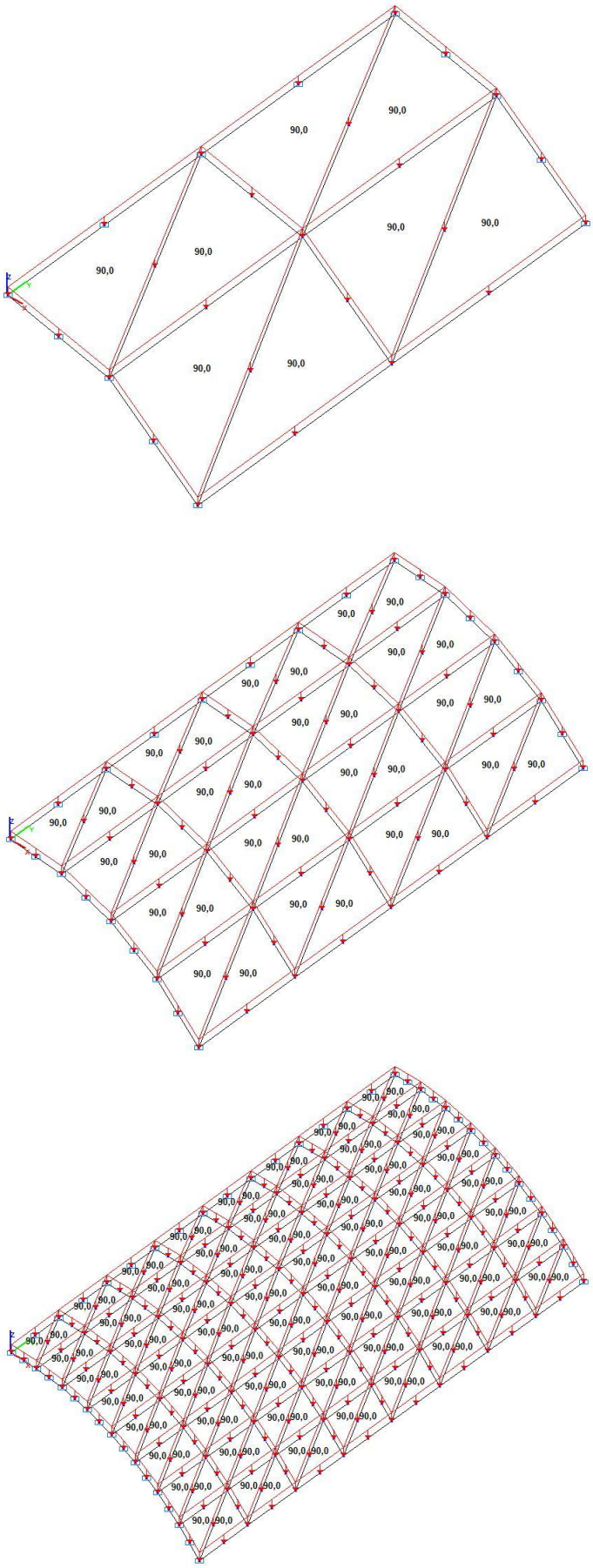
Модель 2. Расчетная схема



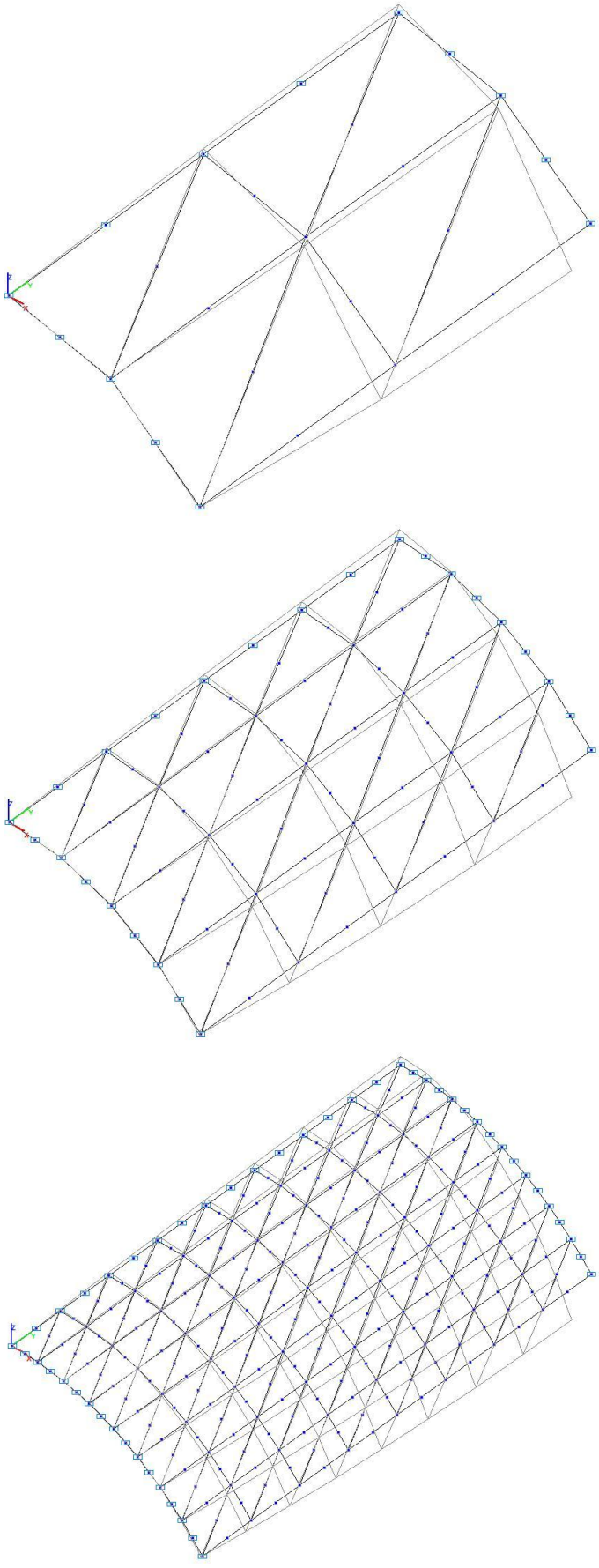
Модель 2. Деформированная схема



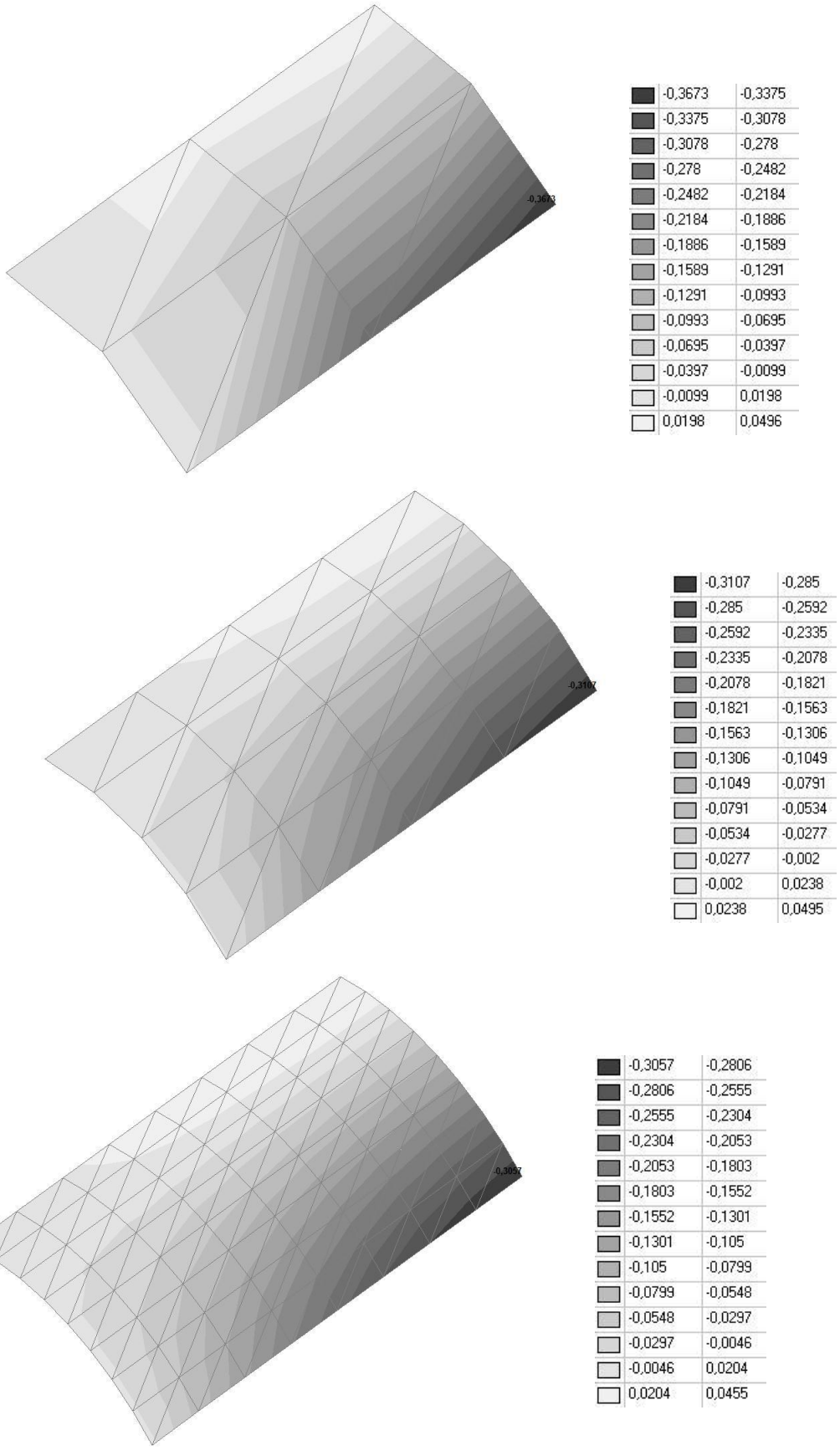
Модель 2. Значения поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q (м)



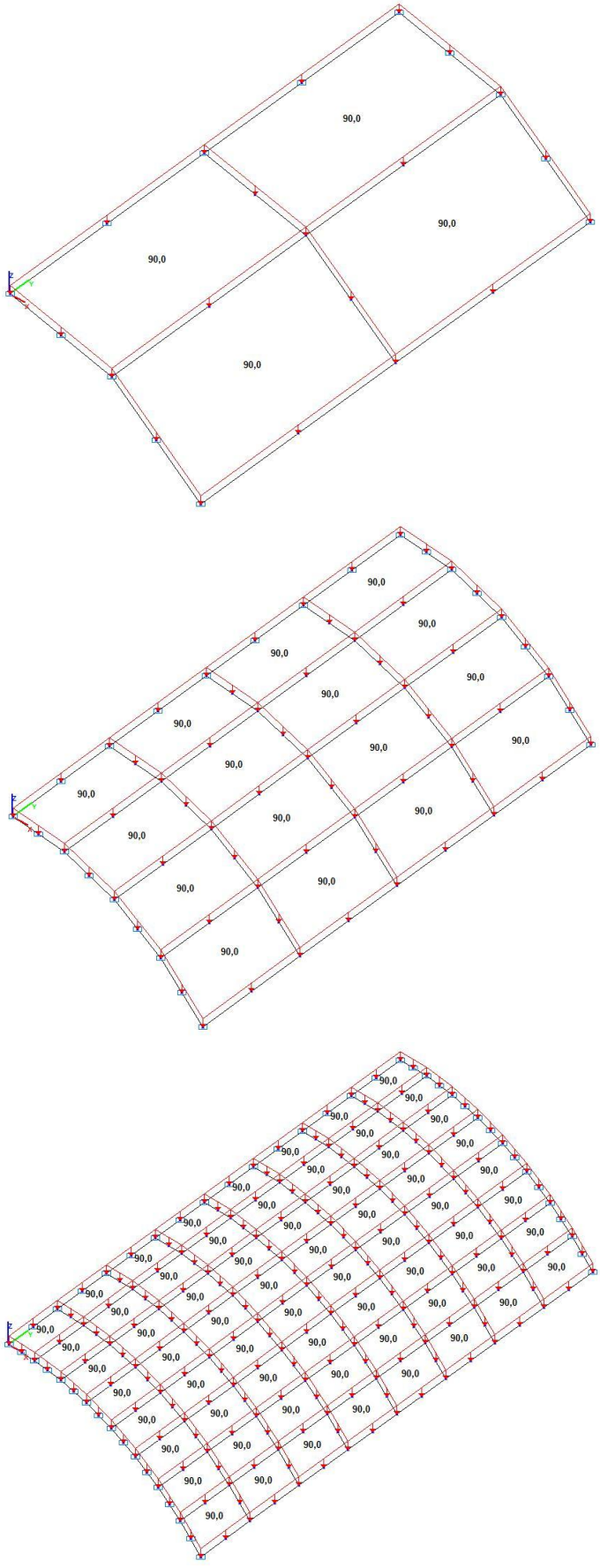
Модель 3. Расчетная схема



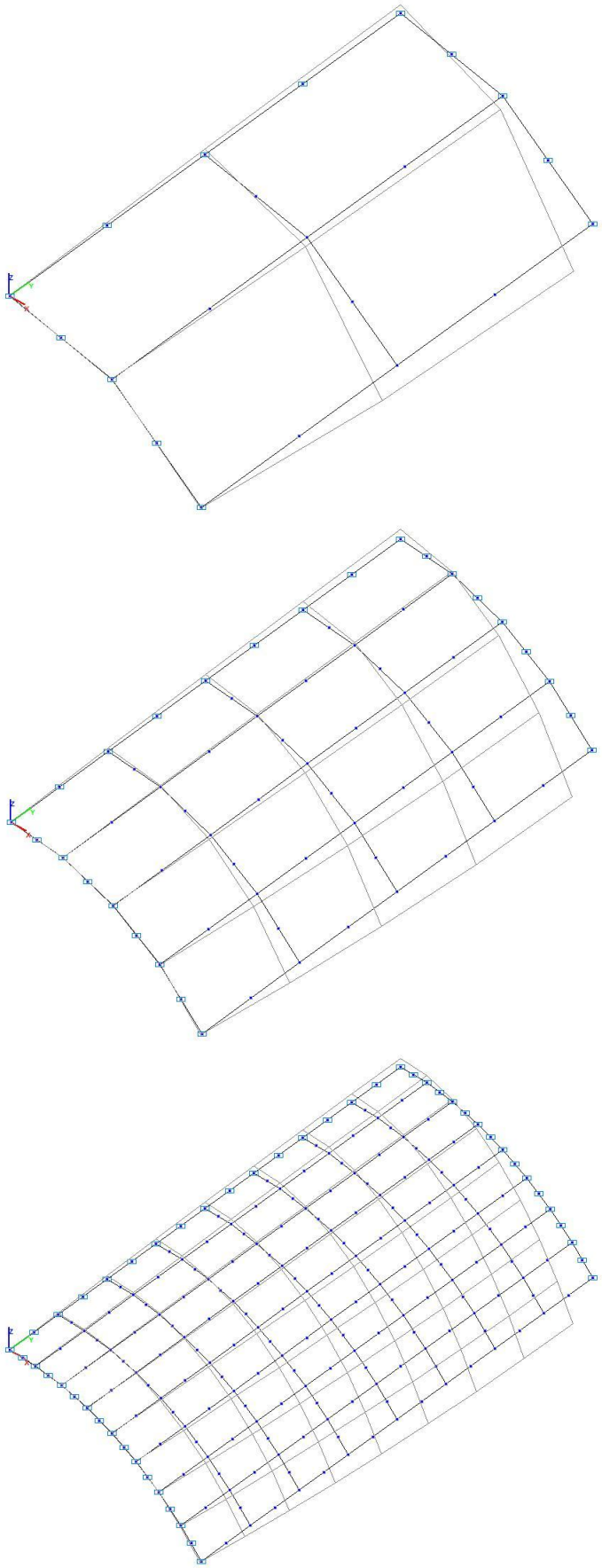
Модель 3. Деформированная схема



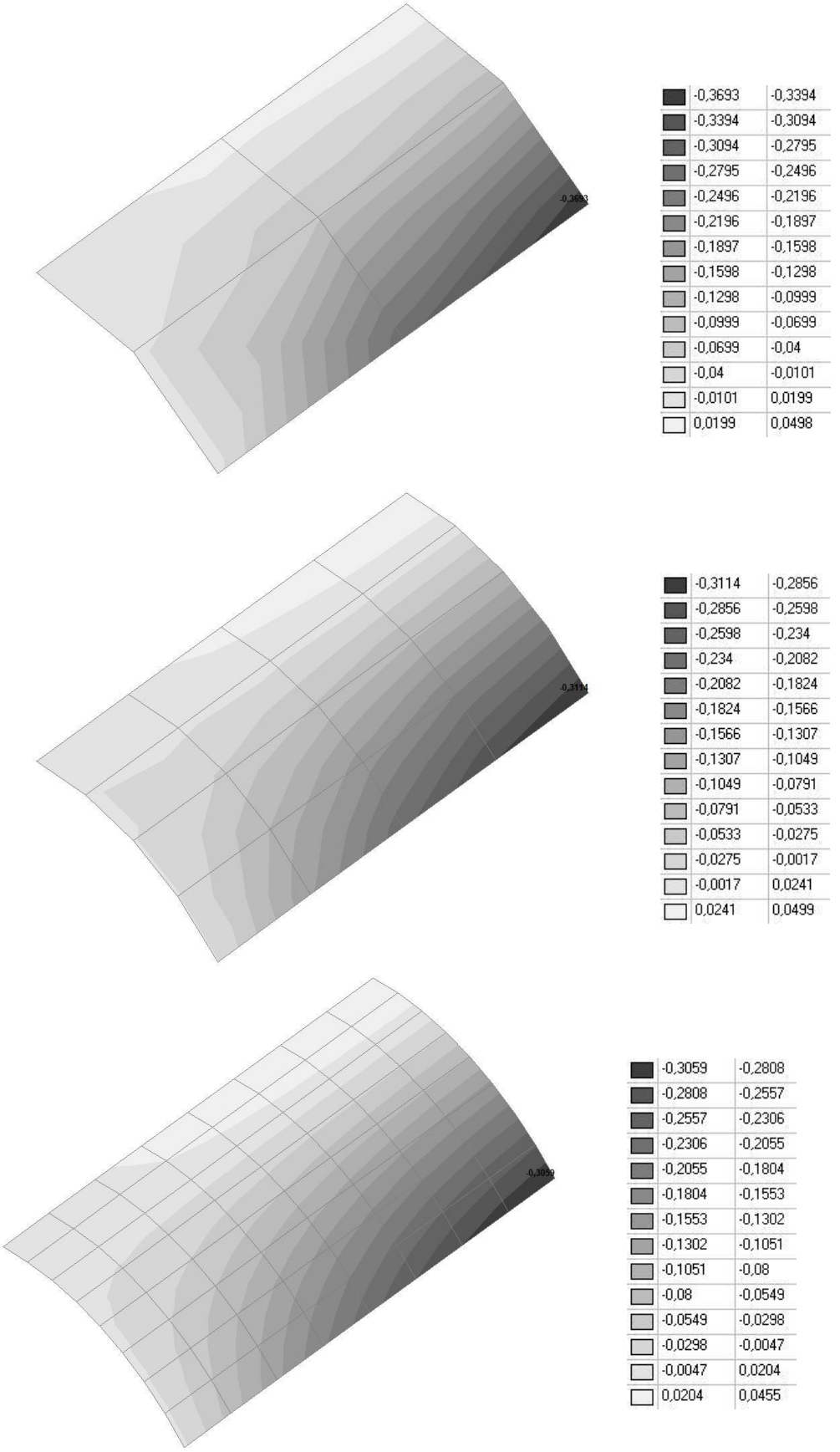
Модель 3. Значения поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q (м)



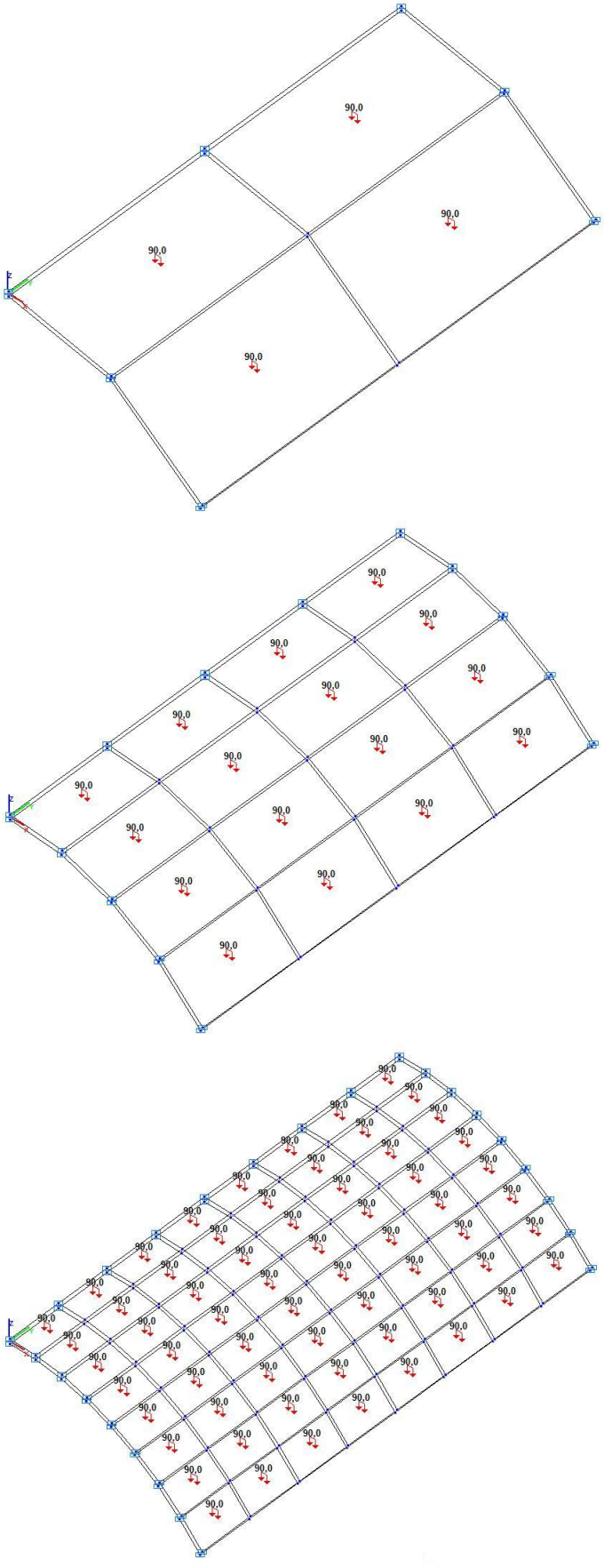
Модель 4. Расчетная схема

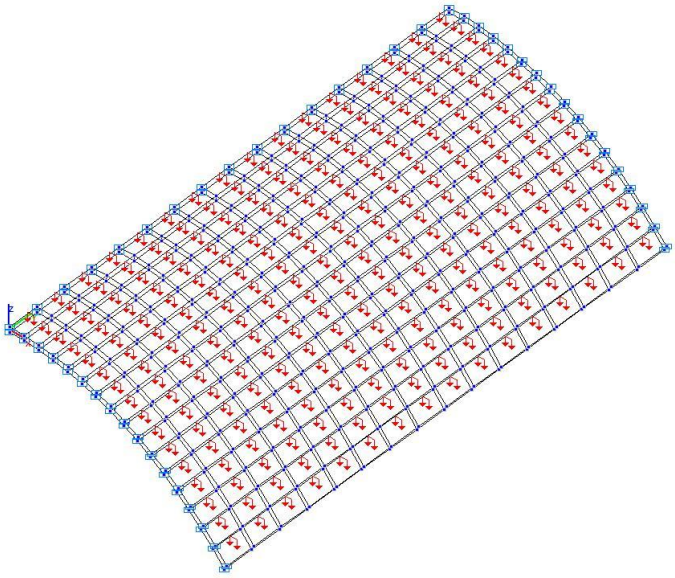


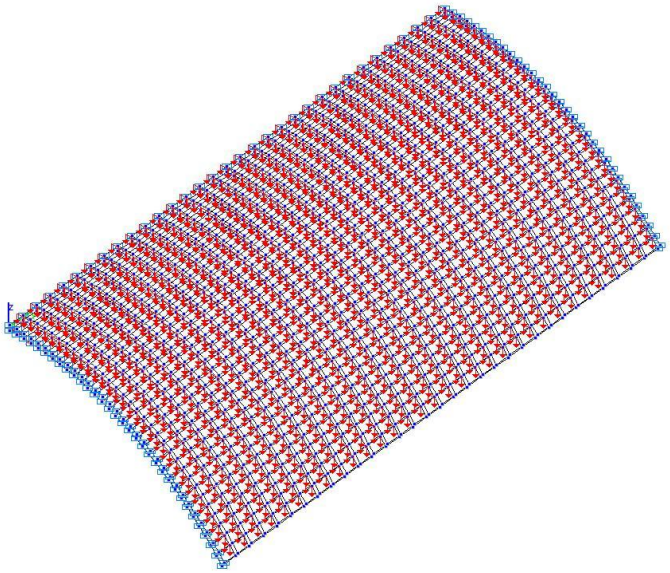
Модель 4. Деформированная схема

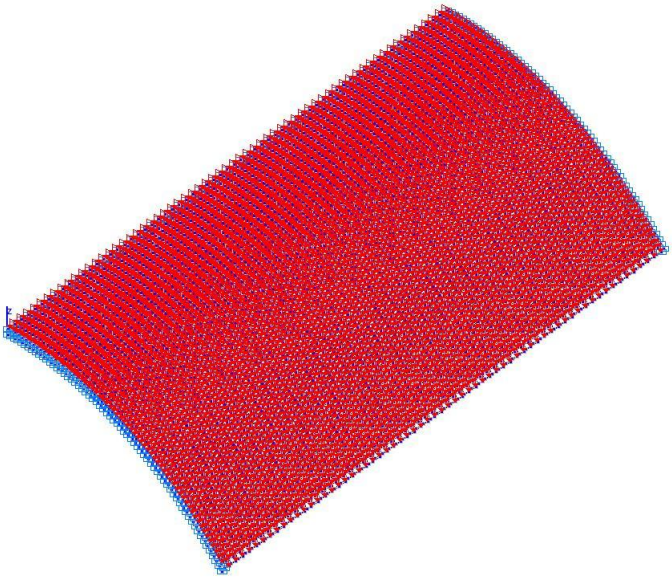


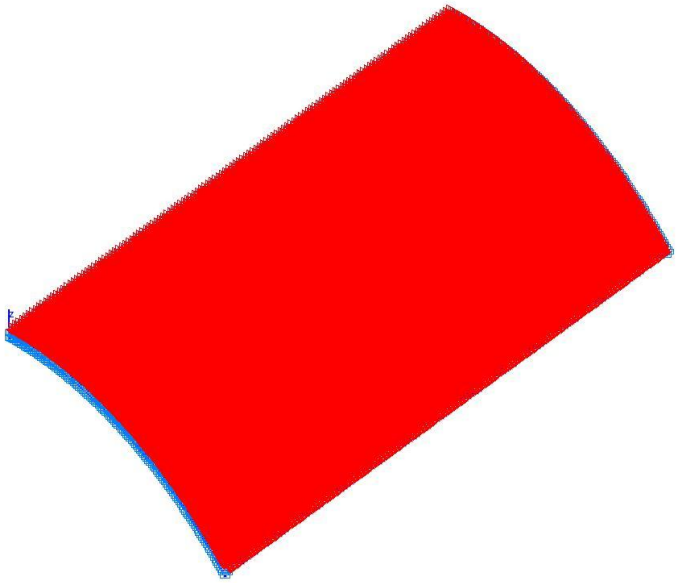
Модель 4. Значения поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q (м)


90,0
Z

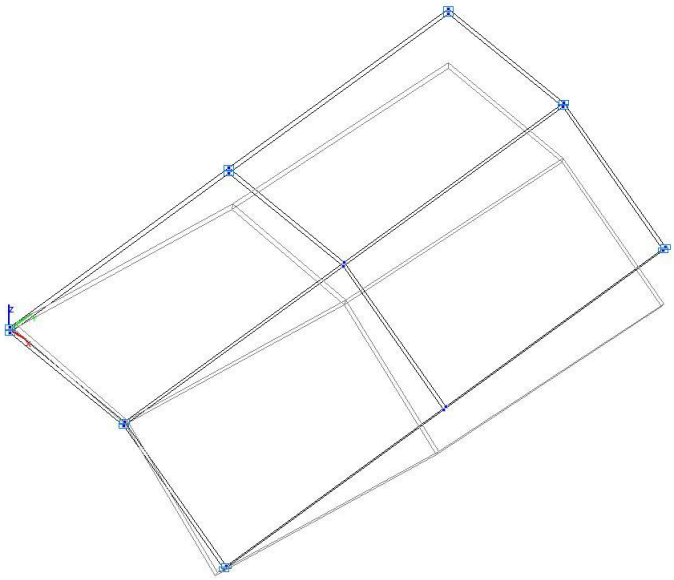


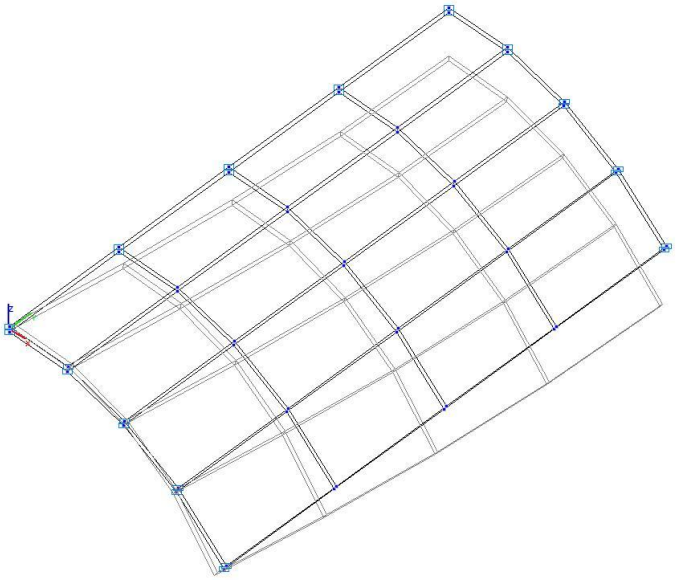


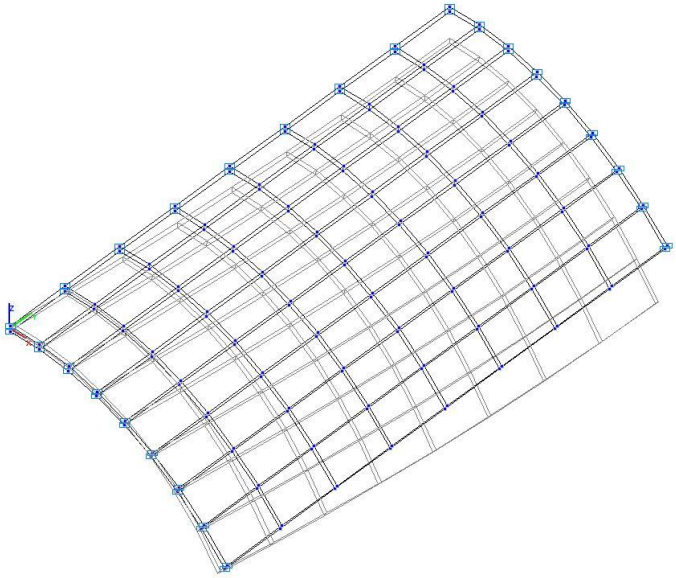


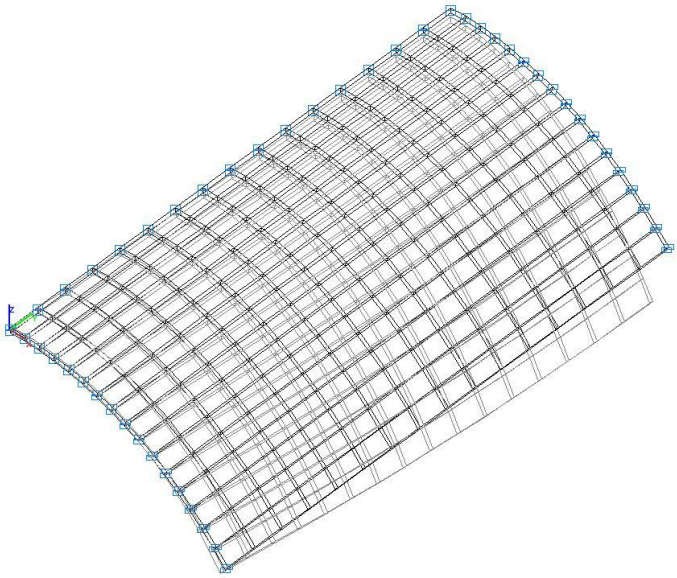


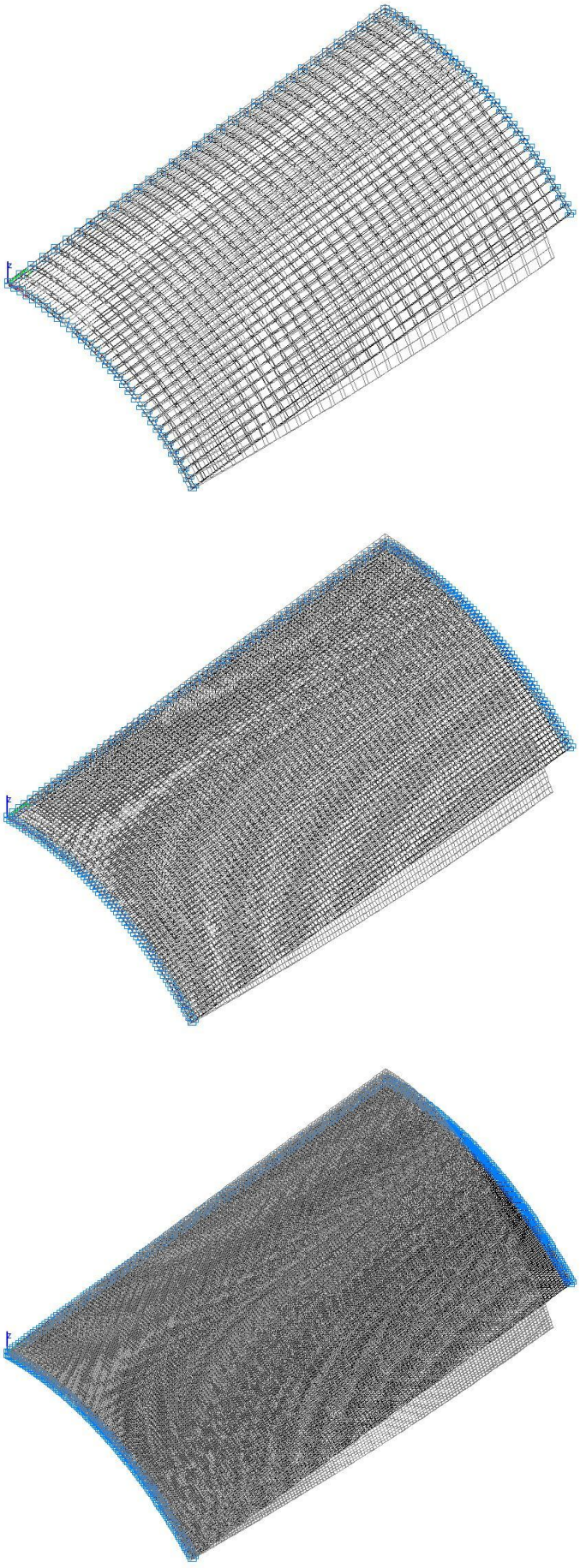
Модель 5. Расчетная схема



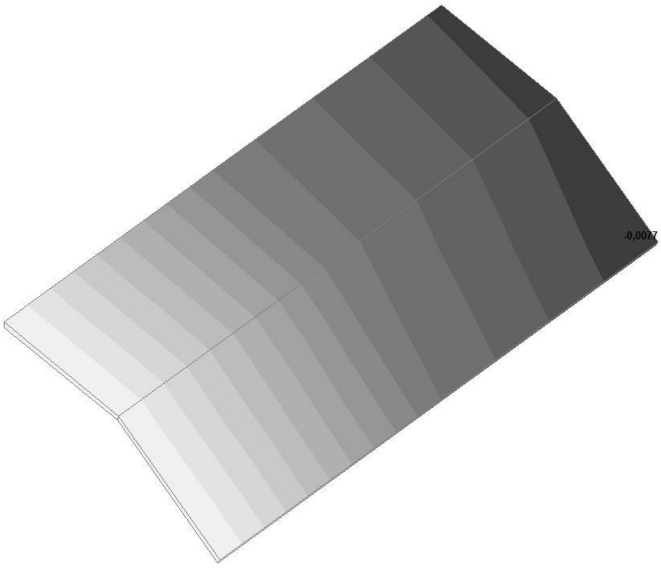




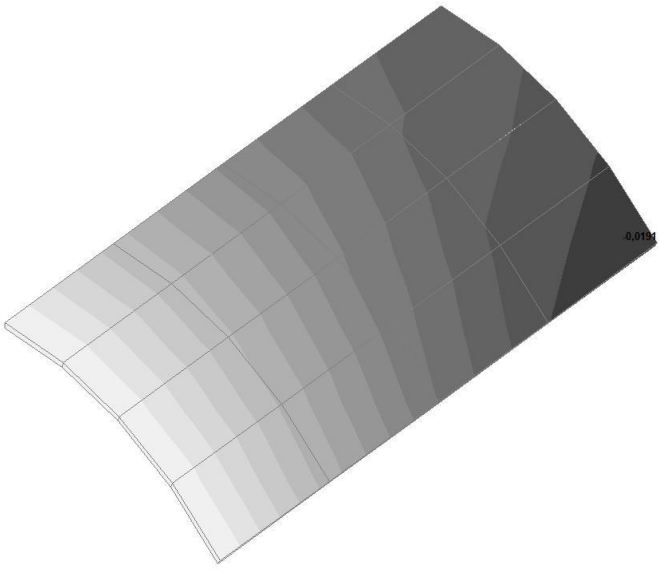




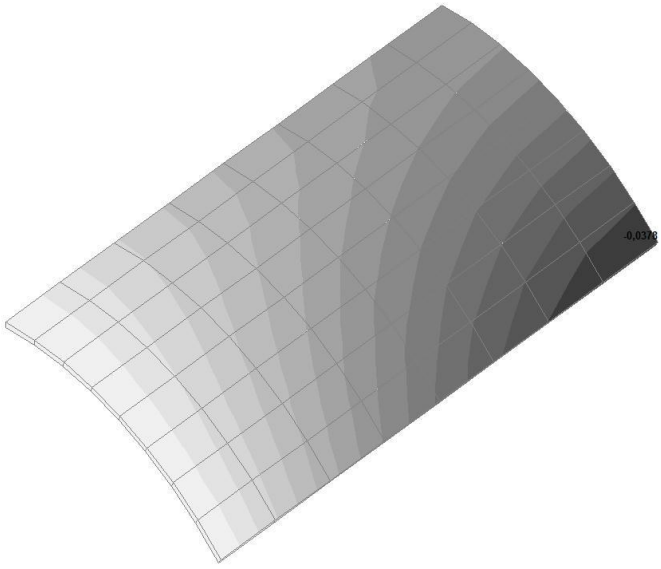
Модель 5. Деформированная схема



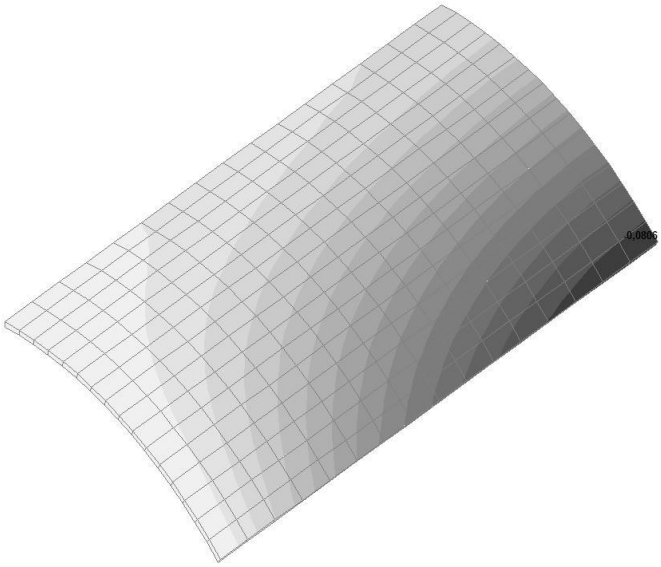
-0,0077	-0,0072
-0,0072	-0,0066
-0,0066	-0,0061
-0,0061	-0,0055
-0,0055	-0,005
-0,005	-0,0044
-0,0044	-0,0039
-0,0039	-0,0033
-0,0033	-0,0028
-0,0028	-0,0022
-0,0022	-0,0017
-0,0017	-0,0011
-0,0011	-0,0006
-0,0006	0.000000



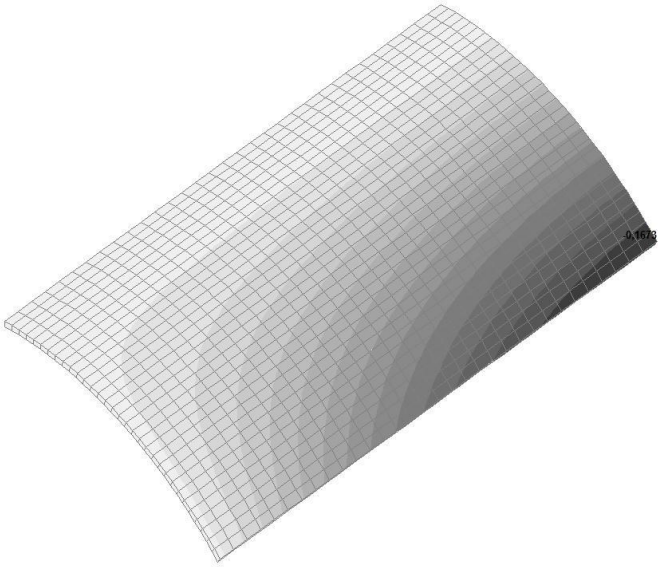
-0,0191	-0,0177
-0,0177	-0,0164
-0,0164	-0,015
-0,015	-0,0136
-0,0136	-0,0123
-0,0123	-0,0109
-0,0109	-0,0096
-0,0096	-0,0082
-0,0082	-0,0068
-0,0068	-0,0055
-0,0055	-0,0041
-0,0041	-0,0027
-0,0027	-0,0014
-0,0014	0.000000



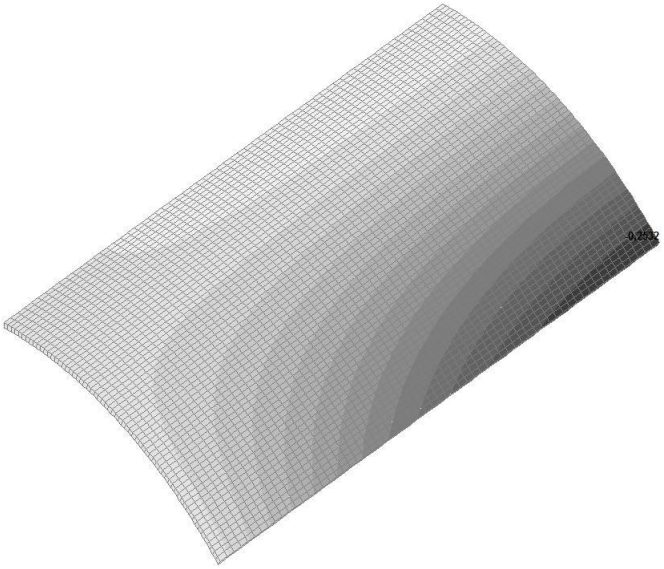
-0,0378	-0,0351
-0,0351	-0,0324
-0,0324	-0,0297
-0,0297	-0,027
-0,027	-0,0243
-0,0243	-0,0216
-0,0216	-0,0189
-0,0189	-0,0162
-0,0162	-0,0135
-0,0135	-0,0108
-0,0108	-0,0081
-0,0081	-0,0054
-0,0054	-0,0027
-0,0027	0.000000



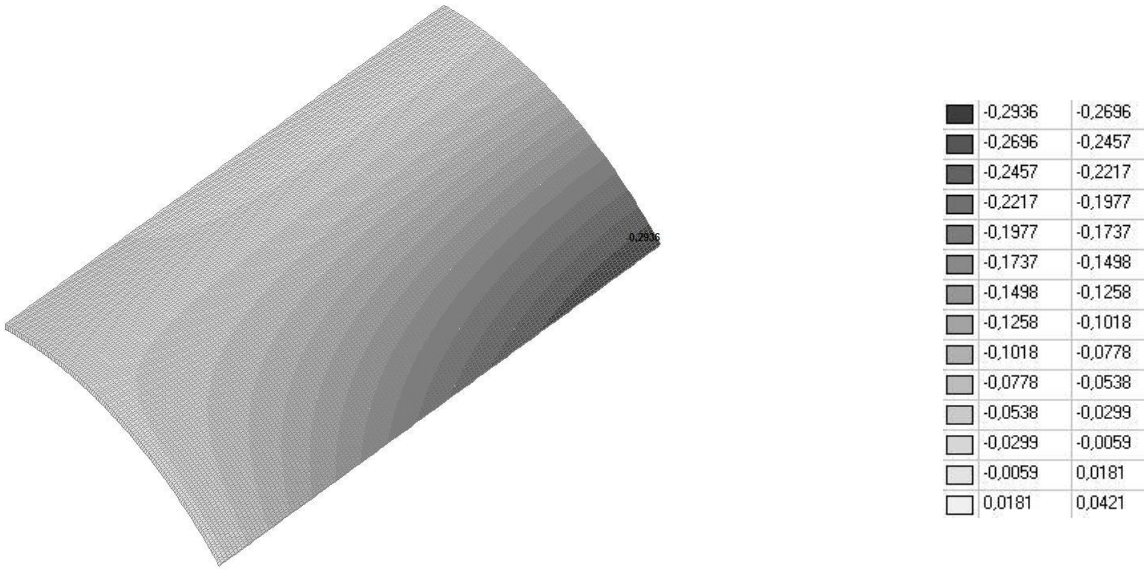
-0,0806	-0,0749
-0,0749	-0,0691
-0,0691	-0,0633
-0,0633	-0,0576
-0,0576	-0,0518
-0,0518	-0,0461
-0,0461	-0,0403
-0,0403	-0,0346
-0,0346	-0,0288
-0,0288	-0,023
-0,023	-0,0173
-0,0173	-0,0115
-0,0115	-0,0058
-0,0058	0.000000



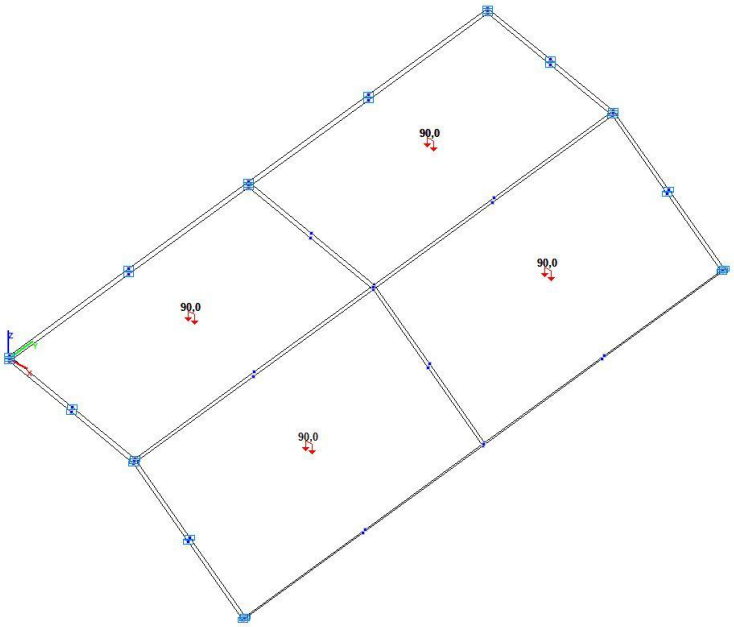
-0,1673	-0,1546
-0,1546	-0,142
-0,142	-0,1294
-0,1294	-0,1168
-0,1168	-0,1042
-0,1042	-0,0916
-0,0916	-0,0789
-0,0789	-0,0663
-0,0663	-0,0537
-0,0537	-0,0411
-0,0411	-0,0285
-0,0285	-0,0159
-0,0159	-0,0032
-0,0032	0,0094

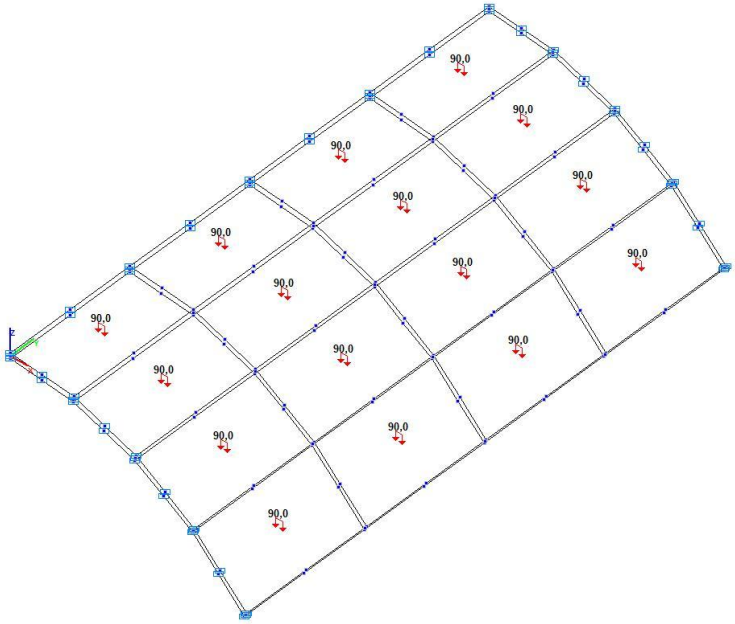


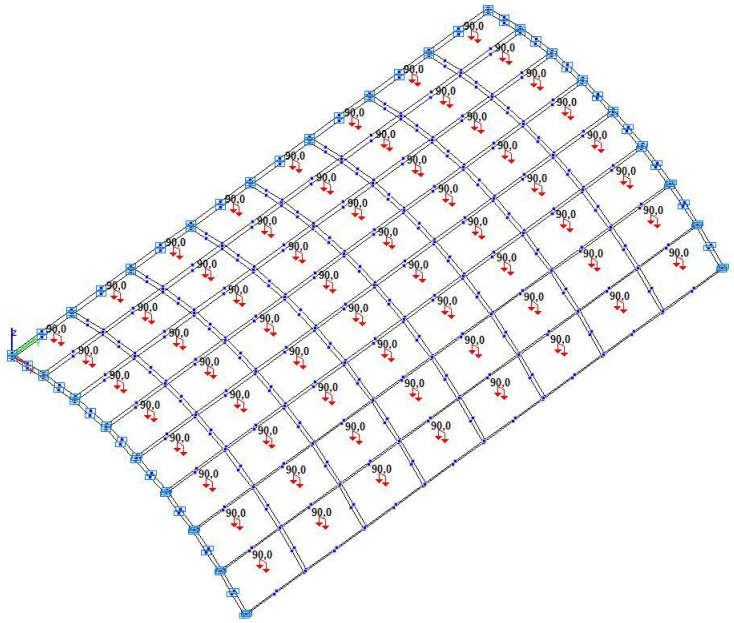
-0,2532	-0,2329
-0,2329	-0,2125
-0,2125	-0,1922
-0,1922	-0,1719
-0,1719	-0,1515
-0,1515	-0,1312
-0,1312	-0,1108
-0,1108	-0,0905
-0,0905	-0,0702
-0,0702	-0,0498
-0,0498	-0,0295
-0,0295	-0,0091
-0,0091	0,0112
0,0112	0,0315

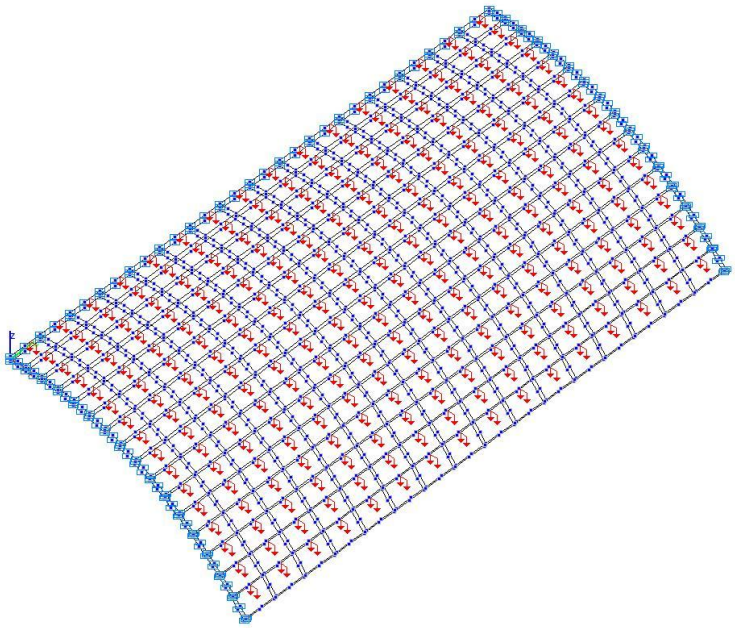


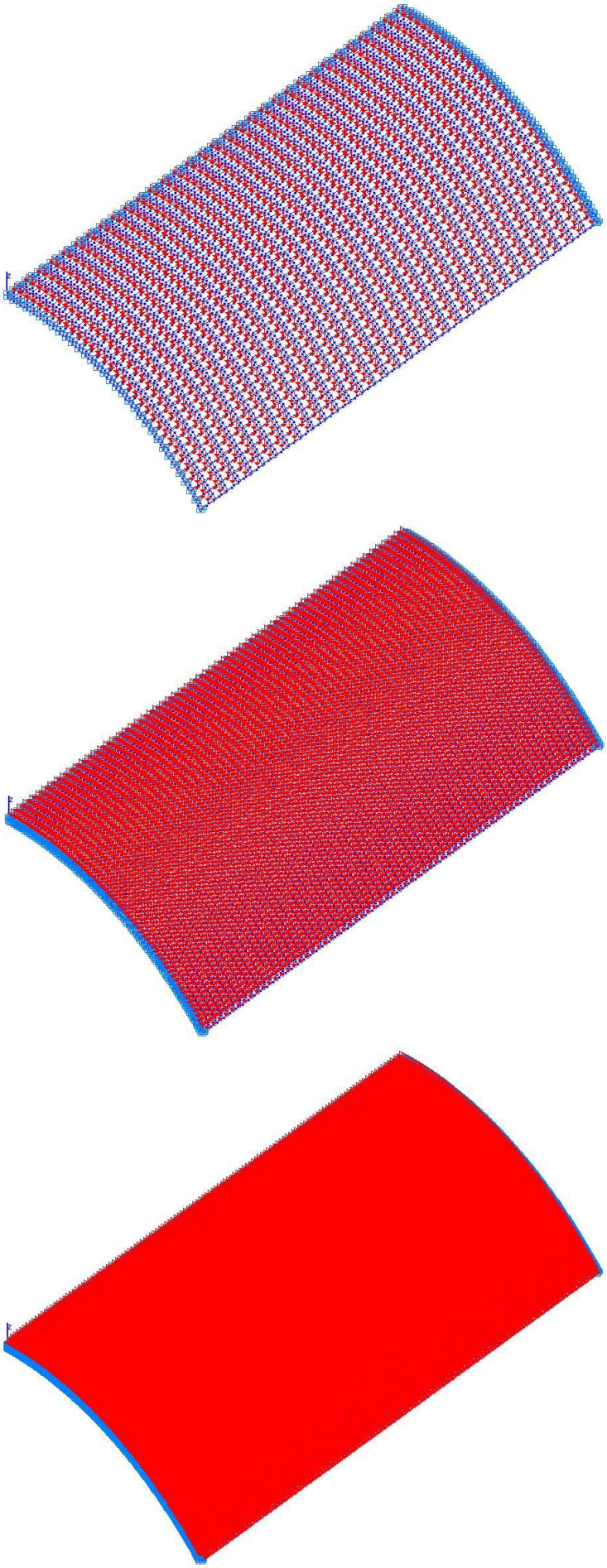
Модель 5. Значения поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q (м)



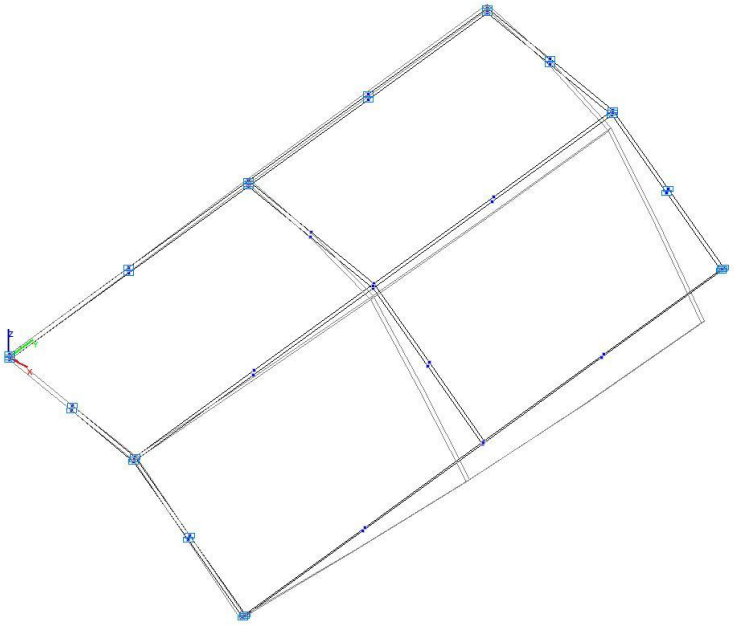

90.0
Z

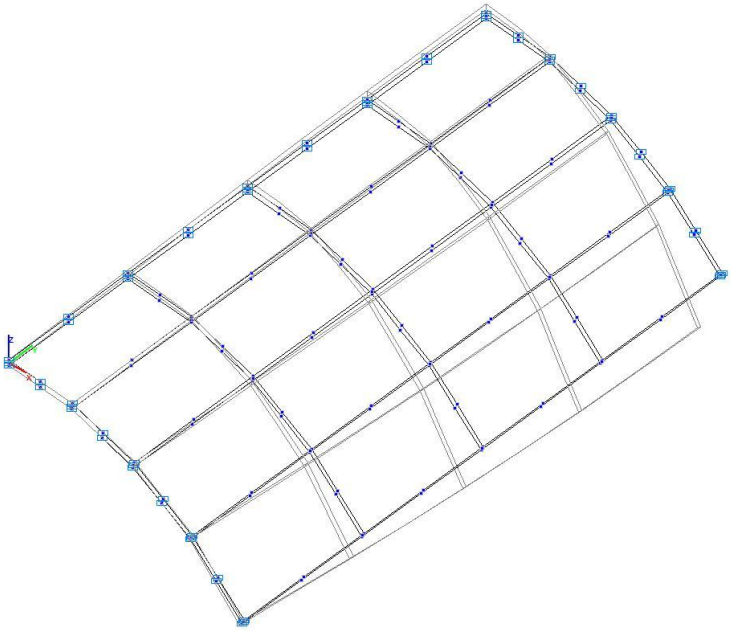

90.0
Z

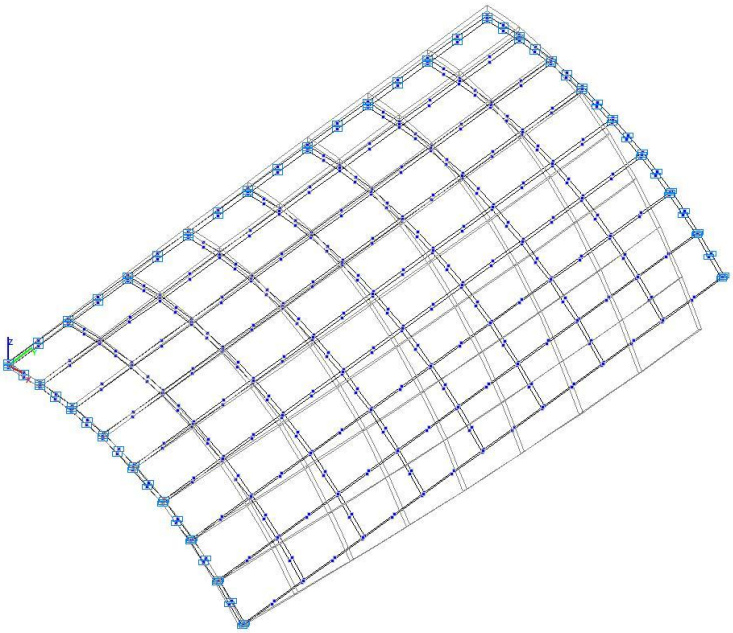

Z

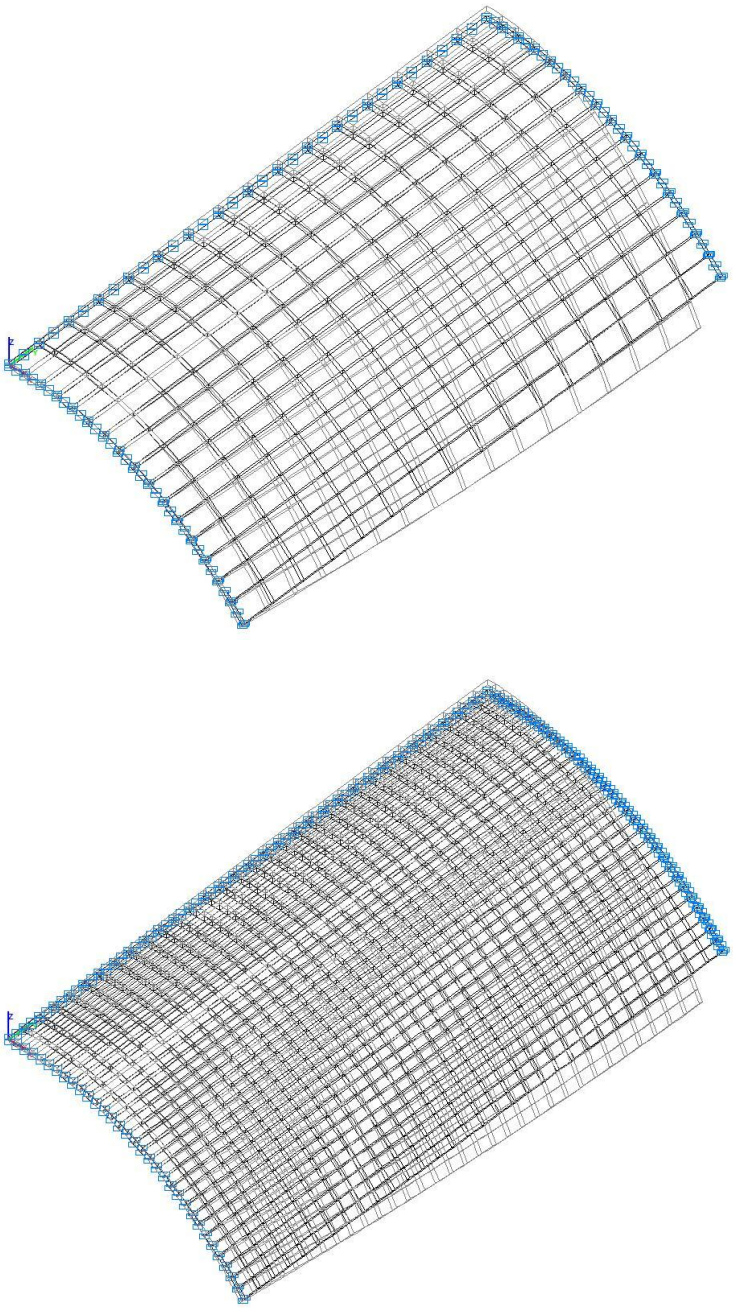


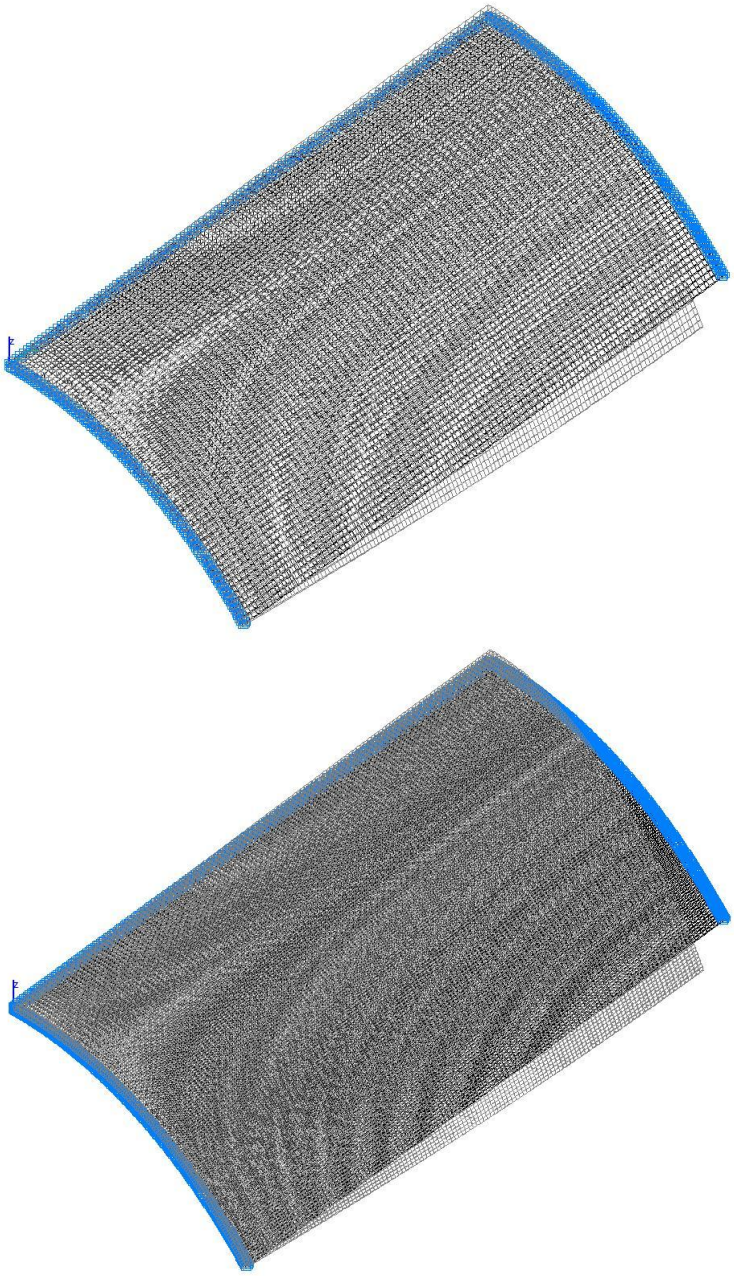
Модель 6. Расчетная схема



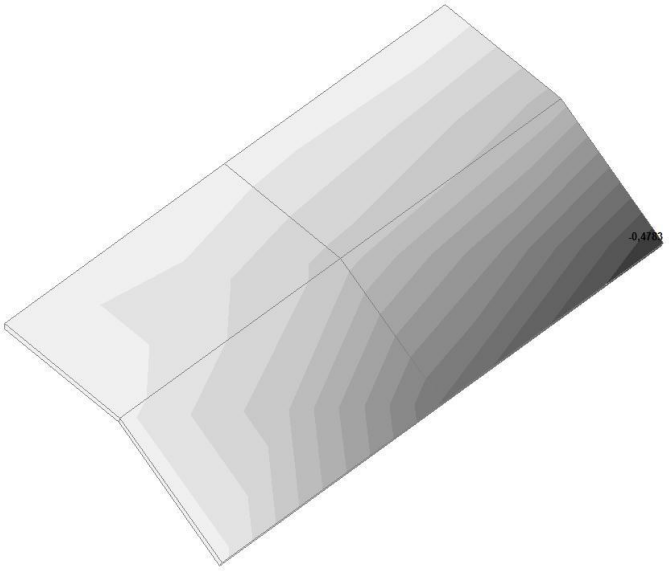




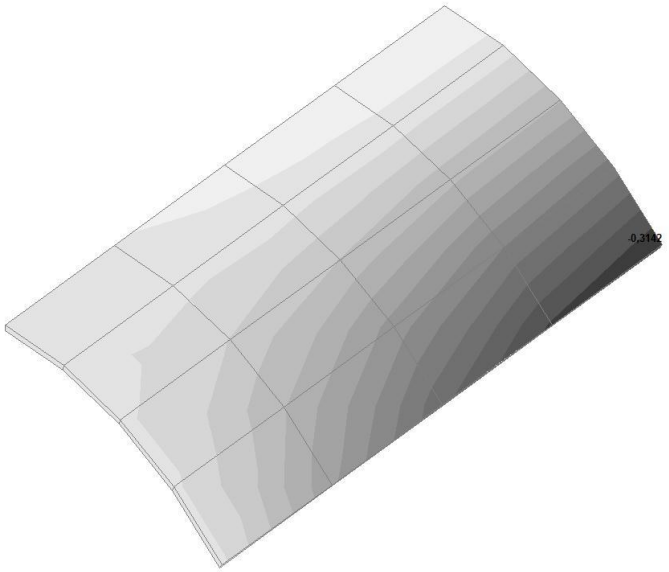




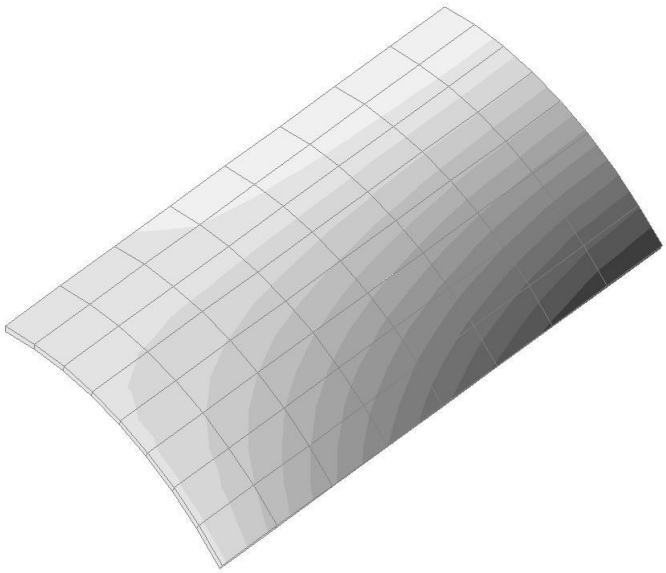
Модель 6. Деформированная схема



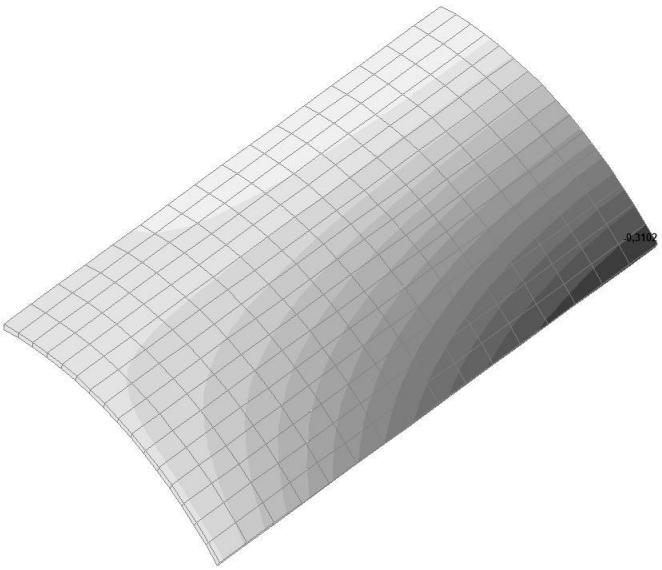
-0,4783	-0,4424
-0,4424	-0,4065
-0,4065	-0,3706
-0,3706	-0,3347
-0,3347	-0,2988
-0,2988	-0,2629
-0,2629	-0,227
-0,227	-0,1911
-0,1911	-0,1552
-0,1552	-0,1193
-0,1193	-0,0834
-0,0834	-0,0475
-0,0475	-0,0116
-0,0116	0,0243



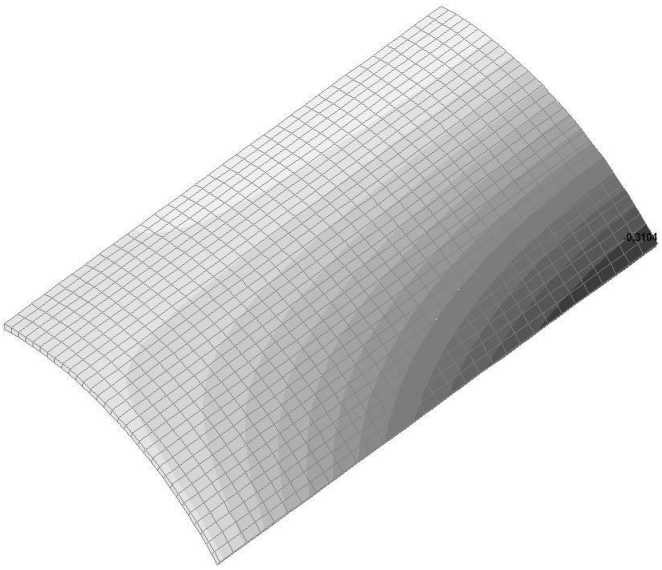
-0,3142	-0,2885
-0,2885	-0,2628
-0,2628	-0,237
-0,237	-0,2113
-0,2113	-0,1856
-0,1856	-0,1599
-0,1599	-0,1342
-0,1342	-0,1085
-0,1085	-0,0828
-0,0828	-0,0571
-0,0571	-0,0314
-0,0314	-0,0057
-0,0057	0,02
0,02	0,0457



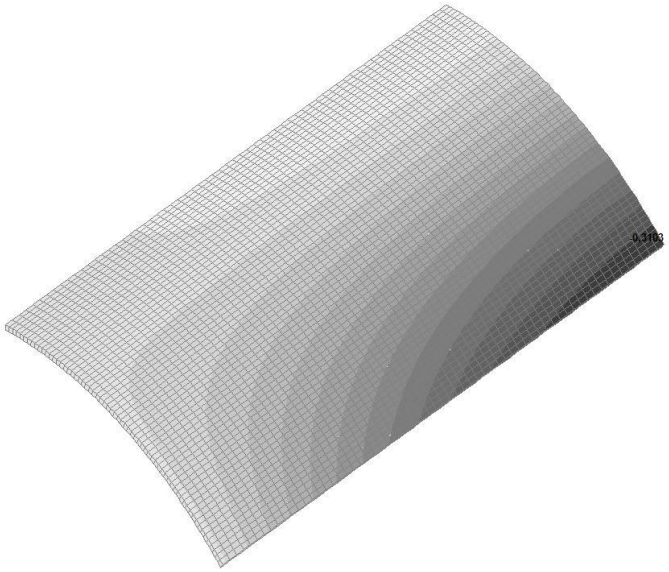
-0,3105	-0,285
-0,285	-0,2595
-0,2595	-0,234
-0,234	-0,2086
-0,2086	-0,1831
-0,1831	-0,1576
-0,1576	-0,1321
-0,1321	-0,1066
-0,1066	-0,0812
-0,0812	-0,0557
-0,0557	-0,0302
-0,0302	-0,0047
-0,0047	0,0208
0,0208	0,0463



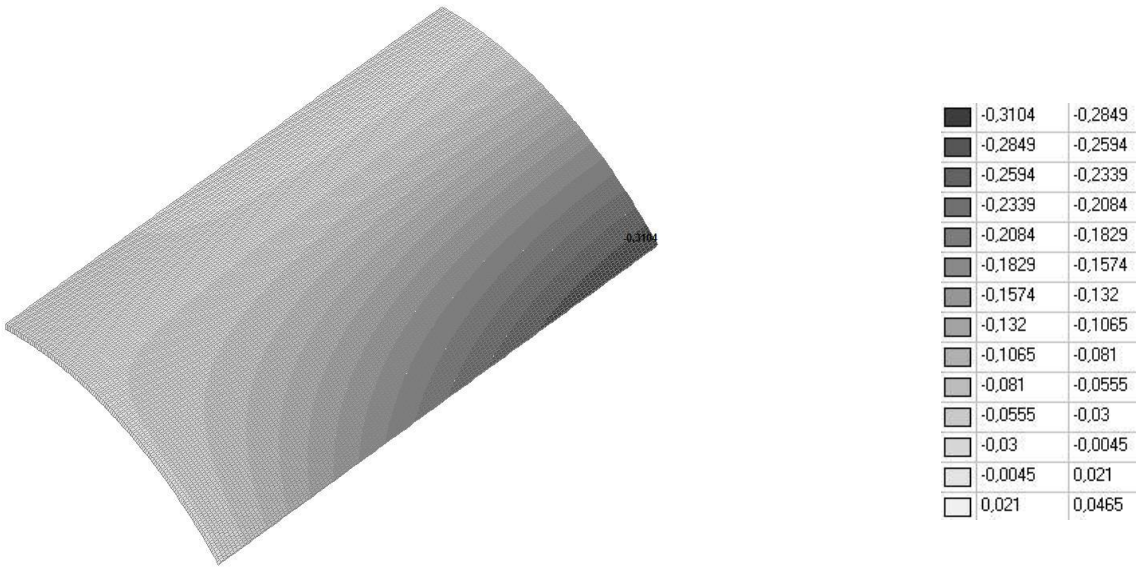
-0,3102	-0,2847
-0,2847	-0,2593
-0,2593	-0,2338
-0,2338	-0,2083
-0,2083	-0,1828
-0,1828	-0,1574
-0,1574	-0,1319
-0,1319	-0,1064
-0,1064	-0,081
-0,081	-0,0555
-0,0555	-0,03
-0,03	-0,0045
-0,0045	0,0209
0,0209	0,0464



-0,3104	-0,285
-0,285	-0,2595
-0,2595	-0,234
-0,234	-0,2085
-0,2085	-0,183
-0,183	-0,1575
-0,1575	-0,132
-0,132	-0,1065
-0,1065	-0,081
-0,081	-0,0555
-0,0555	-0,03
-0,03	-0,0045
-0,0045	0,021
0,021	0,0465



-0,3103	-0,2848
-0,2848	-0,2593
-0,2593	-0,2338
-0,2338	-0,2083
-0,2083	-0,1829
-0,1829	-0,1574
-0,1574	-0,1319
-0,1319	-0,1064
-0,1064	-0,081
-0,081	-0,0555
-0,0555	-0,03
-0,03	-0,0045
-0,0045	0,021
0,021	0,0464



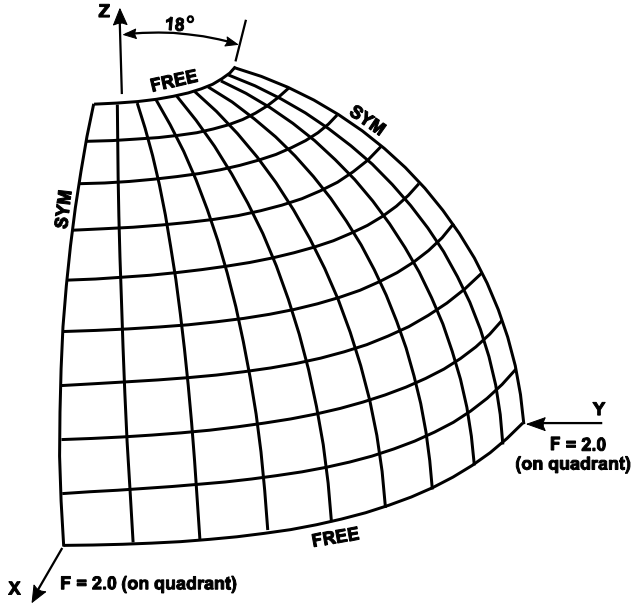
Модель 6. Значения поперечных перемещений в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q (м)

Сравнение решений:

Поперечные перемещения в в середине свободных прямолинейных кромок открытой цилиндрической оболочки w_q от воздействия равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузки q

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	0.3086	0.2294	25.66
	4x4		0.2069	32.95
	8x8		0.2622	15.04
2 (Тип элемента 44)	2x2	0.3086	0.3104	0.58
	4x4		0.2821	8.59
	8x8		0.2941	4.70
3 (Тип элемента 45)	2x2	0.3086	0.3673	19.02
	4x4		0.3107	0.68
	8x8		0.3057	0.94
4 (Тип элемента 50)	2x2	0.3086	0.3693	19.67
	4x4		0.3114	0.91
	8x8		0.3059	0.87
5 (Тип элемента 36)	2x2	0.3086	0.0077	97.50
	4x4		0.0191	93.81
	8x8		0.0378	87.75
	16x16		0.0806	73.88
	32x32		0.1673	45.79
	64x64		0.2532	17.95
	128x128		0.2936	4.86
6 (Тип элемента 37)	2x2	0.3086	0.4783	54.99
	4x4		0.3142	1.81
	8x8		0.3105	0.62
	16x16		0.3102	0.52
	32x32		0.3104	0.58
	64x64		0.3103	0.55
	128x128		0.3104	0.58

Свободная оболочка полусферы с круговым полюсным отверстием под действием двух ортогональных пар взаимно уравновешенных радиально растягивающих и радиально сжимающих сил на экваторе



***Цель*:** Проверка точного воспроизведения значений поперечных перемещений свободной оболочки полусферы с круговым полюсным отверстием по направлению действия двух ортогональных пар взаимно уравновешенных радиально растягивающих и радиально сжимающих сил на экваторе.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	**Описание файла расчета**
Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_42_Mesh_2x2.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_42_Mesh_4x4.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_42_Mesh_8x8.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_42_Mesh_16x16.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_42_Mesh_32x32.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32
Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_44_Mesh_2x2.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_44_Mesh_4x4.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_44_Mesh_8x8.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_44_Mesh_16x16.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_44_Mesh_32x32.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32
Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_45_Mesh_2x2.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_45_Mesh_4x4.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_45_Mesh_8x8.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_45_Mesh_16x16.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_45_Mesh_32x32.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32
Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_50_Mesh_2x2.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_50_Mesh_4x4.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_50_Mesh_8x8.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_50_Mesh_16x16.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _Shell_50_Mesh_32x32.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32
Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_2x2.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_4x4.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_8x8.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_16x16.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_32x32.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_64x64.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_128x128.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_256x256.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _36.SPR _Mesh_512x512.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128, 256x256, 512x512

Название файла расчета	Описание файла расчета
Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_2x2.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_4x4.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_8x8.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_16x16.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_32x32.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_64x64.SPR Quadrant_of_a_spherical_shell _ Solid _37.SPR _Mesh_128x128.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для сеток 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64, 128x128

Формулировка задачи: Свободная оболочка полусферы с круговым полюсным отверстием подвергается воздействию двух ортогональных пар взаимно уравновешенных радиально растягивающих и радиально сжимающих сил F на экваторе. Проверить: точное воспроизведение значений поперечных перемещений свободной оболочки полусферы w_{FX} и w_{FY} по направлению действия сил на экваторе.

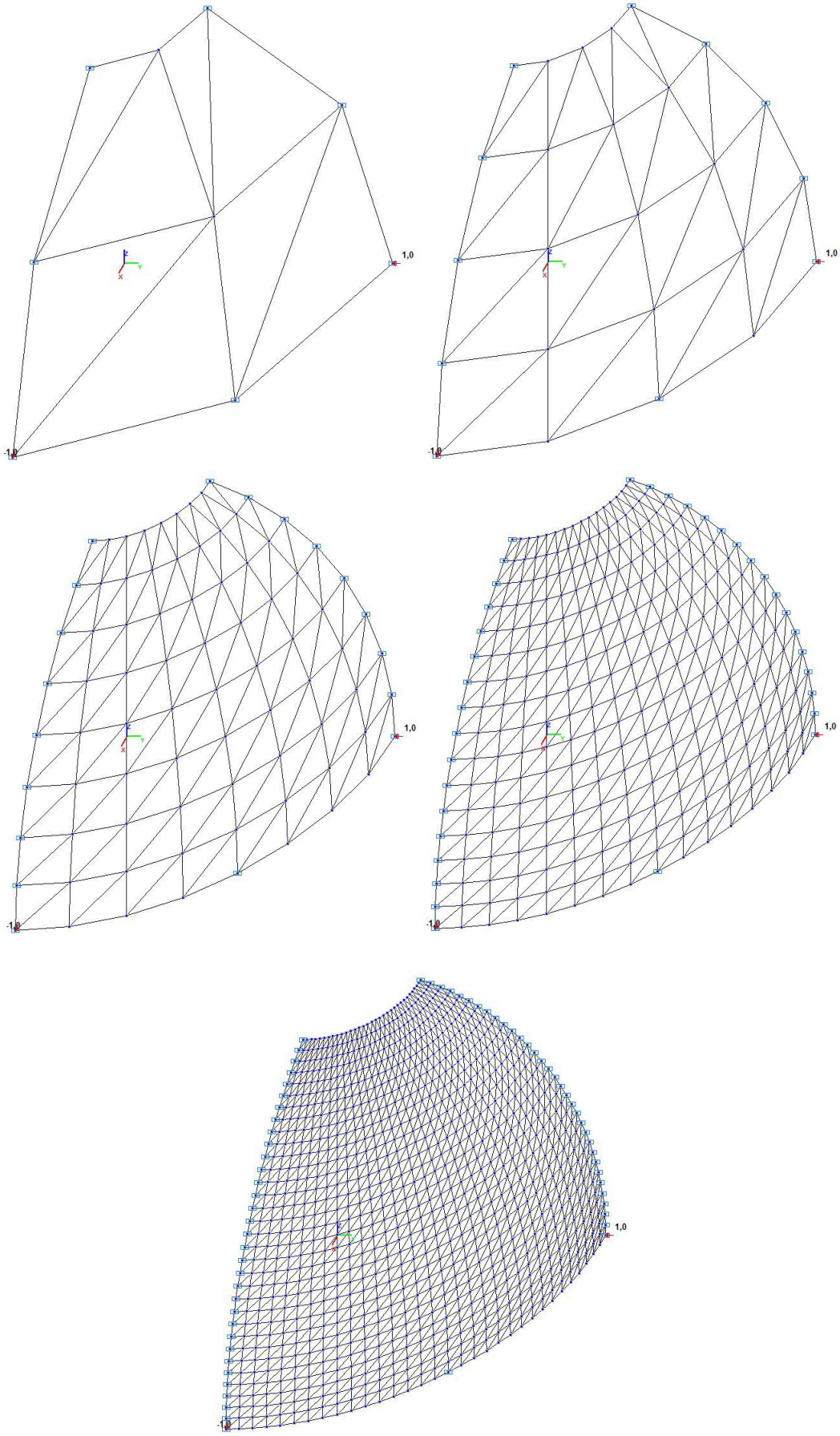
Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.
L. S. D. Morley, A. J. Morris, Conflict between finite elements and shell theory, London, Royal aircraft establishment report, 1978.

Исходные данные:

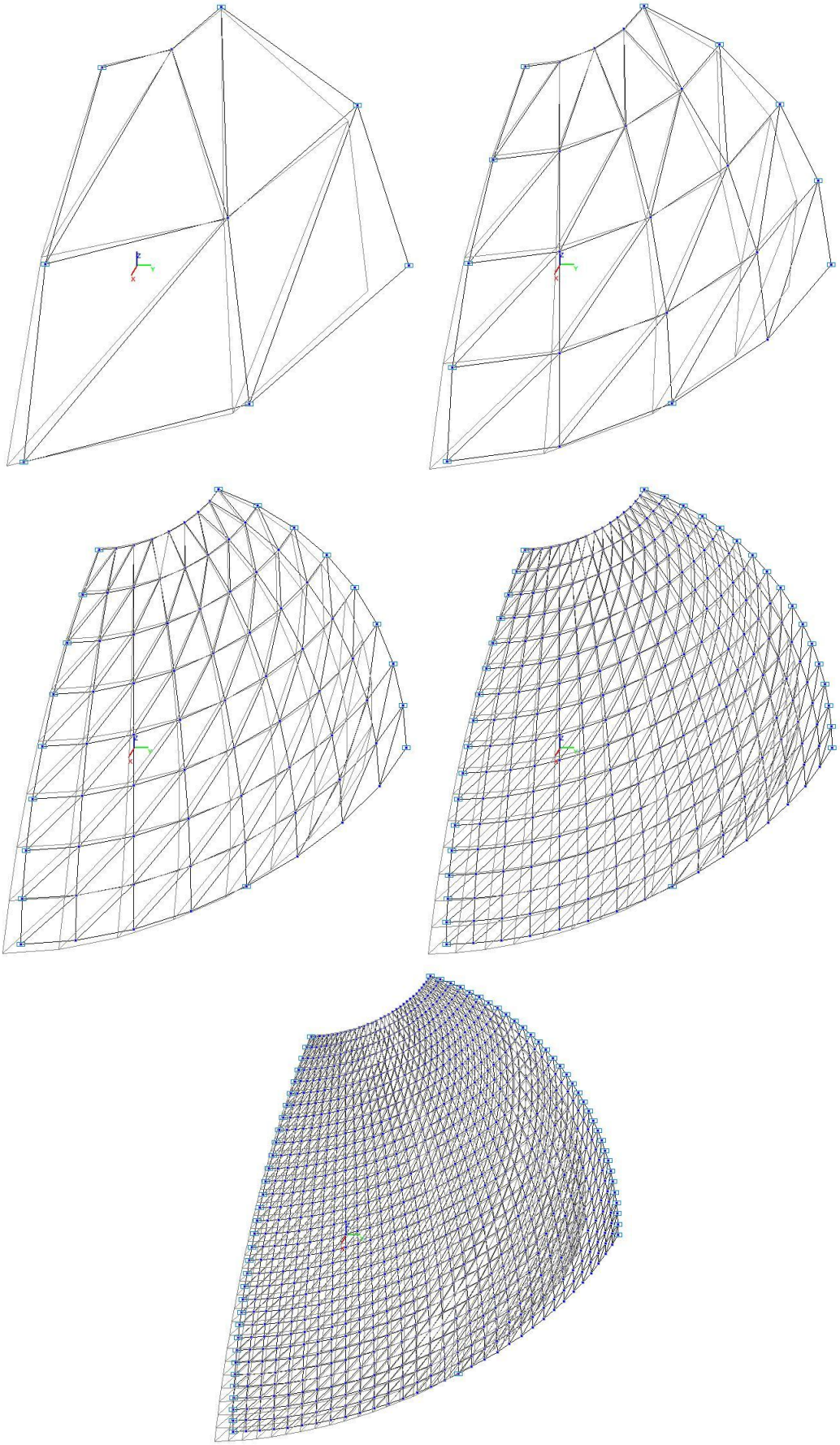
$E = 6.825 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости материала оболочки полусферы;
$\nu = 0.30$ - коэффициент Пуассона;
$R = 10.00$ м - радиус срединной поверхности оболочки полусферы;
$2 \cdot \theta = 2 \cdot 18°$ - центральный угол поверхности кругового отверстия оболочки полусферы;
$h = 0.04$ м - толщина оболочки полусферы;
$F_X = + 2.0$ кН - значения сосредоточенных радиально растягивающих сил, действующих на экваторе оболочки полусферы;
$F_Y = - 2.0$ кН - значения сосредоточенных радиально сжимающих сил, действующих на экваторе оболочки полусферы.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема четверти оболочки полусферы по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 8, 32, 128, 512, 2048 трехузловых элементов оболочки типа 42 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32. Обеспечение граничных условий и геометрической неизменяемости достигается за счет наложения связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81, 289, 1089.
Модель 2 – 4, 16, 64, 256, 1024 четырехузловых элемента оболочки типа 44 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32. Обеспечение граничных условий и геометрической неизменяемости достигается за счет наложения связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 9, 25, 81, 289,1089.
Модель 3 – 8, 32, 128, 512, 2048 шестиузловых элементов оболочки типа 45 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32. Обеспечение граничных условий и геометрической неизменяемости достигается за счет наложения связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 25, 81, 289, 1089, 4225.
Модель 4 – 4, 16, 64, 256, 1024 восьмиузловых элемента оболочки типа 50 с регулярной сеткой 2x2, 4x4, 8x8, 16x16, 32x32. Обеспечение граничных условий и геометрической неизменяемости достигается за счет наложения связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 21, 65, 225, 833, 3201.
Модель 5 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536, 262144 восьмиузловых изопараметрических объемных элемента типа 36 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1, 256x256x1, 512x512x1. Обеспечение граничных условий и геометрической неизменяемости достигается за счет наложения связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 18, 50, 162, 578, 2178, 8450, 33282, 132149, 526338.
Модель 6 – 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 двадцатиузловых изопараметрических объемных элемента типа 37 с регулярной сеткой 2x2x1, 4x4x1, 8x8x1, 16x16x1, 32x32x1, 64x64x1, 128x128x1. Обеспечение граничных условий и геометрической неизменяемости достигается за счет наложения связей по условиям симметрии. Количество узлов в модели – 51, 155, 531, 1955, 7491, 29315, 115971.

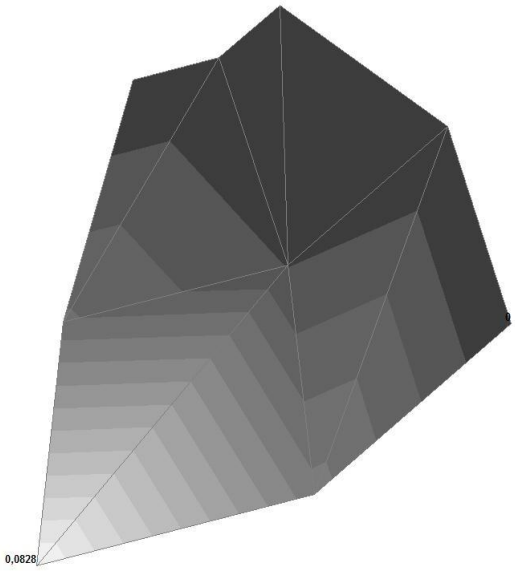
Результаты решения в SCAD



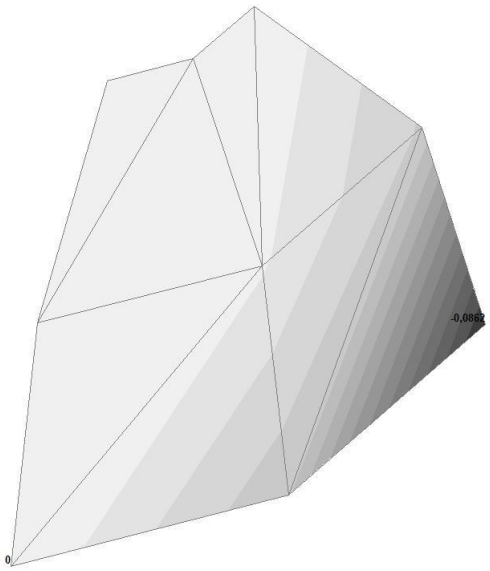
Модель 1. Расчетная схема



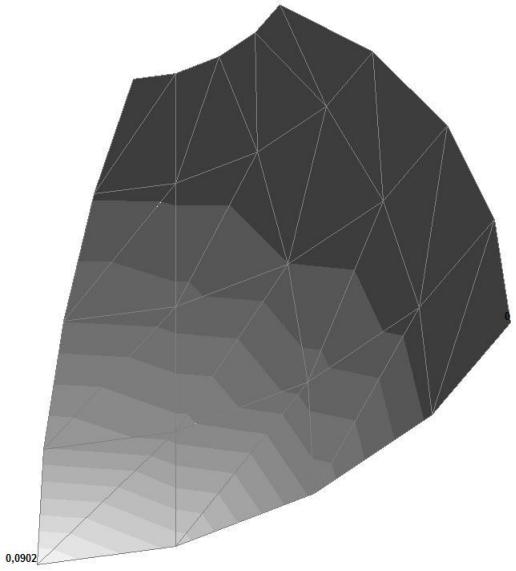
Модель 1. Деформированная схема



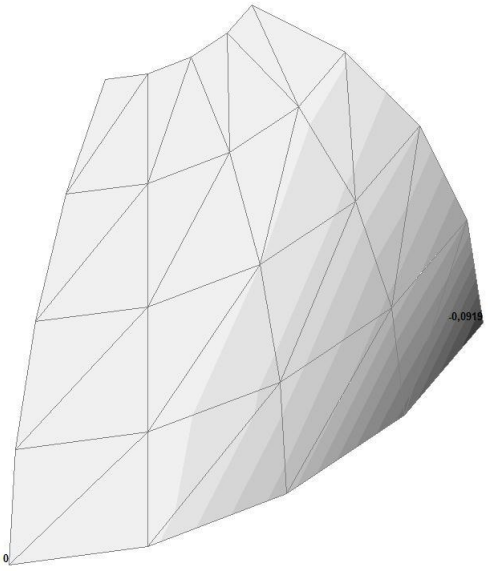
0.000000	0,0059
0,0059	0,0118
0,0118	0,0177
0,0177	0,0237
0,0237	0,0296
0,0296	0,0355
0,0355	0,0414
0,0414	0,0473
0,0473	0,0532
0,0532	0,0591
0,0591	0,0651
0,0651	0,071
0,071	0,0769
0,0769	0,0828



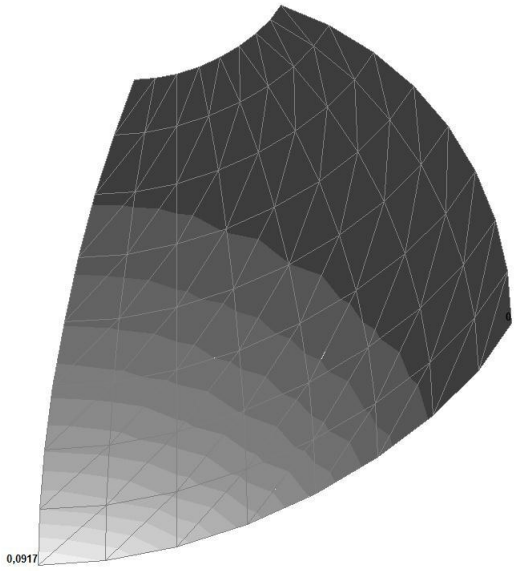
-0,0862	-0,08
-0,08	-0,0739
-0,0739	-0,0677
-0,0677	-0,0616
-0,0616	-0,0554
-0,0554	-0,0493
-0,0493	-0,0431
-0,0431	-0,0369
-0,0369	-0,0308
-0,0308	-0,0246
-0,0246	-0,0185
-0,0185	-0,0123
-0,0123	-0,0062
-0,0062	0.000000



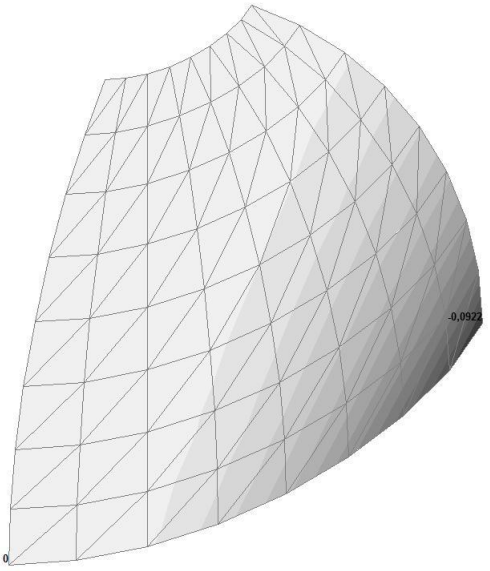
0.000000	0,0064
0,0064	0,0129
0,0129	0,0193
0,0193	0,0258
0,0258	0,0322
0,0322	0,0387
0,0387	0,0451
0,0451	0,0515
0,0515	0,058
0,058	0,0644
0,0644	0,0709
0,0709	0,0773
0,0773	0,0837
0,0837	0,0902



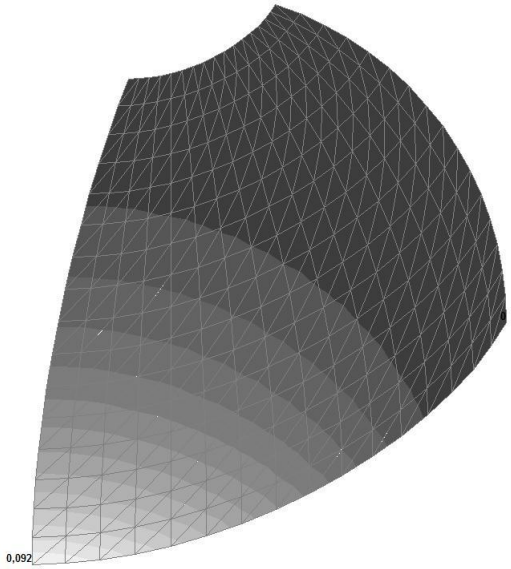
-0,0919	-0,0854
-0,0854	-0,0788
-0,0788	-0,0722
-0,0722	-0,0657
-0,0657	-0,0591
-0,0591	-0,0525
-0,0525	-0,046
-0,046	-0,0394
-0,0394	-0,0328
-0,0328	-0,0263
-0,0263	-0,0197
-0,0197	-0,0131
-0,0131	-0,0066
-0,0066	0.000000



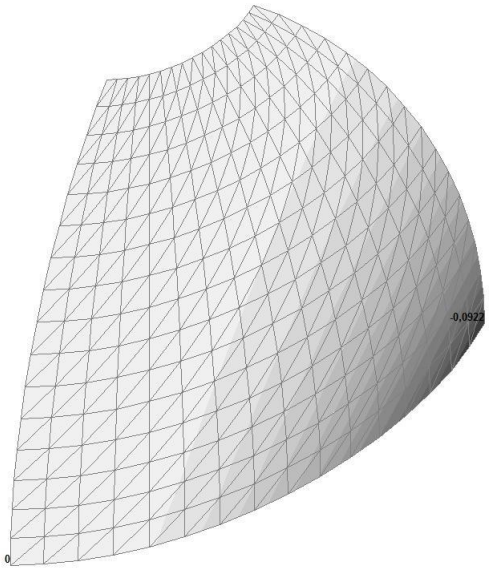
0.000000	0,0065
0,0065	0,0131
0,0131	0,0196
0,0196	0,0262
0,0262	0,0327
0,0327	0,0393
0,0393	0,0458
0,0458	0,0524
0,0524	0,0589
0,0589	0,0655
0,0655	0,072
0,072	0,0786
0,0786	0,0851
0,0851	0,0917



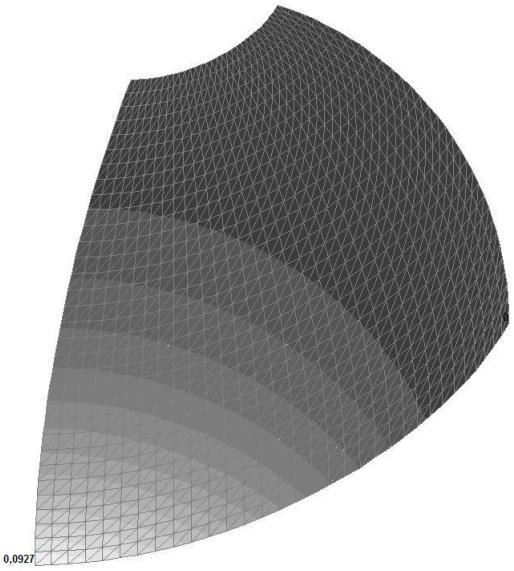
-0,0922	-0,0856
-0,0856	-0,079
-0,079	-0,0724
-0,0724	-0,0659
-0,0659	-0,0593
-0,0593	-0,0527
-0,0527	-0,0461
-0,0461	-0,0395
-0,0395	-0,0329
-0,0329	-0,0263
-0,0263	-0,0198
-0,0198	-0,0132
-0,0132	-0,0066
-0,0066	0.000000



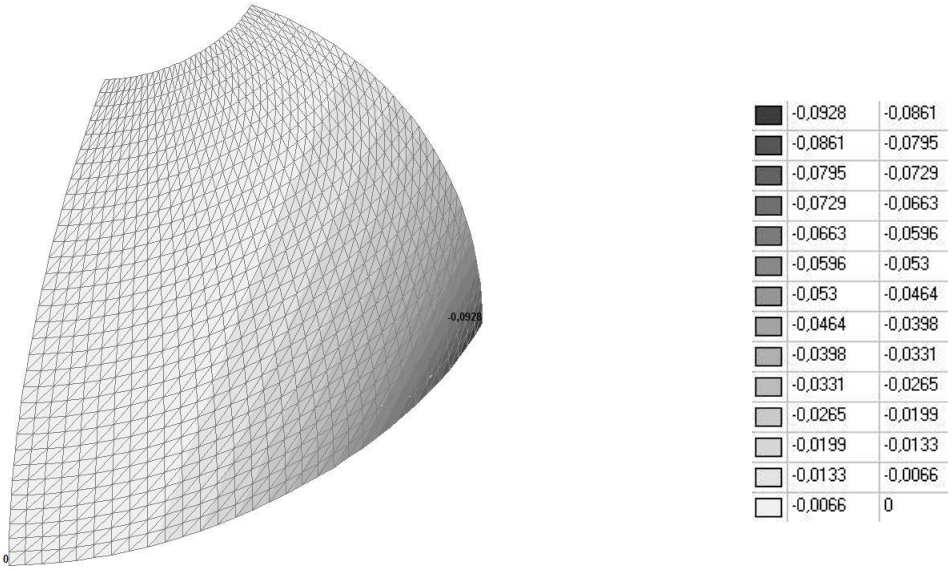
0.000000	0,0066
0,0066	0,0131
0,0131	0,0197
0,0197	0,0263
0,0263	0,0329
0,0329	0,0394
0,0394	0,046
0,046	0,0526
0,0526	0,0592
0,0592	0,0657
0,0657	0,0723
0,0723	0,0789
0,0789	0,0855
0,0855	0,092



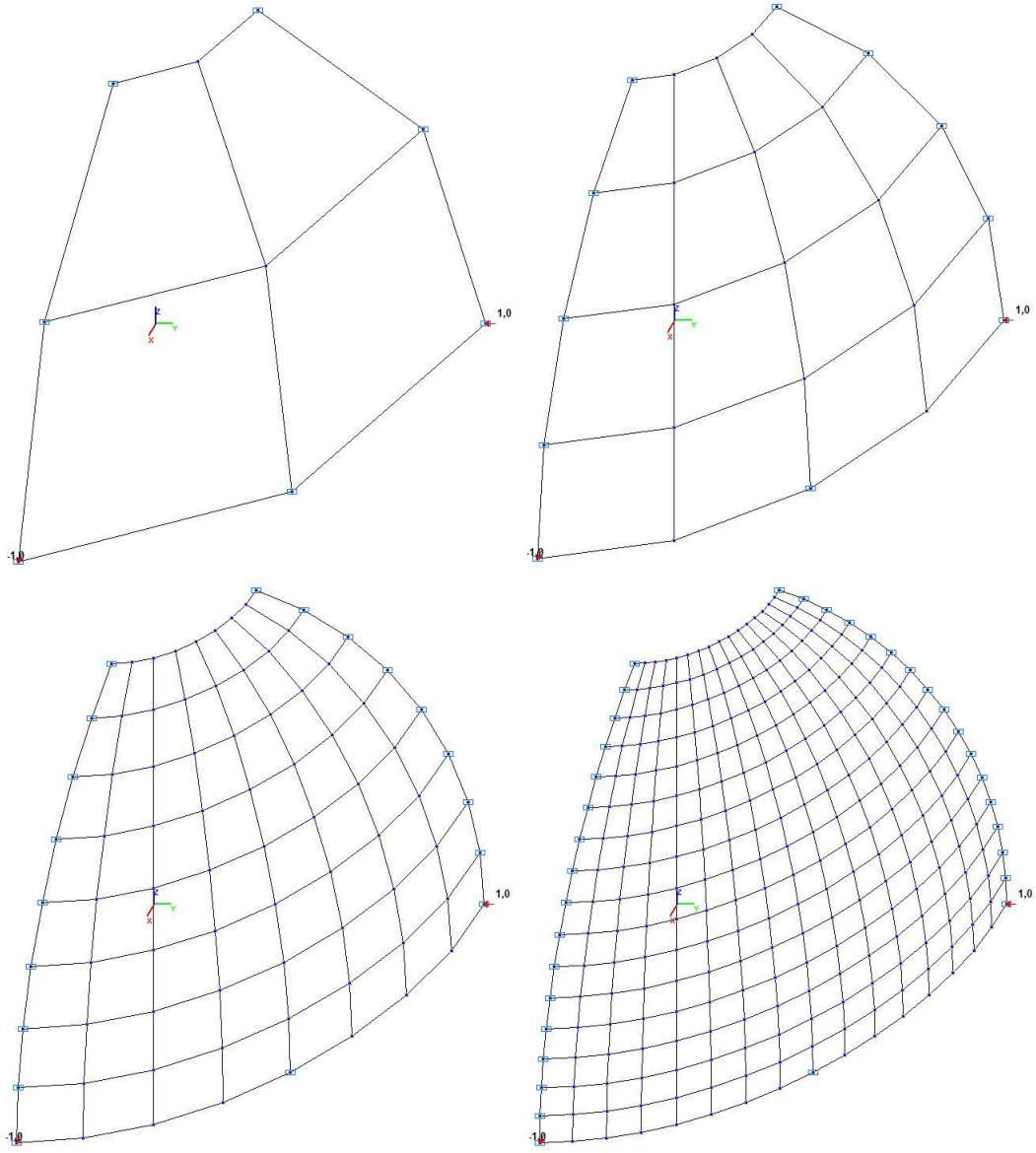
-0,0922	-0,0856
-0,0856	-0,079
-0,079	-0,0724
-0,0724	-0,0658
-0,0658	-0,0592
-0,0592	-0,0527
-0,0527	-0,0461
-0,0461	-0,0395
-0,0395	-0,0329
-0,0329	-0,0263
-0,0263	-0,0197
-0,0197	-0,0132
-0,0132	-0,0066
-0,0066	0.000000

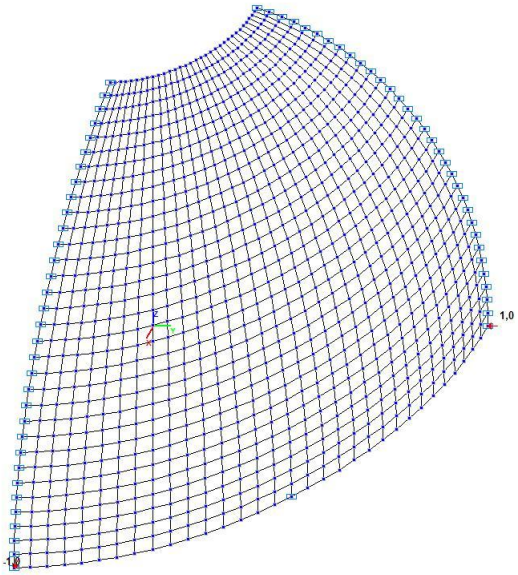


0	0,0066
0,0066	0,0132
0,0132	0,0199
0,0199	0,0265
0,0265	0,0331
0,0331	0,0397
0,0397	0,0464
0,0464	0,053
0,053	0,0596
0,0596	0,0662
0,0662	0,0728
0,0728	0,0795
0,0795	0,0861
0,0861	0,0927

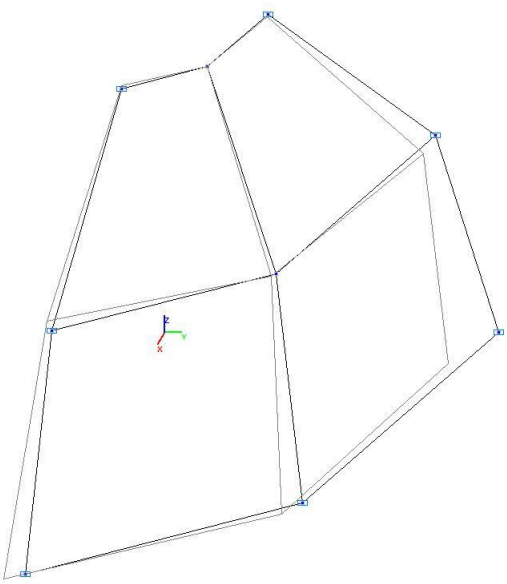


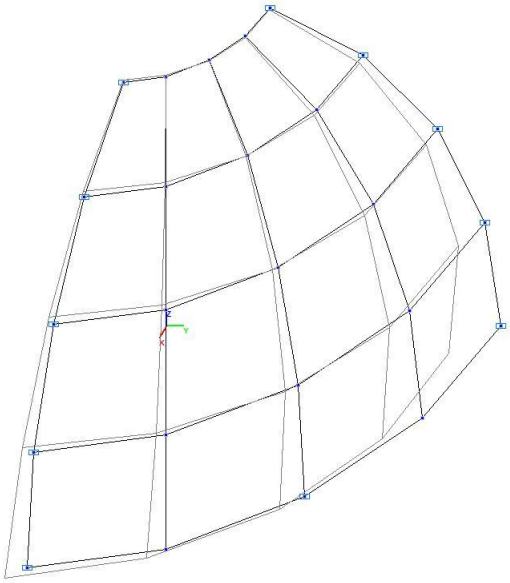
Модель 1. Значения перемещений по направлению пар растягивающих и пар сжимающих сил вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)

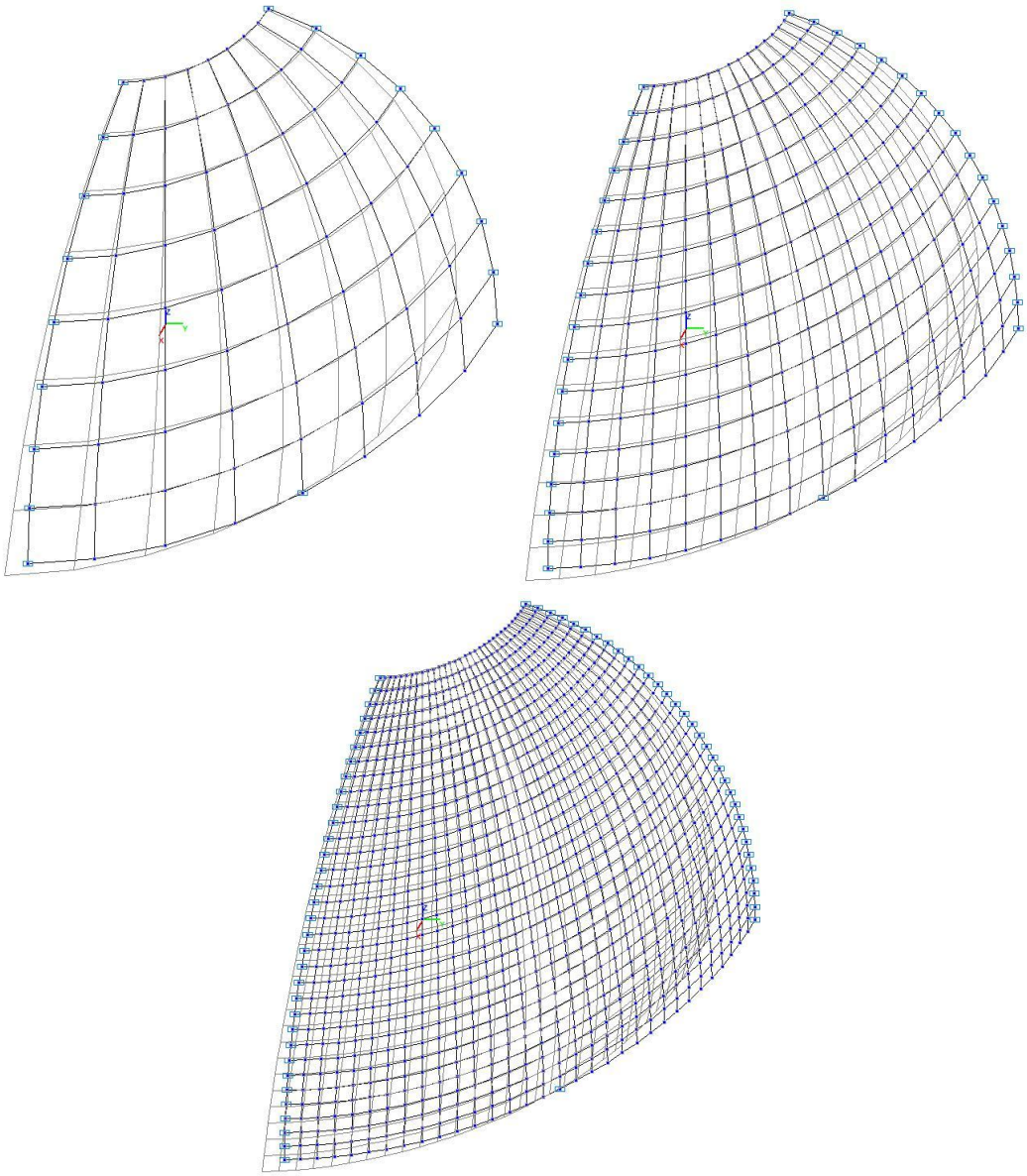




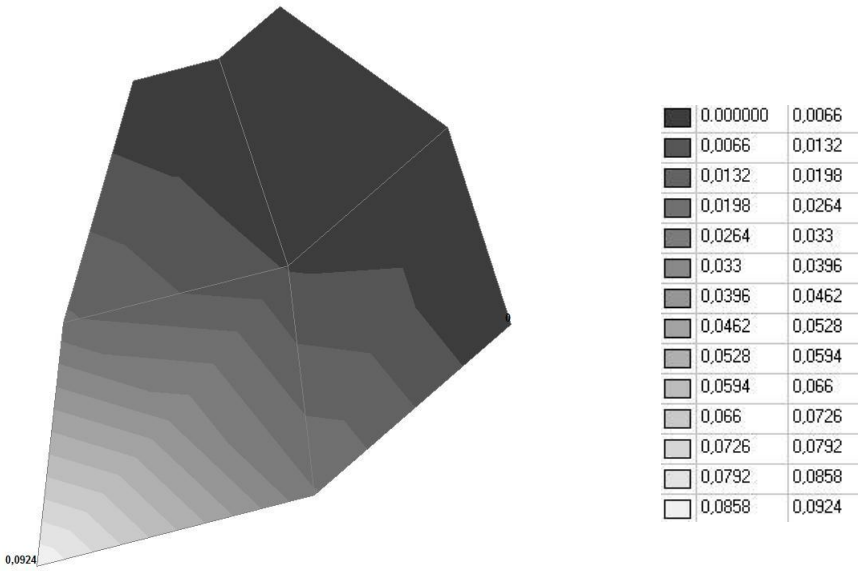
Модель 2. Расчетная схема

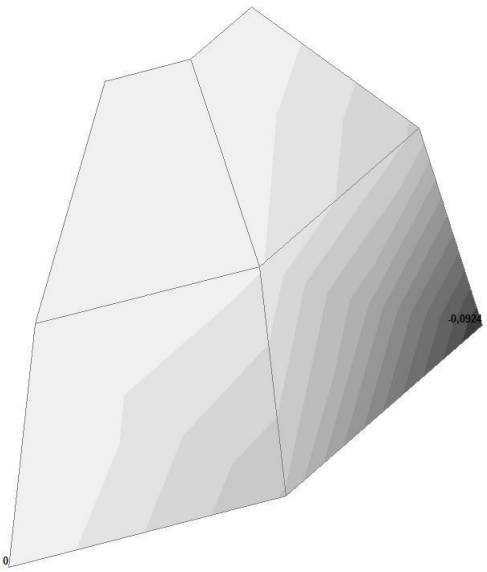




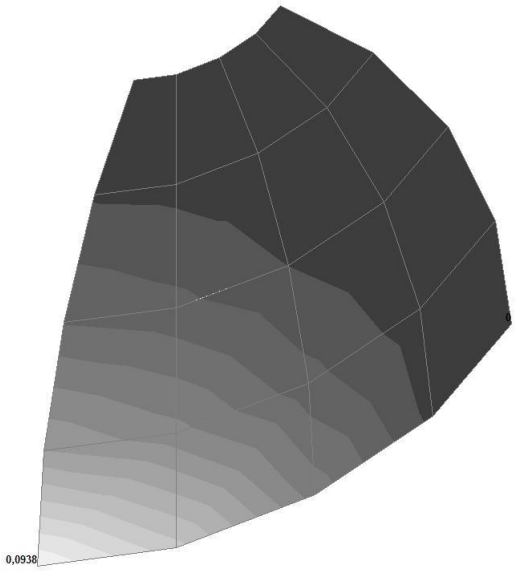


Модель 2. Деформированная схема

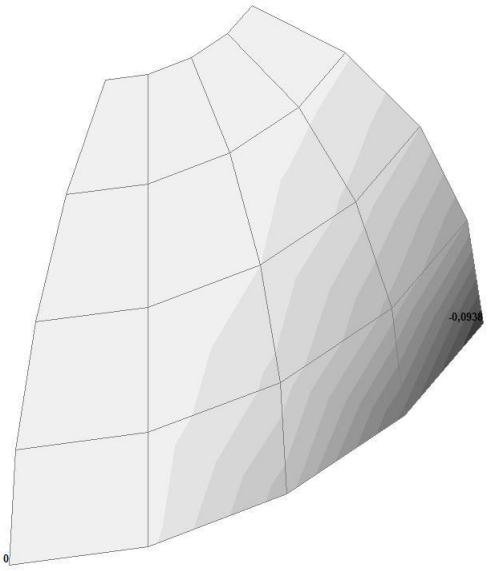




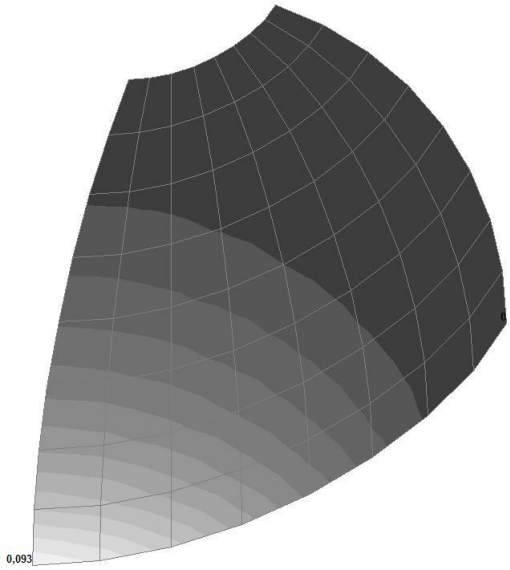
-0,0924	-0,0858
-0,0858	-0,0792
-0,0792	-0,0726
-0,0726	-0,066
-0,066	-0,0594
-0,0594	-0,0528
-0,0528	-0,0462
-0,0462	-0,0396
-0,0396	-0,033
-0,033	-0,0264
-0,0264	-0,0198
-0,0198	-0,0132
-0,0132	-0,0066
-0,0066	0.000000



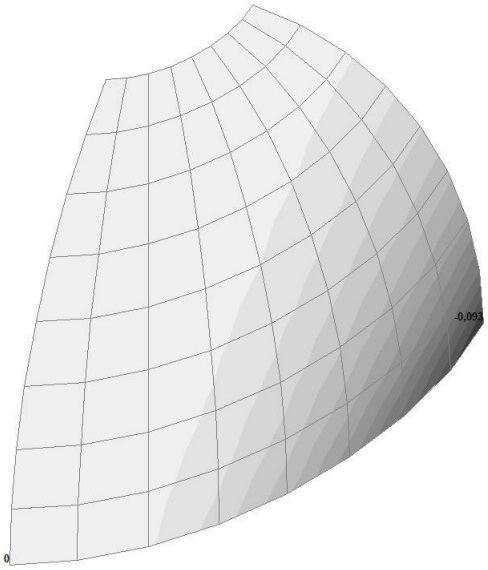
0.000000	0,0067
0,0067	0,0134
0,0134	0,0201
0,0201	0,0268
0,0268	0,0335
0,0335	0,0402
0,0402	0,0469
0,0469	0,0536
0,0536	0,0603
0,0603	0,067
0,067	0,0737
0,0737	0,0804
0,0804	0,0871
0,0871	0,0938



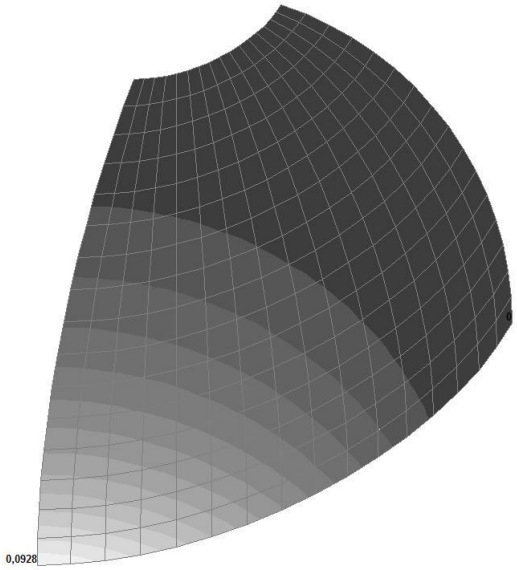
-0,0938	-0,0871
-0,0871	-0,0804
-0,0804	-0,0737
-0,0737	-0,067
-0,067	-0,0603
-0,0603	-0,0536
-0,0536	-0,0469
-0,0469	-0,0402
-0,0402	-0,0335
-0,0335	-0,0268
-0,0268	-0,0201
-0,0201	-0,0134
-0,0134	-0,0067
-0,0067	0.000000



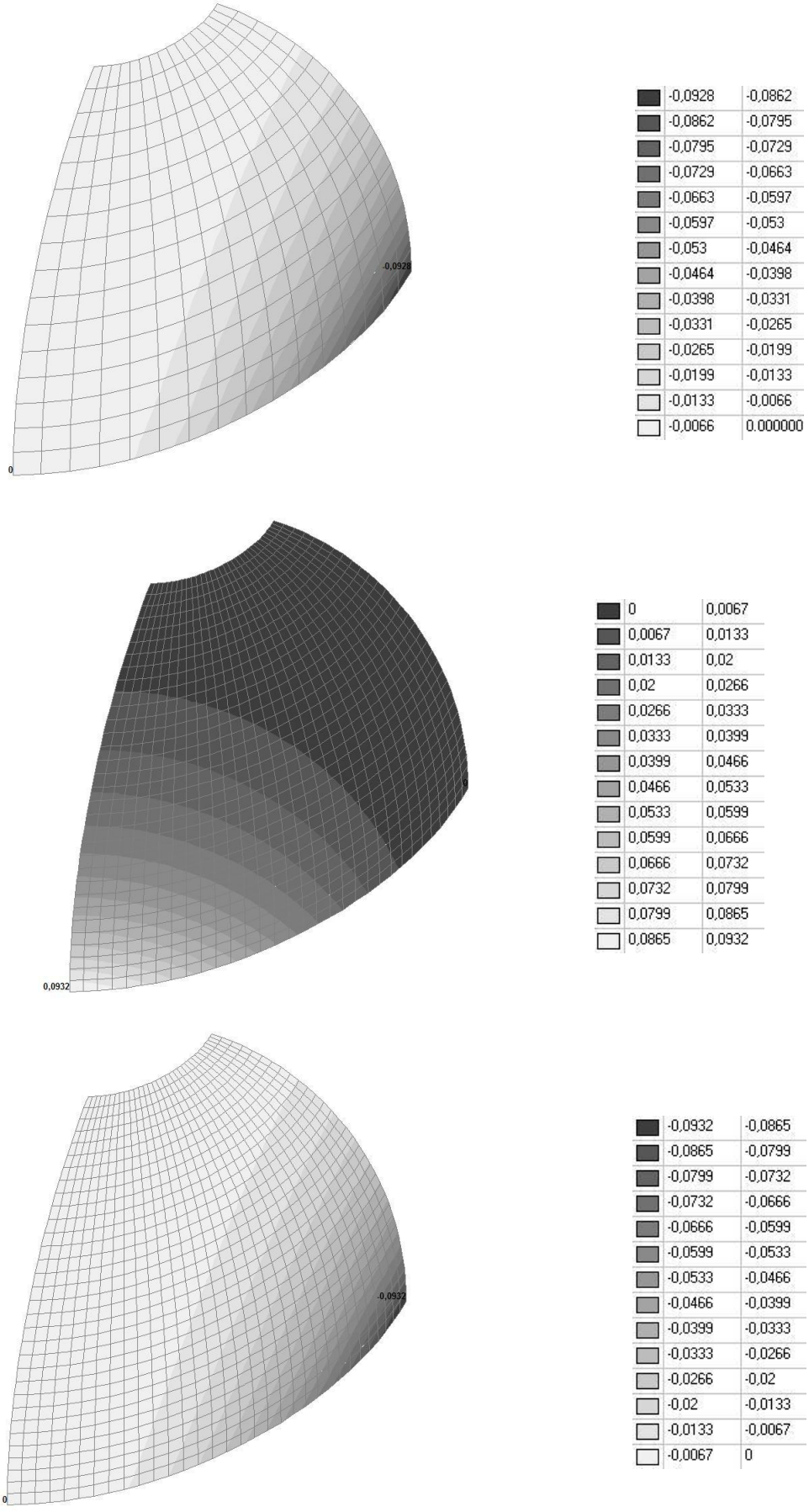
0.000000	0,0066
0,0066	0,0133
0,0133	0,0199
0,0199	0,0266
0,0266	0,0332
0,0332	0,0399
0,0399	0,0465
0,0465	0,0531
0,0531	0,0598
0,0598	0,0664
0,0664	0,0731
0,0731	0,0797
0,0797	0,0864
0,0864	0,093



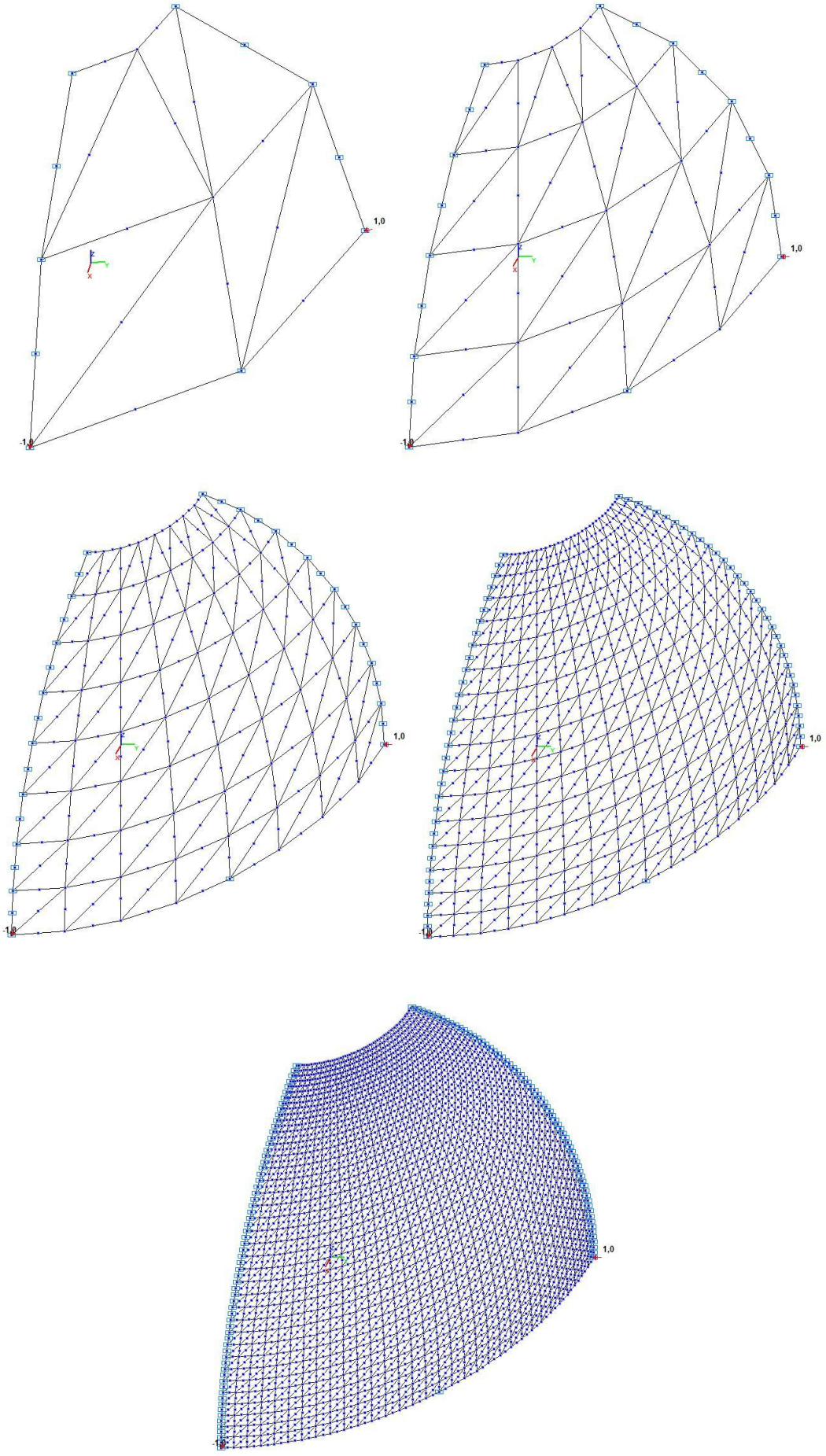
-0,093	-0,0864
-0,0864	-0,0797
-0,0797	-0,0731
-0,0731	-0,0664
-0,0664	-0,0598
-0,0598	-0,0531
-0,0531	-0,0465
-0,0465	-0,0399
-0,0399	-0,0332
-0,0332	-0,0266
-0,0266	-0,0199
-0,0199	-0,0133
-0,0133	-0,0066
-0,0066	0.000000



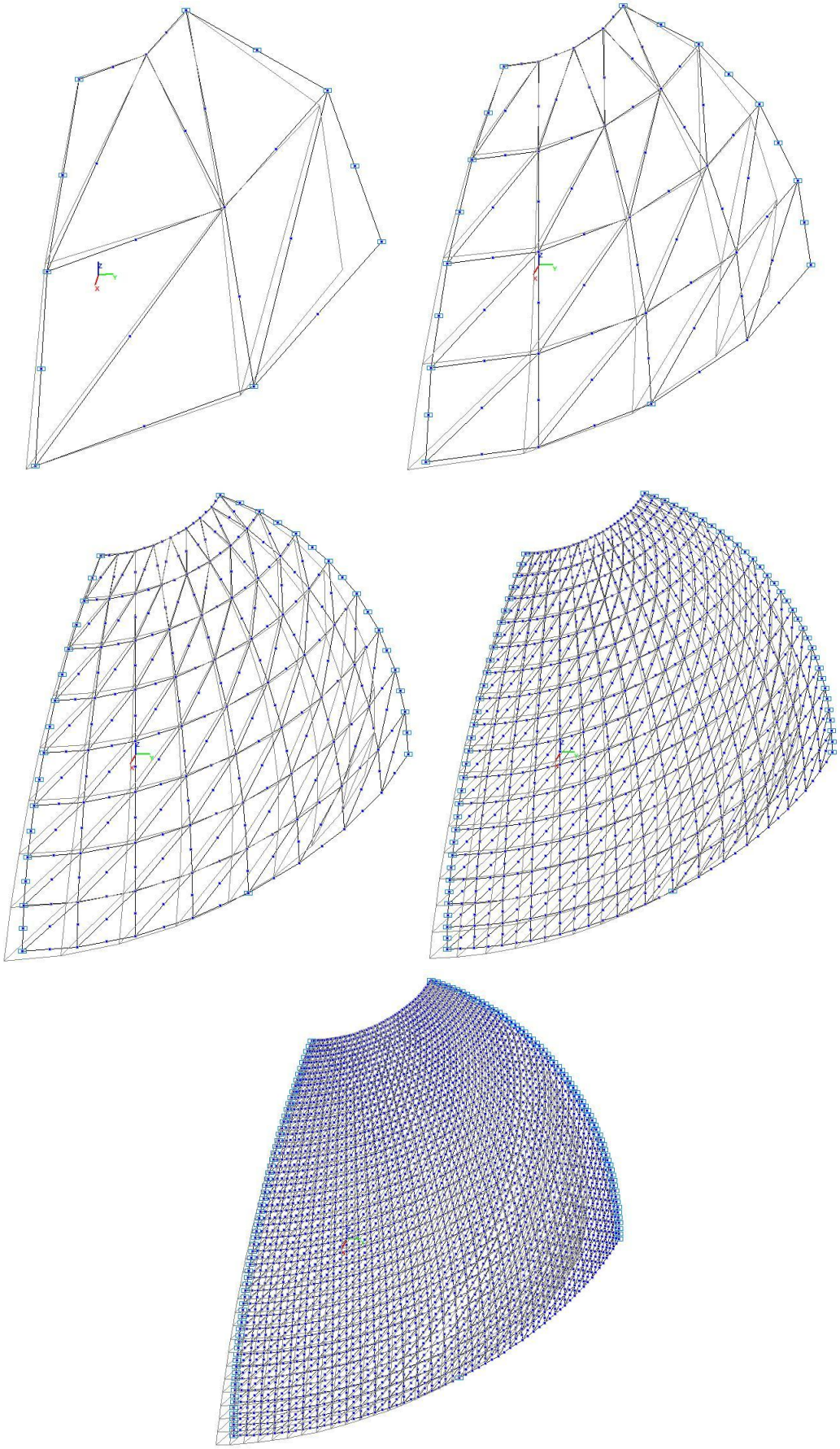
0.000000	0,0066
0,0066	0,0133
0,0133	0,0199
0,0199	0,0265
0,0265	0,0331
0,0331	0,0398
0,0398	0,0464
0,0464	0,053
0,053	0,0597
0,0597	0,0663
0,0663	0,0729
0,0729	0,0795
0,0795	0,0862
0,0862	0,0928



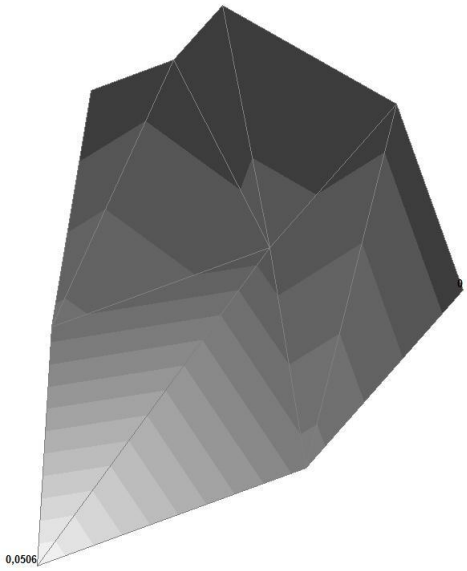
Модель 2. Значения перемещений по направлению пар растягивающих и пар сжимающих сил вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)



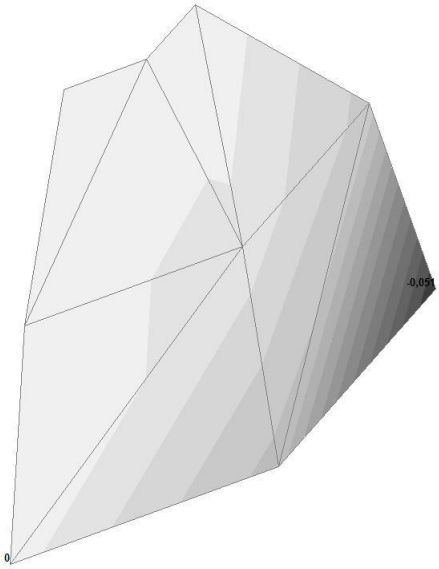
Модель 3. Расчетная схема



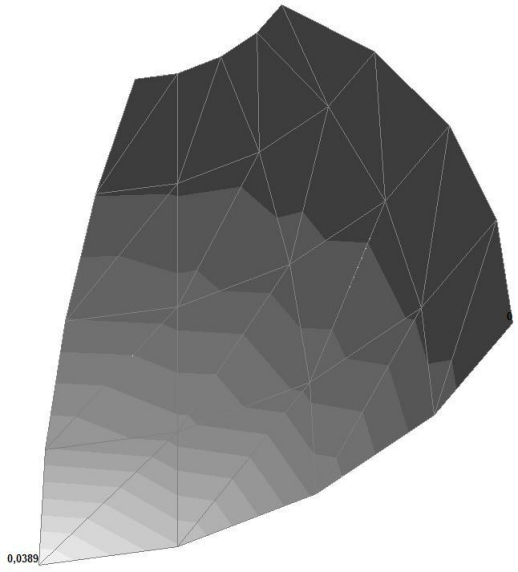
Модель 3. Деформированная схема



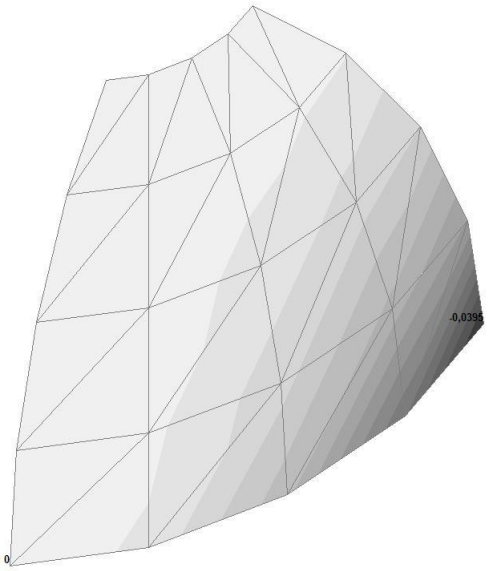
-0,0018	0,002
0,002	0,0057
0,0057	0,0095
0,0095	0,0132
0,0132	0,0169
0,0169	0,0207
0,0207	0,0244
0,0244	0,0282
0,0282	0,0319
0,0319	0,0356
0,0356	0,0394
0,0394	0,0431
0,0431	0,0468
0,0468	0,0506



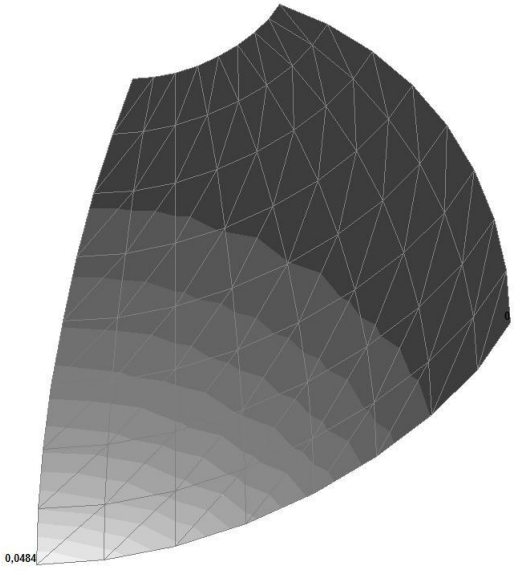
-0,051	-0,0472
-0,0472	-0,0434
-0,0434	-0,0396
-0,0396	-0,0359
-0,0359	-0,0321
-0,0321	-0,0283
-0,0283	-0,0245
-0,0245	-0,0207
-0,0207	-0,0169
-0,0169	-0,0132
-0,0132	-0,0094
-0,0094	-0,0056
-0,0056	-0,0018
-0,0018	0,002



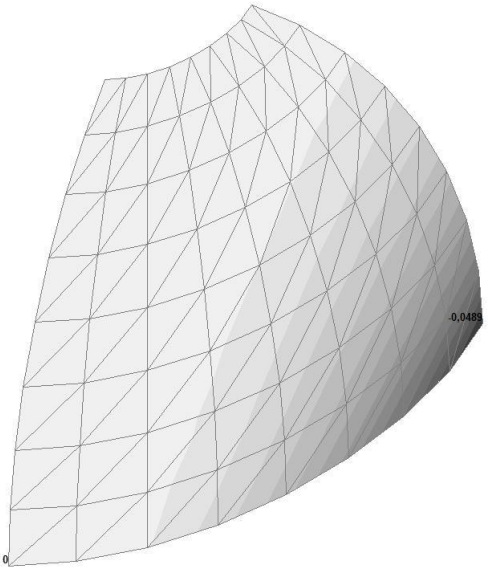
-0,0011	0,0017
0,0017	0,0046
0,0046	0,0074
0,0074	0,0103
0,0103	0,0131
0,0131	0,016
0,016	0,0189
0,0189	0,0217
0,0217	0,0246
0,0246	0,0274
0,0274	0,0303
0,0303	0,0331
0,0331	0,036
0,036	0,0389



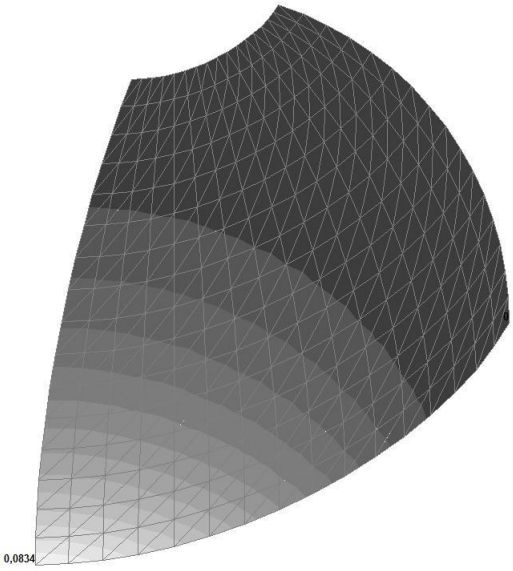
-0,0395	-0,0366
-0,0366	-0,0337
-0,0337	-0,0308
-0,0308	-0,0279
-0,0279	-0,025
-0,025	-0,0221
-0,0221	-0,0192
-0,0192	-0,0162
-0,0162	-0,0133
-0,0133	-0,0104
-0,0104	-0,0075
-0,0075	-0,0046
-0,0046	-0,0017
-0,0017	0,0012



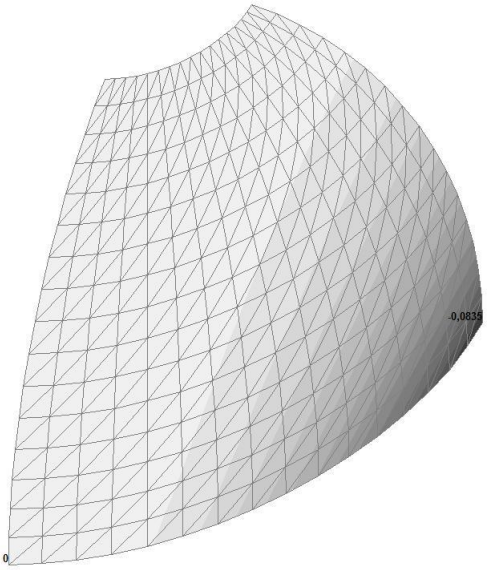
-0,0002	0,0033
0,0033	0,0067
0,0067	0,0102
0,0102	0,0137
0,0137	0,0172
0,0172	0,0206
0,0206	0,0241
0,0241	0,0276
0,0276	0,031
0,031	0,0345
0,0345	0,038
0,038	0,0415
0,0415	0,0449
0,0449	0,0484



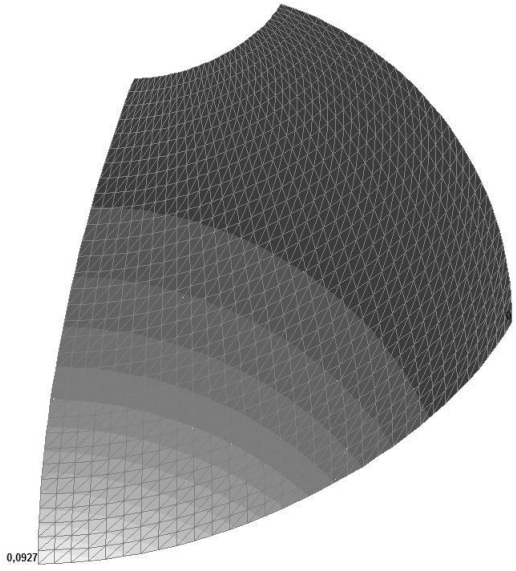
-0,0489	-0,0454
-0,0454	-0,0419
-0,0419	-0,0384
-0,0384	-0,0349
-0,0349	-0,0314
-0,0314	-0,0279
-0,0279	-0,0243
-0,0243	-0,0208
-0,0208	-0,0173
-0,0173	-0,0138
-0,0138	-0,0103
-0,0103	-0,0068
-0,0068	-0,0033
-0,0033	0,0002



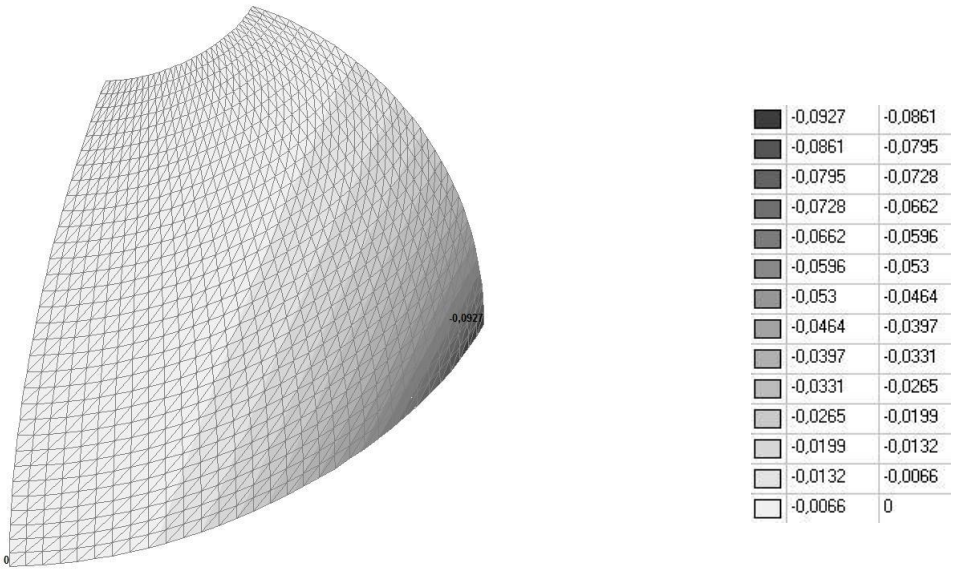
0	0,006
0,006	0,0119
0,0119	0,0179
0,0179	0,0238
0,0238	0,0298
0,0298	0,0357
0,0357	0,0417
0,0417	0,0477
0,0477	0,0536
0,0536	0,0596
0,0596	0,0655
0,0655	0,0715
0,0715	0,0774
0,0774	0,0834



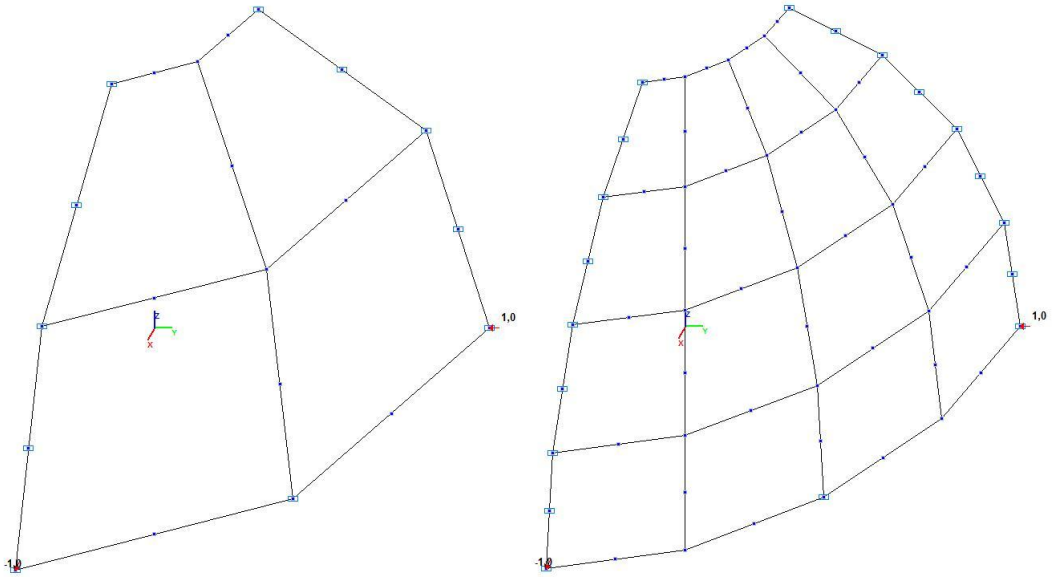
-0,0835	-0,0775
-0,0775	-0,0716
-0,0716	-0,0656
-0,0656	-0,0596
-0,0596	-0,0537
-0,0537	-0,0477
-0,0477	-0,0417
-0,0417	-0,0358
-0,0358	-0,0298
-0,0298	-0,0239
-0,0239	-0,0179
-0,0179	-0,0119
-0,0119	-0,006
-0,006	0

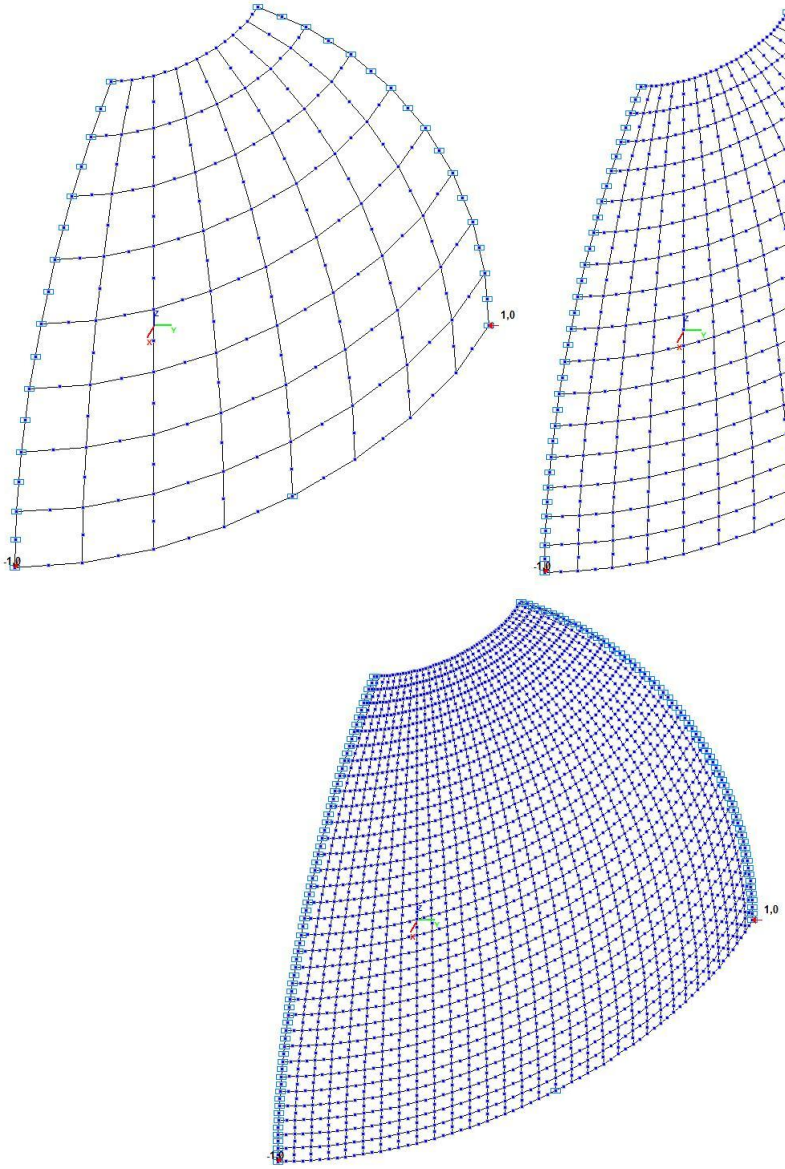


0	0,0066
0,0066	0,0132
0,0132	0,0199
0,0199	0,0265
0,0265	0,0331
0,0331	0,0397
0,0397	0,0463
0,0463	0,053
0,053	0,0596
0,0596	0,0662
0,0662	0,0728
0,0728	0,0795
0,0795	0,0861
0,0861	0,0927

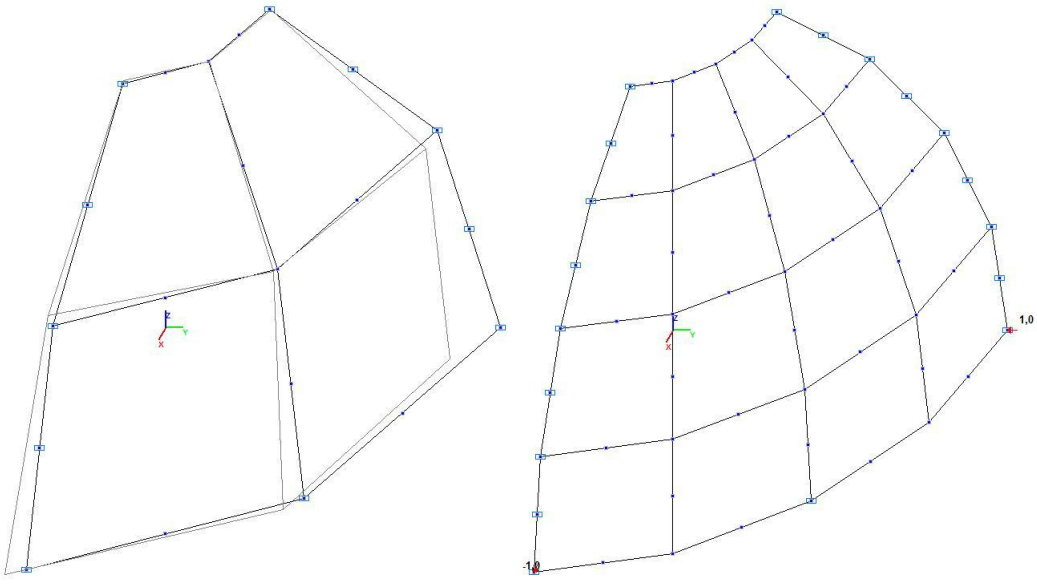


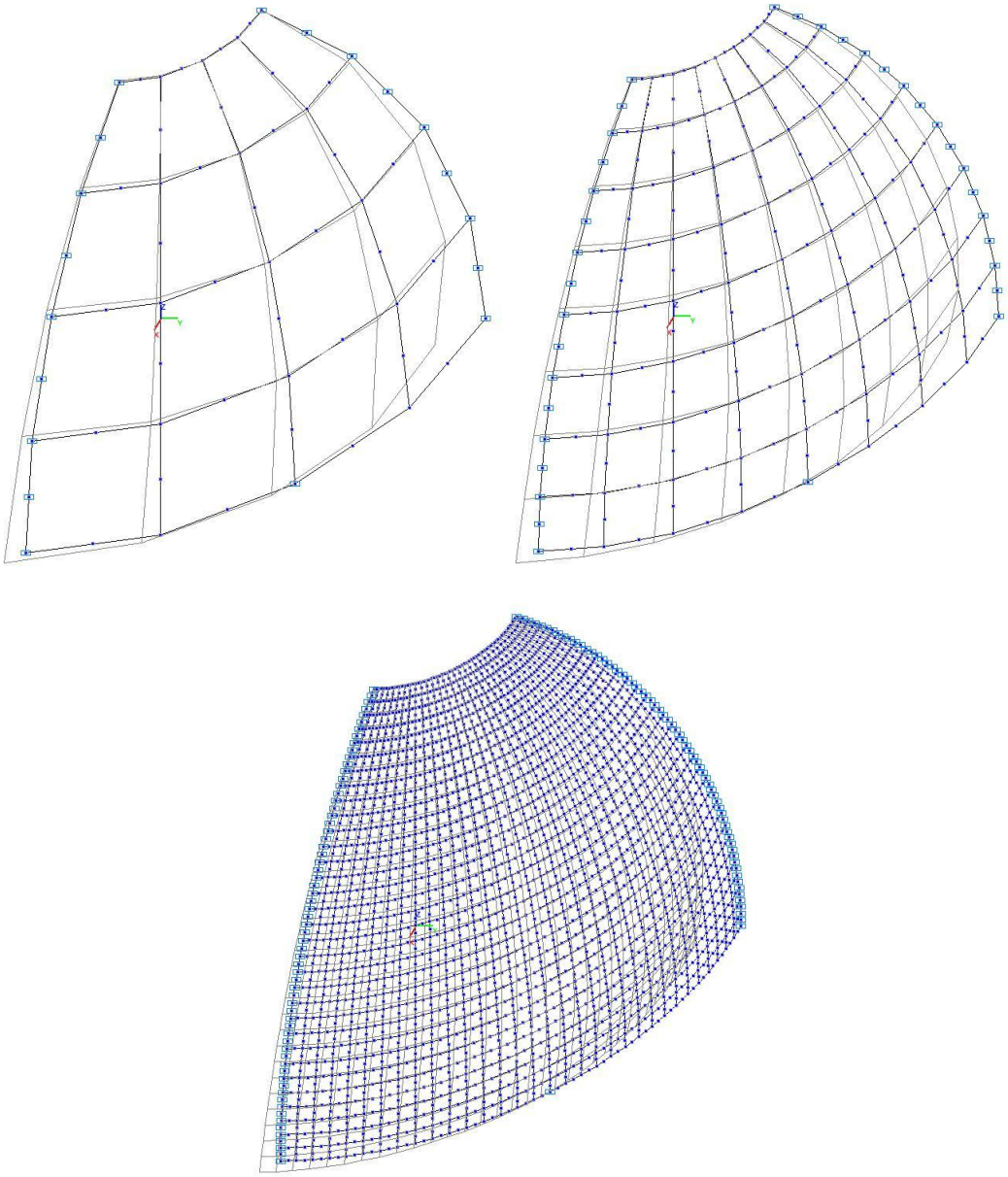
Модель 3. Значения перемещений по направлению пар растягивающих и пар сжимающих сил вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)



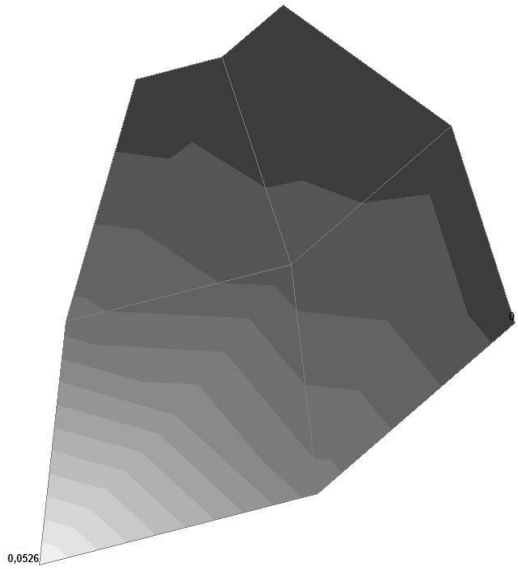


Модель 4. Расчетная схема

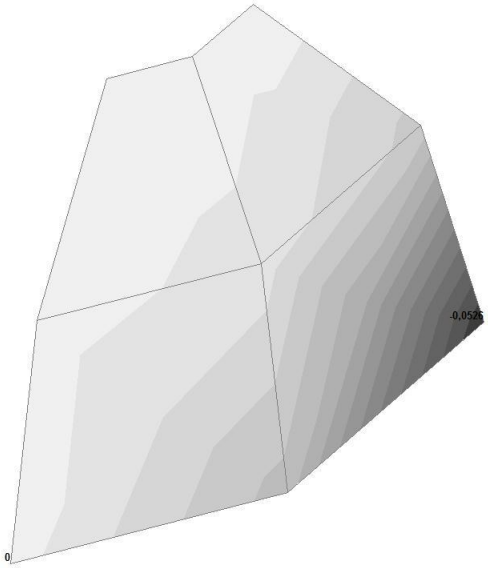




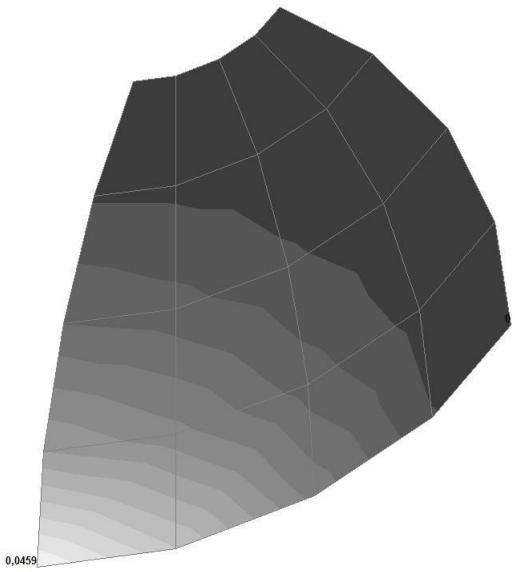
Модель 4. Деформированная схема



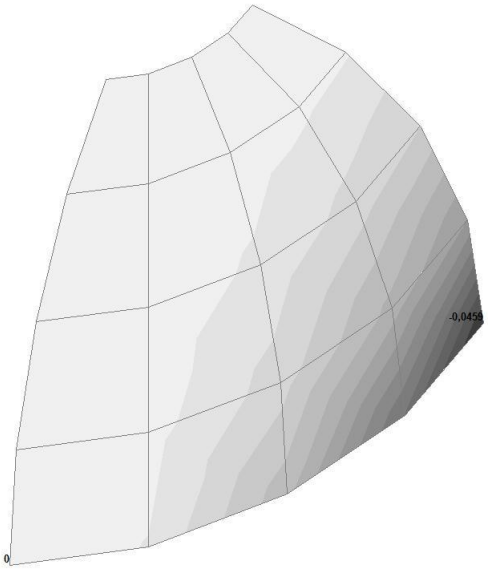
-0,0021	0,0018
0,0018	0,0057
0,0057	0,0096
0,0096	0,0135
0,0135	0,0174
0,0174	0,0213
0,0213	0,0253
0,0253	0,0292
0,0292	0,0331
0,0331	0,037
0,037	0,0409
0,0409	0,0448
0,0448	0,0487
0,0487	0,0526



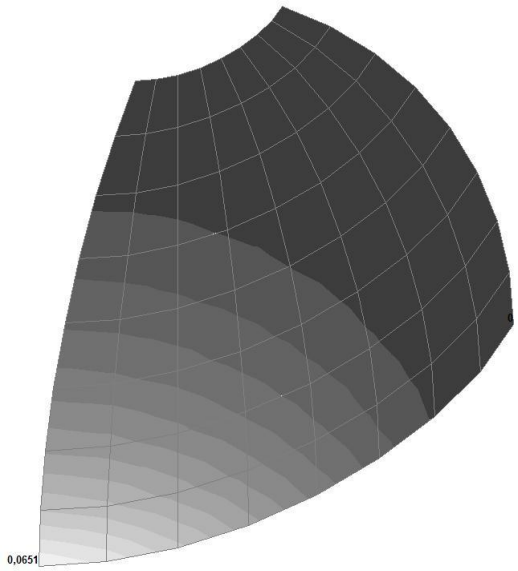
-0,0526	-0,0487
-0,0487	-0,0448
-0,0448	-0,0409
-0,0409	-0,037
-0,037	-0,0331
-0,0331	-0,0292
-0,0292	-0,0253
-0,0253	-0,0213
-0,0213	-0,0174
-0,0174	-0,0135
-0,0135	-0,0096
-0,0096	-0,0057
-0,0057	-0,0018
-0,0018	0,0021



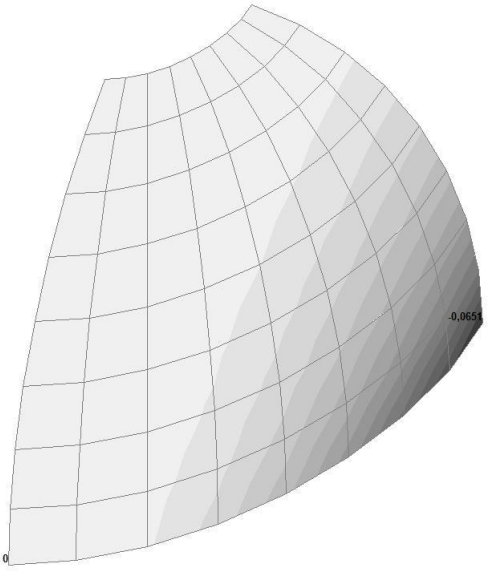
-0,0009	0,0025
0,0025	0,0058
0,0058	0,0091
0,0091	0,0125
0,0125	0,0158
0,0158	0,0192
0,0192	0,0225
0,0225	0,0258
0,0258	0,0292
0,0292	0,0325
0,0325	0,0359
0,0359	0,0392
0,0392	0,0425
0,0425	0,0459



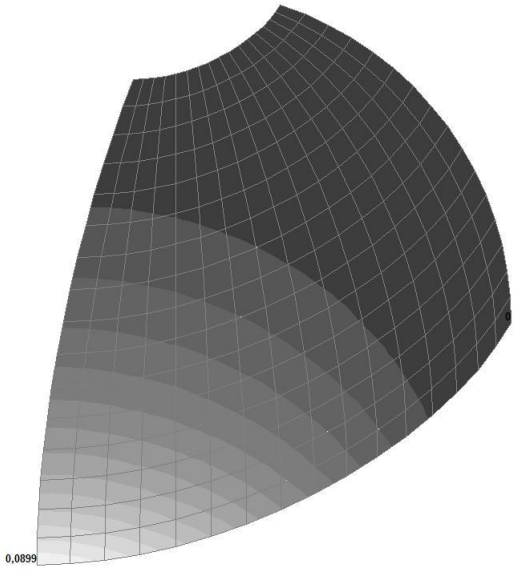
-0,0459	-0,0425
-0,0425	-0,0392
-0,0392	-0,0359
-0,0359	-0,0325
-0,0325	-0,0292
-0,0292	-0,0258
-0,0258	-0,0225
-0,0225	-0,0192
-0,0192	-0,0158
-0,0158	-0,0125
-0,0125	-0,0091
-0,0091	-0,0058
-0,0058	-0,0025
-0,0025	0,0009



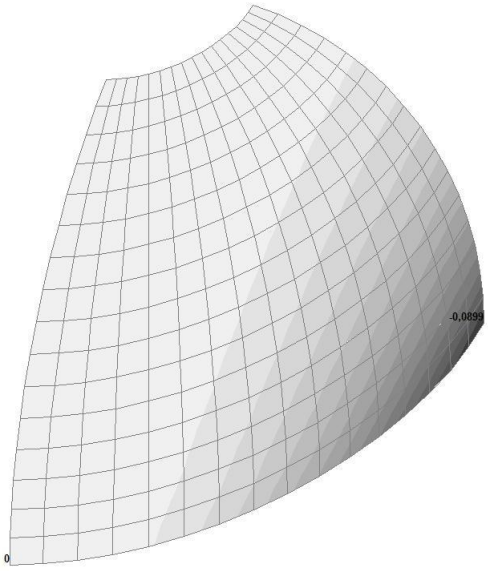
0	0,0046
0,0046	0,0093
0,0093	0,0139
0,0139	0,0186
0,0186	0,0232
0,0232	0,0279
0,0279	0,0325
0,0325	0,0372
0,0372	0,0418
0,0418	0,0465
0,0465	0,0511
0,0511	0,0558
0,0558	0,0604
0,0604	0,0651



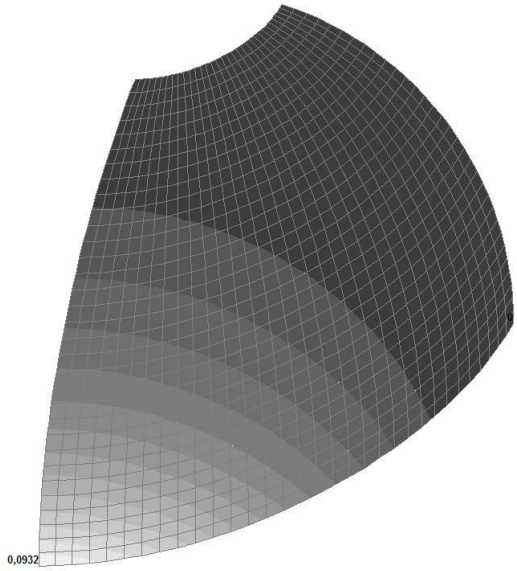
-0,0651	-0,0604
-0,0604	-0,0558
-0,0558	-0,0511
-0,0511	-0,0465
-0,0465	-0,0418
-0,0418	-0,0372
-0,0372	-0,0325
-0,0325	-0,0279
-0,0279	-0,0232
-0,0232	-0,0186
-0,0186	-0,0139
-0,0139	-0,0093
-0,0093	-0,0046
-0,0046	0



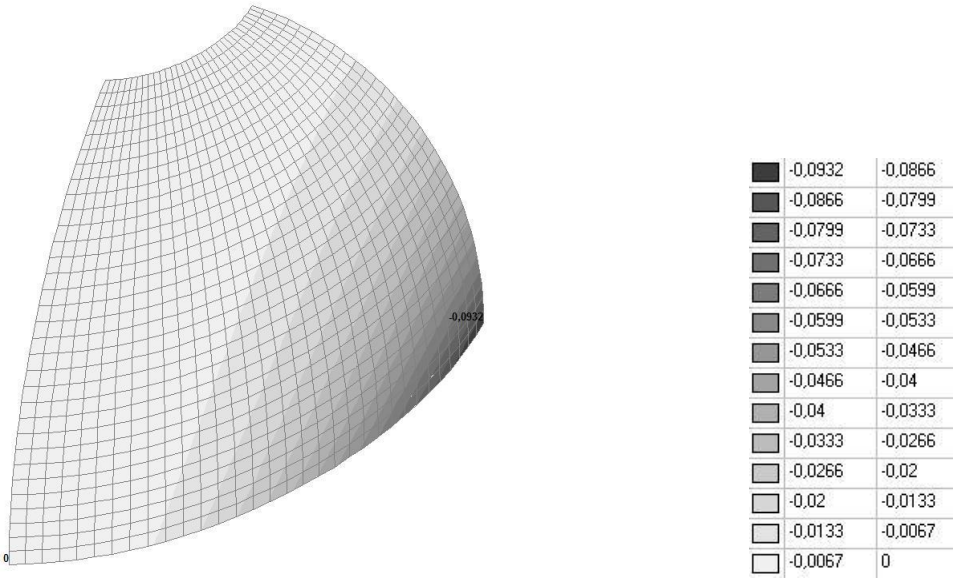
0	0,0064
0,0064	0,0128
0,0128	0,0193
0,0193	0,0257
0,0257	0,0321
0,0321	0,0385
0,0385	0,0449
0,0449	0,0514
0,0514	0,0578
0,0578	0,0642
0,0642	0,0706
0,0706	0,077
0,077	0,0834
0,0834	0,0899



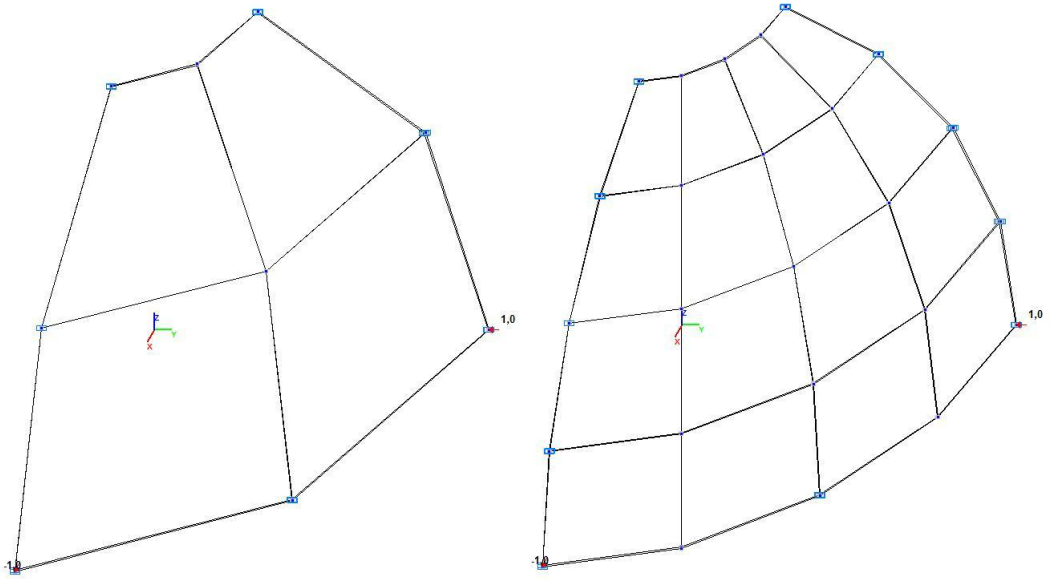
-0,0899	-0,0834
-0,0834	-0,077
-0,077	-0,0706
-0,0706	-0,0642
-0,0642	-0,0578
-0,0578	-0,0514
-0,0514	-0,0449
-0,0449	-0,0385
-0,0385	-0,0321
-0,0321	-0,0257
-0,0257	-0,0193
-0,0193	-0,0128
-0,0128	-0,0064
-0,0064	0

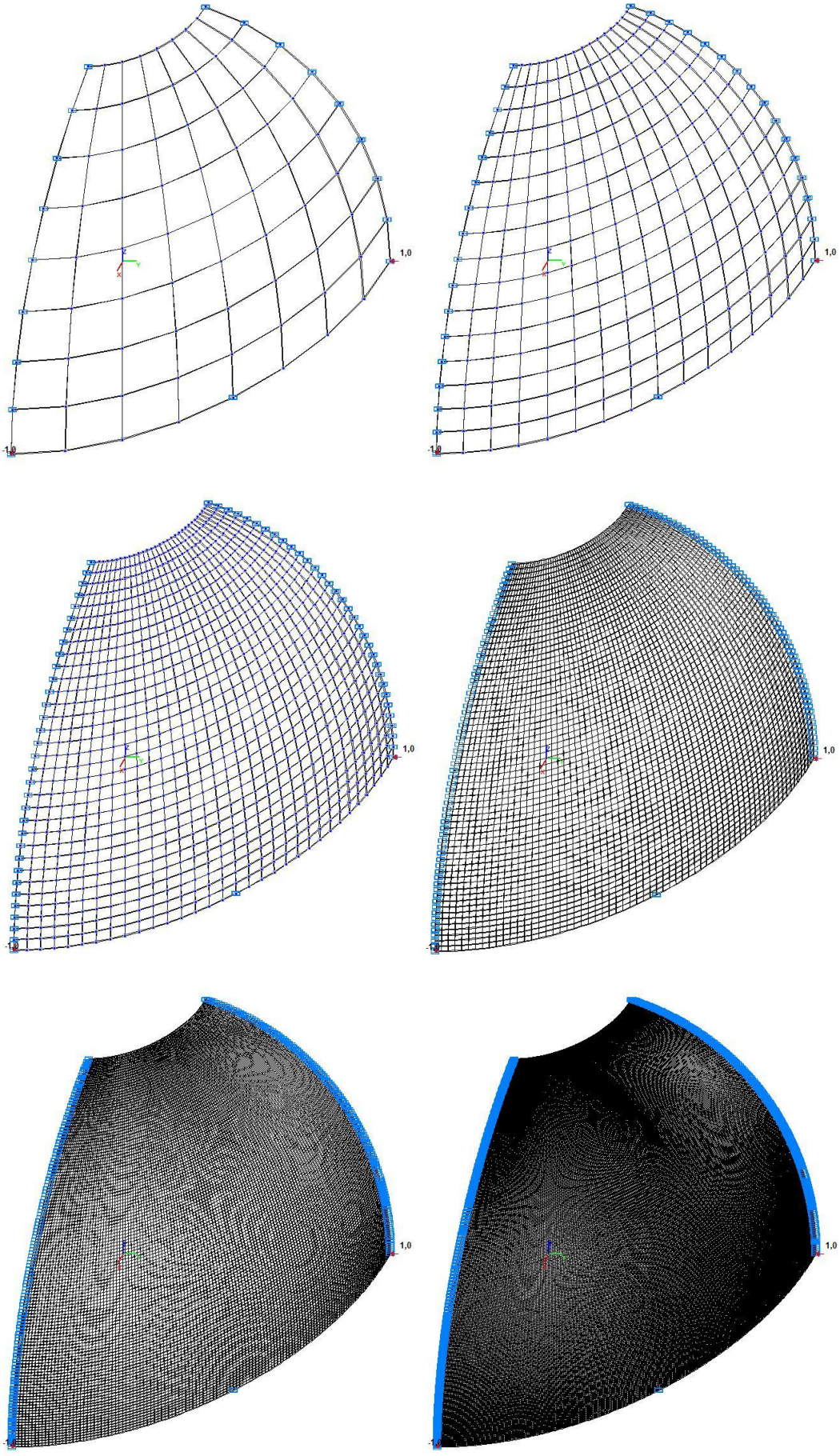


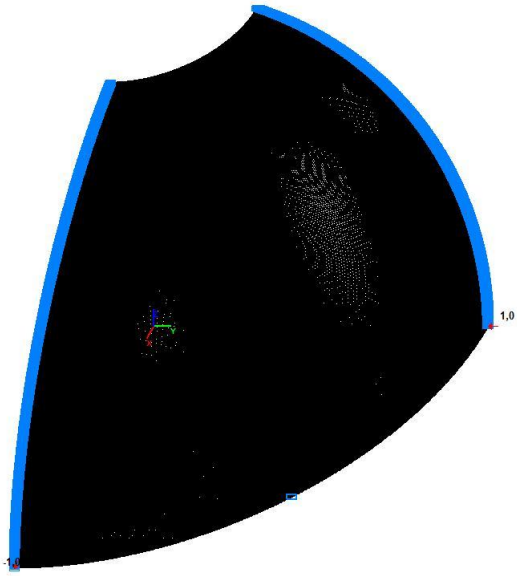
0	0,0067
0,0067	0,0133
0,0133	0,02
0,02	0,0266
0,0266	0,0333
0,0333	0,04
0,04	0,0466
0,0466	0,0533
0,0533	0,0599
0,0599	0,0666
0,0666	0,0733
0,0733	0,0799
0,0799	0,0866
0,0866	0,0932



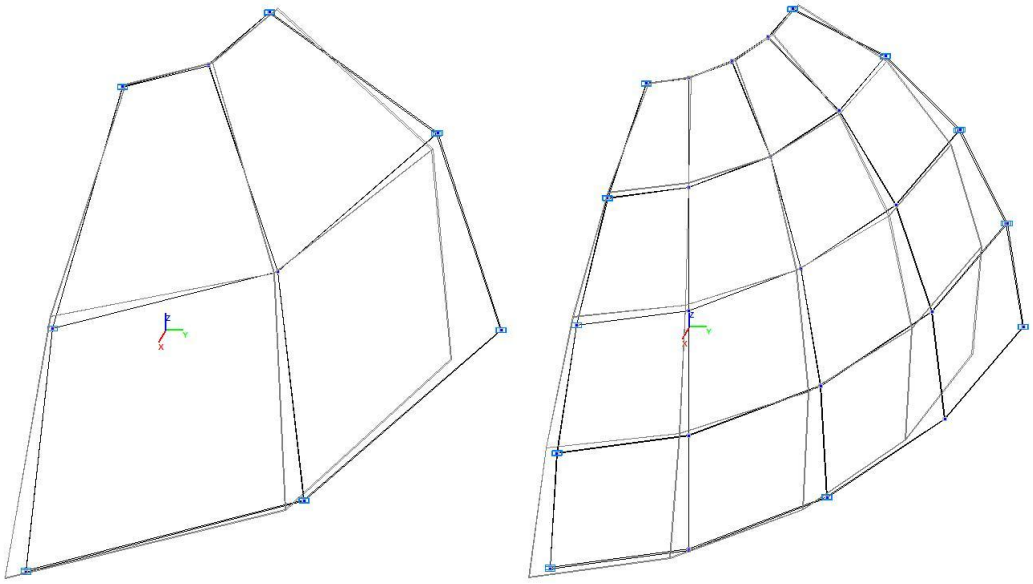
Модель 4. Значения перемещений по направлению пар растягивающих и пар сжимающих сил вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)

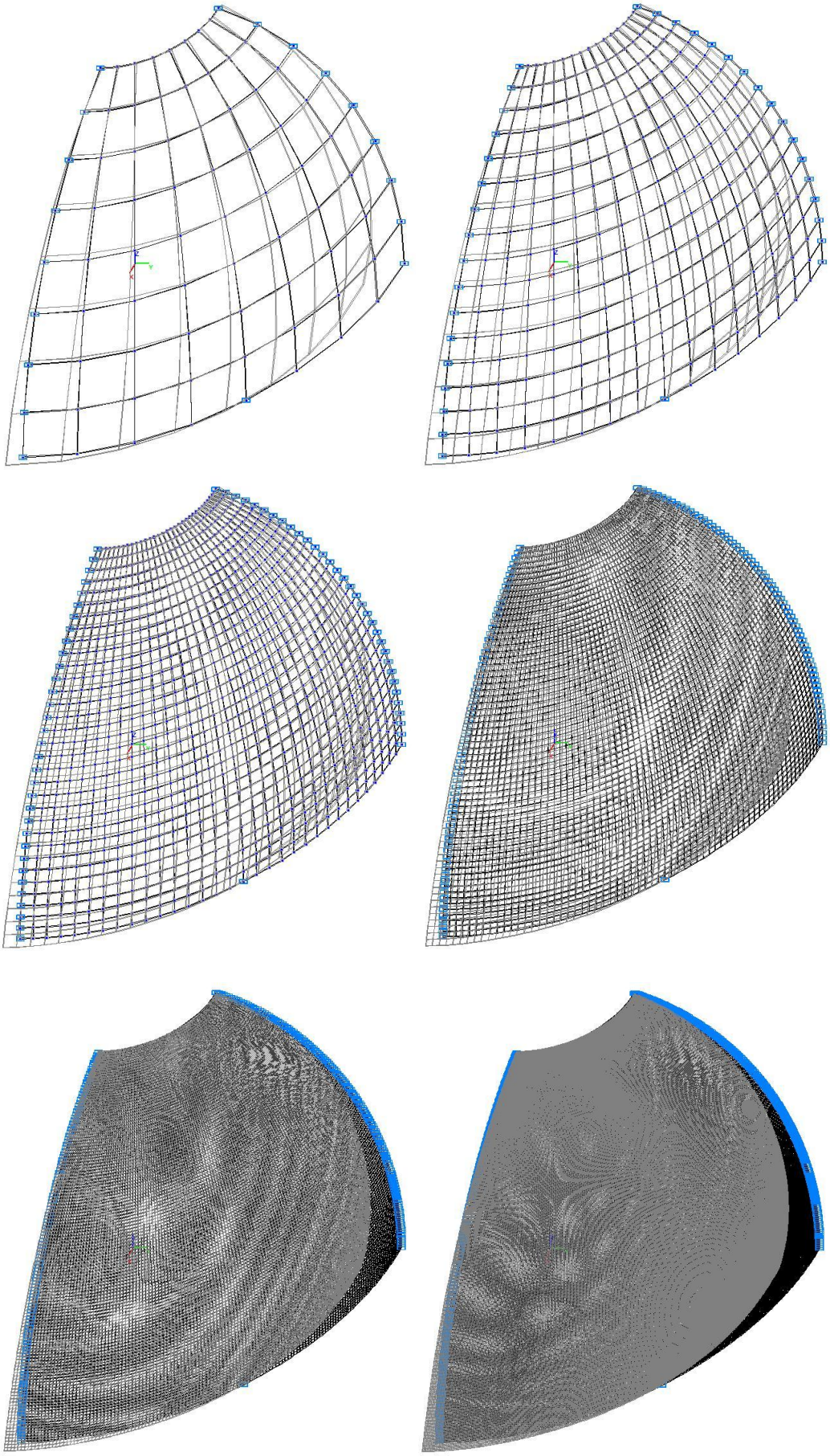


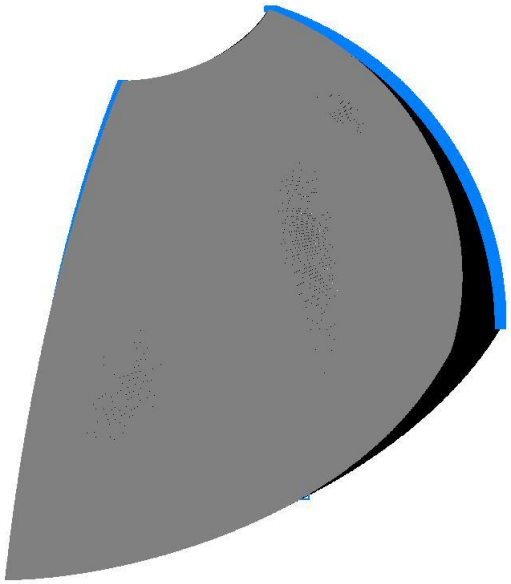

1,0
1,0
1,0
1,0
1,0
1,0



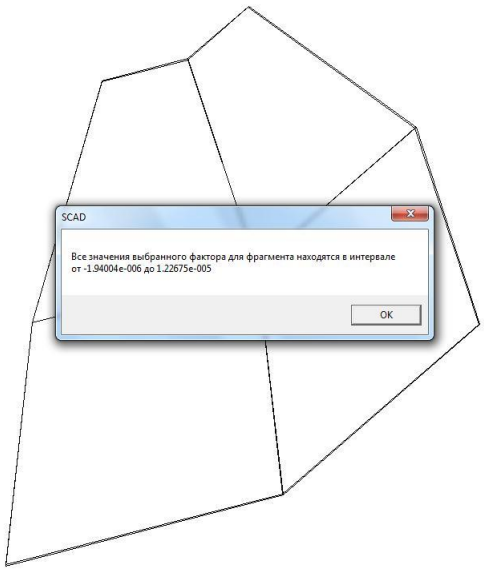
Модель 5. Расчетная схема

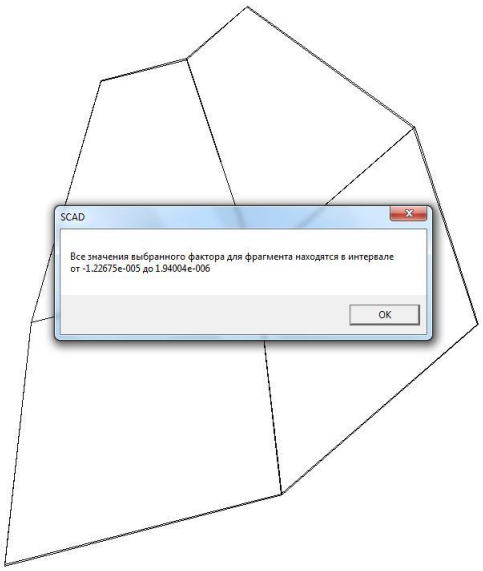


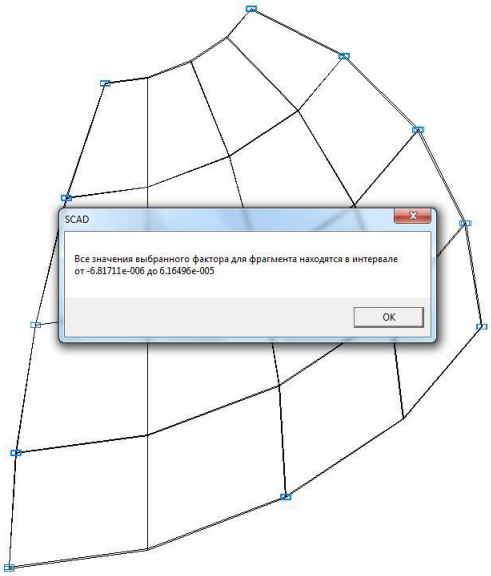


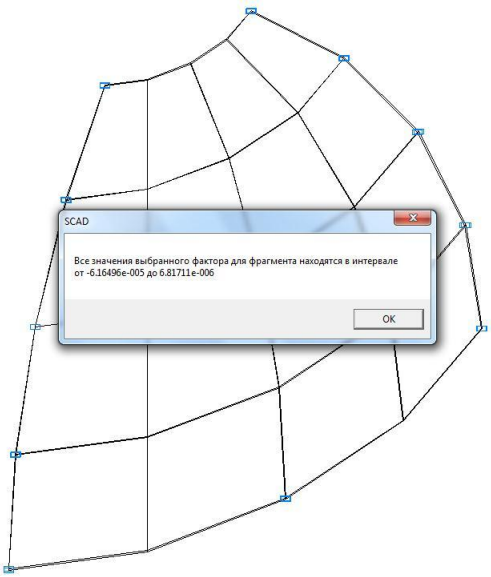


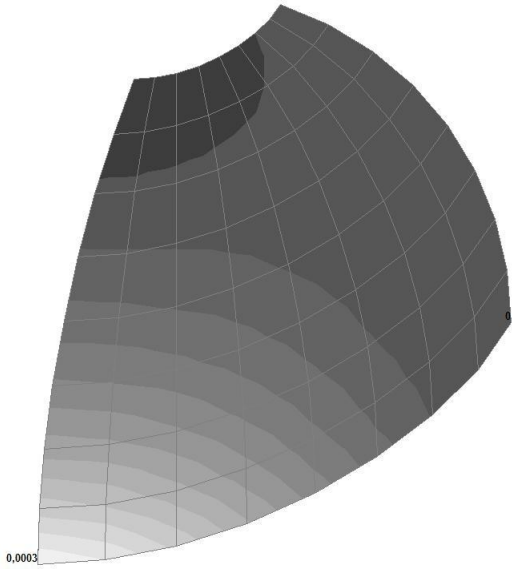
Модель 5. Деформированная схема



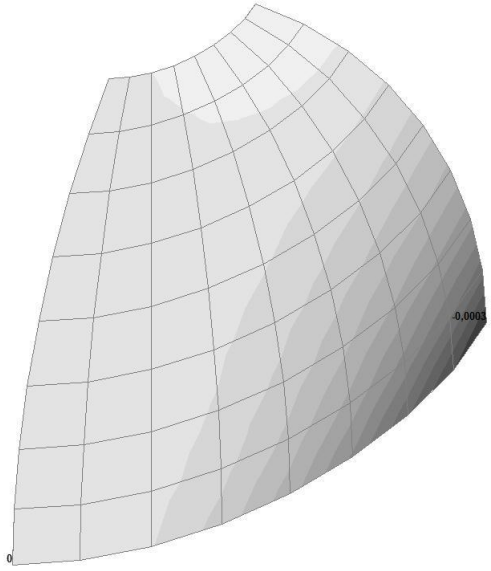




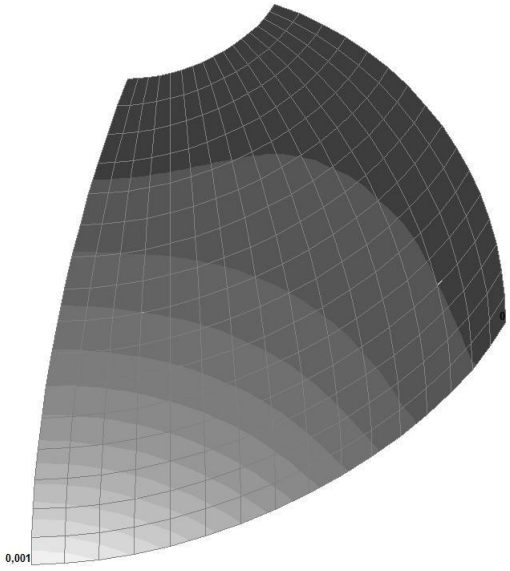




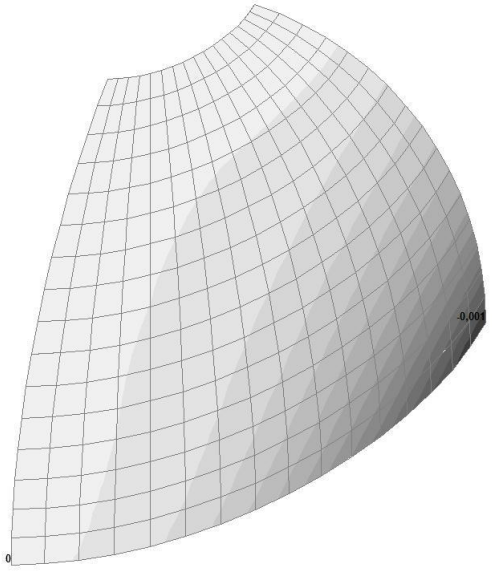
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0,0001
0,0001	0,0001
0,0001	0,0002
0,0002	0,0002
0,0002	0,0002
0,0002	0,0002
0,0002	0,0002
0,0002	0,0003



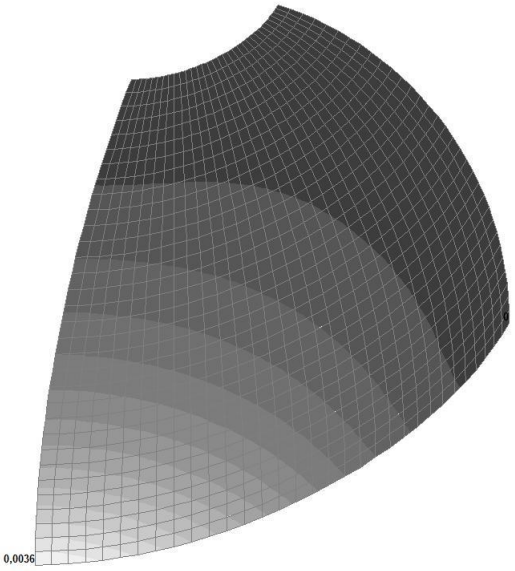
-0,0003	-0,0002
-0,0002	-0,0002
-0,0002	-0,0002
-0,0002	-0,0002
-0,0002	-0,0002
-0,0002	-0,0001
-0,0001	-0,0001
-0,0001	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0



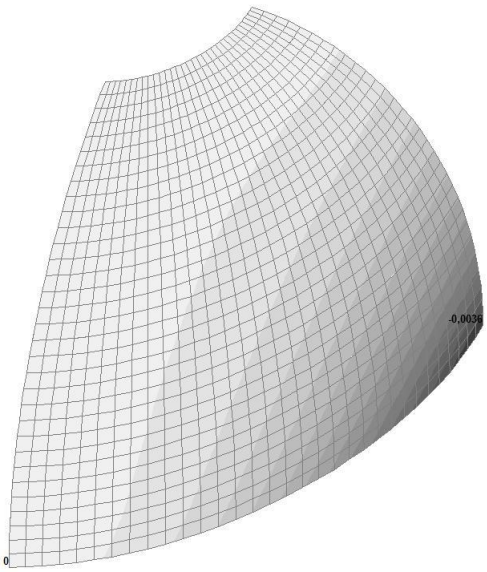
0	0
0	0
0	0,0002
0,0002	0,0002
0,0002	0,0003
0,0003	0,0004
0,0004	0,0005
0,0005	0,0005
0,0005	0,0006
0,0006	0,0007
0,0007	0,0007
0,0007	0,0008
0,0008	0,0009
0,0009	0,001



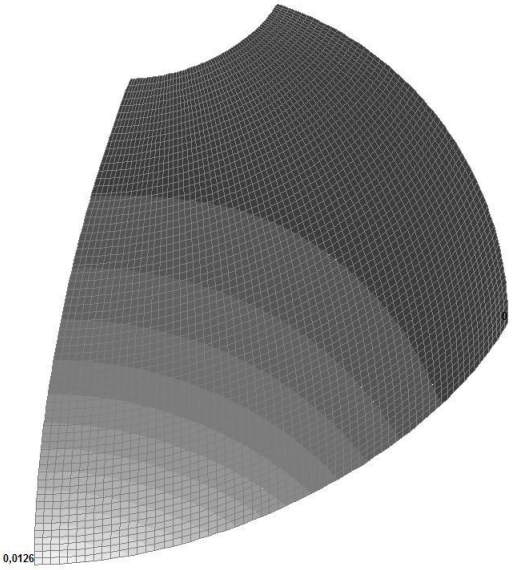
-0,001	-0,0009
-0,0009	-0,0008
-0,0008	-0,0007
-0,0007	-0,0007
-0,0007	-0,0006
-0,0006	-0,0005
-0,0005	-0,0005
-0,0005	-0,0004
-0,0004	-0,0003
-0,0003	-0,0002
-0,0002	-0,0002
-0,0002	0
0	0
0	0



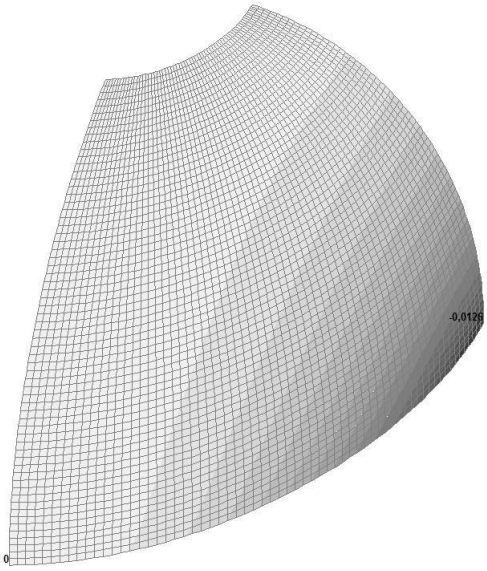
-0,0002	0
0	0,0004
0,0004	0,0006
0,0006	0,0009
0,0009	0,0012
0,0012	0,0015
0,0015	0,0017
0,0017	0,002
0,002	0,0023
0,0023	0,0025
0,0025	0,0028
0,0028	0,0031
0,0031	0,0034
0,0034	0,0036



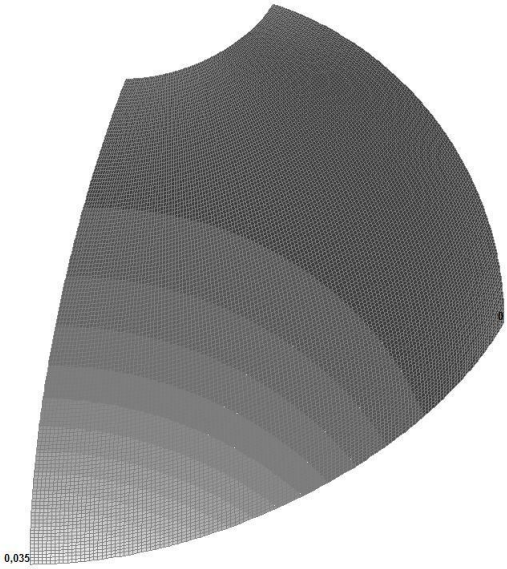
-0,0036	-0,0034
-0,0034	-0,0031
-0,0031	-0,0028
-0,0028	-0,0025
-0,0025	-0,0023
-0,0023	-0,002
-0,002	-0,0017
-0,0017	-0,0015
-0,0015	-0,0012
-0,0012	-0,0009
-0,0009	-0,0006
-0,0006	-0,0004
-0,0004	0
0	0,0002



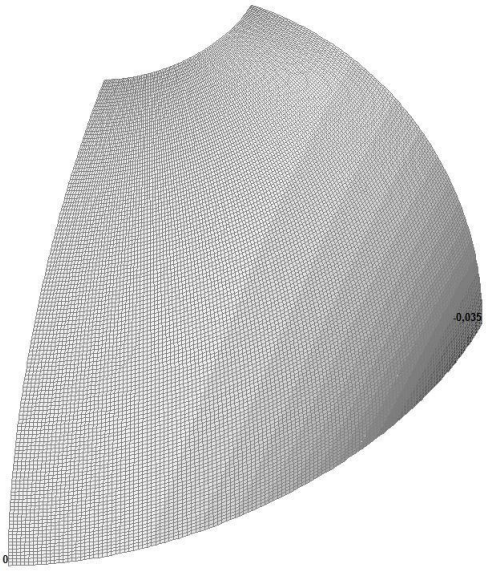
-0,0004	0,0006
0,0006	0,0015
0,0015	0,0024
0,0024	0,0033
0,0033	0,0043
0,0043	0,0052
0,0052	0,0061
0,0061	0,007
0,007	0,008
0,008	0,0089
0,0089	0,0098
0,0098	0,0107
0,0107	0,0116
0,0116	0,0126



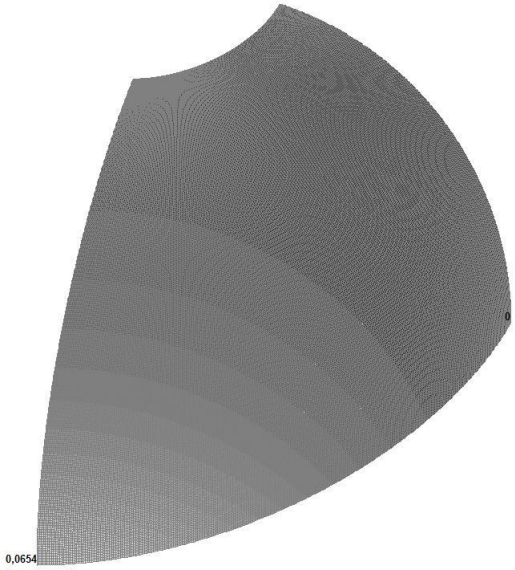
-0,0126	-0,0116
-0,0116	-0,0107
-0,0107	-0,0098
-0,0098	-0,0089
-0,0089	-0,008
-0,008	-0,007
-0,007	-0,0061
-0,0061	-0,0052
-0,0052	-0,0043
-0,0043	-0,0033
-0,0033	-0,0024
-0,0024	-0,0015
-0,0015	-0,0006
-0,0006	0,0004



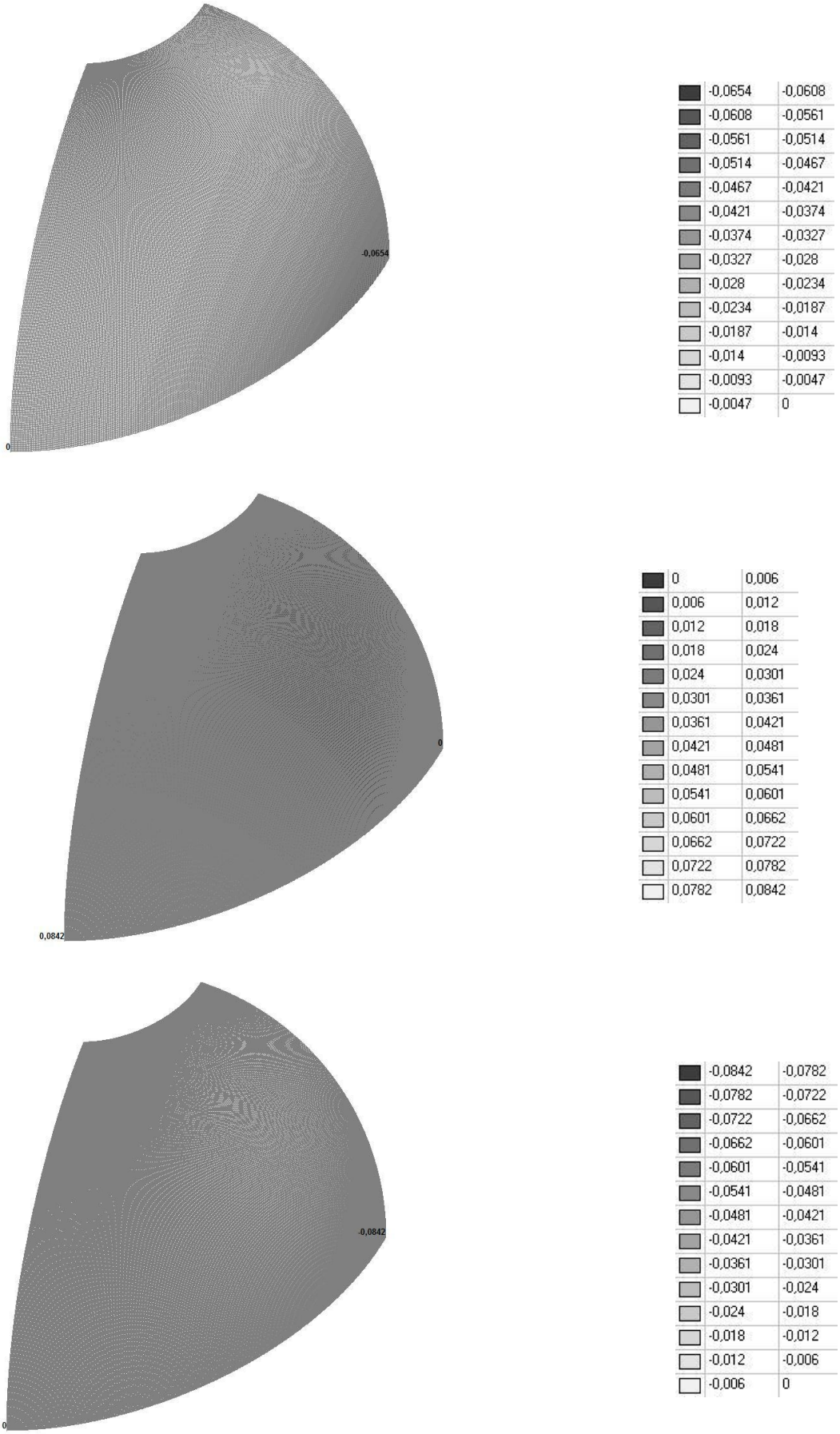
-0,0003	0,0022
0,0022	0,0048
0,0048	0,0073
0,0073	0,0098
0,0098	0,0123
0,0123	0,0148
0,0148	0,0173
0,0173	0,0199
0,0199	0,0224
0,0224	0,0249
0,0249	0,0274
0,0274	0,0299
0,0299	0,0325
0,0325	0,035



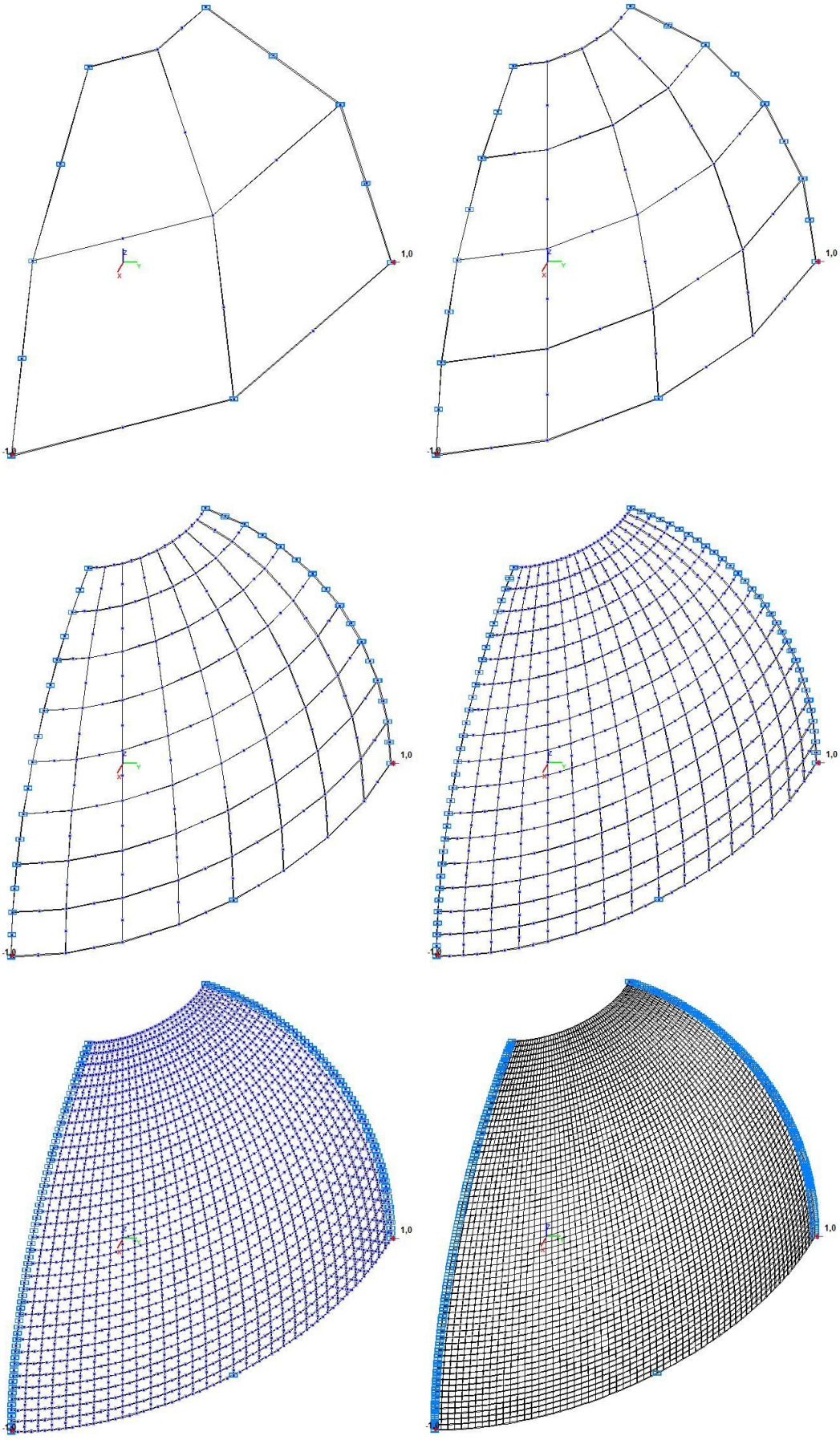
-0,035	-0,0325
-0,0325	-0,0299
-0,0299	-0,0274
-0,0274	-0,0249
-0,0249	-0,0224
-0,0224	-0,0199
-0,0199	-0,0173
-0,0173	-0,0148
-0,0148	-0,0123
-0,0123	-0,0098
-0,0098	-0,0073
-0,0073	-0,0048
-0,0048	-0,0022
-0,0022	0,0003

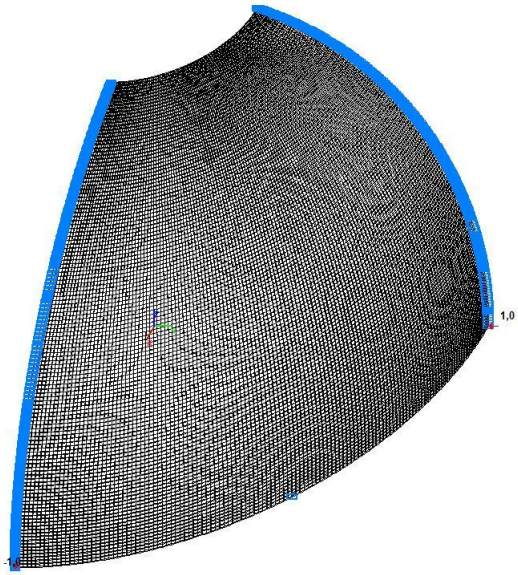


0	0,0047
0,0047	0,0093
0,0093	0,014
0,014	0,0187
0,0187	0,0234
0,0234	0,028
0,028	0,0327
0,0327	0,0374
0,0374	0,0421
0,0421	0,0467
0,0467	0,0514
0,0514	0,0561
0,0561	0,0608
0,0608	0,0654

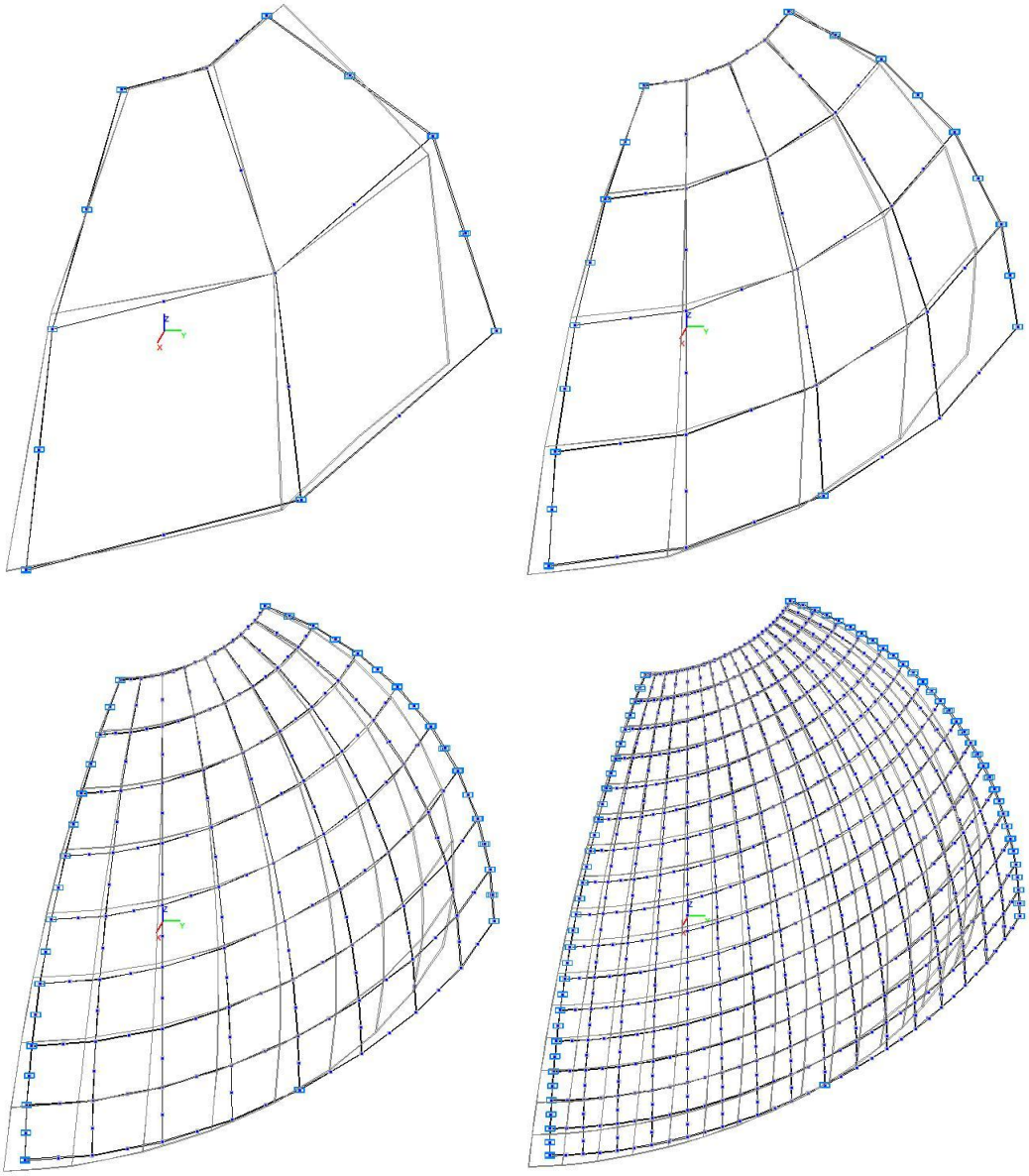


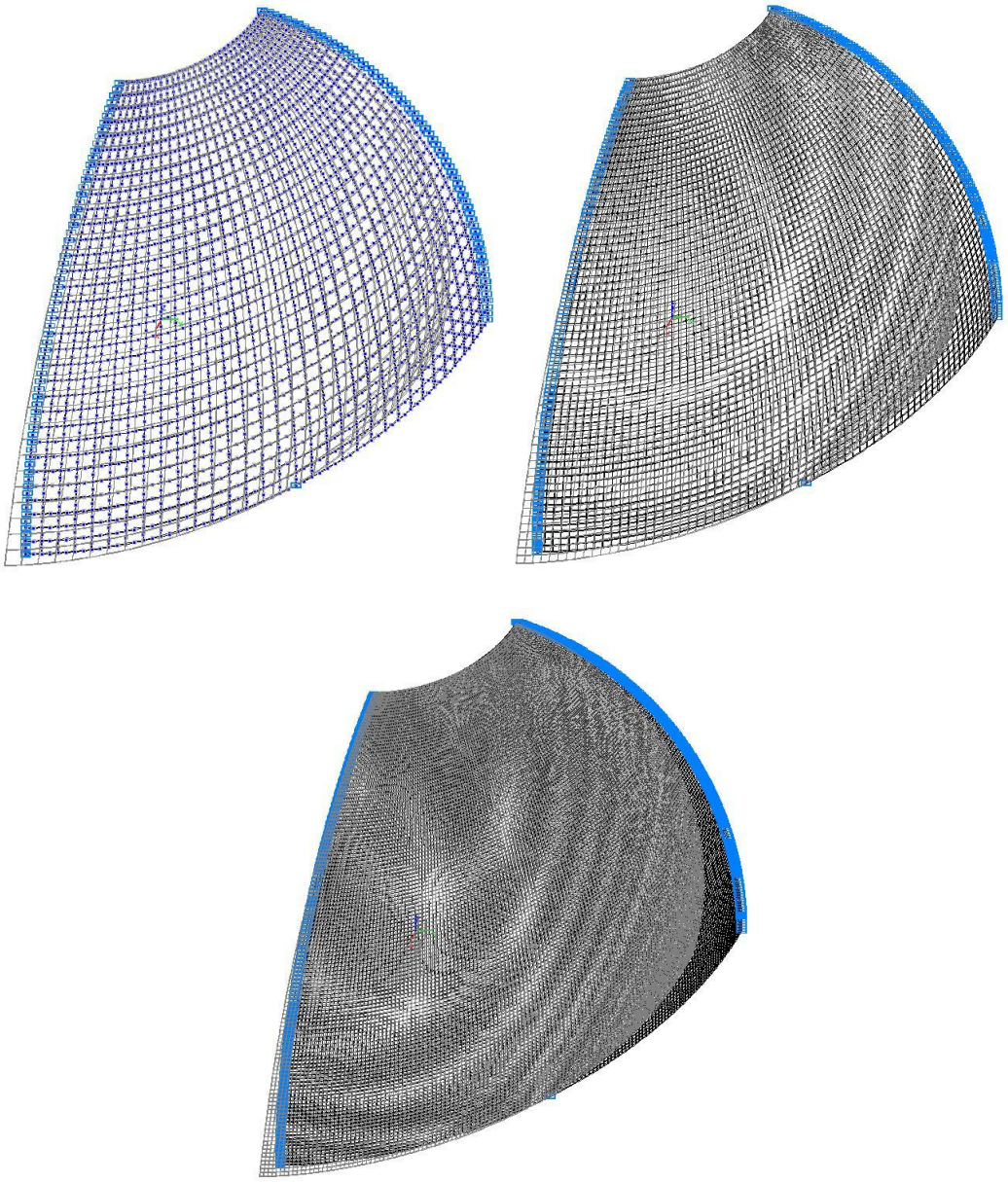
Модель 5. Значения перемещений по направлению пар растягивающих и пар сжимающих сил вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)


1,0
1,0
1,0
1,0
1,0
1,0

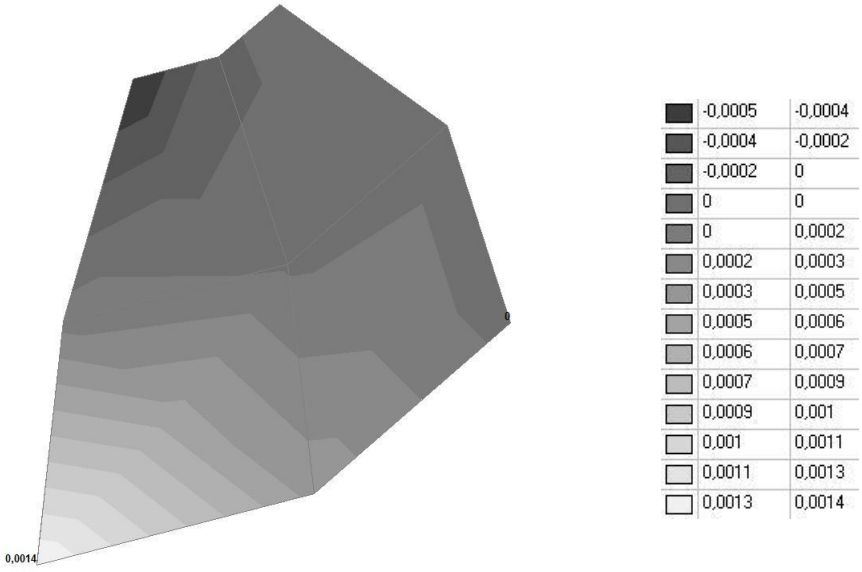


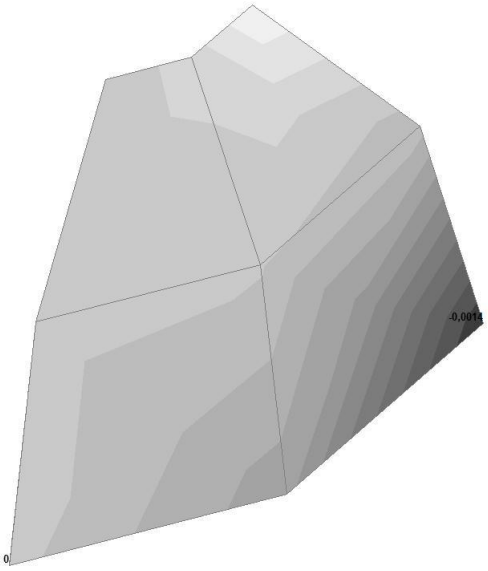
Модель 6. Расчетная схема



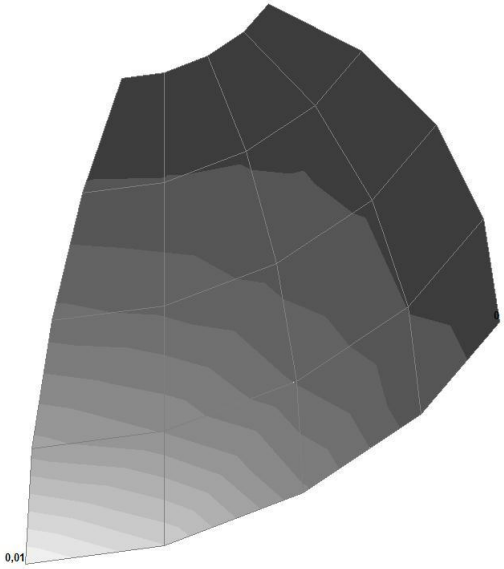


Модель 6. Деформированная схема

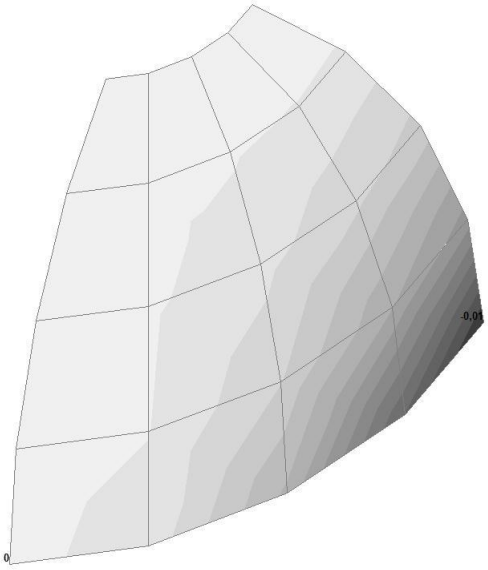




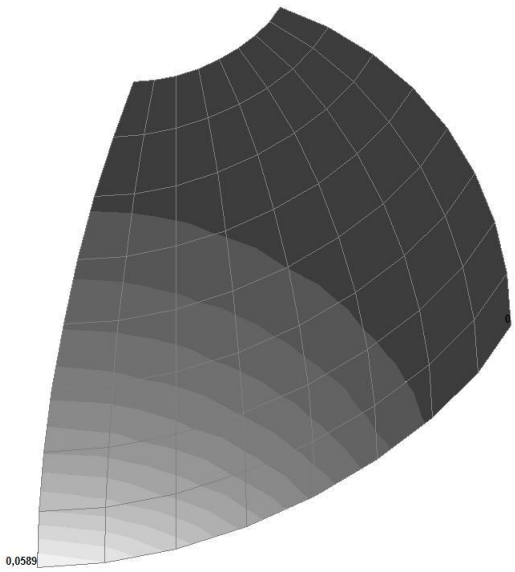
-0,0014	-0,0013
-0,0013	-0,0011
-0,0011	-0,001
-0,001	-0,0009
-0,0009	-0,0007
-0,0007	-0,0006
-0,0006	-0,0005
-0,0005	-0,0003
-0,0003	-0,0002
-0,0002	0
0	0
0	0,0002
0,0002	0,0004
0,0004	0,0005



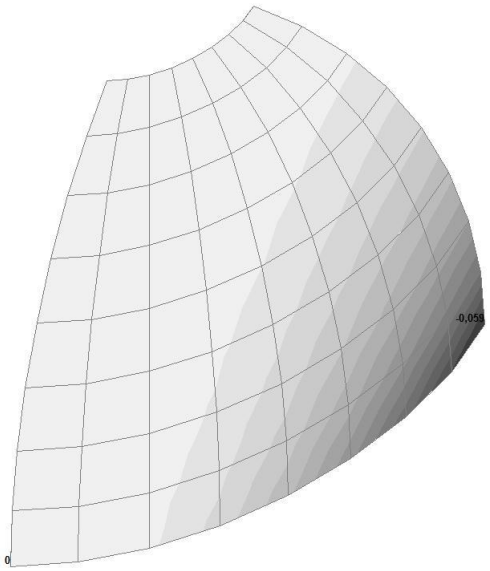
-0,0006	0,0002
0,0002	0,0009
0,0009	0,0017
0,0017	0,0024
0,0024	0,0032
0,0032	0,0039
0,0039	0,0047
0,0047	0,0054
0,0054	0,0062
0,0062	0,0069
0,0069	0,0077
0,0077	0,0084
0,0084	0,0092
0,0092	0,01



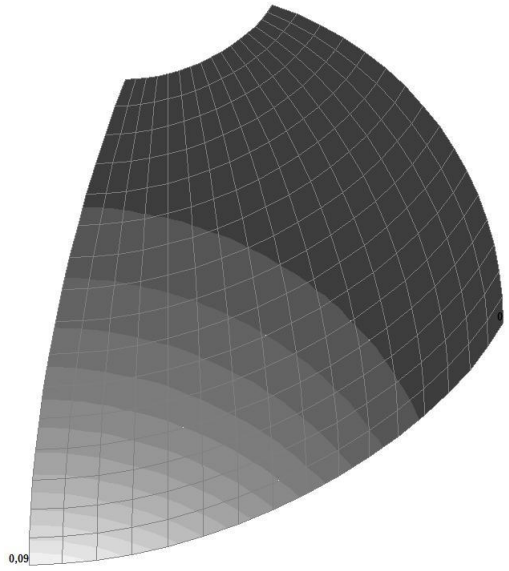
-0,01	-0,0092
-0,0092	-0,0084
-0,0084	-0,0077
-0,0077	-0,0069
-0,0069	-0,0062
-0,0062	-0,0054
-0,0054	-0,0047
-0,0047	-0,0039
-0,0039	-0,0032
-0,0032	-0,0024
-0,0024	-0,0017
-0,0017	-0,0009
-0,0009	-0,0002
-0,0002	0,0006



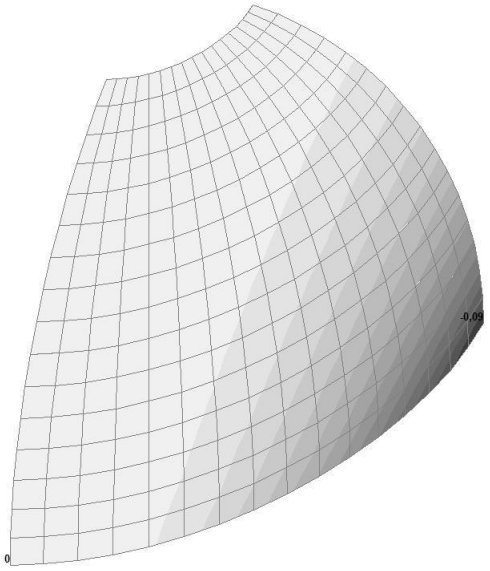
0	0,0042
0,0042	0,0084
0,0084	0,0126
0,0126	0,0168
0,0168	0,021
0,021	0,0253
0,0253	0,0295
0,0295	0,0337
0,0337	0,0379
0,0379	0,0421
0,0421	0,0463
0,0463	0,0505
0,0505	0,0547
0,0547	0,0589



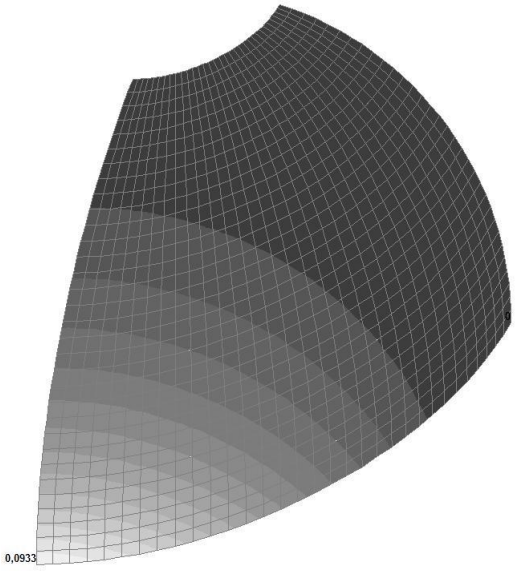
-0,059	-0,0547
-0,0547	-0,0505
-0,0505	-0,0463
-0,0463	-0,0421
-0,0421	-0,0379
-0,0379	-0,0337
-0,0337	-0,0295
-0,0295	-0,0253
-0,0253	-0,021
-0,021	-0,0168
-0,0168	-0,0126
-0,0126	-0,0084
-0,0084	-0,0042
-0,0042	0



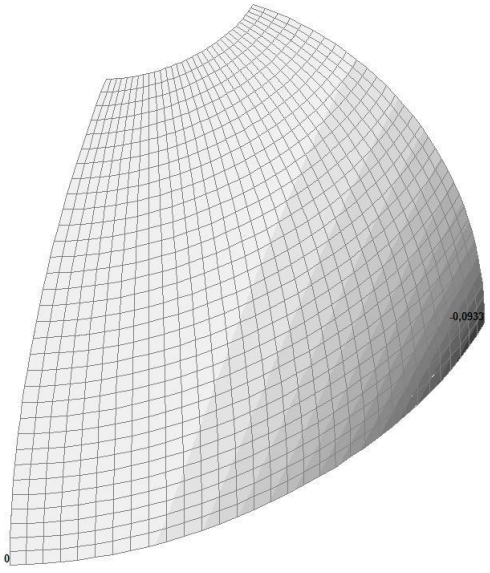
0	0,0064
0,0064	0,0128
0,0128	0,0193
0,0193	0,0257
0,0257	0,0321
0,0321	0,0386
0,0386	0,045
0,045	0,0514
0,0514	0,0578
0,0578	0,0643
0,0643	0,0707
0,0707	0,0771
0,0771	0,0836
0,0836	0,09



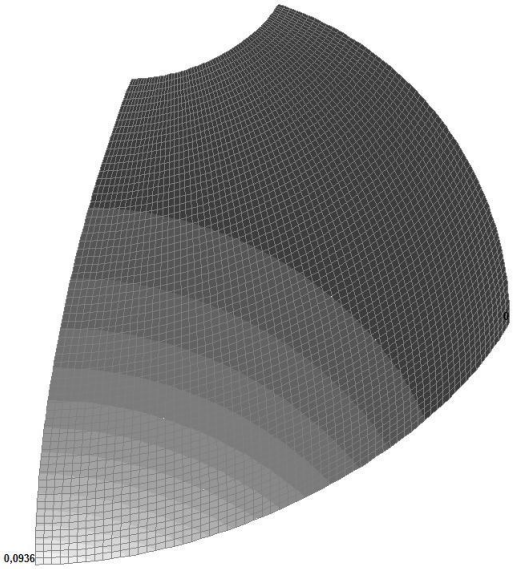
-0,09	-0,0836
-0,0836	-0,0771
-0,0771	-0,0707
-0,0707	-0,0643
-0,0643	-0,0578
-0,0578	-0,0514
-0,0514	-0,045
-0,045	-0,0386
-0,0386	-0,0321
-0,0321	-0,0257
-0,0257	-0,0193
-0,0193	-0,0128
-0,0128	-0,0064
-0,0064	0



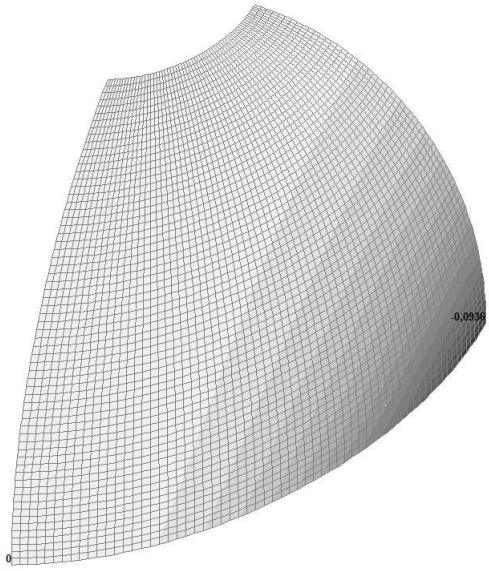
0	0,0066
0,0066	0,0133
0,0133	0,02
0,02	0,0266
0,0266	0,0333
0,0333	0,04
0,04	0,0466
0,0466	0,0533
0,0533	0,0599
0,0599	0,0666
0,0666	0,0733
0,0733	0,0799
0,0799	0,0866
0,0866	0,0933



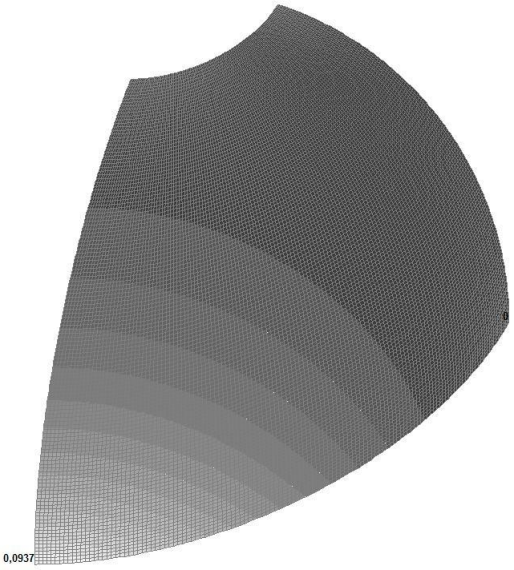
-0,0933	-0,0866
-0,0866	-0,0799
-0,0799	-0,0733
-0,0733	-0,0666
-0,0666	-0,0599
-0,0599	-0,0533
-0,0533	-0,0466
-0,0466	-0,04
-0,04	-0,0333
-0,0333	-0,0266
-0,0266	-0,02
-0,02	-0,0133
-0,0133	-0,0066
-0,0066	0



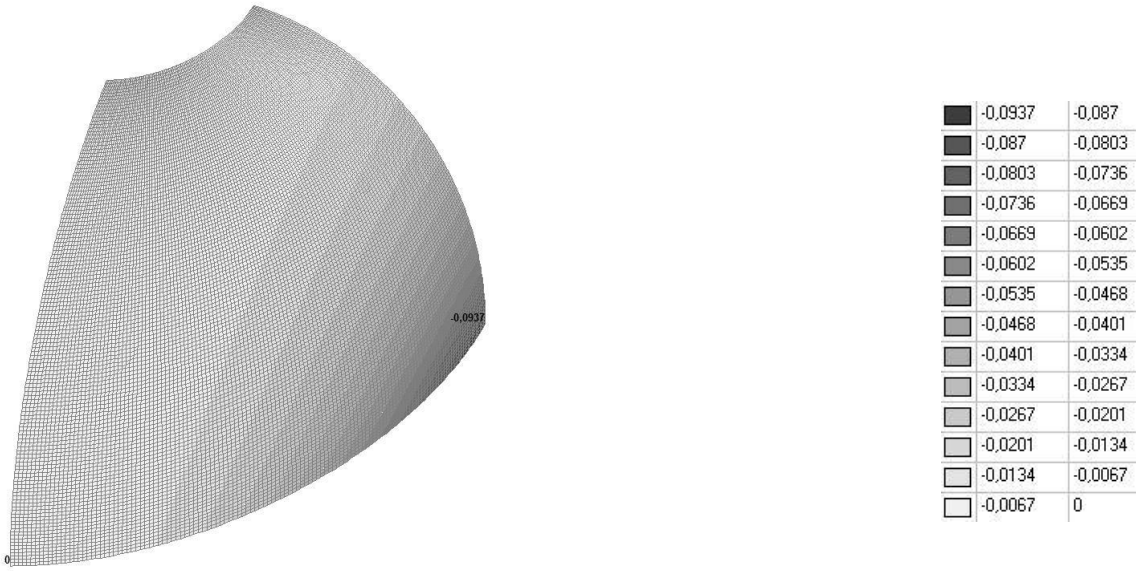
0	0,0067
0,0067	0,0133
0,0133	0,02
0,02	0,0267
0,0267	0,0334
0,0334	0,0401
0,0401	0,0468
0,0468	0,0535
0,0535	0,0601
0,0601	0,0668
0,0668	0,0735
0,0735	0,0802
0,0802	0,0869
0,0869	0,0936



-0,0936	-0,0869
-0,0869	-0,0802
-0,0802	-0,0735
-0,0735	-0,0668
-0,0668	-0,0601
-0,0601	-0,0535
-0,0535	-0,0468
-0,0468	-0,0401
-0,0401	-0,0334
-0,0334	-0,0267
-0,0267	-0,02
-0,02	-0,0133
-0,0133	-0,0067
-0,0067	0



0	0,0067
0,0067	0,0134
0,0134	0,0201
0,0201	0,0267
0,0267	0,0334
0,0334	0,0401
0,0401	0,0468
0,0468	0,0535
0,0535	0,0602
0,0602	0,0669
0,0669	0,0736
0,0736	0,0803
0,0803	0,087
0,087	0,0937



Модель 6. Значения перемещений по направлению пар растягивающих и пар сжимающих сил вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)

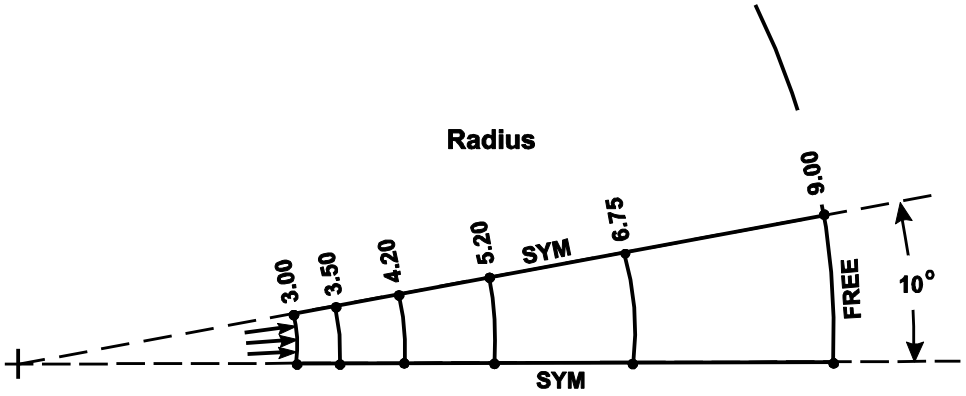
Сравнение решений:

Перемещения по направлению пар радиально растягивающих и пар радиально сжимающих сил F_X и F_Y вдоль осей X и Y общей системы координат соответственно w_{FX} и w_{FY} (м, м)

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	2x2	+0.0940 –0.0940	+0.0828 –0.0862	11.91 8.30
	4x4		+0.0902 –0.0919	4.04 2.23
	8x8		+0.0917 –0.0922	2.45 1.91
	16x16		+0.0920 –0.0922	2.13 1.91
	32x32		+0.0927 –0.0928	1.38 1.28
2 (Тип элемента 44)	2x2	+0.0940 –0.0940	+0.0924 –0.0924	1.70 1.70
	4x4		+0.0938 –0.0938	0.21 0.21
	8x8		+0.0930 –0.0930	1.06 1.06
	16x16		+0.0928 –0.0928	1.28 1.28
	32x32		+0.0932 –0.0932	0.85 0.85
3 (Тип элемента 45)	2x2	+0.0940 –0.0940	+0.0506 –0.0510	46.17 45.74
	4x4		+0.0389 –0.0395	58.62 57.98
	8x8		+0.0484 –0.0489	48.51 47.98
	16x16		+0.0834 –0.0835	11.28 11.17
	32x32		+0.0927 –0.0927	1.38 1.38
4 (Тип элемента 50)	2x2	+0.0940 –0.0940	+0.0526 –0.0526	44.04 44.04

Модель	Сетка конечных элементов	Теория	SCAD	Отклонение, %
	4x4		+0.0459 –0.0459	51.17 51.17
	8x8		+0.0651 –0.0651	30.74 30.74
	16x16		+0.0899 –0.0899	4.36 4.36
	32x32		+0.0932 –0.0932	0.85 0.85
5 (Тип элемента 36)	2x2	+0.0940 –0.0940	+0.0000 –0.0000	100.00 100.00
	4x4		+0.0001 –0.0001	99.89 99.89
	8x8		+0.0003 –0.0003	99.68 99.68
	16x16		+0.0010 –0.0010	98.94 98.94
	32x32		+0.0036 –0.0036	96.17 96.17
	64x64		+0.0126 –0.0126	86.60 86.60
	128x128		+0.0350 –0.0350	62.77 62.77
	256x256		+0.0654 –0.0654	30.43 30.43
	512x512		+0.0842 –0.0842	10.43 10.43
6 (Тип элемента 37)	2x2	+0.0940 –0.0940	+0.0014 –0.0014	98.51 98.51
	4x4		+0.0100 –0.0100	89.36 89.36
	8x8		+0.0589 –0.0590	37.34 37.23
	16x16		+0.0900 –0.0900	4.26 4.26
	32x32		+0.0933 –0.0933	0.74 0.74
	64x64		+0.0936 –0.0936	0.43 0.43
	128x128		+0.0937 –0.0937	0.32 0.32

Почти несжимаемый толстостенный цилиндр в условиях плоской деформации под действием равномерно распределенного внутреннего давления



Цель: Проверка точного воспроизведения значений радиальных перемещений внутренней поверхности почти несжимаемого толстостенного цилиндра в условиях плоской деформации от действия равномерно распределенного внутреннего давления.

Файлы с исходными данными:

Название файла расчета	Описание файла расчета
Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_42_ Poisson_ratio_049_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_42_ Poisson_ratio_0499_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_42_ Poisson_ratio_04999_.SPR	Расчетная модель с типом элементов 42 для материала с коэффициентом Пуассона 0.49, 0.499, 0.4999
Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_44_ Poisson_ratio_049_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_44_ Poisson_ratio_0499_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_44_ Poisson_ratio_04999_.SPR	Расчетная модель с типом элементов 44 для материала с коэффициентом Пуассона 0.49, 0.499, 0.4999
Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_45_ Poisson_ratio_049_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_45_ Poisson_ratio_0499_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_45_ Poisson_ratio_04999_.SPR	Расчетная модель с типом элементов 45 для материала с коэффициентом Пуассона 0.49, 0.499, 0.4999
Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_50_ Poisson_ratio_049_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_50_ Poisson_ratio_0499_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_Shell_50_ Poisson_ratio_04999_.SPR	Расчетная модель с типом элементов 50 для материала с коэффициентом Пуассона 0.49, 0.499, 0.4999
Nearly_incompressible_thick_cylinder_ Solid _36_ Poisson_ratio_049_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_ Solid _36_ Poisson_ratio_0499_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_ Solid _36_ Poisson_ratio_04999_.SPR	Расчетная модель с типом элементов 36 для материала с коэффициентом Пуассона 0.49, 0.499, 0.4999
Nearly_incompressible_thick_cylinder_ Solid _37_ Poisson_ratio_049_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_ Solid _37_ Poisson_ratio_0499_.SPR Nearly_incompressible_thick_cylinder_ Solid _37_ Poisson_ratio_04999_.SPR	Расчетная модель с типом элементов 37 для материала с коэффициентом Пуассона 0.49, 0.499, 0.4999

***Формулировка задачи*:** Почти несжимаемый толстостенный цилиндр находится в условиях плоской деформации и подвергается воздействию равномерно распределенного внутреннего давления p. Проверить: точное воспроизведение значений радиальных перемещений внутренней поверхности u.

Ссылки: R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, North-Holland, Finite elements in analysis and design, 1, 1985, p. 3-20.

Исходные данные:

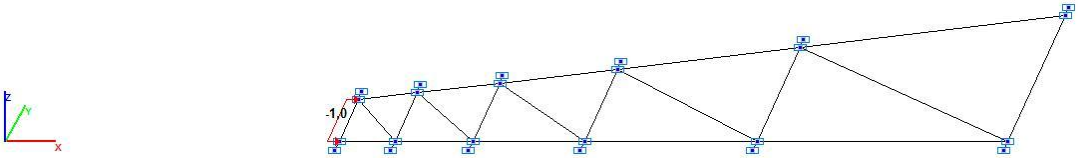
E = 1000 кПа - модуль упругости материала толстостенного цилиндра;
ν = 0.49; 0.499; 0.4999 - коэффициент Пуассона;
R_i = 3.00 м - радиус внутренней поверхности толстостенного цилиндра;
R_e = 9.00 м - радиус внешней поверхности толстостенного цилиндра;
p = 1.0 кПа - значения равномерно распределенного внутреннего давления.

***Конечно-элементная модель*:** Расчетная схема – система общего вида. Рассматривается расчетная схема сектора толстостенного цилиндра толщиной 1.00 м с центральным углом θ = 10° по условиям симметрии для шести расчетных моделей:
Модель 1 – 10 трехузловых элементов оболочки типа 42 неравных размеров с разбивкой сетки в радиальном направлении 3.00 м, 3.50 м, 4.20 м, 5.20 м, 6.75 м, 9.00 м . Обеспечение граничных условий достигается за счет введения 12 стержневых элементов пространственной фермы типа 4 повышенной продольной жесткости (EF = 10^6 кН) в тангенциальном направлении (ортогонально боковым поверхностям сектора). На опорные узлы стержневых элементов накладываются связи по степеням свободы X, Y, Z. Геометрическая неизменяемость достигается за счет наложения связей на боковые поверхности сектора по степеням свободы Z, UZ. По внутренней поверхности цилиндра прикладывается нагрузка на элемент по линии p = 1.0 кН/м. Количество узлов в модели – 24.
Модель 2 – 5 четырехузловых элементов оболочки типа 44 неравных размеров с разбивкой сетки в радиальном направлении 3.00 м, 3.50 м, 4.20 м, 5.20 м, 6.75 м, 9.00 м . Обеспечение граничных условий достигается за счет введения 12 стержневых элементов пространственной фермы типа 4 повышенной продольной жесткости (EF = 10^6 кН) в тангенциальном направлении (ортогонально боковым поверхностям сектора). На опорные узлы стержневых элементов накладываются связи по степеням свободы X, Y, Z. Геометрическая неизменяемость достигается за счет наложения связей на боковые поверхности сектора по степеням свободы Z, UZ. По внутренней поверхности цилиндра прикладывается нагрузка на элемент по линии p = 1.0 кН/м. Количество узлов в модели – 24.
Модель 3 – 10 шестиузловых элементов оболочки типа 45 неравных размеров с разбивкой сетки в радиальном направлении 3.00 м, 3.50 м, 4.20 м, 5.20 м, 6.75 м, 9.00 м . Обеспечение граничных условий достигается за счет введения 22 стержневых элементов пространственной фермы типа 4 повышенной продольной жесткости (EF = 10^6 кН) в тангенциальном направлении (ортогонально боковым поверхностям сектора). На опорные узлы стержневых элементов накладываются связи по степеням свободы X, Y, Z. Геометрическая неизменяемость достигается за счет наложения связей на боковые поверхности сектора по степеням свободы Z, UZ. По внутренней поверхности цилиндра прикладывается нагрузка на элемент по линии p = 1.0 кН/м. Количество узлов в модели – 55.
Модель 4 – 5 восьмиузловых элементов оболочки типа 50 неравных размеров с разбивкой сетки в радиальном направлении 3.00 м, 3.50 м, 4.20 м, 5.20 м, 6.75 м, 9.00 м . Обеспечение граничных условий достигается за счет введения 22 стержневых элементов пространственной фермы типа 4 повышенной продольной жесткости (EF = 10^6 кН) в тангенциальном направлении (ортогонально боковым поверхностям сектора). На опорные узлы стержневых элементов накладываются связи по степеням свободы X, Y, Z. Геометрическая неизменяемость достигается за счет наложения связей на боковые поверхности сектора по степеням свободы Z, UZ. По внутренней поверхности цилиндра прикладывается нагрузка на элемент по линии p = 1.0 кН/м. Количество узлов в модели – 50.
Модель 5 – 5 восьмиузловых изопараметрических объемных элементов типа 36 неравных размеров с разбивкой сетки в радиальном направлении 3.00 м, 3.50 м, 4.20 м, 5.20 м, 6.75 м, 9.00 м . Обеспечение граничных условий достигается за счет введения 24 стержневых элементов пространственной фермы типа 4 повышенной продольной жесткости (EF = 10^6 кН) в тангенциальном направлении (ортогонально боковым поверхностям сектора). На опорные узлы стержневых элементов накладываются связи по степеням свободы X, Y, Z. Геометрическая неизменяемость достигается за счет наложения связей на боковые поверхности сектора по степени

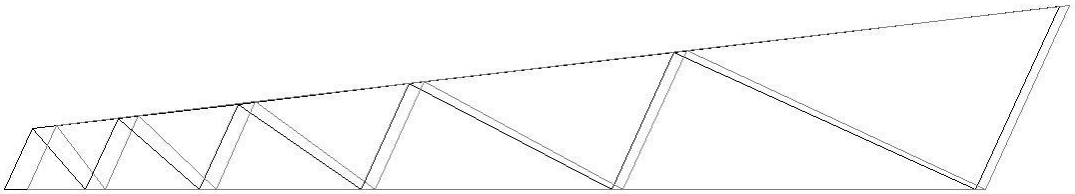
свободы Z. По внутренней поверхности цилиндра прикладывается нагрузка на элемент по грани p = 1.0 кН/м^2. Количество узлов в модели – 50.

Модель 6 – 5 двадцатиузловых изопараметрических объемных элементов типа 37 неравных размеров с разбивкой сетки в радиальном направлении 3.00 м, 3.50 м, 4.20 м, 5.20 м, 6.75 м, 9.00 м . Обеспечение граничных условий достигается за счет введения 56 стержневых элементов пространственной фермы типа 4 повышенной продольной жесткости (EF = 10^6 кН) в тангенциальном направлении (ортогонально боковым поверхностям сектора). На опорные узлы стержневых элементов накладываются связи по степеням свободы X, Y, Z. Геометрическая неизменяемость достигается за счет наложения связей на боковые поверхности сектора по степени свободы Z. По внутренней поверхности цилиндра прикладывается нагрузка на элемент по грани p = 1.0 кН/м^2. Количество узлов в модели – 124.

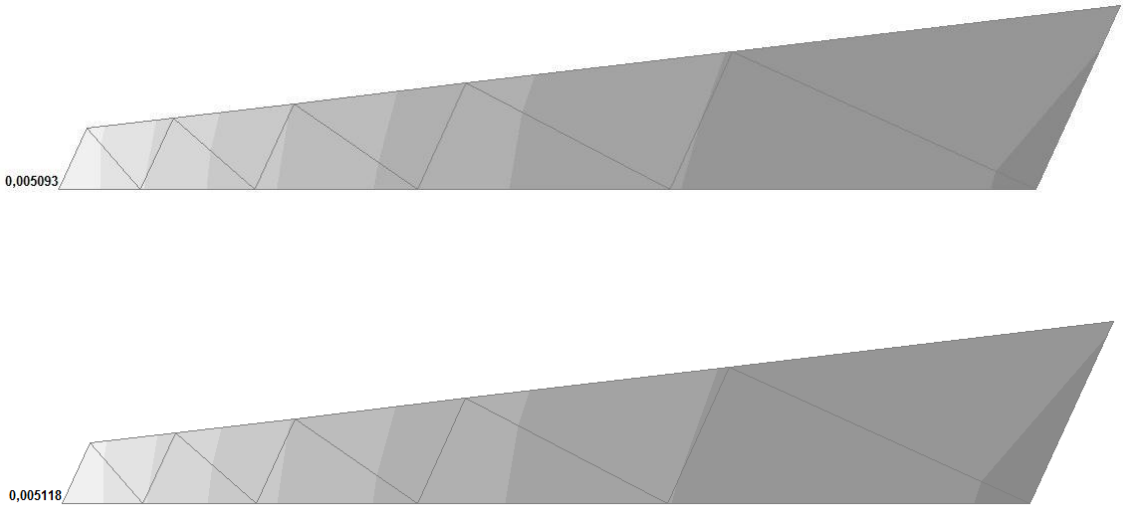
Результаты решения в SCAD

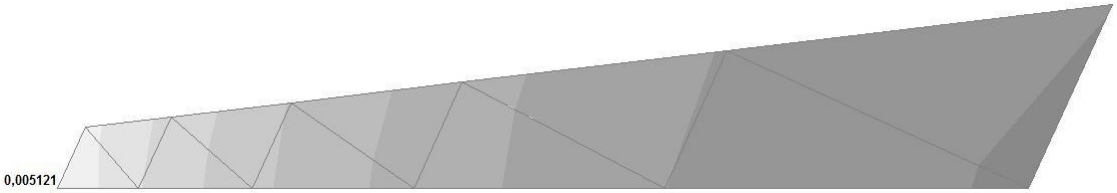


Модель 1. Расчетная схема

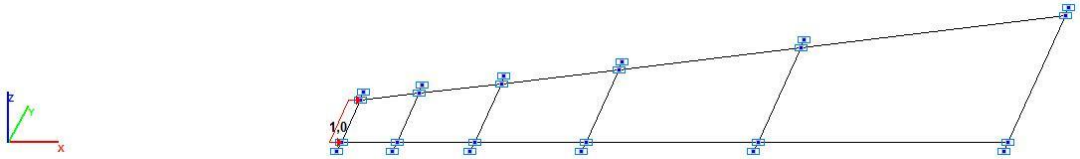


Модель 1. Деформированная схема

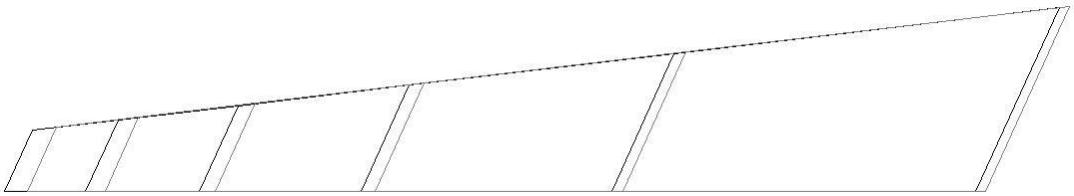




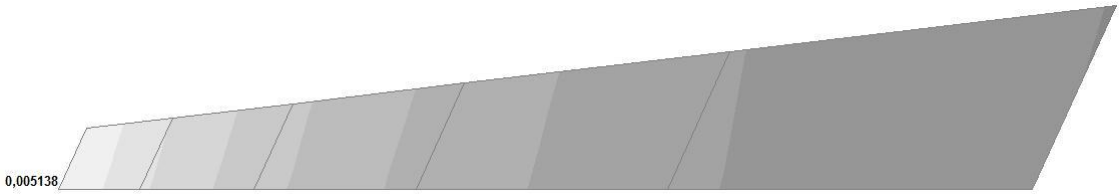
Модель 1. Значения перемещений по направлению оси X общей системы координат (м) для материалов толстостенного цилиндра с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

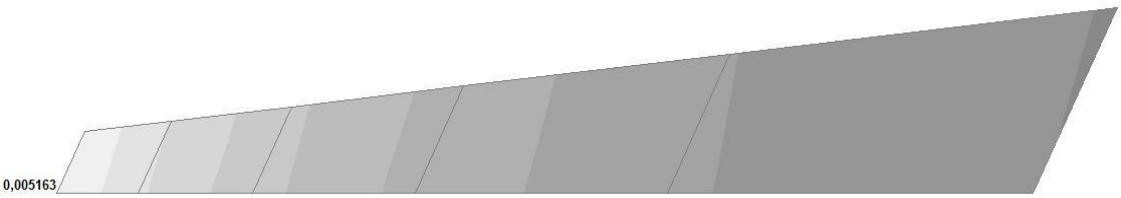


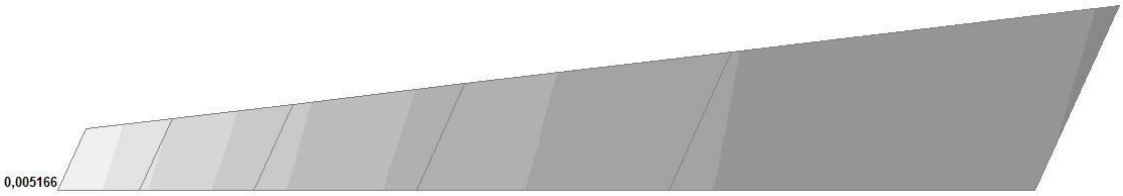
Модель 2. Расчетная схема



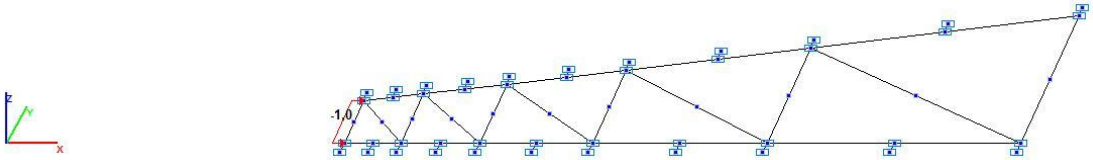
Модель 2. Деформированная схема



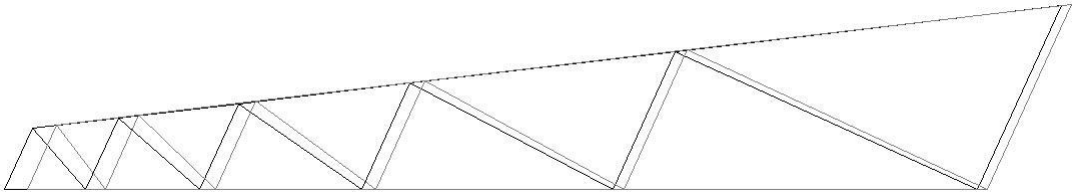




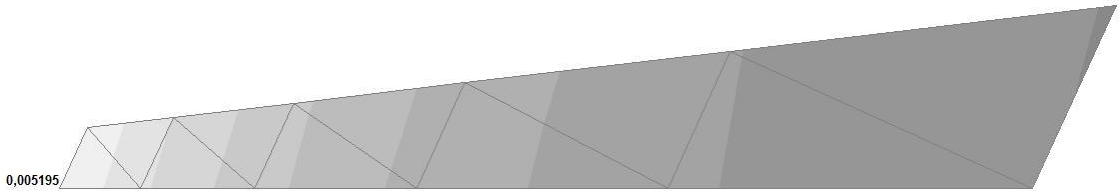
Модель 2. Значения перемещений по направлению оси X общей системы координат (м) для материалов толстостенного цилиндра с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

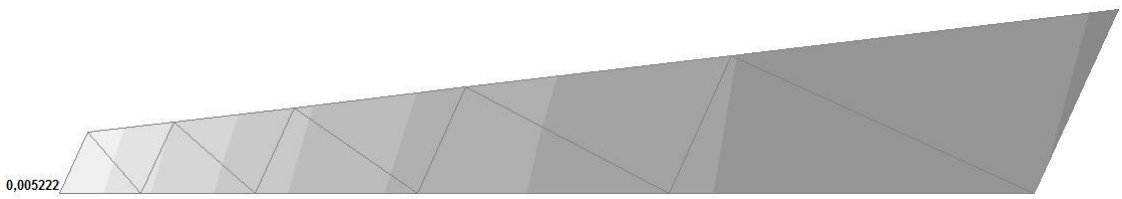


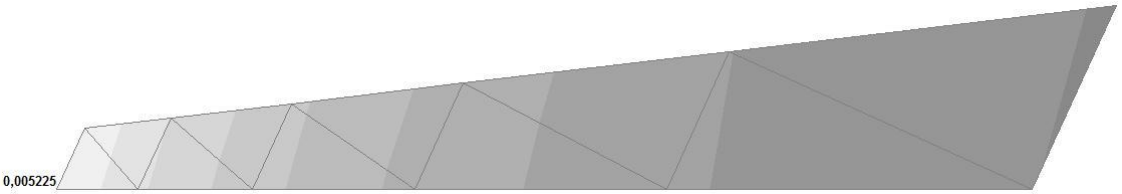
Модель 3. Расчетная схема



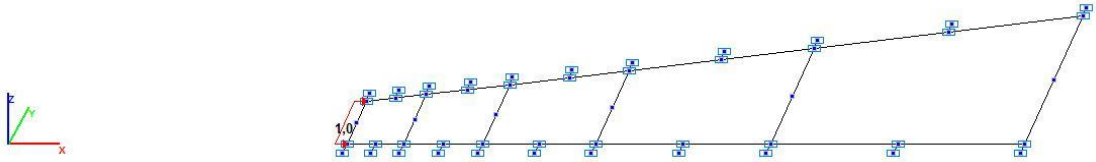
Модель 3. Деформированная схема



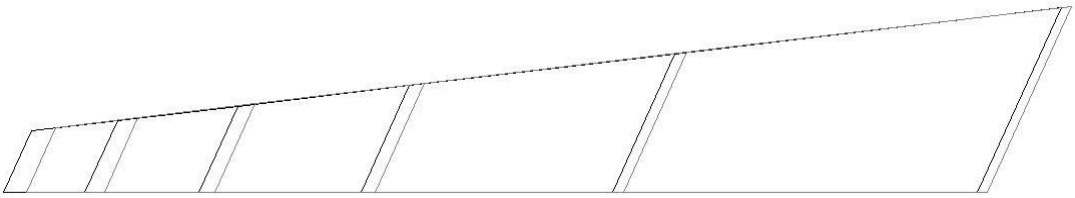




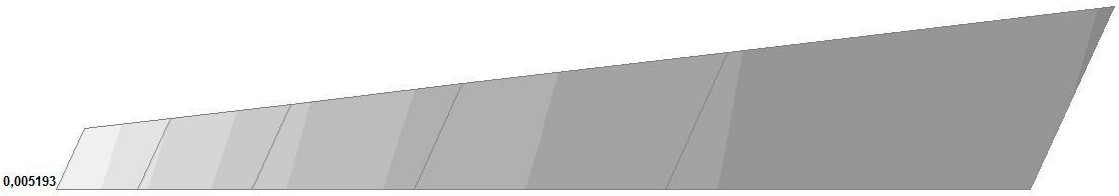
Модель 3. Значения перемещений по направлению оси X общей системы координат (м) для материалов толстостенного цилиндра с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

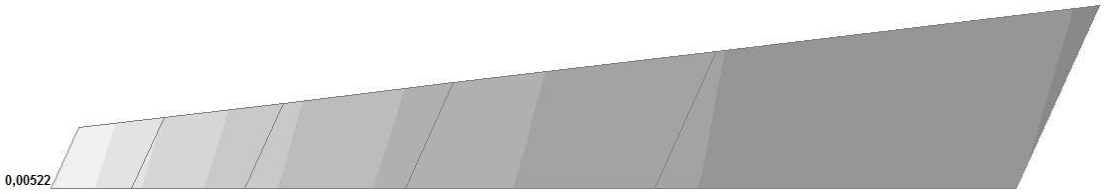


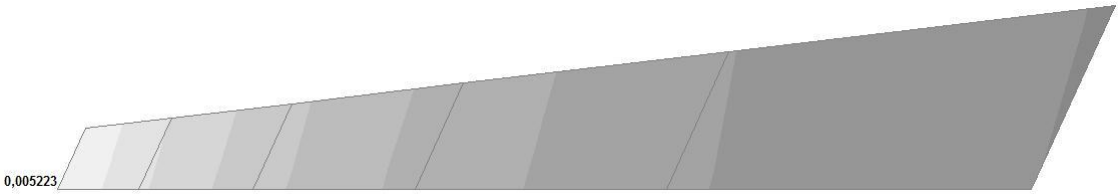
Модель 4. Расчетная схема



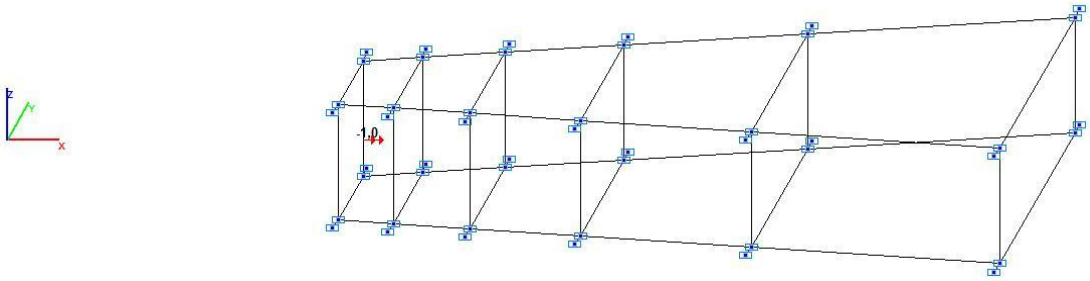
Модель 4. Деформированная схема



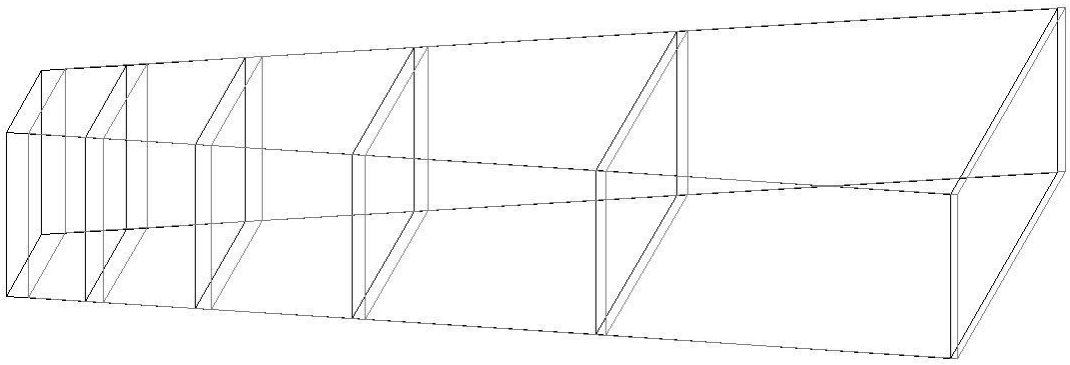




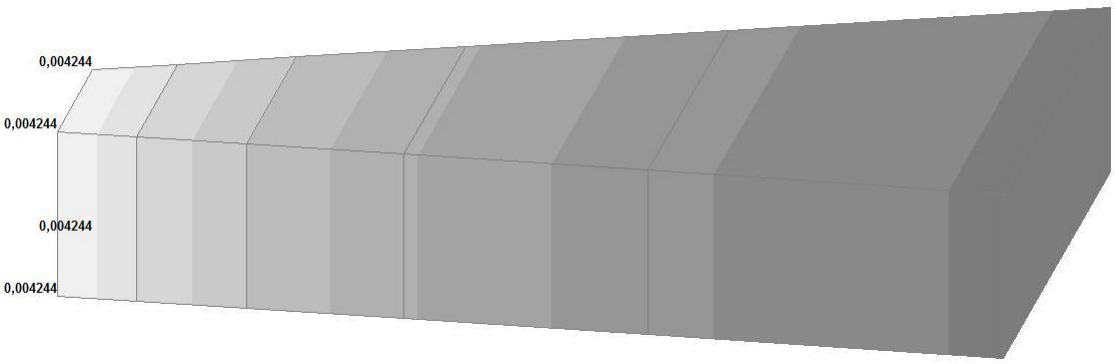
Модель 4. Значения перемещений по направлению оси X общей системы координат (м) для материалов толстостенного цилиндра с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

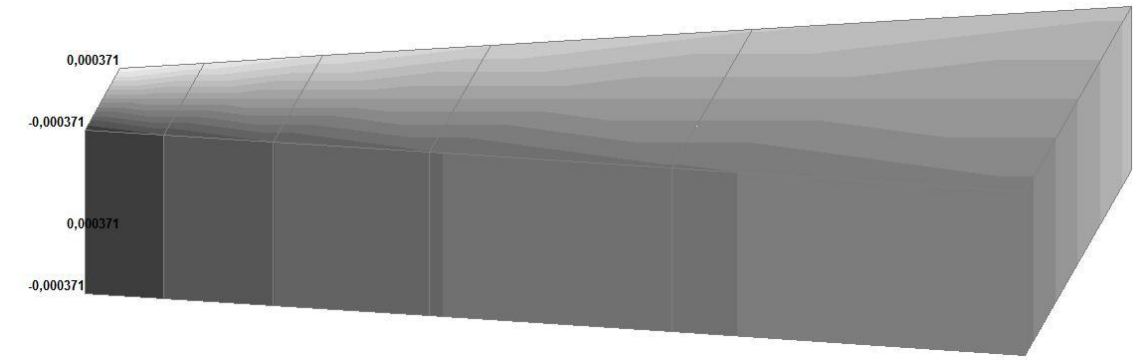


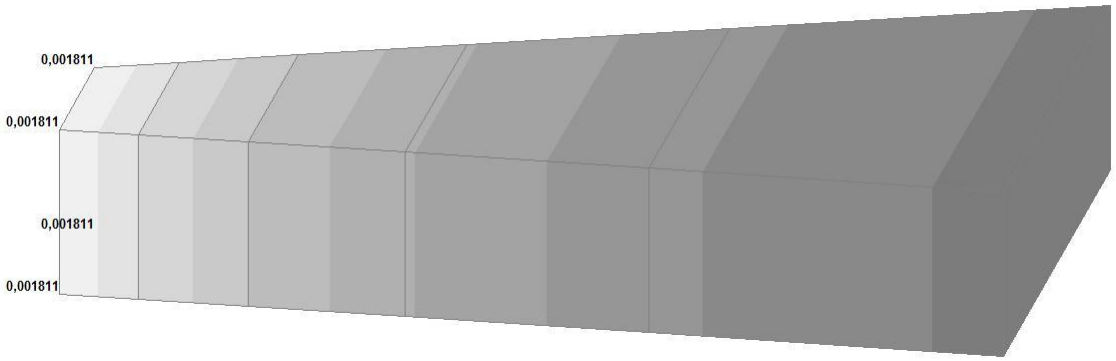
Модель 5. Расчетная схема

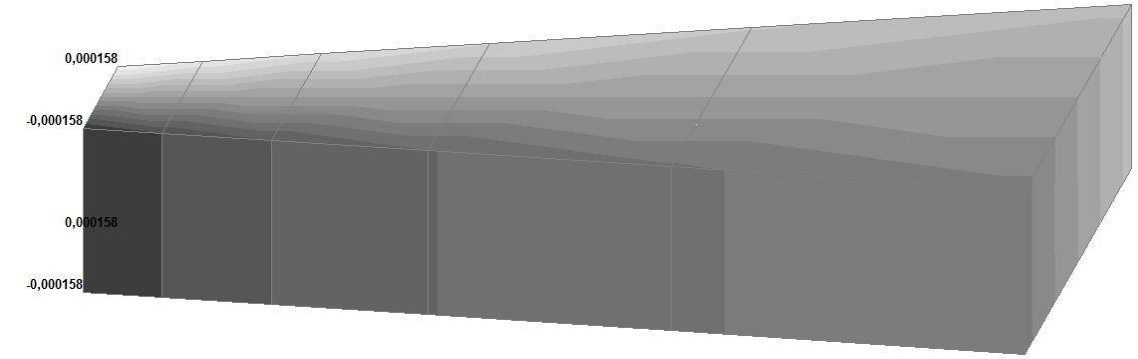


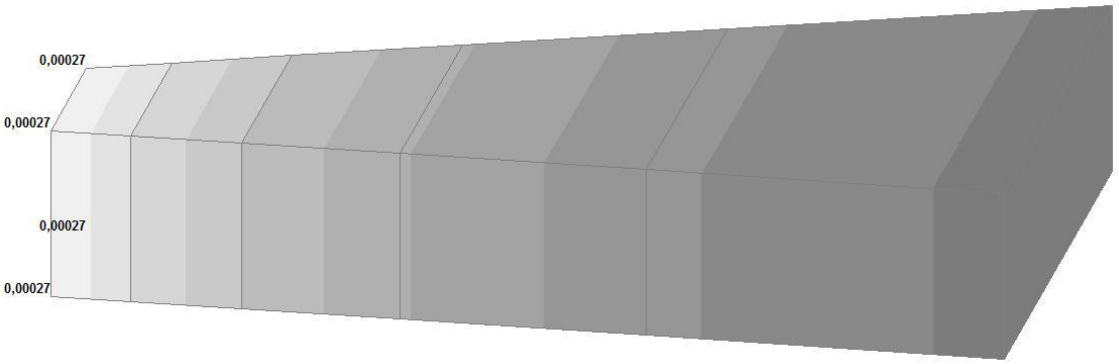
Модель 5. Деформированная схема

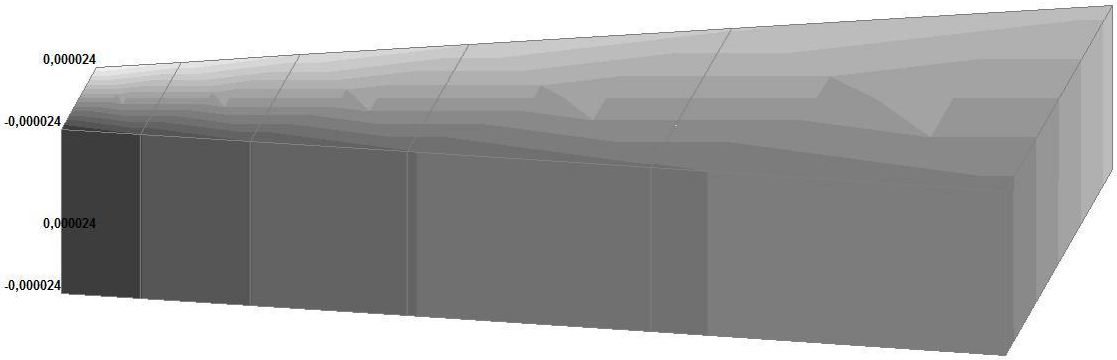



0,000371
-0,000371
0,000371
-0,000371

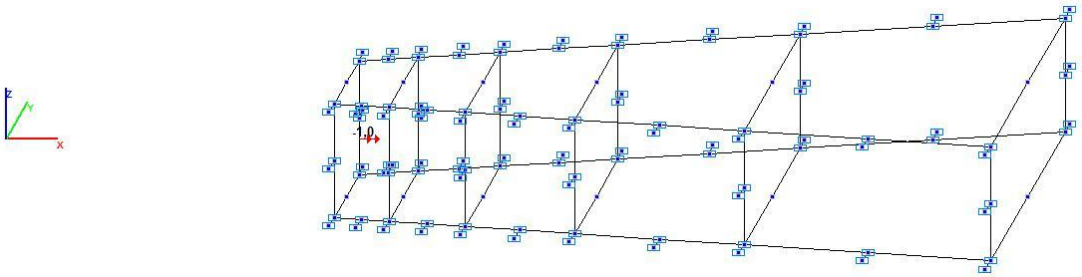

0,001811
0,001811
0,001811
0,001811


0,000158
-0,000158
0,000158
-0,000158

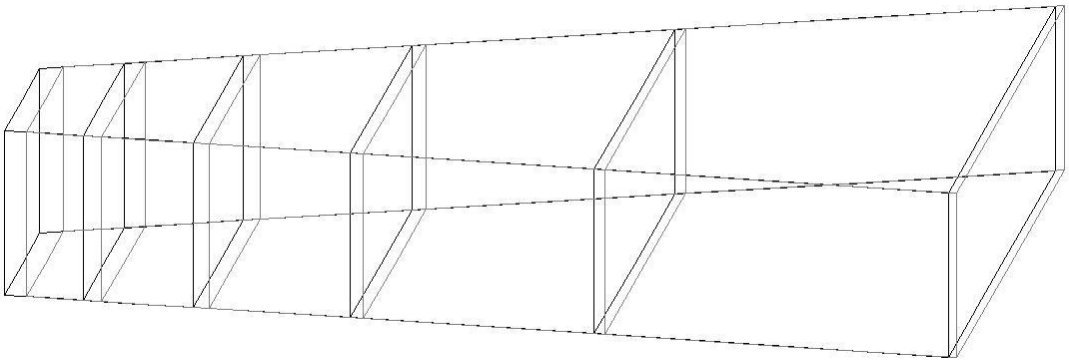

0,00027
0,00027
0,00027
0,00027



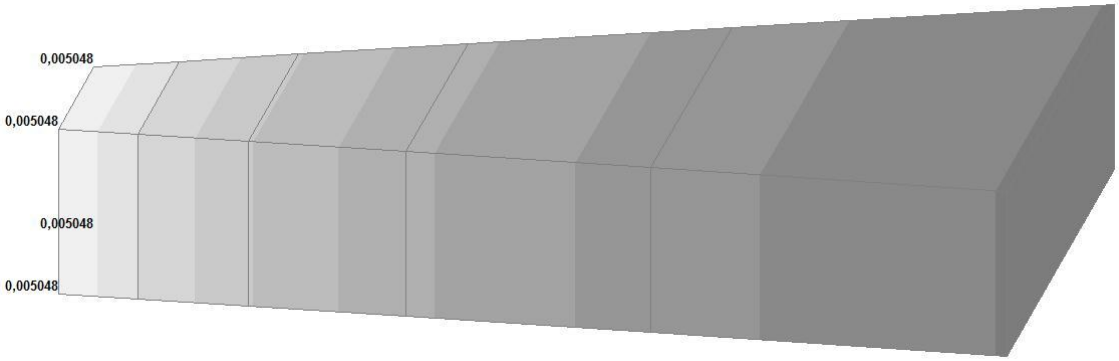
Модель 5. Значения перемещений по направлению осей X и Y общей системы координат (м, м) для материалов толстостенного цилиндра с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

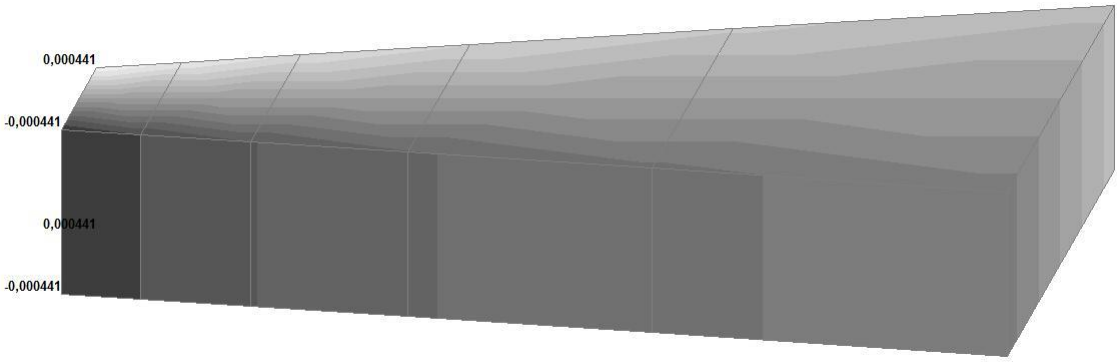


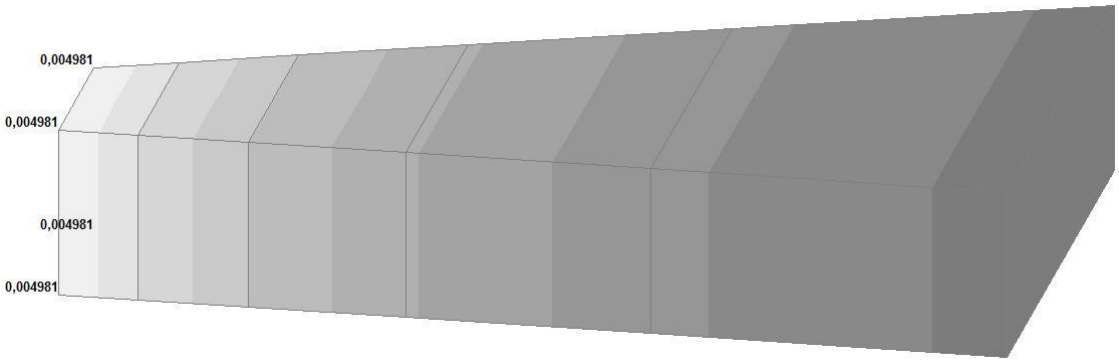
Модель 6. Расчетная схема

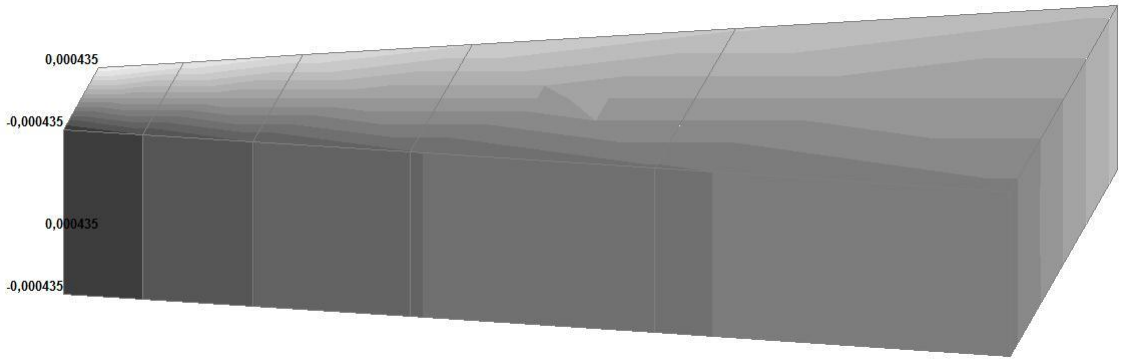


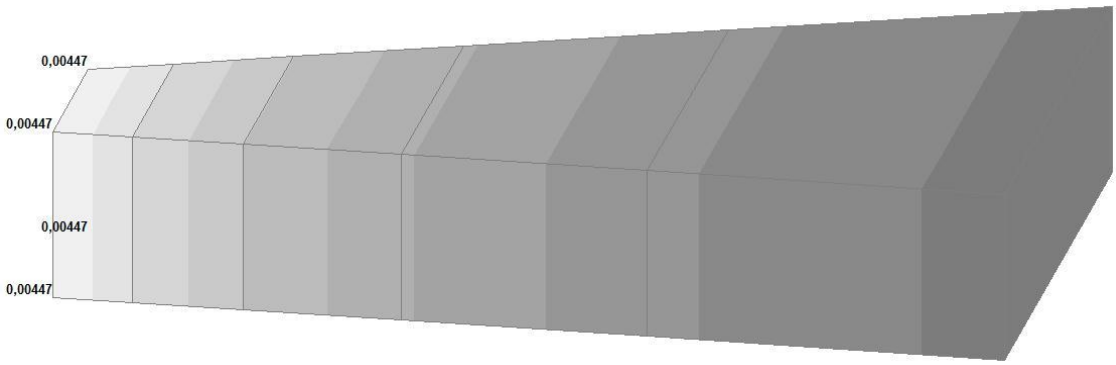
Модель 6. Деформированная схема

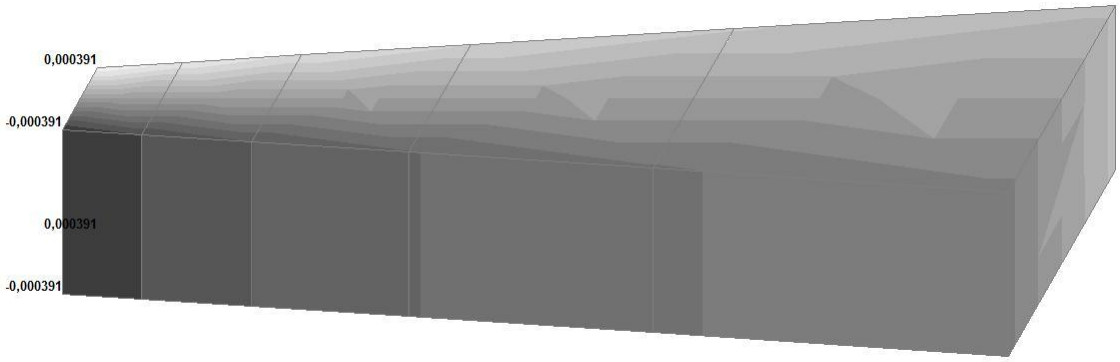



0,000441
-0,000441
0,000441
-0,000441


0,004981
0,004981
0,004981
0,004981


0,000435
-0,000435
0,000435
-0,000435


0,00447
0,00447
0,00447
0,00447



Модель 6. Значения перемещений по направлению осей X и Y общей системы координат (м, м) для материалов толстостенного цилиндра с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

***Сравнение решений*:**

Радиальные перемещения внутренней поверхности толстостенного цилиндра u (м) для материалов с коэффициентами Пуассона 0.49; 0.499; 0.4999

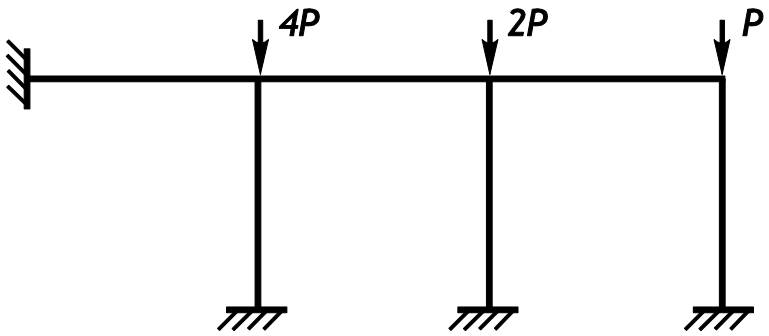
Модель	Коэффициент Пуассона	Теория	SCAD	Отклонение, %
1 (Тип элемента 42)	0.49	0.005040	0.005093	1.05
	0.499	0.005060	0.005118	1.15
	0.4999	0.005062	0.005121	1.17
2 (Тип элемента 44)	0.49	0.005040	0.005138	1.94
	0.499	0.005060	0.005163	2.04
	0.4999	0.005062	0.005166	2.05
3 (Тип элемента 45)	0.49	0.005040	0.005195	3.08
	0.499	0.005060	0.005222	3.20
	0.4999	0.005062	0.005225	3.22
4 (Тип элемента 50)	0.49	0.005040	0.005193	3.04
	0.499	0.005060	0.005222	3.20
	0.4999	0.005062	0.005223	3.18
5 (Тип элемента 36)	0.49	0.005040	$\sqrt{(0.004244^2 + 0.000371^2)} = 0.004260$	15.48
	0.499	0.005060	$\sqrt{(0.001811^2 + 0.000158^2)} = 0.001818$	64.07
	0.4999	0.005062	$\sqrt{(0.000270^2 + 0.000024^2)} = 0.000271$	94.65
6 (Тип элемента 37)	0.49	0.005040	$\sqrt{(0.005048^2 + 0.000441^2)} = 0.005067$	0.54
	0.499	0.005060	$\sqrt{(0.004981^2 + 0.000435^2)} = 0.005000$	1.19
	0.4999	0.005062	$\sqrt{(0.004470^2 + 0.000391^2)} = 0.004487$	11.36

Замечания: При аналитическом решении радиальные перемещения внутренней поверхности почти несжимаемого толстостенного цилиндра в условиях плоской деформации u от действия равномерно распределенного внутреннего давления определяются по следующим формулам:

$$u = \frac{(1+\nu)\cdot p\cdot R_i^{\,2}}{E\cdot\left(R_e^{\,2}-R_i^{\,2}\right)}\cdot\left[\frac{R_e^{\,2}}{R_i}+(1-2\cdot\nu)\cdot R_i\right].$$

Энергетический анализ

Рама под действием различных вертикальных сил



Цель: Проверка правильности определения элементов с принужденным или стесненным характером деформирования при потере устойчивости.

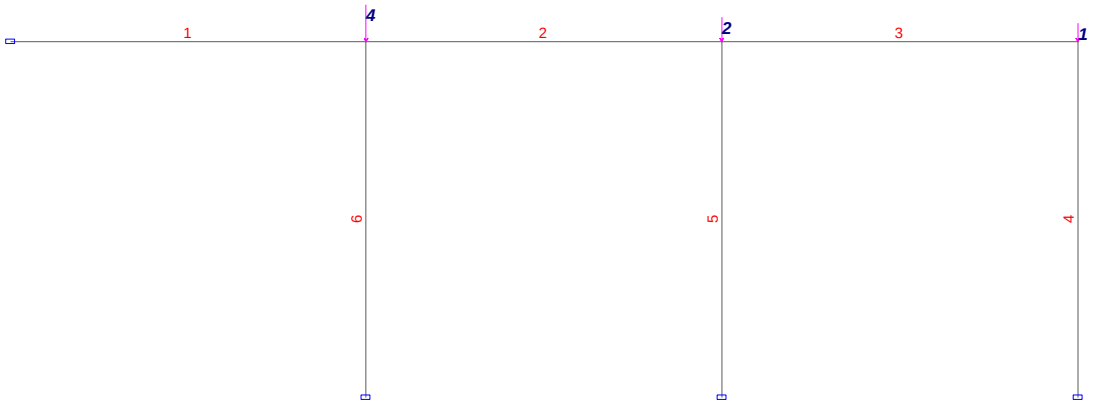
Имя файла с исходными данными: **Energy94A.SPR**

Формулировка задачи: Плоская рама нагружается различными вертикальными узловыми силами. Определить для первой формы потери устойчивости элементы, имеющие положительную и отрицательную энергию.

Ссылки: Перельмутер А.В., Сливкер В.И., *Расчетные модели сооружений и возможности их анализа*. — М., Изд-во ДМК-Пресс, 2007, § 9.4.

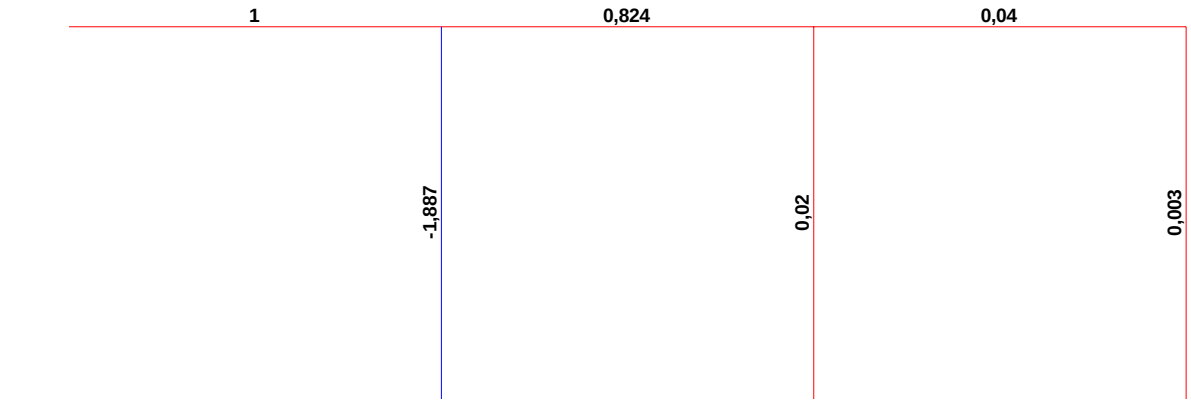
Исходные данные:
$E = 2.1 \cdot 10^7$ Т/м^2 - модуль упругости,
$P = 1$ Т - значение сосредоточенной силы.
Сечения стержней - двутавры № 40 (изгиб в плоскости рамы происходит относительно оси с минимальным моментом $I = 667$ см^4, $A = 72{,}6$ см^2, $i_y = 3{,}03$ см, $W_y = 86{,}1$ см^3).

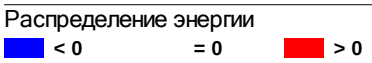
Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 6 стержневых элементов типа 2, 7 узлов.



Расчетная схема (с номерами элементов и нагрузками)

Результаты решения в SCAD:



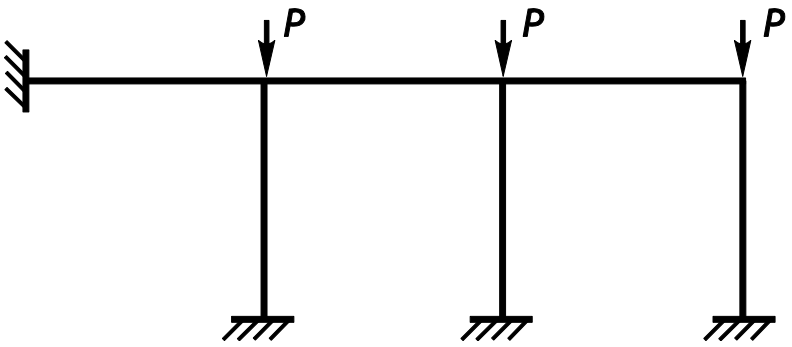


Значения энергии

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD
Номера конечных элементов, имеющих положительную энергию	1÷5	1÷5
Номера конечных элементов, имеющих отрицательную энергию	6	6

Рама под действием вертикальных сил



Цель: Проверка правильности определения элементов с принужденным или стесненным характером деформирования при потере устойчивости.

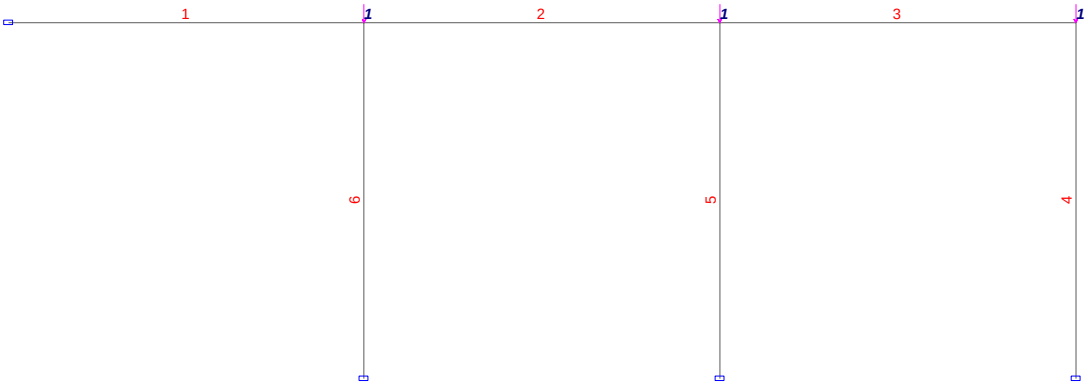
Имя файла с исходными данными: **Energy94B.SPR**

Формулировка задачи: Плоская рама нагружается вертикальными узловыми силами. Определить для первой формы потери устойчивости элементы, имеющие положительную и отрицательную энергию.

Ссылки: Перельмутер А.В., Сливкер В.И., *Расчетные модели сооружений и возможности их анализа*. — М., Изд-во ДМК-Пресс, 2007, § 9.4.

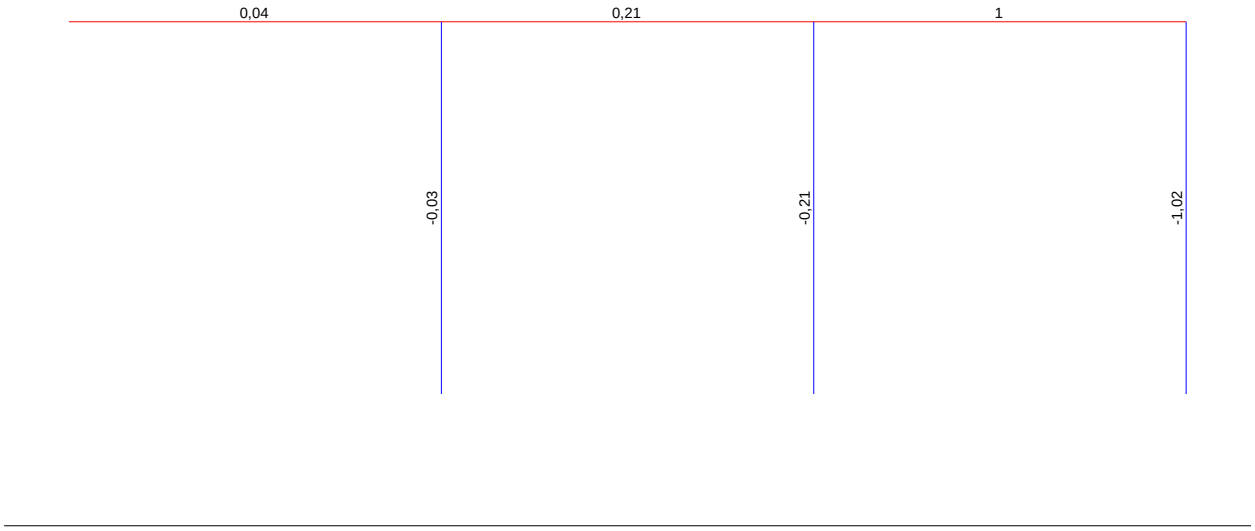
Исходные данные:
$E = 2.1 \cdot 10^7$ Т/м^2 - модуль упругости,
$P = 1$ Т - значение сосредоточенной силы.
Сечения стержней - двутавры № 40 (изгиб в плоскости рамы происходит относительно оси с минимальным моментом $I = 667$ см^4, $A = 72{,}6$ см^2, $i_y = 3{,}03$ см, $W_y = 86{,}1$ см^3).

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 6 стержневых элементов типа 2, 7 узлов.



Расчетная схема (с номерами элементов и нагрузками)

Результаты решения в SCAD:

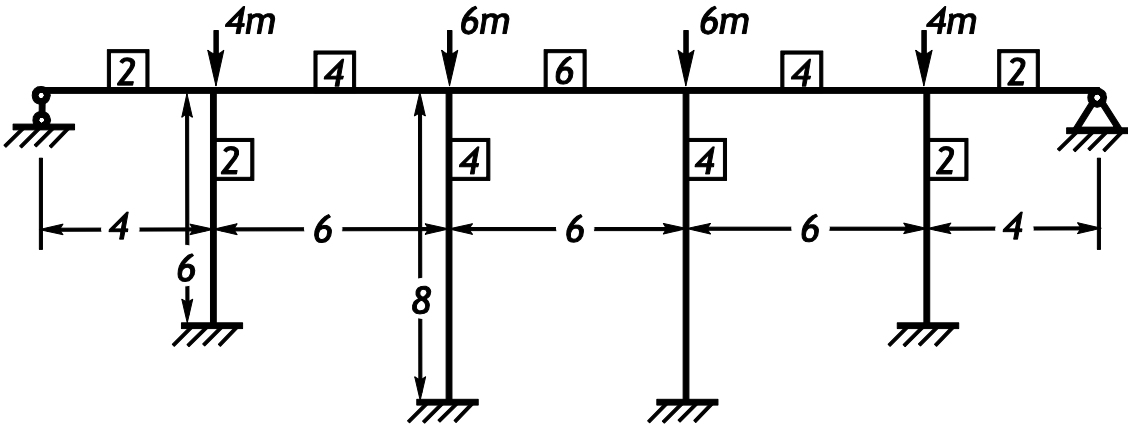


Значения энергии

Сравнение решений:

Параметр	**Теория**	**SCAD**
Номера конечных элементов, имеющих положительную энергию	1÷3	1÷3
Номера конечных элементов, имеющих отрицательную энергию	4÷6	4÷6

Симметричная рама под действием вертикальных сил — выявление "слабых" элементов



Цель: Проверка правильности определения элементов с принужденным или стесненным характером деформирования при потере устойчивости.

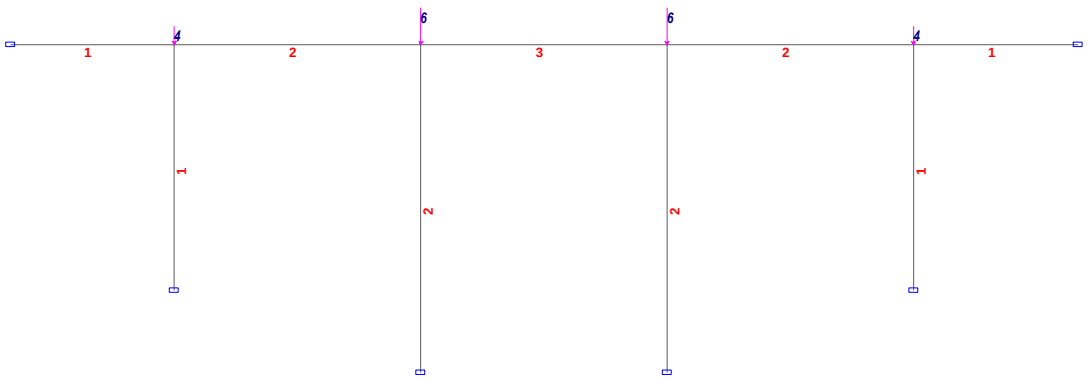
Имя файла с исходными данными: **Energy.SPR**

Формулировка задачи: Плоская рама нагружается вертикальными узловыми силами. Определить для первой формы потери устойчивости элементы, наиболее "слабые" с точки зрения потери устойчивости системы в целом.

Ссылки: Перельмутер А.В., Сливкер В.И., *Расчетные модели сооружений и возможности их анализа*. — М., Изд-во ДМК-Пресс, 2007, § 9.4.

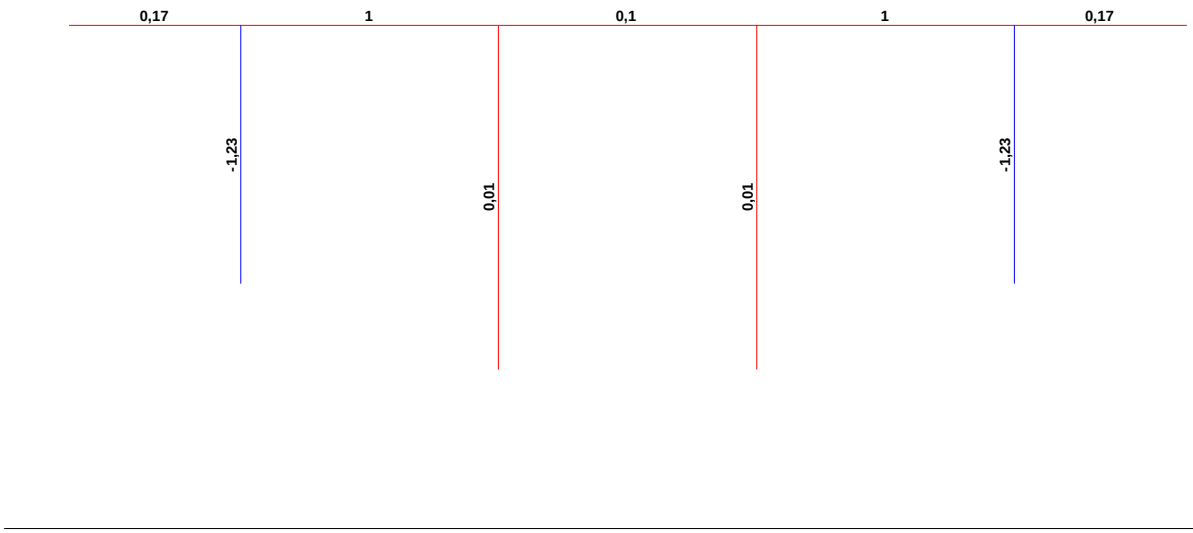
Исходные данные:
P_1 = 4 Т, P_2 = 6 Т - значение сосредоточенных сил.
Сечения стержней имеют следующие соотношения погонных жесткостей 2:4:6.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, 9 стержневых элементов типа 2, 10 узлов.



Расчетная схема (с номерами типов жесткости и нагрузками)

Результаты решения в SCAD:



Значения энергии

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD
Элементы, имеющих отрицательную энергию	крайние колонны	крайние колонны

М о н т а ж

Статический расчет напряженно-деформированного состояния здания с учетом генетической нелинейности

Цель: Сравнение результатов расчетов, выполненных программами SCAD и ANSYS, напряженно-деформированного состояния многоэтажного здания с учетом генетической нелинейности.

Имя файла с исходными данными: **Test-01.MPR**

Формулировка задачи: Расчетная модель – 11-ти этажный прямоугольный в плане фрагмент здания — пространственная схема, состоящая из колонн, стен, пилонов, плит перекрытий на жестком основании (закрепление узлов по всем линейным и угловым степеням свободы). Модель загружена равномерной распределенной нагрузкой (1,5 т/м^2) по всем плитам перекрытия.

Ссылки: О.В. Кабанцев, *Верификация расчетной технологии «МОНТАЖ» программного комплекса «SCAD»,* International Journal for Computational Civil and Structural Engineering , 2011, **7** (3), 103-109.

Исходные данные:
Физические характеристики - материал элементов расчетной модели бетон класса по прочности на сжатие В25; модуль упругости E = 3 10^6 т/м^2 ; коэффициент Пуассона ν = 0,2.
Геометрические характеристики:
Высота этажа – 3 м,
Шаг колонн – 7 м по X и 6 м по Y,
Сечение колонн –50×50 см.
Толщина перекрытий – 20 см
Толщина стен и пилонов – 40 см, ширина пилонов – 100 см.
Граничные условия: защемление колонн, пилонов и стен (жёсткая заделка) по плоскости z = 0 м
Нагрузки:
1) Вертикальное давление на перекрытия q_1 = 1,5 т/м^2 – прикладывается ко вновь возводимым фрагментам-этажам;
2) Вертикальное давление на перекрытия q_2 = 1 т/м^2 – прикладывается после возведения всего здания.

Конечно-элементная модель:

ANSYS

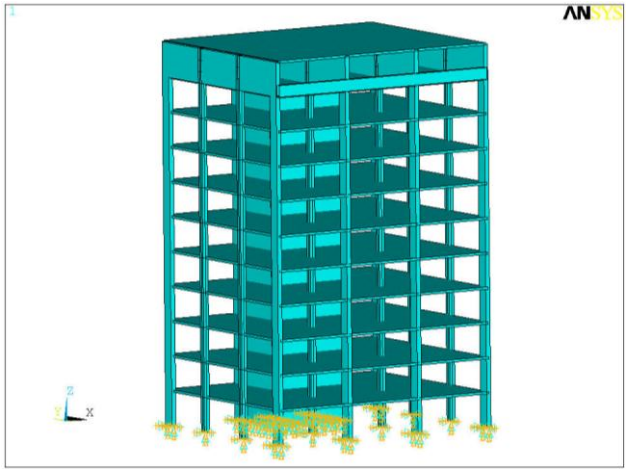
Плиты, стены и пилоны моделируются оболочечными конечными элементами типа SHELL63, колонны – балочными конечными элементами типа BEAM44.
Стадия 1. Обнуление жёсткости всех КЭ (функция «смерть элементов»), кроме 1-го этажа, и закрепление всех узлов, не принадлежащих элементам 1-го этажа по всем степеням свободы, с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 1 этажа и последующим расчётом НДС;
Стадия 2. Возврат прежней жёсткости КЭ (функция «рождение элементов») 2-го этажа и удаление закреплений узлов, принадлежащих элементам 2-го этажа по всем степеням свободы, с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 2 этажа и последующим расчётом НДС;
…….
Стадия 11. Возврат прежней жёсткости КЭ (функция «рождение элементов») 11-го этажа и удаление закреплений узлов, принадлежащих элементам 11-го этажа по всем степеням свободы, с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 11 этажа (покрытие) и последующим расчётом НДС;
Стадия 12. Приложение нагрузки q_2 на все перекрытия здания с последующим расчётом НДС.

Закрепление узлов, не принадлежащих «оживлённым» элементам, производится для «фиксации» элементов конструкции здания на проектных отметках с целью учёта реального процесса возведения здания (выведение перекрытий на проектные отметки).

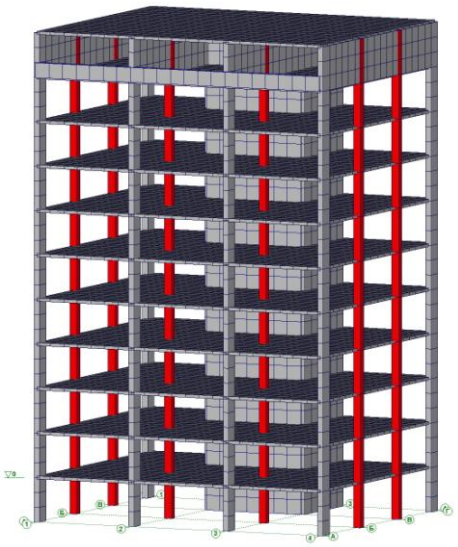
SCAD

Плиты, стены и пилоны моделируются оболочечными конечными элементами типа 44, колонны – стержневыми элементами общего типа 5.
Размерность полной модели составляет: 5608 узлов и 5456 конечных элементов.

Моделирование процесса возведения здания состоит из следующих стадий-этапов:
Стадия 1. Включение в состав действующих на этапе №1 набора элементов в уровне 1-го этажа с приложением нагрузки q_1 на перекрытие 1 этажа и последующим расчётом НДС;
Стадия 2. Включение в состав действующих на этапе №2 набора элементов в уровне 1-2го этажей с приложением нагрузки q_1 на перекрытия, входящие во 2-й этап, и последующим расчётом НДС;
……
Стадия 11. Включение в состав действующих на этапе №11 набора элементов в уровне 1-11-го этажей с приложением нагрузки q_1 на перекрытия, входящие в 11-й этап, и последующим расчётом НДС;
Стадия 12. Приложение нагрузки q_2 на все перекрытия здания с последующим расчётом НДС.

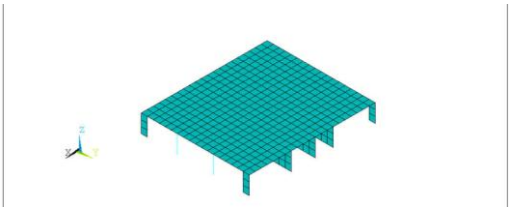
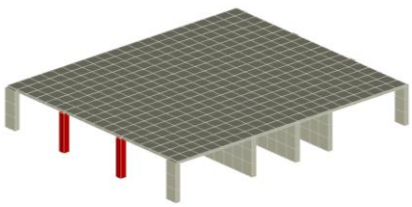
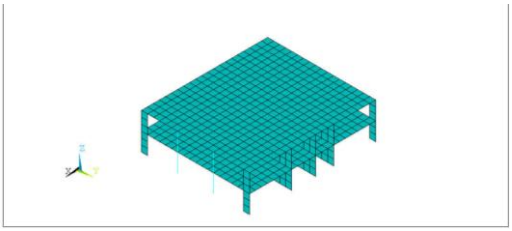
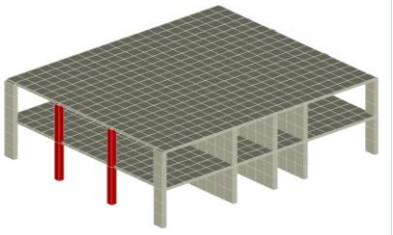


Общий вид расчетной модели ANSYS.

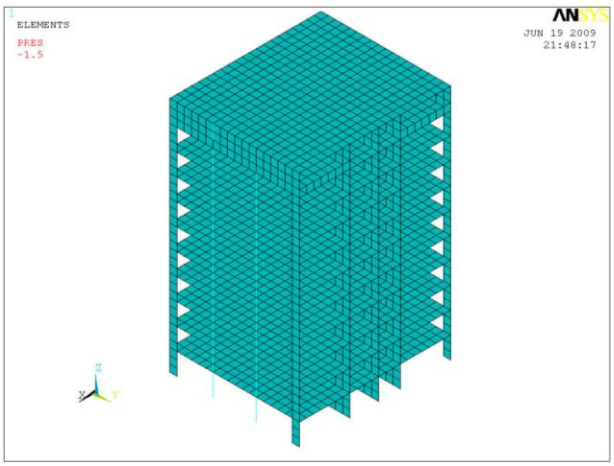


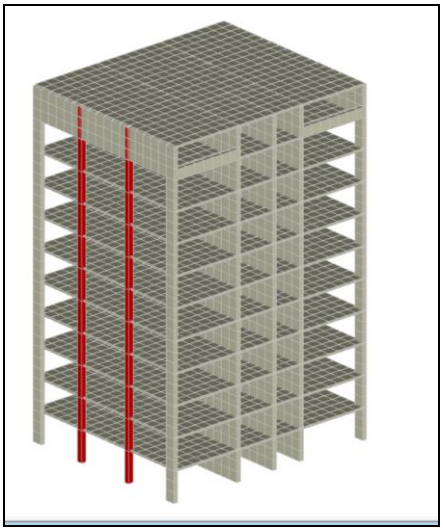
Общий вид расчетной модели SCAD.

Схемы расчетных моделей ANSYS и SCAD для различных стадий расчета

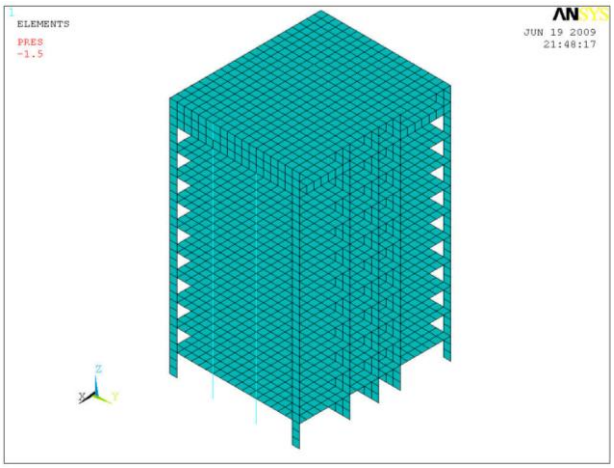
№ стадии	**ANSYS**	**SCAD**
1		
2		

11

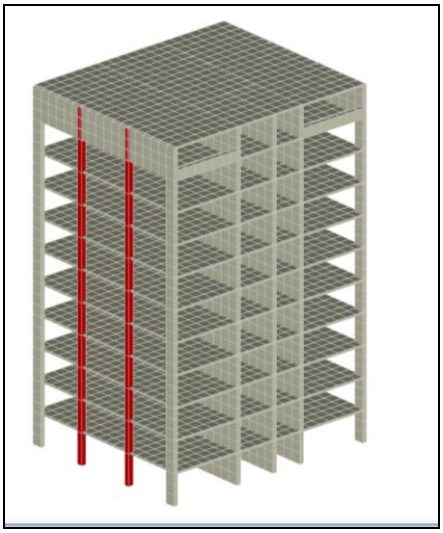




12



Добавлены нагрузки q_2.



Добавлены нагрузки q_2.

Сравнение решений:

Параметр	Учёт 12-и стадий возведения		Отклонения, %
	ANSYS	**SCAD**	
Максимальное вертикальное перемещение, мм	-24,8	-24,19	2,46
Продольное усилие в колонне (1 этаж), т	-870,6	-865,1 (КЭ 386)	0,63
Продольное усилие в колонне (10 этаж), т	-3,2	-2,99 (КЭ 4679)	6,56

Определение напряженно-деформированного состояния с учетом генетической нелинейности (режим «Монтаж»)

Цель: Сравнение результатов расчетов, выполненных программой SCAD и аналитического решения напряженно-деформированного стержневой конструкции с учетом генетической нелинейности.

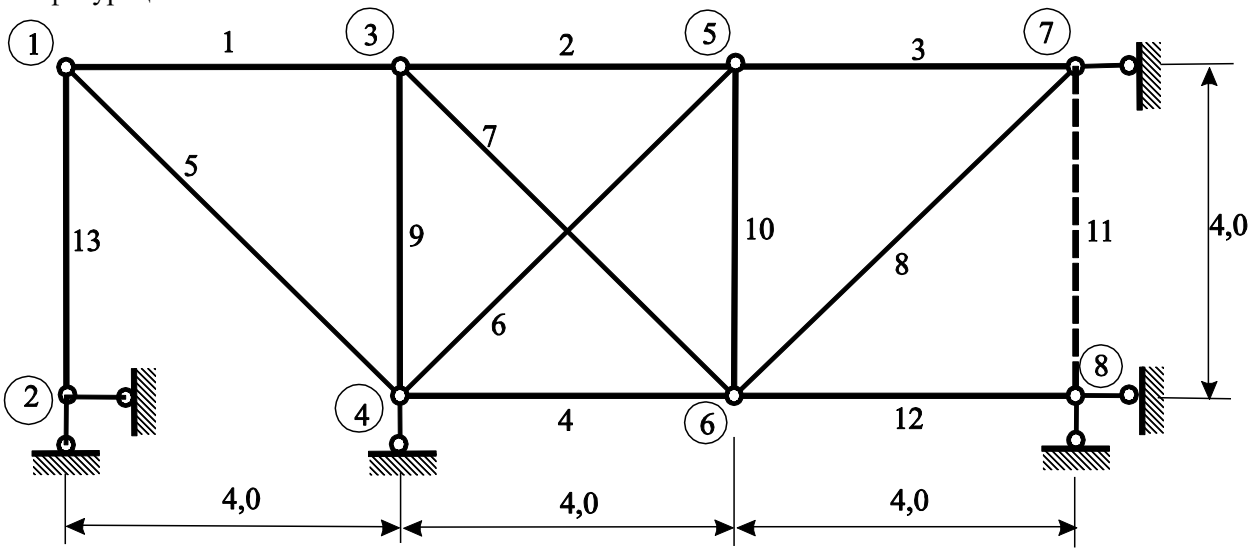
Имя файла с исходными данными: **Truss.MPR**

Формулировка задачи:

Ссылки: А.В. Перельмутер, *Управление поведением несущих конструкций* (издание 2-е дополненное и исправленное) , Москва: Изд-во АСВ , 2011, § 5.2.

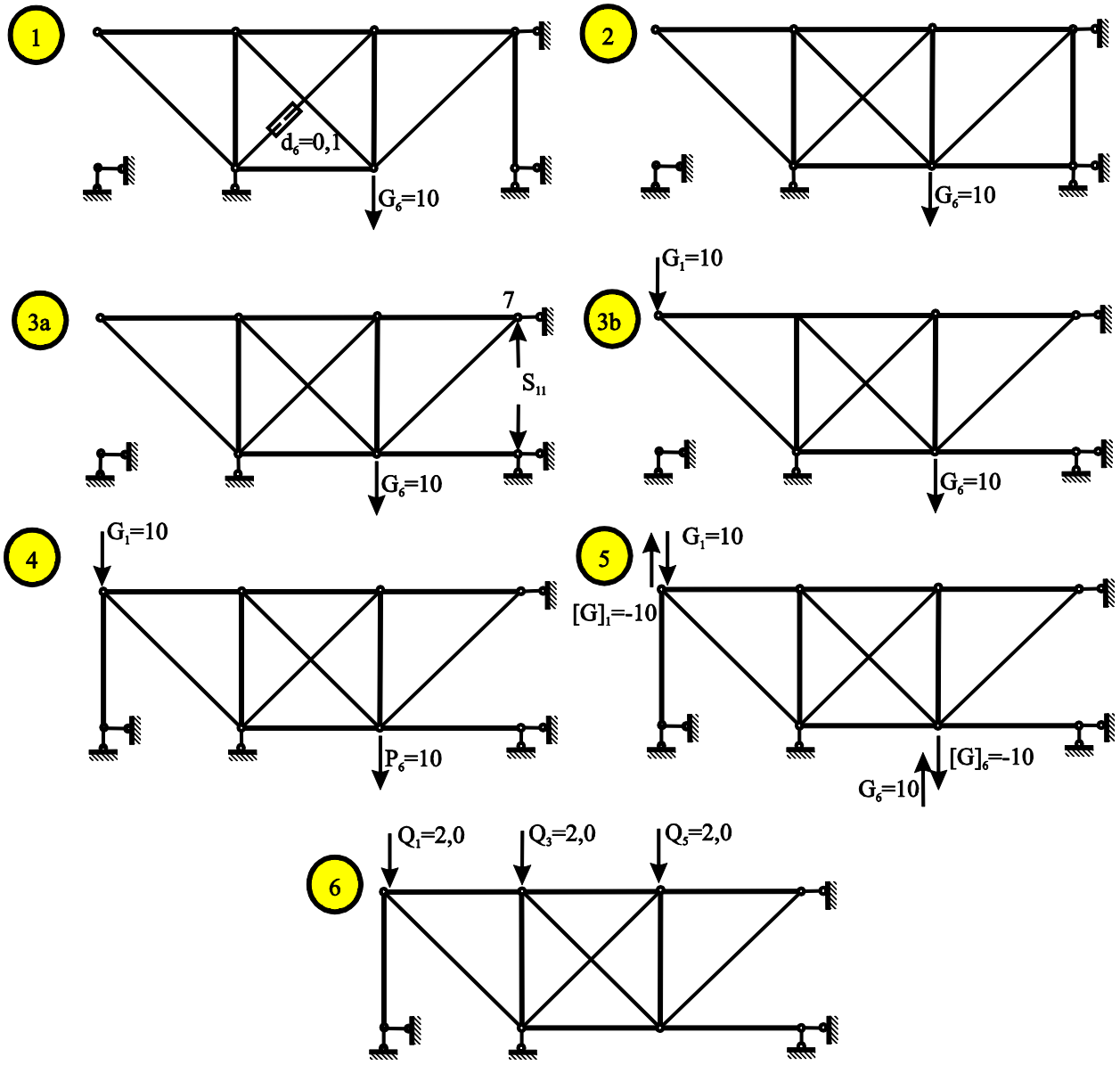
Исходные данные:

Расчету подлежит конструкция, схема которой в окончательно собранном виде представлена на рисунке (линейные размеры в метрах), а некоторые дополнительные сведения приведены в таблице. Элемент 11, показанный пунктиром на этом рисунке устанавливался временно и в окончательную конфигурацию системы не вошел.



Номера стержней	Жесткость EA, т
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10
6	2
7	2
8	4
9	5
10	5
11	25
12	10
13	10

Последовательность операций, с помощью которых достигается состояние преднапряжения, схематически изображена на рисунке ниже.



Конечно-элементная модель:

Конструкция моделируется стержневыми элементами общего типа 1.

Размерность полной модели составляет: 8 узлов и 13 конечных элементов.

Моделирование процесса возведения здания состоит из следующих стадий-этапов, описание которых дано в следующей таблице:

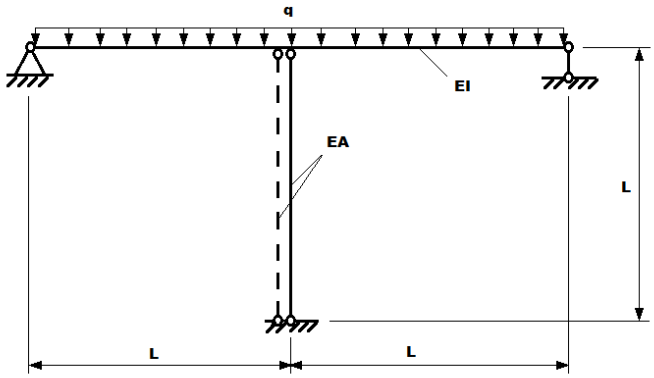
Этап	Описание операций
1	Принудительное укорочение стержня 6 (дислокация d_6= 0,001 м) и подвеска балластного груза G_6=10 т в узле 6.
2	Присоединение к системе стрежня 12
3	Удаление стержня 11, осуществляемое программой в два этапа: замена влияния стержня усилиями S_{11}, которые он передает на остальную систему (см. 3a), и приложение к системе «гасящей» нагрузки − S_{11} (см. 3b). Установка балластного груза G_1=10 т в узле 1.
4	Присоединение к системе стрежня 13
Рабочий	Удаление балластных грузов G_1 и G_6 и нагружение системы полезной нагрузкой Q_1=Q_3=Q_5=2.

Сравнение решений:

Параметр	Результаты расчета		Отклонения, %
	Теория	**SCAD**	
Стадия 1:			
Вертикальное перемещение узла 6, см	-17,078	-17,042	0,21
Усилие в элементе 2, т	-2,510	-2,500	0,40
Стадия 2:			
Вертикальное перемещение узла 6, см	-17,078	-17,042	0,21
Усилие в элементе 2, т	-2,510	-2,500	0,40
Стадия 3:			
Вертикальное перемещение узла 6, см	-28,220	-28,185	0,12
Усилие в элементе 2, т	4,990	5,000	-0,20
Стадия 4:			
Вертикальное перемещение узла 6, см	-28,220	-28,185	0,12
Усилие в элементе 2, т	4,990	5,000	-0,20
Рабочая стадия			
Вертикальное перемещение узла 6, см	1,257	1,293	0,21
Усилие в элементе 2, т	5,559	5,61	0,91

Замечание: В источнике содержатся арифметические ошибки. Сравнение решений производилось на основании исправленных вычислений, которые сообщил автор.

Перекрепление стойки двухпролетной одноэтажной рамы под действующей постоянной нагрузкой



Цель: Определение внутренних усилий в элементах двухпролетной одноэтажной рамы до и после перекрепления стойки под действующей постоянной нагрузкой.

Имя файла с исходными данными: **Rearrange_Frame.MPR**

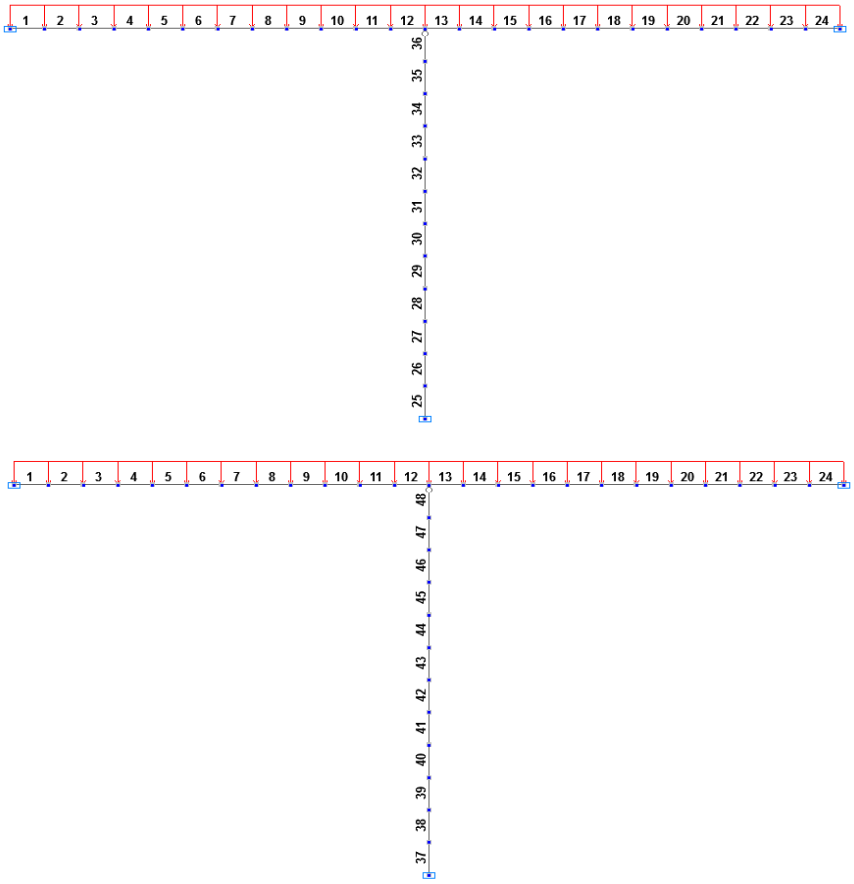
Формулировка задачи: Двухпролетный ригель рамы, шарнирно опертый по торцам и имеющий среднюю опору в виде качающейся стойки, находится под действием постоянной равномерно распределенной нагрузки. В ходе реконструкции производится замена стойки на равную по жесткости в следующей последовательности: устанавливается заменяющая стойка и затем демонтируется исходная стойка. Определить максимальные изгибающие моменты в ригеле рамы M_I, M_{II} и продольные силы в стойках N_I, N_{II} до и после перекрепления.

Исходные данные:

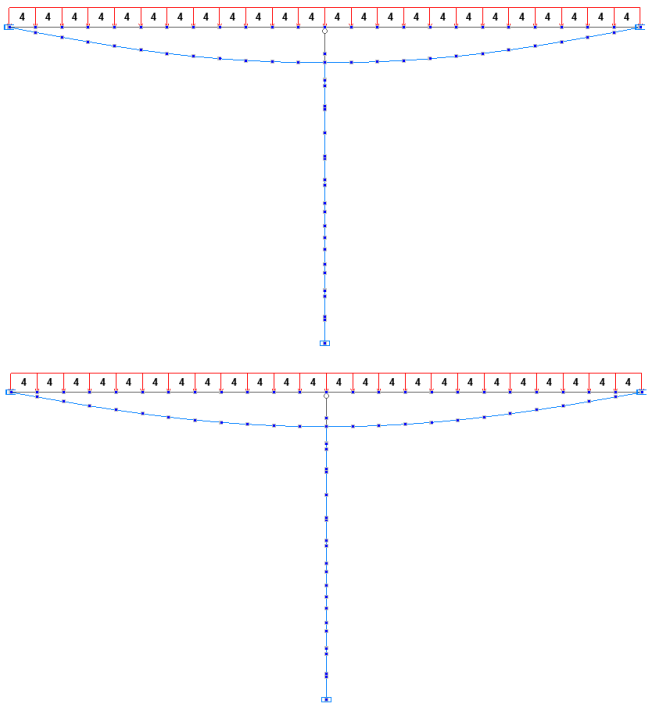
$EF = 2.0 \cdot 10^7$ т	- продольная жесткость поперечного сечения ригеля и стоек;
$EI = 1.2 \cdot 10^8$ т·м^2	- изгибная жесткость поперечного сечения ригеля и стоек;
L = 6.0 м	- длина пролетов ригеля и высота стоек;
q = 4.0 т/м	- равномерно распределенная постоянная вертикальная нагрузка на пролеты ригеля.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – плоская рама, элементы ригеля – 24 стержневых элемента типа 2, элементы стоек – 24 стержневых элемента типа 2. Сетка конечных элементов разбита по продольным осям конструктивных элементов с шагом 0.5 м. Узел левого торца ригеля закреплен по направлениям степеней свободы X, Z. Узел правого торца ригеля закреплен по направлению степени свободы Z. Узлы нижних торцов стоек закреплены по направлениям степеней свободы X, Z. Элементы верхних торцов стоек имеют шарнир по направлению степени свободы UY. Количество узлов в расчетной схеме – 37. На первой стадии монтажа присутствуют элементы ригеля 1 – 24 и исходной стойки 25 – 36. На второй стадии монтажа присутствуют элементы ригеля 1 – 24 и заменяющей стойки 37 – 48. На обеих стадия действует накапливаемое загружение q.

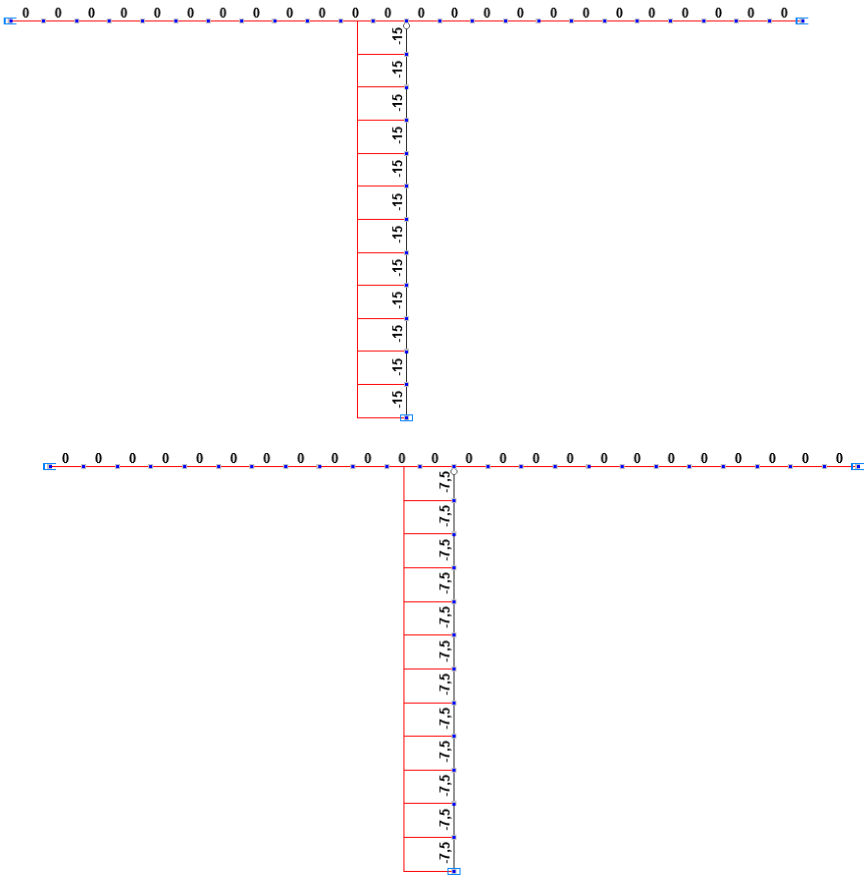
Результаты решения в SCAD



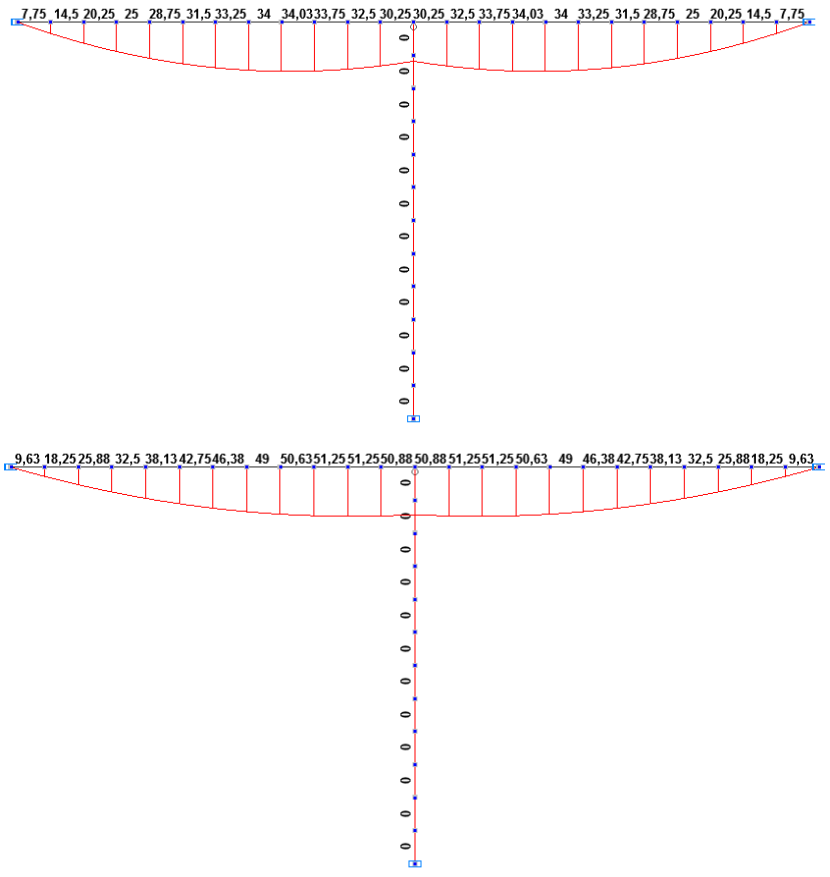
Расчетные схемы на первой и второй стадиях монтажа



Деформированные схемы на первой и второй стадиях монтажа



Эпюры продольных сил N_I, N_{II} на первой и второй стадиях монтажа (т)



Эпюры изгибающих моментов M_I, M_{II} на первой и второй стадиях монтажа (т·м)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Максимальный изгибающий момент в ригеле рамы на первой стадии монтажа M_I, т·м	34.03	34.03	0.00
Продольная сила в стойке рамы на первой стадии монтажа N_I, т	-15.0	-15.0	0.00
Максимальный изгибающий момент в ригеле рамы на второй стадии монтажа M_{II}, т·м	51.26	51.25	0.02
Продольная сила в стойке рамы на второй стадии монтажа N_{II}, т	-7.5	-7.5	0.00

Замечания: При аналитическом решении максимальные изгибающие моменты в ригеле рамы M_I, M_{II} и продольные силы в стойках N_I, N_{II} до и после перекрепления определяются по следующим формулам:

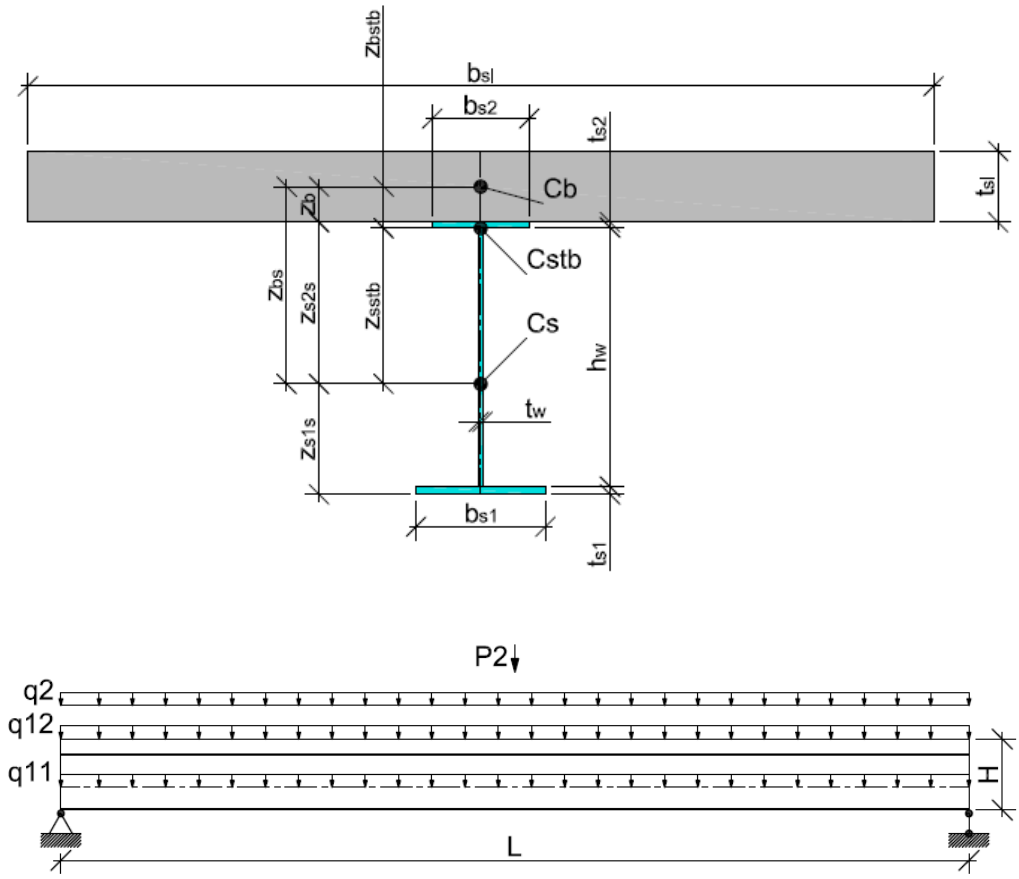
$$M_I = \frac{1}{2}\cdot q\cdot L^2 - \frac{1}{2}\cdot q\cdot L\cdot\frac{\frac{5}{24}\cdot\frac{L^4}{EI}}{\frac{L^3}{6\cdot EI}+\frac{L}{EA}} + \frac{1}{8}\cdot q\cdot\left(\frac{\frac{5}{24}\cdot\frac{L^4}{EI}}{\frac{L^3}{6\cdot EI}+\frac{L}{EA}}\right)^2$$

$$N_I = -q\cdot\frac{\frac{5}{24}\cdot\frac{L^4}{EI}}{\frac{L^3}{6\cdot EI}+\frac{L}{EA}}$$

$$M_{II} = \frac{441}{512}\cdot q\cdot L^2 - \frac{21}{16}\cdot q\cdot L\cdot\frac{\frac{15}{96}\cdot\frac{L^4}{EI}}{\frac{L^2}{6\cdot EI}+\frac{L}{EA}} + \frac{1}{2}\cdot q\cdot\left(\frac{\frac{15}{96}\cdot\frac{L^4}{EI}}{\frac{L^2}{6\cdot EI}+\frac{L}{EA}}\right)^2$$

$$N_{II} = -q\cdot\frac{\frac{5}{48}\cdot\frac{L^4}{EI}}{\frac{L^2}{6\cdot EI}+\frac{L}{EA}}$$

Последовательный монтаж сталежелезобетонной однопролетной балки



Цель: Определение прогибов сталежелезобетонной однопролетной балки по стадиям монтажа.

Формулировка задачи: Монтаж сталежелезобетонной однопролетной балки осуществляется в следующей последовательности:

- На первой стадии монтажа устанавливается на опоры стальная двутавровая балка, на подпорках от нижнего пояса балки устраивается опалубка под железобетонную плиту, на опалубке устанавливается арматурный каркас и укладывается монолитный бетон. На этой стадии на стальную балку действуют нагрузки от собственного веса q_{11} и от веса свежеуложенного бетона q_{12}.
- На второй стадии монтажа разбирается опалубка, и железобетонная плита начинает изгибаться поперек стальной балки под собственным весом.
- На третьей стадии монтажа к сталежелезобетонной балке прикладываются эксплуатационные нагрузки от веса конструкции покрытия по железобетонной плите q_2 и транспортная нагрузка P_2.

Определить максимальные прогибы сталежелезобетонной балки на первой w_1 и третьей w_2 стадиях монтажа.

Имя файла с исходными данными: **Wiring_Girder.MPR**

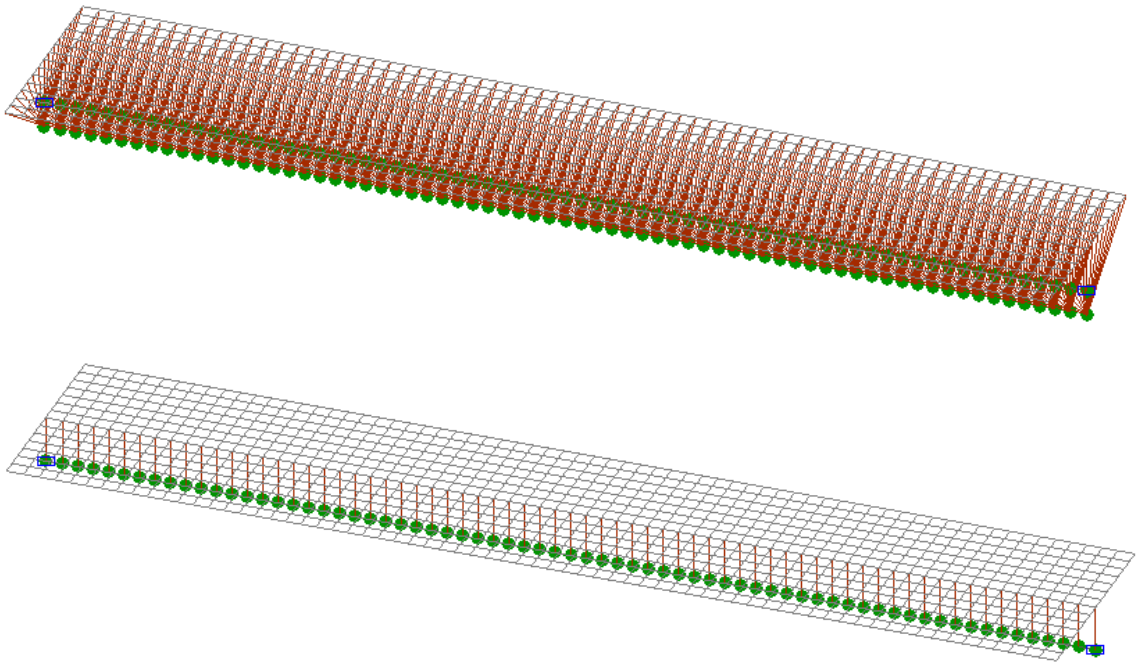
Исходные данные:

$E_{st} = 2.1 \cdot 10^6$ кгс/см^2 - модуль упругости материала стальной балки;
$E_b = 3.06 \cdot 10^5$ кгс/см^2 - модуль упругости материала железобетонной плиты;
$\upsilon_{st} = 0.3$ - коэффициент Пуассона стали;
$\upsilon_b = 0.2$ - коэффициент Пуассона железобетона;
L = 1365.0 см - длина пролета сталежелезобетонной балки;

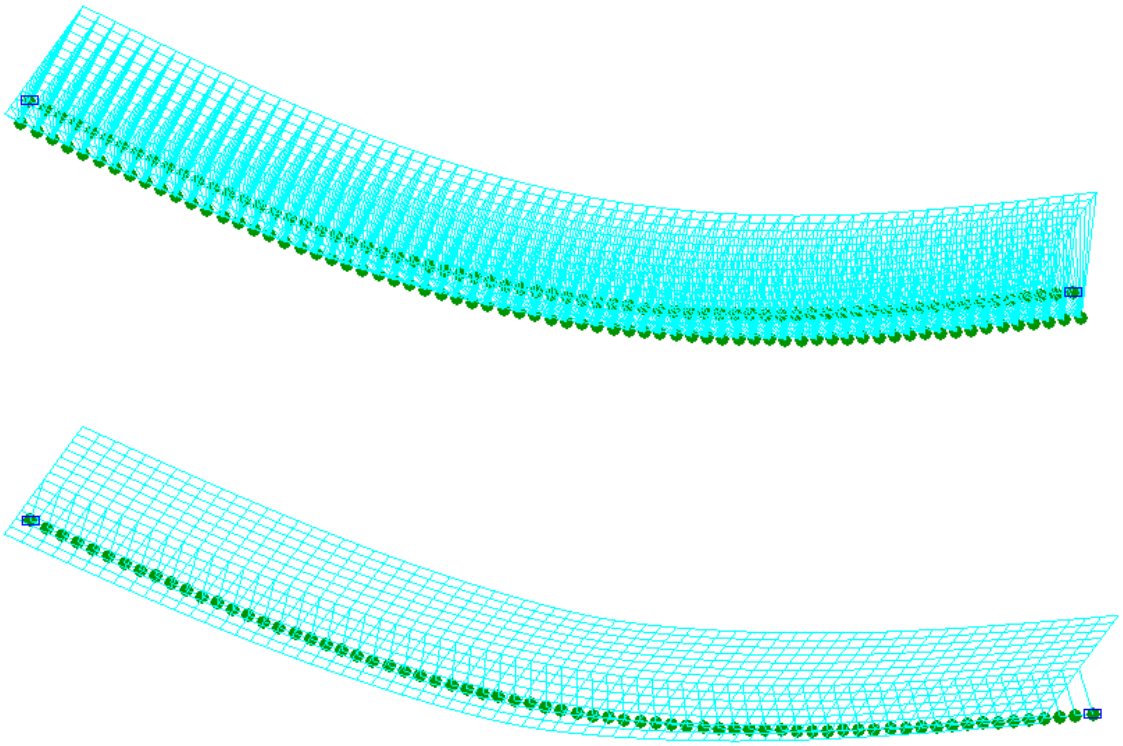
b_{s1} = 40.0 см	- ширина нижнего пояса стальной балки;
t_{s1} = 2.4 см	- толщина нижнего пояса стальной балки;
b_{s2} = 30.0 см	- ширина верхнего пояса стальной балки;
t_{s2} = 1.6 см	- толщина верхнего пояса стальной балки;
h_w = 80.0 см	- высота стенки стальной балки;
t_w = 1.2 см	- толщина стенки стальной балки;
b_{sl} = 280.0 см	- ширина железобетонной плиты;
t_{sl} = 22.0 см	- толщина железобетонной плиты;
q_{11} = 0.2072 т/м	- равномерно распределенная по линии вертикальная нагрузка от собственного веса стальной балки;
q_{12} = 0.6050 т/м^2	- равномерно распределенная по площади вертикальная нагрузка от собственного веса железобетонной плиты;
q_2 = 0.3770 т/м^2	- равномерно распределенная по площади вертикальная нагрузка от веса конструкции покрытия по железобетонной плите;
P_2 = 39.60 т/м	- равномерно распределенная по линии вертикальная транспортная нагрузка.

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – система общего вида, элементы стальной балки – 68 стержневых элементов типа 5, элементы железобетонной плиты – 952 элемента оболочки типа 44, элементы сопряжения стальной балки и железобетонной плиты – 69 элементов типа 100, элементы подпорок опалубки - 1035 элементов типа 100. Сетка конечных элементов стальной балки разбита по продольной оси с шагом 0.2 м. Сетка конечных элементов железобетонной плиты разбита в продольном и поперечном направлениях с шагом 0.2 м. Узел левого торца балки закреплен по направлениям степеней свободы X,Y, Z, UX. Узел правого торца балки закреплен по направлениям степеней свободы Y, Z, UX. Количество узлов в расчетной схеме – 1173. На первой стадии монтажа присутствуют элементы стальной балки, железобетонной плиты с пониженным модулем упругости $E_b \cdot 10^{-3}$, элементы сопряжения и элементы подпорок. На второй и третьей стадиях монтажа присутствуют элементы стальной балки, железобетонной плиты с нормальным модулем упругости E_b и элементы сопряжения. На всех стадиях действуют нагрузки q_{11} и q_{12} накапливаемого загружения q_1. На третьей стадии монтажа действуют нагрузки q_2 и P_2 независимого загружения q_2.

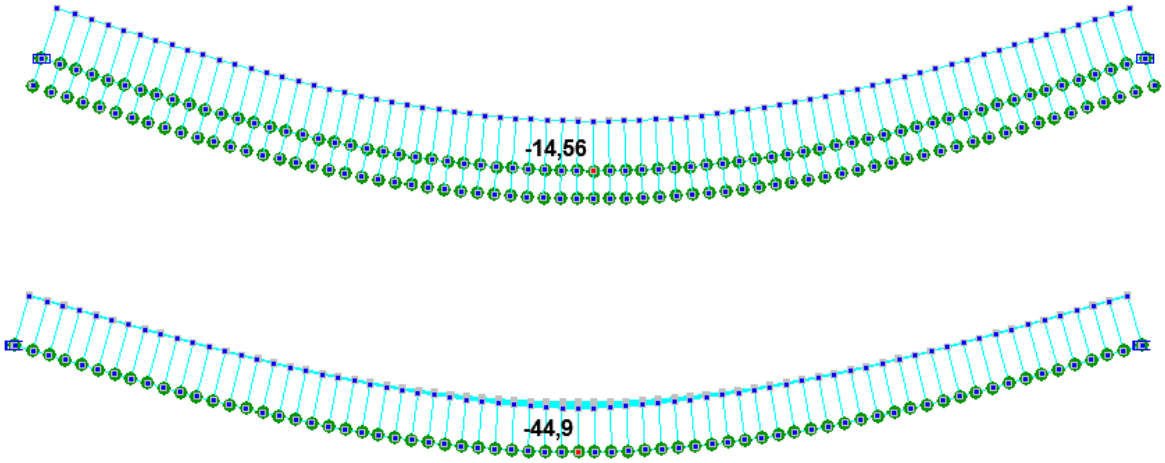
Результаты решения в SCAD:



Расчетные схемы на первой и второй, третьей стадиях монтажа



Деформированные схемы на первой и третьей стадиях монтажа



Прогибы на первой w_1 и третьей w_2 стадиях монтажа (мм)

Сравнение решений:

Параметр	Теория	SCAD	Отклонения, %
Максимальный прогиб сталежелезобетонной балки на первой стадии монтажа w_1, мм	-14.75	-14,56	1.29
Максимальный прогиб сталежелезобетонной балки на третьей стадии монтажа w_2, мм	-44.51	-44,90	0.88

Замечания: При аналитическом решении максимальные прогибы сталежелезобетонной балки на первой w_1 и третьей w_2 стадиях монтажа определяются по следующим формулам:

$$w_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{\left(q_{11} + q_{12} \cdot b_{sl}\right) \cdot L^4}{E_{st} \cdot I_s};$$

$$w_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{\left(q_{11} + q_{12} \cdot b_{sl}\right) \cdot L^4}{E_{st} \cdot I_s} + \frac{5}{384} \cdot \frac{q_2 \cdot b_{sl} \cdot L^4}{E_{st} \cdot I_{stb}} + \frac{1}{48} \cdot \frac{P_2 \cdot b_{sl} \cdot L^3}{E_{st} \cdot I_{stb}};$$

$$I_{stb} = I_s + A_s \cdot z_{sstb}^2 + \frac{I_b}{n_b} + \frac{A_b}{n_b} \cdot z_{bstb}^2; \quad z_{bstb} = z_{bs} - z_{sstb}; \quad z_{sstb} = \frac{S_{stb}}{A_{stb}};$$

$$S_{stb} = \frac{A_b}{n_b} \cdot z_{bs}; \quad A_{stb} = A_s + \frac{A_b}{n_b}; \quad z_{bs} = z_{s2s} + z_b; \quad I_b = \frac{b_{sl} \cdot t_{sl}}{12};$$

$$z_b = \frac{S_b}{A_b}; \quad S_b = \frac{b_{sl} \cdot t_{sl}^2}{2}; \quad A_b = b_{sl} \cdot t_{sl}; \quad n_b = \frac{E_{st}}{E_b};$$

$$I_s = I_{s1s} + I_{ws} + I_{s2s}; \quad I_{s2s} = I_{s2} + A_{s2} \cdot \left(t_{s1} + h_w + \frac{t_{s2}}{2} - z_{s1s}\right)^2;$$

$$I_{ws} = I_w + A_w \cdot \left(t_{s1} + \frac{h_w}{2} - z_{s1s}\right)^2; \quad I_{s1s} = I_{s1} + A_{s1} \cdot \left(z_{s1s} - \frac{t_{s1}}{2}\right)^2;$$

$$I_w = \frac{t_w \cdot h_w^3}{12}; \quad I_{s2} = \frac{b_{s2} \cdot t_{s2}^3}{12}; \quad I_{s1} = \frac{b_{s1} \cdot t_{s1}^3}{12};$$

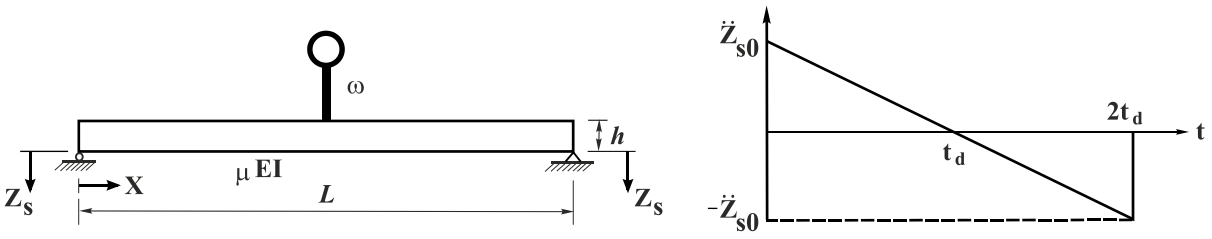
$$z_{s2s} = H_s - z_{s1s}; \quad z_{s1s} = \frac{S_s}{A_s}; \quad S_s = A_{s1} \cdot \frac{t_{s1}}{2} + A_w \cdot \left(t_{s1} + \frac{h_w}{2}\right) + A_{s2} \cdot \left(t_{s1} + h_w + \frac{t_{s2}}{2}\right);$$

$$A_s = A_{s1} + A_w + A_{s2}; \quad H = H_s + t_{sl}; \quad H_s = t_{s1} + h_w + t_{s2};$$

$$A_w = t_w \cdot h_w; \quad A_{s2} = b_{s2} \cdot t_{s2}; \quad A_{s1} = b_{s1} \cdot t_{s1};$$

Спектры ответа

Спектр ответа абсолютных ответных ускорений линейного осциллятора, установленного в середине пролета свободно опертой балки с распределенной массой под действием кинематического возмущения опор (сейсмическое воздействие)



Цель: Определение спектра ответа ответных ускорений линейного осциллятора, установленного в середине пролета свободно опертой балки с распределенной массой от воздействия кинематического возмущения опор.

***Имя файлов с исходными данными*:** **DIN_B_RS.SPR** - расчетная схема
DIN_B_RS.SPC - акселерограмма

Формулировка задачи: Свободно опертая балка постоянного сечения с равномерно распределенной массой μ подвергается воздействию кинематического возмущения опор по заданной акселерограмме:

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}_{s0} \cdot \left(1 - \frac{t}{t_d}\right).$$

Определить спектр ответа абсолютных ответных ускорений линейного осциллятора, установленного в середине пролета.

Ссылки: John M. Biggs, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Book Companies, New York, 1964, p.256-263;
В.И. Киселев, Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. Москва, Стройиздат, 1980, стр. 65-67.

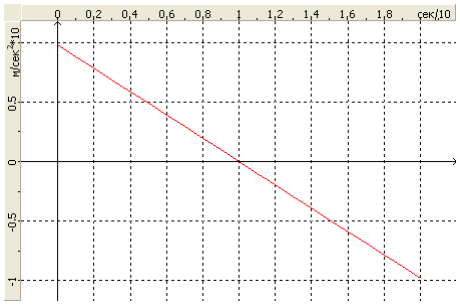
Исходные данные:

$E = 3.0 \cdot 10^7$ psi $= 2.1092 \cdot 10^7$ тс/м^2	- модуль упругости;
$I = 333.333$ in^4 $= 138.7448 \cdot 10^{-6}$ м^4	- момент инерции поперечного сечения балки.
$h = 14$ in $= 0.3556$ м	- высота поперечного сечения балки;
$L = 240$ in $= 6.0960$ м	- длина пролета балки;
$\mu = 0.2$ lb·sec^2/in^2 $= 0.1406$ тс·с^2/м^2	- значение равномерно распределенной массы балки;
$\ddot{z}_{s0} = \pm 386.2200$ in/sec^2 $= \pm 9.81$ м/с^2	- амплитудные значения ускорения опор по акселерограмме ;
$t_d = 0.10$ sec $= 0.10$ с	- полуинтервал воздействия кинематического возмущения опор;
$g = 386.2200$ in/sec^2 $= 9.81$ м/с^2	- значение ускорения свободного падения;

Конечно-элементная модель: Расчетная схема – балочный ростверк / плита, 32 стержневых элемента типа 3. Обеспечение граничных условий по свободно опертым торцам балки достигается за счет наложения связей по направлению степени свободы Z. Геометрическая неизменяемость расчетной схемы обеспечивается за счет наложения связи в узле поперечного сечения оси симметрии балки по направлению степени свободы UX. Распределенная масса задается преобразованием статической нагрузки от собственного веса балки μ·g.
Кинематическое возмущение опор описывается графиком изменения ускорения во времени (акселерограммой) и задается в виде воздействия по оси Z общей системы координат (направляющие косинусы к осям X, Y, Z: 0.00, 0.00, 1.00) с масштабным множителем к значениям акселерограммы, равным 1.00. Высота конструкции балки на схеме сориентирована по оси Z общей системы координат. Коэффициент диссипации (коэффициент поглощения энергии колебаний) для осцилляторов и объекта принят с минимальным значением $\xi = 0.000001$. Интервалы между моментами времени графика ускорения во времени равны $\Delta t = 0.01$ с. При

построении графика ускоренние принимается со значениями $\ddot{z}(t)=\ddot{z}_{s0}\cdot\left(1-n\cdot\Delta t/t_d\right)$ в моменты времени $n\cdot\Delta t$. Коэффициент пересчета для присоединенного статического загружения равен k = 1.000 (формирование масс). Количество узлов в расчетной схеме – 33.

Результаты решения в SCAD



Расчетная схема и заданная акселерограмма

Сравнение решений:

Сравнение производилось с решением задачи, полученным в программе Abaqus (решение предоставлено А.И. Поповым — АО Атомпроект).

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
0	0,0000	0,0000
0,05	0,0000	0,0007
0,1	0,0000	0,0029
0,15	0,0000	0,0064
0,2	0,0000	0,0114
0,25	0,0038	0,0178
0,3	0,0027	0,0256
0,35	0,0216	0,0347
0,4	0,0200	0,0452
0,45	0,0490	0,0569
0,5	0,0503	0,0700
0,55	0,0832	0,0842
0,6	0,0881	0,0997
0,65	0,1218	0,1163
0,7	0,1312	0,1340
0,75	0,1642	0,1528
0,8	0,1799	0,1726
0,85	0,2096	0,1934
0,9	0,2310	0,2152
0,95	0,2565	0,2378
1	0,2824	0,2613
1,05	0,3045	0,2855
1,1	0,3338	0,3105
1,15	0,3625	0,3362
1,2	0,3876	0,3626

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
1,25	0,4182	0,3895
1,3	0,4481	0,4171
1,35	0,4758	0,4453
1,4	0,5043	0,4739
1,45	0,5395	0,5030
1,5	0,5690	0,5325
1,55	0,5964	0,5625
1,6	0,6324	0,5928
1,65	0,6656	0,6235
1,7	0,6953	0,6545
1,75	0,7270	0,6857
1,8	0,7628	0,7171
1,85	0,7932	0,7487
1,9	0,8267	0,7804
1,95	0,8572	0,8121
2	0,8939	0,8441
2,05	0,9265	0,8760
2,1	0,9559	0,9079
2,15	0,9913	0,9398
2,2	1,0234	0,9717
2,25	1,0561	1,0035
2,3	1,0887	1,0353
2,35	1,1193	1,0669
2,4	1,1498	1,0984
2,45	1,1855	1,1298

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
2,5	1,2171	1,1611
2,55	1,2467	1,1923
2,6	1,2762	1,2234
2,65	1,3048	1,2544
2,7	1,3405	1,2853
2,75	1,3721	1,3160
2,8	1,4027	1,3465
2,85	1,4312	1,3769
2,9	1,4597	1,4071
2,95	1,4862	1,4370
3	1,5158	1,4667
3,05	1,5454	1,4963
3,1	1,5749	1,5255
3,15	1,6045	1,5546
3,2	1,6320	1,5832
3,25	1,6595	1,6115
3,3	1,6860	1,6395
3,35	1,7115	1,6671
3,4	1,7370	1,6943
3,45	1,7604	1,7211
3,5	1,7829	1,7476
3,55	1,8084	1,7736
3,6	1,8318	1,7994
3,65	1,8583	1,8247
3,7	1,8838	1,8499

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
3,75	1,9093	1,8744
3,8	1,9337	1,8989
3,85	1,9541	1,9226
3,9	1,9776	1,9629
3,95	2,0000	2,0807
4	2,0224	2,1999
4,05	2,0438	2,3202
4,1	2,1244	2,4415
4,15	2,1713	2,5635
4,2	2,2895	2,6862
4,25	2,4088	2,8092
4,3	2,5291	2,9324
4,35	2,6493	3,0555
4,4	2,7696	3,1784
4,45	2,8899	3,3009
4,5	2,7768	3,4226
4,55	2,8960	3,5434
4,6	3,0143	3,6631
4,65	3,1325	3,7815
4,7	3,2497	3,8982
4,75	3,3660	4,0132
4,8	3,4811	4,1262
4,85	3,5953	4,2370
4,9	3,8267	4,3453
4,95	3,9368	4,4509
5	4,0449	4,5537
5,05	4,1519	4,6535
5,15	4,3568	4,8429
5,25	4,5515	5,0178
5,35	4,7339	5,1765
5,45	5,1580	5,3179
5,55	5,2915	5,4406
5,65	5,4057	5,5436
5,75	5,5025	5,6259
5,85	5,5800	5,6867
5,95	5,6371	5,7255
6,05	5,6799	5,7418
6,15	5,6922	5,7467
6,25	5,6840	5,7459
6,35	5,6667	5,7410
6,45	5,6616	5,7305
6,55	5,6381	5,7172
6,65	5,6106	5,7002
6,75	5,5933	5,6823

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
6,85	5,5596	5,6593
6,95	5,5260	5,6326
7,05	5,4760	5,6019
7,15	5,4475	5,5663
7,25	5,4027	5,5263
7,35	5,3435	5,4817
7,45	5,3058	5,4330
7,55	5,2548	5,3803
7,65	5,1906	5,3244
7,75	5,1366	5,2659
7,85	5,0856	5,2063
7,95	5,0214	5,1456
8,05	4,9541	5,0832
8,15	4,8970	5,0199
8,25	4,8298	4,9568
8,35	4,7533	4,8934
8,45	4,6942	4,8276
8,55	4,6259	4,7590
8,65	4,5484	4,6880
8,75	4,4791	4,6150
8,85	4,4108	4,5400
8,95	4,3354	4,4637
9,05	4,2538	4,3856
9,15	4,1876	4,3056
9,25	4,1121	4,2230
9,35	4,0306	4,1386
9,45	3,9602	4,0539
9,55	3,8858	3,9697
9,65	3,8063	3,8864
9,75	3,7278	3,8045
9,85	3,6565	3,7235
9,95	3,5800	3,6425
10,05	3,5005	3,5625
10,25	3,3517	3,4065
10,45	3,1978	3,2517
10,65	3,0510	3,0950
10,85	2,9021	2,9342
11,05	2,7554	2,8493
11,25	2,6320	2,8338
11,45	2,6188	2,8165
11,65	2,6045	2,7987
11,85	2,5851	2,7780
12,05	2,5668	2,7555
12,25	2,5525	2,7311

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
12,45	2,5352	2,7038
12,65	2,5138	2,6768
12,85	2,4954	2,6496
13,05	2,4791	2,6235
13,25	2,4608	2,6008
13,45	2,4393	2,5794
13,65	2,4190	2,5580
13,85	2,4200	2,5829
14,05	2,4669	2,6253
14,25	2,5025	2,6754
14,45	2,5321	2,7204
14,65	2,5545	2,7508
14,85	2,5668	2,7680
15,05	2,5770	2,7730
15,25	2,5780	2,7656
15,45	2,5708	2,7468
15,65	2,5627	2,7165
15,85	2,5433	2,6732
16,05	2,5270	2,6209
16,25	2,4995	2,5750
16,45	2,4730	2,5384
16,65	2,4383	2,5071
16,85	2,4037	2,4806
17,05	2,3629	2,4496
17,25	2,3221	2,4087
17,45	2,2742	2,3604
17,65	2,2294	2,3022
17,85	2,1774	2,2363
18,05	2,1284	2,1646
18,25	2,0724	2,0879
18,45	2,0204	2,0594
18,65	1,9602	2,1352
18,85	1,9215	2,1977
19,05	1,9541	2,2423
19,25	2,0071	2,2704
19,45	2,0530	2,2876
19,65	2,0968	2,2987
19,85	2,1356	2,3222
20,05	2,1672	2,3682
20,55	2,2365	2,5018
21,05	2,2783	2,5673
21,55	2,3028	2,5700
22,05	2,3007	2,5106
22,55	2,2854	2,3830

Частота	Ускорение	
Гц	g	
	Abaqus	SCAD
23,05	2,2528	2,3421
23,55	2,2039	2,3615
24,05	2,1427	2,3313
24,55	2,0734	2,2381
25,05	1,9949	2,2560
25,55	1,9888	2,2237
26,05	2,0601	2,3334
26,55	2,1142	2,4863
27,05	2,1580	2,5792
27,55	2,1865	2,6055
28,05	2,1988	2,5678
28,55	2,1978	2,4566
29,05	2,1876	2,2866
29,55	2,1702	2,3166
30,05	2,1386	2,4101
30,55	2,0989	2,4521
31,05	2,0520	2,4243
31,55	1,9980	2,3600
32,05	2,0071	2,3904
32,55	2,0520	2,5854
33,05	2,0907	2,7152

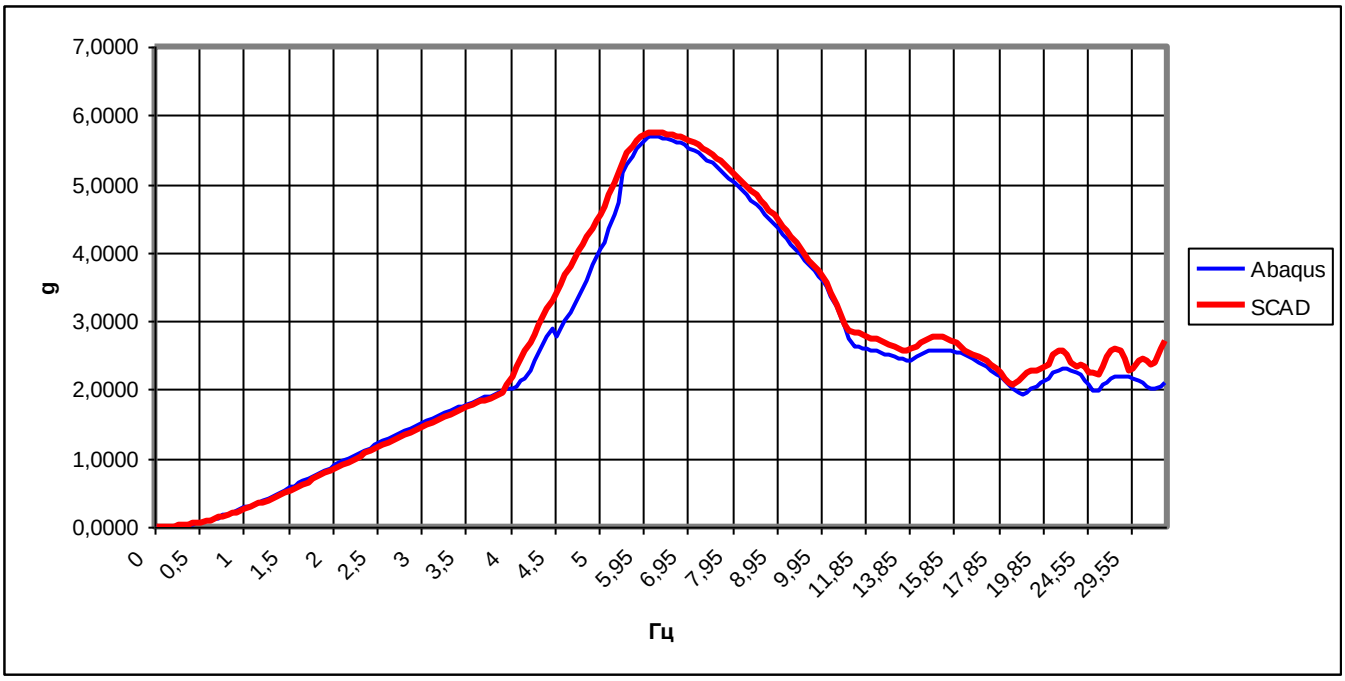
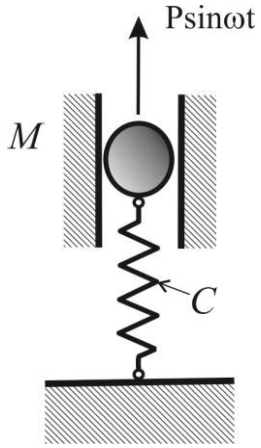


График Спектров ответа

	Abaqus	**SCAD**	**Отклонение**
Частота, при которой реализуется максимальное ускорение (Гц)	6.15	6.15	0 %
Максимальное ускорение (g)	5,6921	5.7467	0.95 %
Коэффициент корреляции между спектрами	0.995		

Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотная характеристика системы с одной степенью свободы



Цель: Построение амплитудно-частотной характеристики одномассовой упругой системы при гармоническом возбуждении.

***Имя файлов с исходными данными*:** **TestАЧХ.SPR**

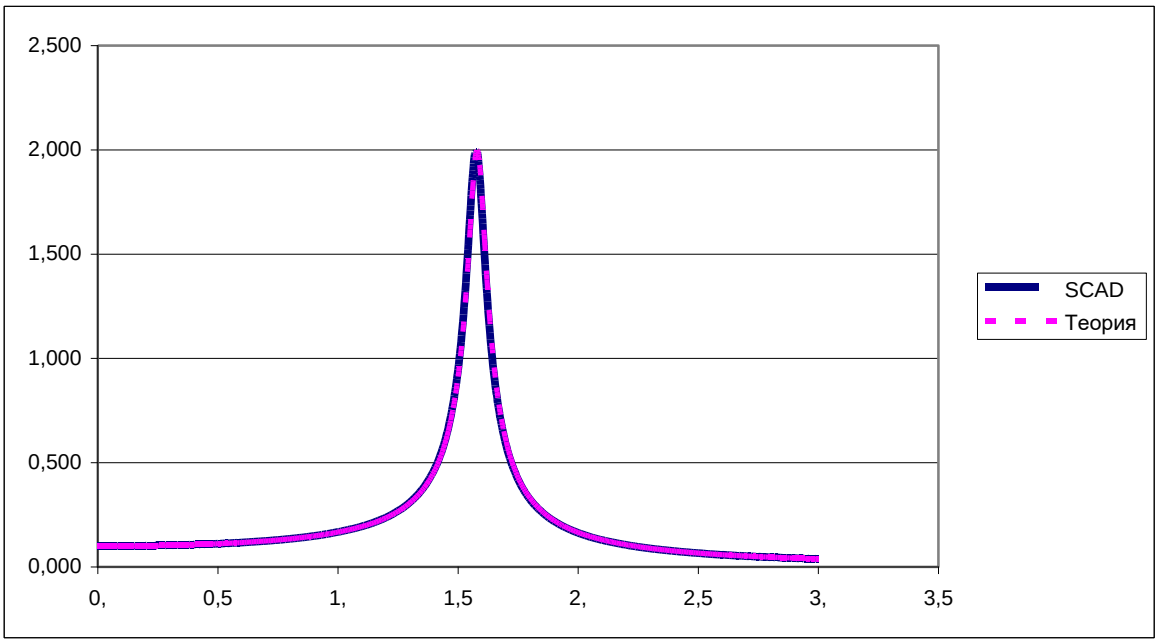
Формулировка задачи: Анализируется поведение одномассовой упругой системы при возбуждении силой меняющейся во времени по гармоническому закону с различной частотой возбуждения.

Ссылки: Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний — М.: Наука, 1991, § II.6.

Исходные данные:
M = 10 кН - вес массы;
C = 100 кН - жесткость;
P = 10 кН - амплитудное значение силы;
ξ = 0.025 - параметр затухания (в долях от критического).

Конечно-элементная модель: Один узел, в котором задана точечная масса, поддержан одноузловой упругой связью (конечный элемент типа 51).

Результаты решения в SCAD



Амплитудно-частотные характеристики

Сравнение решений:

Частота	Перемещение узла	
	SCAD	Теория
Гц	м	
0,	0,1000	0,1000
0,01	0,1000	0,1000
0,02	0,1000	0,1000
0,03	0,1000	0,1000
0,04	0,1001	0,1001
0,05	0,1001	0,1001
0,06	0,1001	0,1001
0,07	0,1002	0,1002
0,08	0,1003	0,1003
0,09	0,1003	0,1003
0,1	0,1004	0,1004
0,11	0,1005	0,1005
0,12	0,1006	0,1006
0,13	0,1007	0,1007
0,14	0,1008	0,1008
0,15	0,1009	0,1009
0,16	0,1010	0,1010
0,17	0,1012	0,1012
0,18	0,1013	0,1013
0,19	0,1015	0,1015
0,2	0,1016	0,1016
0,21	0,1018	0,1018
0,22	0,1020	0,1020
0,23	0,1022	0,1022
0,24	0,1024	0,1024
0,25	0,1026	0,1026
0,26	0,1028	0,1028
0,27	0,1030	0,1030
0,28	0,1033	0,1032
0,29	0,1035	0,1035
0,3	0,1038	0,1037
0,31	0,1040	0,1040
0,32	0,1043	0,1043
0,33	0,1046	0,1046
0,34	0,1049	0,1048
0,35	0,1052	0,1052
0,36	0,1055	0,1055
0,37	0,1058	0,1058
0,38	0,1062	0,1061
0,39	0,1065	0,1065
0,4	0,1069	0,1068
0,41	0,1072	0,1072
0,42	0,1076	0,1076
0,43	0,1080	0,1080
0,44	0,1084	0,1084
0,45	0,1089	0,1088
0,46	0,1093	0,1092
0,47	0,1097	0,1097
0,48	0,1102	0,1102
0,49	0,1107	0,1106
0,5	0,1112	0,1111
0,51	0,1117	0,1116

Частота	Перемещение узла	
	SCAD	Теория
Гц	м	
0,52	0,1122	0,1121
0,53	0,1127	0,1127
0,54	0,1133	0,1132
0,55	0,1138	0,1138
0,56	0,1144	0,1143
0,57	0,1150	0,1149
0,58	0,1156	0,1155
0,59	0,1163	0,1162
0,6	0,1169	0,1168
0,61	0,1176	0,1175
0,62	0,1183	0,1182
0,63	0,1190	0,1189
0,64	0,1197	0,1196
0,65	0,1204	0,1203
0,66	0,1212	0,1211
0,67	0,1220	0,1219
0,68	0,1228	0,1227
0,69	0,1237	0,1235
0,7	0,1245	0,1244
0,71	0,1254	0,1253
0,72	0,1263	0,1262
0,73	0,1272	0,1271
0,74	0,1282	0,1280
0,75	0,1292	0,1290
0,76	0,1302	0,1300
0,77	0,1313	0,1311
0,78	0,1324	0,1322
0,79	0,1335	0,1333
0,8	0,1346	0,1344
0,81	0,1358	0,1356
0,82	0,1370	0,1368
0,83	0,1383	0,1380
0,84	0,1396	0,1393
0,85	0,1409	0,1406
0,86	0,1423	0,1420
0,87	0,1437	0,1434
0,88	0,1452	0,1449
0,89	0,1467	0,1464
0,9	0,1482	0,1479
0,91	0,1498	0,1495
0,92	0,1515	0,1512
0,93	0,1532	0,1529
0,94	0,1550	0,1546
0,95	0,1569	0,1564
0,96	0,1588	0,1583
0,97	0,1607	0,1603
0,98	0,1628	0,1623
0,99	0,1649	0,1644
1,	0,1671	0,1666
1,01	0,1694	0,1689
1,02	0,1718	0,1712
1,03	0,1742	0,1736

Частота	Перемещение узла	
	SCAD	Теория
Гц	м	
1,04	0,1768	0,1762
1,05	0,1794	0,1788
1,06	0,1822	0,1815
1,07	0,1851	0,1844
1,08	0,1881	0,1873
1,09	0,1912	0,1904
1,1	0,1945	0,1936
1,11	0,1979	0,1970
1,12	0,2014	0,2005
1,13	0,2051	0,2042
1,14	0,2090	0,2080
1,15	0,2131	0,2120
1,16	0,2174	0,2162
1,17	0,2219	0,2207
1,18	0,2266	0,2253
1,19	0,2316	0,2302
1,2	0,2368	0,2354
1,21	0,2424	0,2408
1,22	0,2482	0,2465
1,23	0,2544	0,2526
1,24	0,2609	0,2590
1,25	0,2679	0,2658
1,26	0,2752	0,2731
1,27	0,2831	0,2808
1,28	0,2915	0,2890
1,29	0,3004	0,2977
1,3	0,3100	0,3071
1,31	0,3203	0,3172
1,32	0,3314	0,3280
1,33	0,3434	0,3396
1,34	0,3563	0,3522
1,35	0,3704	0,3659
1,36	0,3857	0,3807
1,37	0,4024	0,3970
1,38	0,4207	0,4147
1,39	0,4409	0,4342
1,4	0,4633	0,4558
1,41	0,4881	0,4797
1,42	0,5159	0,5064
1,43	0,5471	0,5364
1,44	0,5824	0,5702
1,45	0,6226	0,6086
1,46	0,6688	0,6525
1,47	0,7222	0,7032
1,48	0,7845	0,7621
1,49	0,8578	0,8312
1,5	0,9449	0,9130
1,51	1,0490	1,0106
1,52	1,1740	1,1276
1,53	1,3230	1,2675
1,54	1,4965	1,4323
1,55	1,6863	1,6178

Частота	Перемещение узла	
	SCAD	Теория
Гц	м	
1,56	1,8651	1,8048
1,57	1,9824	1,9508
1,58	1,9869	2,0000
1,59	1,8746	1,9270
1,6	1,6930	1,7643
1,61	1,4959	1,5684
1,62	1,3140	1,3792
1,63	1,1575	1,2132
1,64	1,0264	1,0732
1,65	0,9174	0,9565
1,66	0,8265	0,8594
1,67	0,7501	0,7780
1,68	0,6854	0,7092
1,69	0,6301	0,6506
1,7	0,5824	0,6003
1,71	0,5409	0,5566
1,72	0,5045	0,5184
1,73	0,4724	0,4848
1,74	0,4439	0,4550
1,75	0,4184	0,4284
1,76	0,3956	0,4046
1,77	0,3749	0,3831
1,78	0,3561	0,3636
1,79	0,3390	0,3459
1,8	0,3234	0,3297
1,81	0,3091	0,3149
1,82	0,2959	0,3013
1,83	0,2837	0,2887
1,84	0,2724	0,2771
1,85	0,2619	0,2663
1,86	0,2521	0,2562
1,87	0,2430	0,2468
1,88	0,2344	0,2381
1,89	0,2264	0,2299
1,9	0,2189	0,2222
1,91	0,2119	0,2149
1,92	0,2052	0,2081
1,93	0,1989	0,2017
1,94	0,1930	0,1956
1,95	0,1873	0,1898
1,96	0,1820	0,1844
1,97	0,1769	0,1792
1,98	0,1721	0,1743
1,99	0,1675	0,1696
2,	0,1631	0,1651
2,01	0,1590	0,1609
2,02	0,1550	0,1568
2,03	0,1512	0,1529
2,04	0,1475	0,1492
2,05	0,1440	0,1457
2,06	0,1407	0,1423
2,07	0,1375	0,1390
2,08	0,1344	0,1359
2,09	0,1314	0,1329
2,1	0,1286	0,1300

Частота	Перемещение узла	
	SCAD	Теория
Гц	м	
2,11	0,1259	0,1272
2,12	0,1232	0,1245
2,13	0,1207	0,1219
2,14	0,1182	0,1194
2,15	0,1159	0,1170
2,16	0,1136	0,1147
2,17	0,1114	0,1125
2,18	0,1093	0,1103
2,19	0,1072	0,1082
2,2	0,1052	0,1062
2,21	0,1033	0,1043
2,22	0,1014	0,1024
2,23	0,0996	0,1005
2,24	0,0979	0,0988
2,25	0,0962	0,0971
2,26	0,0945	0,0954
2,27	0,0929	0,0938
2,28	0,0914	0,0922
2,29	0,0899	0,0907
2,3	0,0884	0,0892
2,31	0,0870	0,0877
2,32	0,0856	0,0863
2,33	0,0842	0,0850
2,34	0,0829	0,0836
2,35	0,0817	0,0823
2,36	0,0804	0,0811
2,37	0,0792	0,0799
2,38	0,0780	0,0787
2,39	0,0769	0,0775
2,4	0,0757	0,0764
2,41	0,0747	0,0753
2,42	0,0736	0,0742
2,43	0,0725	0,0731
2,44	0,0715	0,0721
2,45	0,0705	0,0711
2,46	0,0696	0,0701
2,47	0,0686	0,0692
2,48	0,0677	0,0682
2,49	0,0668	0,0673
2,5	0,0659	0,0664
2,51	0,0650	0,0655
2,52	0,0642	0,0647
2,53	0,0634	0,0639
2,54	0,0626	0,0630
2,55	0,0618	0,0622
2,56	0,0610	0,0615
2,57	0,0602	0,0607
2,58	0,0595	0,0599
2,59	0,0588	0,0592
2,6	0,0581	0,0585
2,61	0,0574	0,0578
2,62	0,0567	0,0571
2,63	0,0560	0,0564
2,64	0,0553	0,0557
2,65	0,0547	0,0551

Частота	Перемещение узла	
	SCAD	Теория
Гц	м	
2,66	0,0541	0,0545
2,67	0,0535	0,0538
2,68	0,0528	0,0532
2,69	0,0522	0,0526
2,7	0,0517	0,0520
2,71	0,0511	0,0514
2,72	0,0505	0,0509
2,73	0,0500	0,0503
2,74	0,0494	0,0498
2,75	0,0489	0,0492
2,76	0,0484	0,0487
2,77	0,0479	0,0482
2,78	0,0473	0,0477
2,79	0,0469	0,0472
2,8	0,0464	0,0467
2,81	0,0459	0,0462
2,82	0,0454	0,0457
2,83	0,0449	0,0452
2,84	0,0445	0,0448
2,85	0,0440	0,0443
2,86	0,0436	0,0439
2,87	0,0432	0,0435
2,88	0,0427	0,0430
2,89	0,0423	0,0426
2,9	0,0419	0,0422
2,91	0,0415	0,0418
2,92	0,0411	0,0414
2,93	0,0407	0,0410
2,94	0,0403	0,0406
2,95	0,0399	0,0402
2,96	0,0396	0,0398
2,97	0,0392	0,0394
2,98	0,0388	0,0391
2,99	0,0385	0,0387
3,	0,0381	0,0384

	Теория	**SCAD**	**Отклонение**
Частота, при которой реализуется максимальное перемещение (Гц)	1.58	1.58	0 %
Максимальное перемещение (м)	2,0000	1,9869	0.65 %

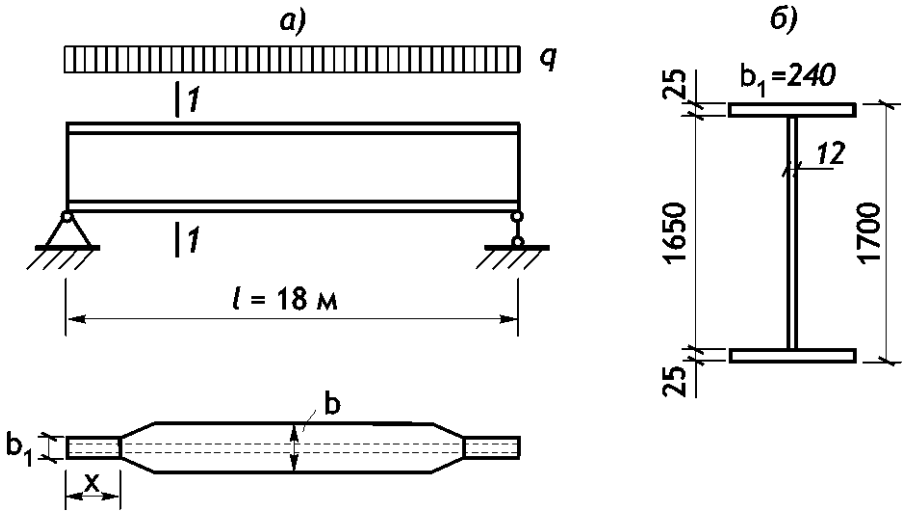
***Замечания*:** При аналитическом решении вертикальное перемещение описывается следующей передаточной функцией

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\left(2\xi\theta/\omega\right)^2}},$$

где ω — собственная частота колебаний недемпфированной системы.

Элементы стальных конструкций

Расчет прочности и жесткости сварной балки двутаврового сечения



а – схема изменения сечения по длине балки; б – сечение балки и эпюры напряжений.

Цель: Проверка режима расчета сопротивления сечений в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить расчетное сечение сварного двутаврового профиля для главных балок пролетом 18 м в балочной клетке нормального типа. Верхний пояс главных балок раскреплен балками настила, расположенными с шагом 1,125 м.

Источник: Металлические конструкции : учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 195.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

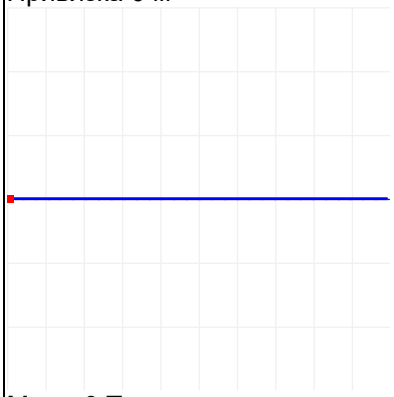
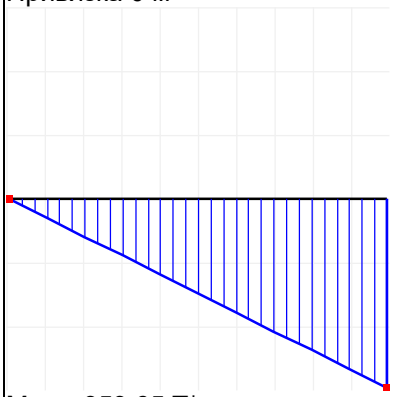
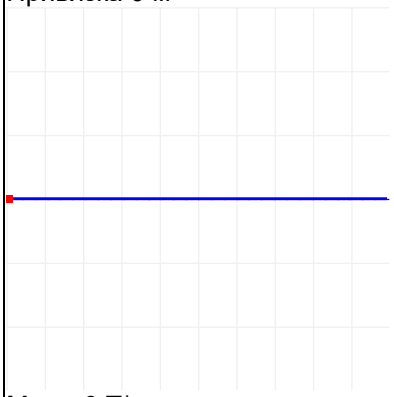
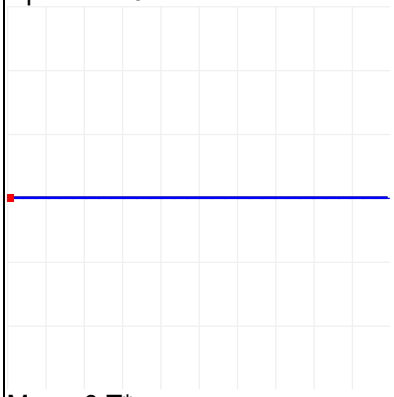
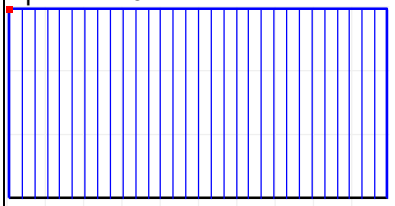
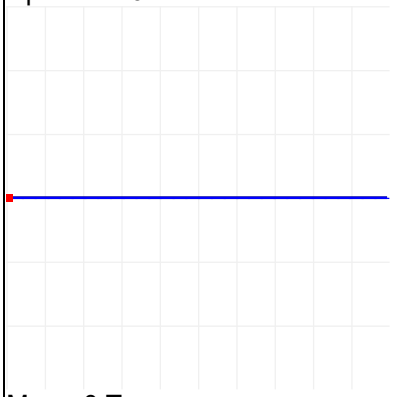
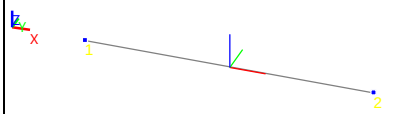
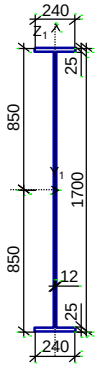
Имя файла с исходными данными:
4.1 SectionResistance_Example_4.1.spr;
отчет – 4.1 SectionResistance _Example_4.1.doc

Исходные данные:

M_1 = 3469,28 кНм = 353,6473 тм	Расчетный изгибающий момент;
Q_1 = 925 кН = 94,29 т	Расчетная перерезывающая сила;
R_y = 23 кН/см^2, R_s = 0,58*23=13,3 кН/см^2	Сталь марки С255 при толщине t>20 мм;
l = 18 м	Пролет балки;
$W_y = 15187,794$ см^3	Геометрические характеристики для сварного двутавра с полками 240×25 мм и стенкой 1650×12 мм.
$I_y = 1290962,5$ см^4	
$S_y = 9108,75$ см^3	
$i_y = 63,715$ см, $i_z = 4,265$ см	

Параметры SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

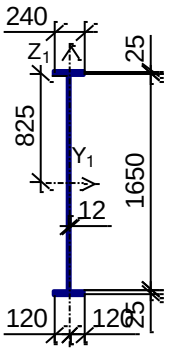
[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 353,65 Т*м Привязка 3,75 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 94,31 Т Привязка 0 м 	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 3,75 м Длина гибкой части 3,75 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент Section

Сталь: С255
Длина элемента 3,75 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 220
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Расчетная длина в плоскости XoY 1,125 м
Расчетная длина в плоскости XoZ 18 м
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 1,125 м

Сечение



Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	0,99
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,41
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,99
п. 5.14*	Прочность по приведенным напряжениям при одновременном действии изгибающего момента и поперечной силы	0,86
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	0,99
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,09
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,09

Коэффициент использования 0,99 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Необходимый момент сопротивления балки:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{3469,28 \cdot 100}{23} = 15083,826 \text{ см}^3.$$

2. Максимальные касательные напряжения, возникающие в опорном сечении балки:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_y}{I_y t_w} = \frac{925 \cdot 9108,75}{1290962,5 \cdot 1,2} = 5,4388 \text{ кН/см}^2.$$

3. Приведенные напряжения в рассматриваемом сечении балки:

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y}\frac{h_w}{2} = \frac{3469,28 \cdot 100 \cdot 165}{1290962,5 \cdot 2} = 22,1707 \text{ кН/см}^2$$

$$\tau_{yz} = \frac{Q_z S_{yf}}{I_y t_w} = \frac{925 \cdot \left(24 \cdot 2,5 \cdot \left(0,5 \cdot 165 + 0,5 \cdot 2,5\right)\right)}{1290962,5 \cdot 1,2} = 3,00 \text{ кН/см}^2$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_y^2 + 3\tau_{yz}^2} = \sqrt{22,1707^2 + 3 \cdot 3,00^2} = 22,7715 \text{ кН/см}^2$$

4. Гибкость элемента в плоскости действия момента:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{18 \cdot 100}{63,715} = 28,2508.$$

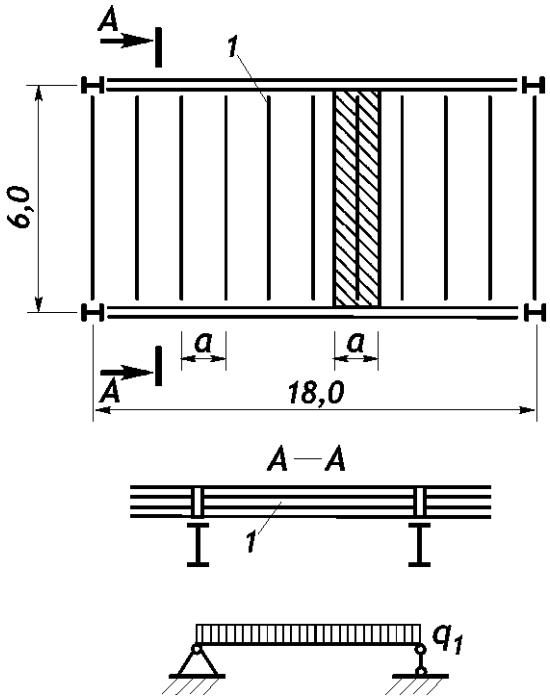
5. Гибкость элемента из плоскости действия момента:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1,125 \cdot 100}{4,265} = 26,3775.$$

Сравнение решений:

Фактор	**Ручной счет**	**SCAD**	**Отклонение, %**
Прочность при действии изгибающего момента *M*y	15083,826/15187,794 = 0,993	0,993	0,0
Прочность при действии поперечной силы *Q*z	5,4388/13,3 = 0,4089	0,408	0,0
Прочность по приведенным напряжениям	22,7715/1,15/23 = 0,861	0,86	0,0
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	0,993	0,0
Устойчивость плоской формы изгиба	–	0,993	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoY	26,3775/300 = 0,088	0,088	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	28,2508/300 = 0,094	0,094	0,0

Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения



1 – балка настила

Цель: Проверка режима расчета сопротивления сечений в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Проверить расчетное сечение прокатного двутаврового профиля для балок настила пролетом 6 м в балочной клетке нормального типа. Верхний пояс балок настила непрерывно раскреплен настилом.

Источник: Металлические конструкции: учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 183.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

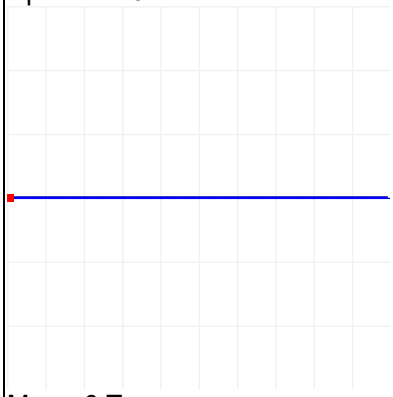
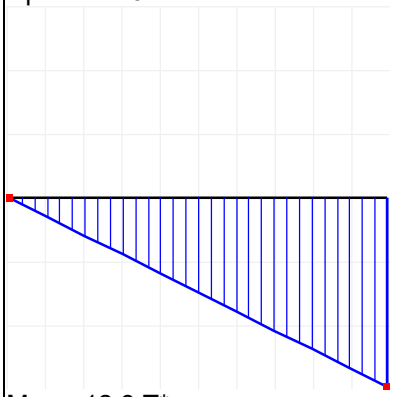
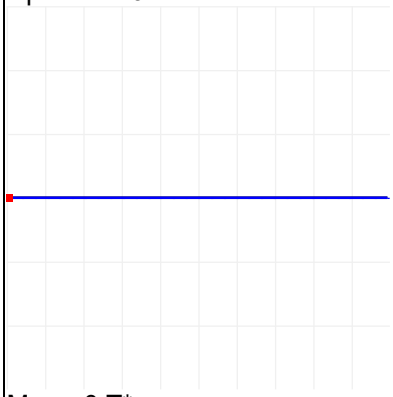
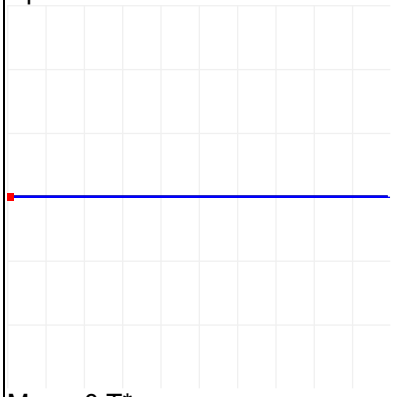
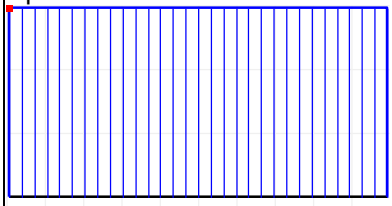
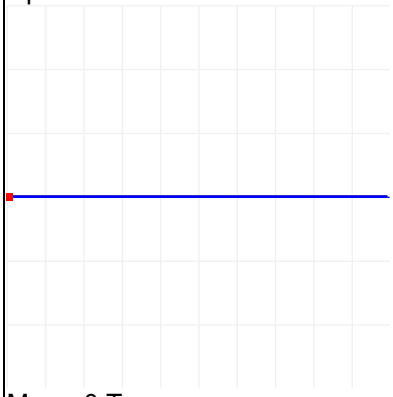
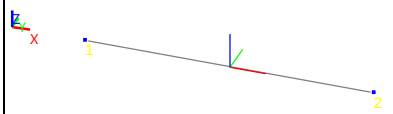
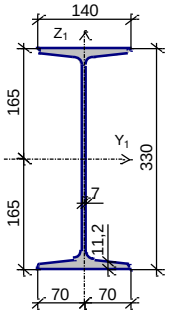
Имя файла с исходными данными:
4.2 SectionResistance_Example_4.2.spr;
отчет – 4.2 SectionResistance _Example_4.2.doc

Исходные данные:

a = *1,125* м	Шаг балок настила;
R_y = 23 кН/см^2,	Сталь марки С235;
M = 125,55 кНм = 12,798 тм	Расчетный изгибающий момент;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
l = 6 м	Пролет балки;
c_x = 1,1	Коэффициент для учета пластических деформаций;
W_x = 597 см^3	Принятый двутавр №33 по ГОСТ 8239-89.
$i_y = 13,524$ см, $i_z = 2,791$ см	

Параметры SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

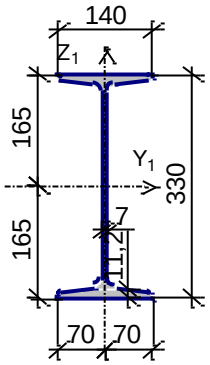
[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 12,8 Т*м Привязка 6 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 2,13 Т Привязка 0 м 	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент section

Сталь: С235
Длина элемента 6 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 250
Предельная гибкость для растянутых элементов: 250
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 1,125 м

Сечение



Профиль: Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 33

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	0,92
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,08
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,92
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	0,92
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,86
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,18

Коэффициент использования 0,92 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Необходимый момент сопротивления балки:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{125,55 \cdot 100}{23} = 545,8696 \text{ см}^3.$$

2. Гибкость элемента в плоскости действия момента:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{6 \cdot 100}{13,524} = 44,3656.$$

3. Гибкость элемента из плоскости действия момента:

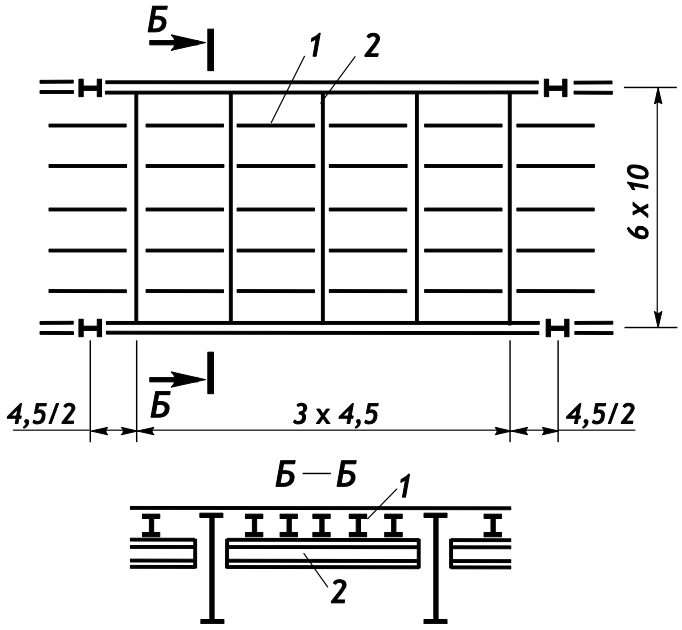
$$\lambda_z = \frac{l_{ef,z}}{i_z} = \frac{6 \cdot 100}{2,791} = 214,9767.$$

Сравнение решений:

Фактор	Ручной счет	SCAD	Отклонение, %
Прочность при действии изгибающего момента *M*y	545,8696 /597 = 0,914	0,915	–
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	0,915	–
Устойчивость плоской формы изгиба	–	0,915	–
Предельная гибкость в плоскости XoY	214,9767/250 = 0,86	0,86	–
Предельная гибкость в плоскости XoZ	44,3656/250 = 0,177	0,177	–

Комментарии:
Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой расчет возможен только при соответствующем оребрении стенки балки. В исходных данных примера балка настила задавалась без промежуточных ребер жесткости.

Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения



1 – балка настила; 2 – второстепенная балка

Цель: Проверка режима расчета сопротивления сечений в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Проверить расчетное сечение прокатного двутаврового профиля для балок настила пролетом 4,5 м в балочной клетке нормального типа. Верхний пояс балок настила непрерывно раскреплен настилом.

Источник: Металлические конструкции: учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 183.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

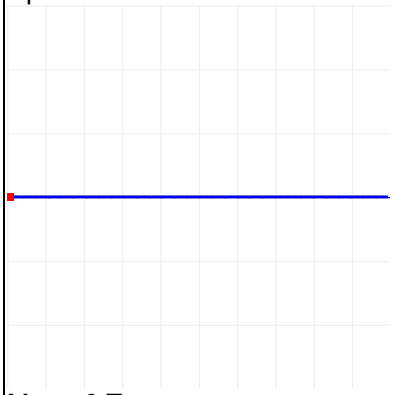
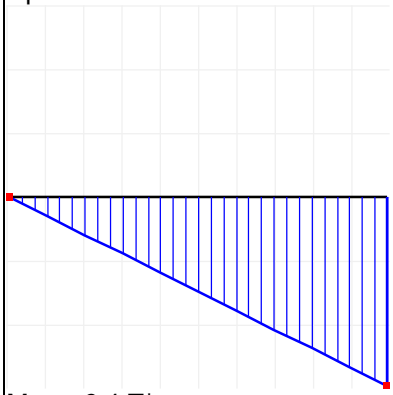
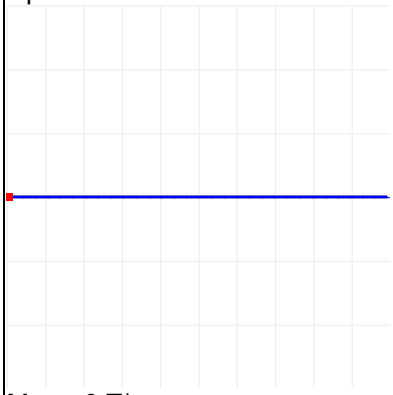
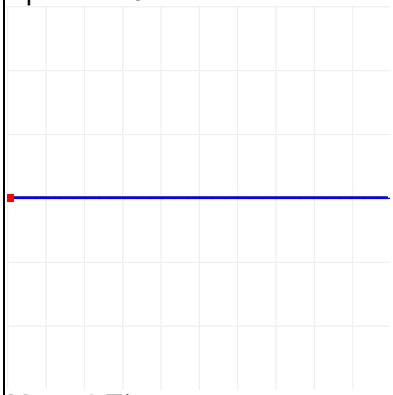
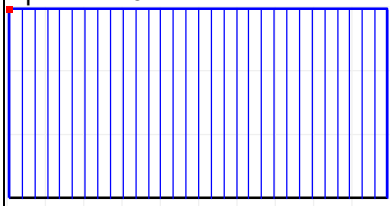
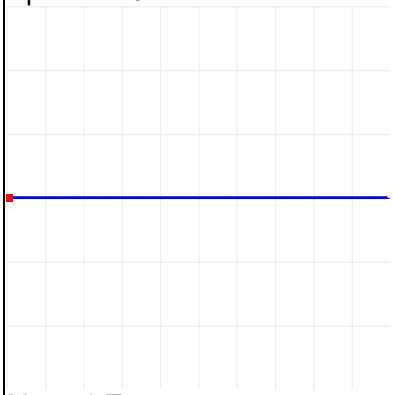
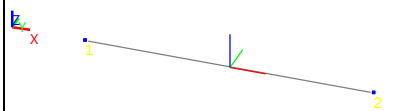
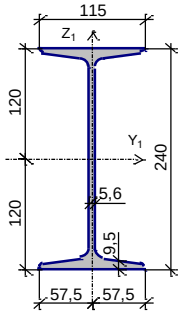
Имя файла с исходными данными:
4.3 SectionResistance_Example_4.3.spr;
отчет – 4.3 SectionResistance _Example_4.3.doc

Исходные данные:

R_y = 23 кН/см^2	Сталь марки С235;
M = 62,78 кНм = 6,4 тм	Расчетный изгибающий момент;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
l = 4,5 м	Пролет балки;
c_x = 1,1	Коэффициент для учета пластических;
деформаций	
W_x = 288,33 см^3	Принятый двутавр №24 по ГОСТ 8239-89.
$i_y = 9,971$ см, $i_z = 2,385$ см	

Параметры SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

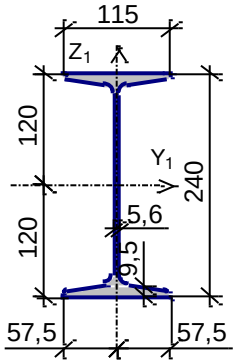
[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 6,4 Т*м Привязка 4,5 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 1,42 Т Привязка 0 м 	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 4,5 м Длина гибкой части 4,5 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент section

Сталь: С235
Длина элемента 4,5 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 250
Предельная гибкость для растянутых элементов: 250
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 1,125 м

Сечение



Профиль: Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 24

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	0,95
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,09
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,95
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	0,95
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,75
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,18

Коэффициент использования 0,95 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Необходимый момент сопротивления балки:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{62,78 \cdot 100}{23} = 272,9565 \text{ см}^3.$$

2. Гибкость элемента в плоскости действия момента:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{4,5 \cdot 100}{9,971} = 45,131.$$

3. Гибкость элемента из плоскости действия момента:

$$\lambda_z = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{4,5 \cdot 100}{2,385} = 188,679.$$

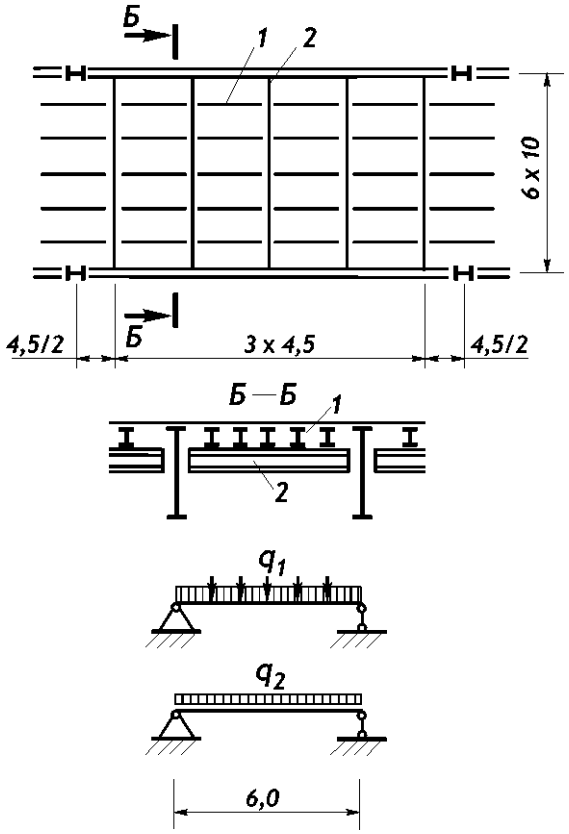
Сравнение решений:

Фактор	Ручной счет	SCAD	Отклонение, %
Прочность при действии изгибающего момента *M*y	272,9565/288,33 = 0,9467	0,947	0.0
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	0,947	0.0
Устойчивость плоской формы изгиба	–	0,947	0.0
Предельная гибкость в плоскости XoY	188,679/250 = 0,755	0,755	0.0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	45,131/250 = 0,1805	0,181	0.0

Комментарии:

1. Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой расчет возможен только при соответствующем оребрении стенки балки. В исходных данных примера балка настила задавалась без промежуточных ребер жесткости.
2. Проверка устойчивости плоской формы изгиба при автоматизированном расчете выполнялась согласно норм при $\varphi_b = 1,0$.

Расчет прочности и жесткости прокатной балки двутаврового сечения



1 – балка настила;
2 – второстепенная балка

Цель: Проверка режима расчета сопротивления сечений в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Проверить расчетное сечение прокатного двутаврового профиля для второстепенных балок пролетом 6 м в балочной клетке усложненного типа. Верхний пояс второстепенных балок раскреплен балками настила, расположенными с шагом 1 м.

Источник: Металлические конструкции: учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 183.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

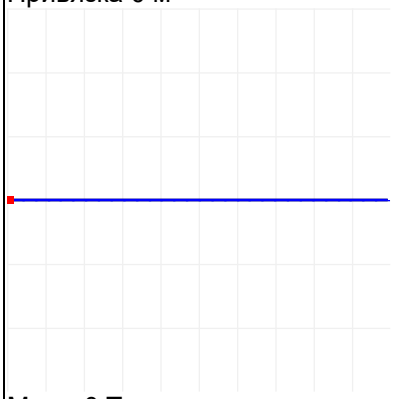
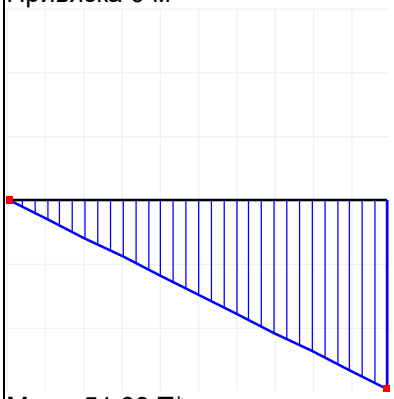
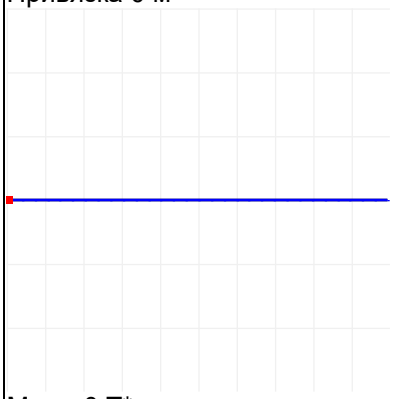
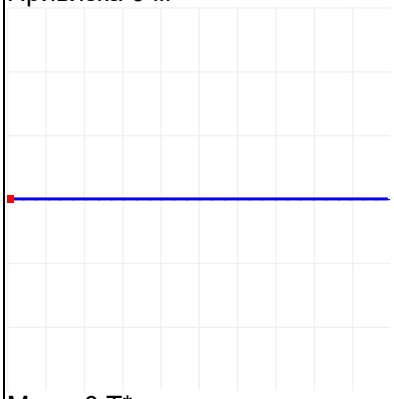
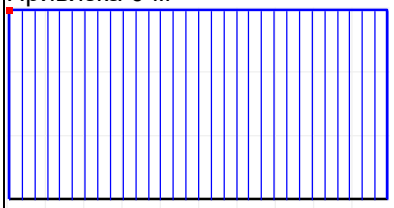
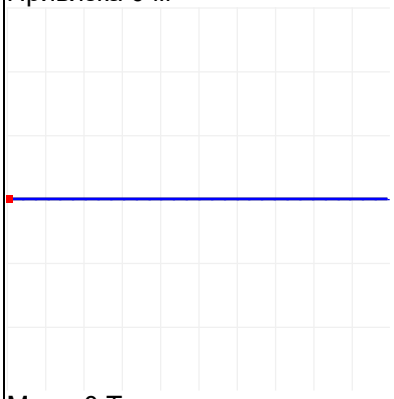
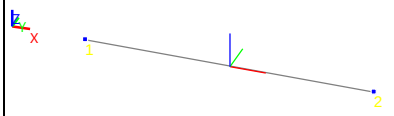
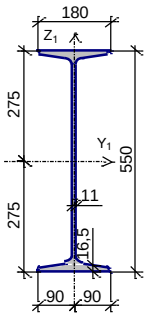
Имя файла с исходными данными:
4.4 SectionResistance_Example_4.4.spr;
отчет – 4.4 SectionResistance _Example_4.4.doc

Исходные данные:

R_y = 23 кН/см^2,	Сталь марки С235;
M = 508,5 кНм = 51,83486 тм	Расчетный изгибающий момент;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
l = 6 м	Пролет балки;
c_x = 1,1	Коэффициент для учета пластических деформаций;
W_x = 2034,982 см^3	Принятый двутавр №55 по ГОСТ 8239-89
$i_y = 21,777$ см, $i_z = 3,39$ см.	

Результаты SCAD Постпроцессора СТАЛЬ

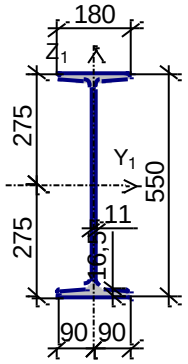
[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 51,83 Т*м Привязка 6 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 8,64 Т Привязка 0 м 	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент section

Сталь: С235
Длина элемента 6 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 250
Предельная гибкость для растянутых элементов: 250
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления на плоскости 1,125 м

Сечение



Профиль: Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 55

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	**1,09**
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,12
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	**1,09**
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	**1,09**
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,71
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,11

Коэффициент использования 1,09 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Необходимый момент сопротивления балки:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{508,5 \cdot 100}{23} = 2210,8696 \text{ см}^3.$$

2. Гибкость элемента в плоскости и из плоскости действия момента:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{6,0 \cdot 100}{21,777} = 27,552;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{6,0 \cdot 100}{3,39} = 176,99.$$

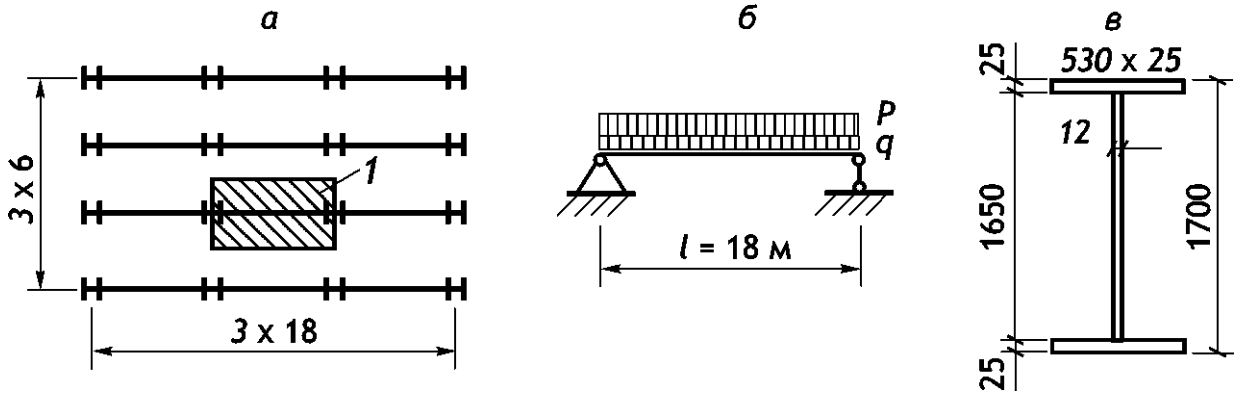
Сравнение решений:

Фактор	Ручной счет	SCAD	Отклонение, %
Прочность при действии изгибающего момента *M*y	2210,8696/2034,982 = 1,086	1,086	0,0
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	1,086	0,0
Устойчивость плоской формы изгиба	–	1,086	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoY	176,99/250 = 0,708	0,708	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	27,552/250 = 0,110	0,11	0,0

Комментарии:

1. Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой рачет возможен только при соответствующем оребрении стенки балки. В исходных данных примера балка настила задавалась без промежуточных ребер жесткости.
2. Проверка устойчивости плоской формы изгиба при автоматизированном расчете выполнялась согласно норм при $\varphi_b = 1,0$ для расчетной длины $l_{ef} = 1$м.

Расчет прочности и жесткости сварной балки двутаврового сечения



а – план перекрытия; б – расчетная схема главной балки; в – сечение балки; 1 – грузовая площадь

Цель: Проверка режима расчета сопротивления сечений в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Проверить расчетное сечение сварного двутаврового профиля для главных балок пролетом 18 м в балочной клетке нормального типа. Верхний пояс главных балок раскреплен второстепенными балками, расположенными с шагом 1,0 м.

Источник: Металлические конструкции: учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 192.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

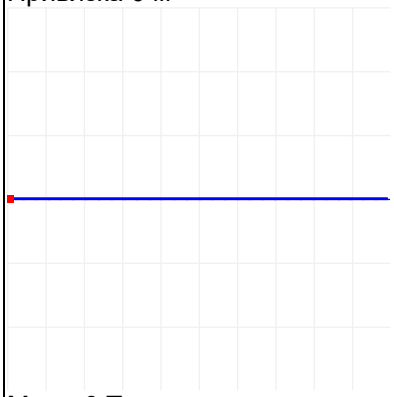
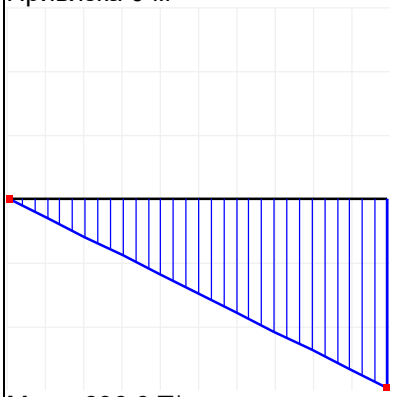
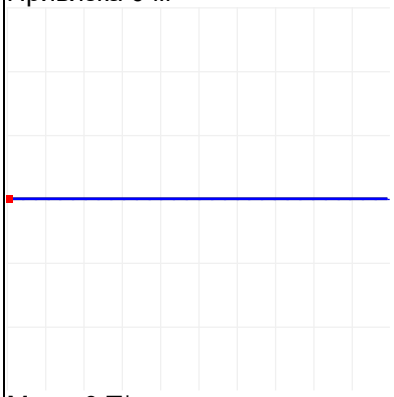
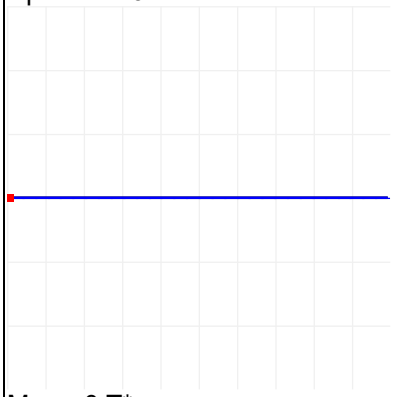
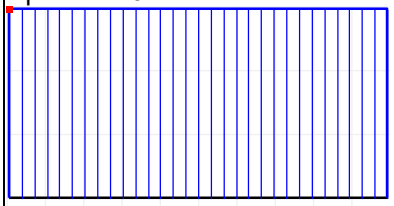
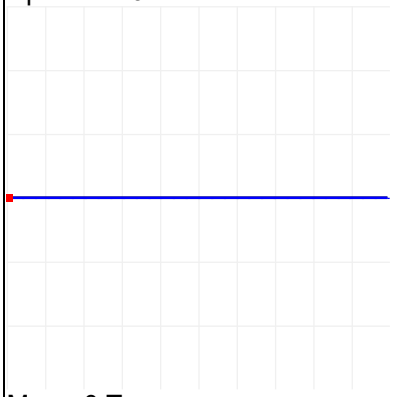
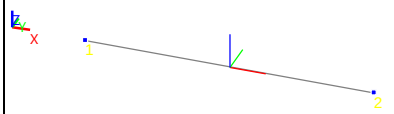
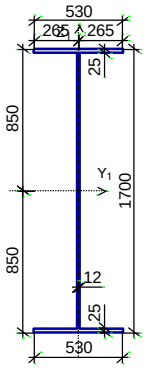
Имя файла с исходными данными:
4.5 SectionResistance_Example_4.5.spr;
отчет – 4.5 SectionResistance _Example_4.5.doc

Исходные данные:

R_y = 23 кН/см^2, R_s = 0,58*23=13,3 кН/см^2	Сталь марки С255 при толщине t>20 мм;
M = 6245 кНм = 636,595 тм	Расчетный изгибающий момент;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
l = 18 м	Пролет балки;
$I_y = 2308077{,}083$см^4	Геометрические характеристики для сварного
$W_y = 27153{,}848$см^3	двутавра со стенкой 1650×12 мм и полкой 530×25 мм.
$i_y = 70{,}605$см, $i_z = 11{,}577$ см	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

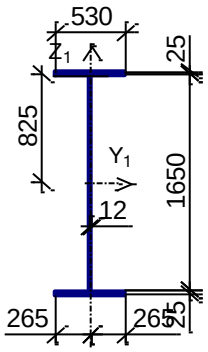
[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 636,6 Т*м Привязка 18 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 35,37 Т Привязка 0 м 	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 18 м Длина гибкой части 18 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент section

Сталь: С255
Длина элемента 18 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 250
Предельная гибкость для растянутых элементов: 250
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 1,125 м

Сечение



Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	1
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,14
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	1
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	1
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,62
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,1

Коэффициент использования 1 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Необходимый момент сопротивления балки:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{6245 \cdot 100}{23} = 27152{,}174 \text{ см}^3.$$

2. Гибкость элемента в плоскости и из плоскости действия момента:

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{18{,}0 \cdot 100}{70{,}605} = 25{,}4939;$$

$$\lambda_z = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{18{,}0 \cdot 100}{11{,}577} = 155{,}481.$$

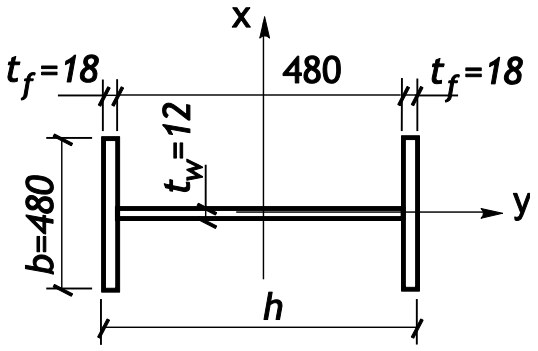
Сравнение решений:

Фактор	Ручной счет	SCAD	Отклонение, %
Прочность при действии изгибающего момента *M*y	27152,174/27153,848 = 1,0	1,0	0,0
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	1,0	0,0
Устойчивость плоской формы изгиба	–	1,0	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	25,4939/250 = 0,102	0,102	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoY	155,481/250 = 0,622	0,622	0,0

Комментарии:

1. Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой рачет возможен только при соответствующем оребрении стенки балки. В исходных данных примера балка настила задавалась без промежуточных ребер жесткости.
2. Проверка устойчивости плоской формы изгиба при автоматизированном расчете выполнялась согласно норм при $\varphi_b = 1,0$ для расчетной длины $l_{ef} = 1$м.

Расчет центрально-сжатой колонны из сварного двутаврового профиля



Цель: Проверка режима расчета сопротивления сечений в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить расчетное сечение сварного двутаврового профиля для центрально-сжатой колонны высотой 6,5 м.

Источник: Металлические конструкции : учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 256.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

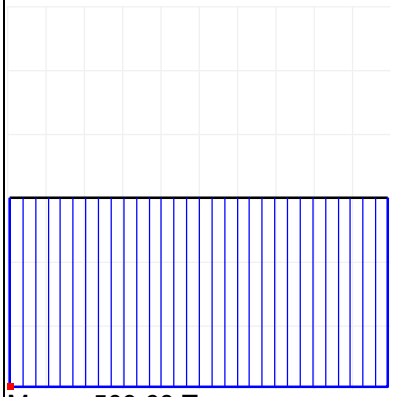
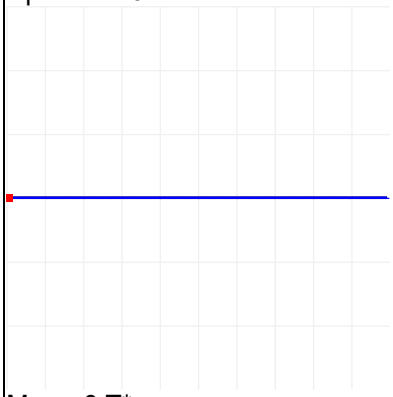
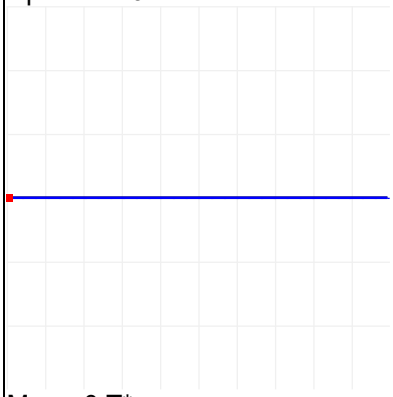
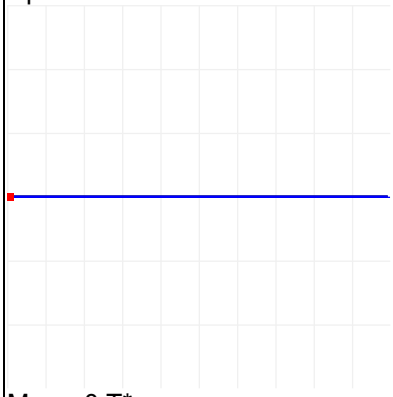
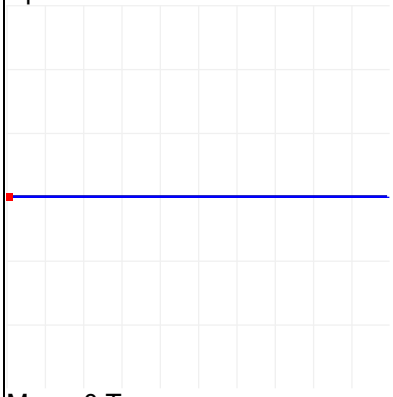
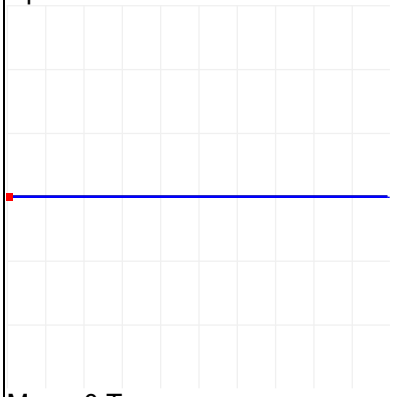
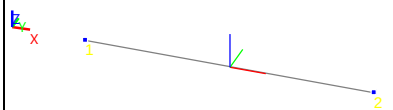
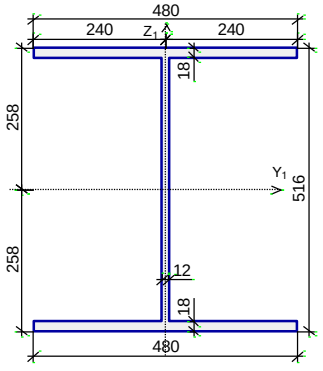
Имя файла с исходными данными:
4.6 SectionResistance_Example_4.6.spr;
отчет – 4.6 SectionResistance _Example_4.6.doc

Исходные данные:

R_y = 24 кН/см^2	Сталь марки С245;
l = 6,5 м	Высота колонны;
N = 5000 кН = 509,684 т	Расчетное продольное усилие сжатия;
μ = 0,7	Закрепление внизу жесткое, сверху шарнирное для обеих главных плоскостей инерции;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
$A = 230,4\,\text{см}^2$, $I_y = 118243,584\,\text{см}^4$, $I_z = 33184,512\,\text{см}^4$	Геометрические характеристики для сечения сварного двутавра со стенкой 480×12 мм и полками 480×18 мм;
$W_y = 4583,085\,\text{см}^3$, $W_z = 1382,688\,\text{см}^3$	
$i_y = 22,654$ см, $i_z = 12,001$ см	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

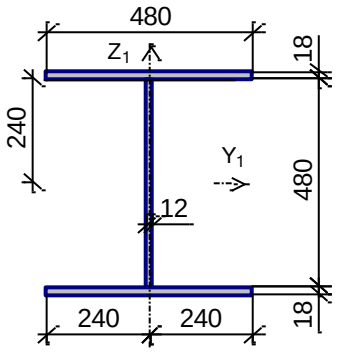
[Элемент № 1] Усилия

N  Макс. -509,68 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 6,5 м Длина гибкой части 6,5 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент section

Сталь: С245
Длина элемента 6,5 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180 - 60□
Предельная гибкость для растянутых элементов: 250
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 0,7
Коэффициент расчетной длины XoY -- 0,7
Расстояние между точками раскрепления на плоскости 6,5 м

Сечение



Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,9
п.5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoU)	**1**
п.5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XoZ (XoV)	0,94
п.5.1	Прочность при центральном сжатии/растяжении	0,9
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,316
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,162

Коэффициент использования 1 - Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoU)

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Несущая способность элемента при центральном сжатии/растяжении:

$$N = AR_y\gamma_c = 230,4\cdot 24\cdot 1 = 5529,6\,\text{кН}.$$

2. Гибкости элемента для обеих главных плоскотей инерции:

$$\lambda_y = \frac{l_{ef,y}}{i_y} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{22,654} = 20,08475;$$

$$\bar{\lambda}_z = \frac{l_{ef,z}}{i_z} = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{12,001} = 37,9135.$$

3. Условные гибкости элемента для обеих главных плоскотей инерции:

$$\bar{\lambda}_y = \frac{l_{ef,y}}{i_y}\sqrt{\frac{R_y}{E}} = \frac{\mu l}{i_y}\sqrt{\frac{R_y}{E}} = \frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{22,654}\sqrt{\frac{240}{2,06\cdot 10^5}} = 0,68555;$$

$$\bar{\lambda}_z = \frac{l_{ef,z}}{i_z}\sqrt{\frac{R_y}{E}} = \frac{\mu l}{i_z}\sqrt{\frac{R_y}{E}} = \frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{12,001}\sqrt{\frac{240}{2,06\cdot 10^5}} = 1,2941.$$

4. Коэффициенты продольного изгиба при центральном сжатии:

$$\varphi_y = 1-\left(0,073-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y\sqrt{\bar{\lambda}_y} = 1-\left(0,073-5,53\cdot\frac{240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 0,68555\sqrt{0,68555} = 0,9622;$$

$$\varphi_z = 1-\left(0,073-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_z\sqrt{\bar{\lambda}_z} = 1-\left(0,073-5,53\cdot\frac{240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 1,2941\sqrt{1,2941} = 0,902;$$

5. Несущая способность элемента при потере устойчивости:

$$N_{b,y} = \varphi_y AR_y\gamma_c = 0,9622\cdot 230,4\cdot 24\cdot 1 = 5320,58\,\text{кН};$$

$$N_{b,z} = \varphi_z AR_y\gamma_c = 0,902\cdot 230,4\cdot 24\cdot 1 = 4987,7\,\text{кН}.$$

6. Предельные гибкости:

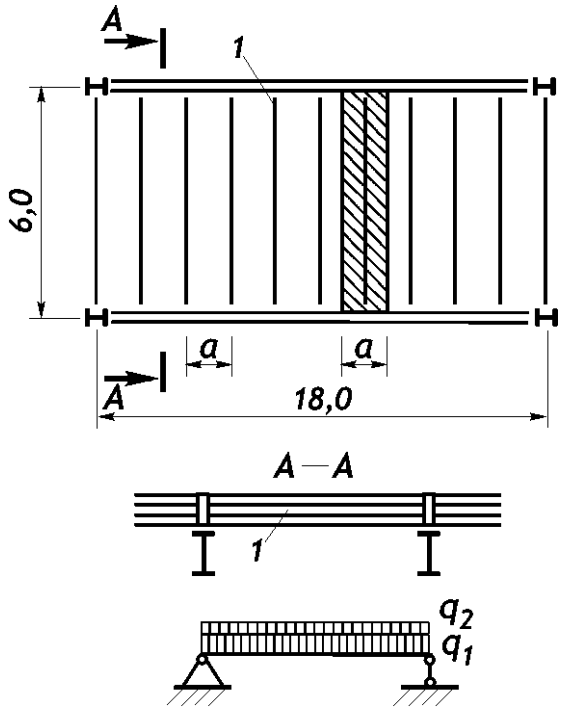
$$\lambda_{uy} = 180 - 60 \cdot \frac{N}{\varphi_y A R_y \gamma_c} = 180 - 60 \cdot \frac{5000}{0,9622 \cdot 230,4 \cdot 24 \cdot 1} = 123,615;$$

$$\lambda_{uz} = 180 - 60 \cdot \frac{N}{\varphi_z A R_y \gamma_c} = 180 - 60 \cdot \frac{5000}{0,902 \cdot 230,4 \cdot 24 \cdot 1} = 119,852.$$

Сравнение решений:

Фактор	**Источник**	**Ручной счет**	**SCAD**	**Отклонение, %**
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	5000/5529,6 = 0,904	0,904	0,0
Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoU)	23,69/24 = 0,987	5000/4987,7 = 1,002	1,002	0,0
Устойчивость при сжатии в плоскости XoZ (XoV)	–	5000/5320,58 = 0,94	0,94	0,0
Прочность при центральном сжатии/растяжении	0,904	5000/5529,6 = 0,904	0,904	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoY	–	37,9135/119,852 = 0,316	0,316	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	–	20,085/123,615 = 0,162	0,162	0,0

Расчет прочности и жесткости балок настила для нормального типа балочной клетки



1 – балка настила

Цель: Проверка расчета балок в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Проверить прокатный двутавровый профиль для балок настила пролетом 6 м в балочной клетке нормального типа. Верхний пояс балок настила непрерывно раскреплен по всей длине настилом.

Источник: Металлические конструкции: учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 183.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

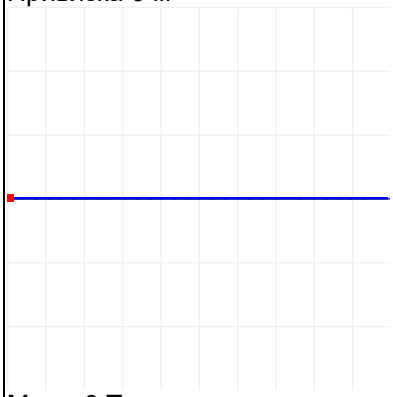
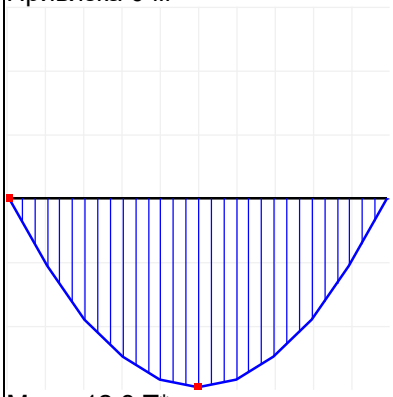
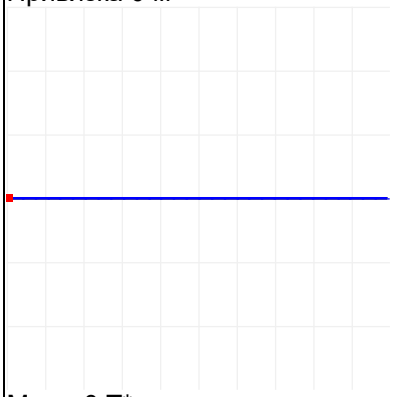
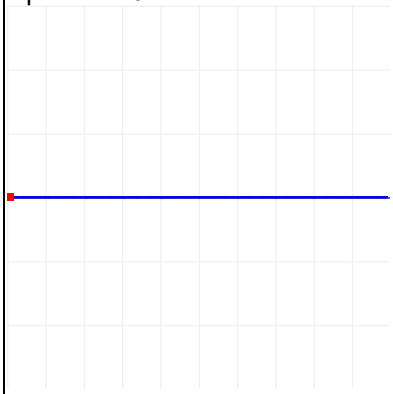
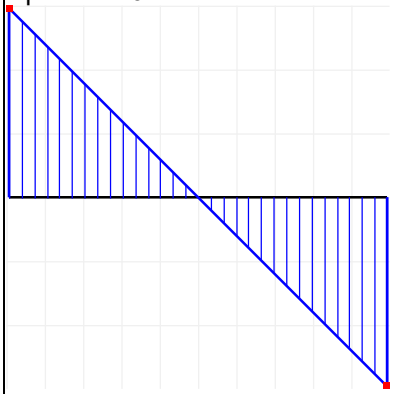
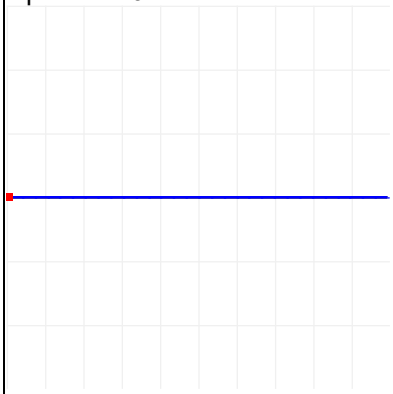
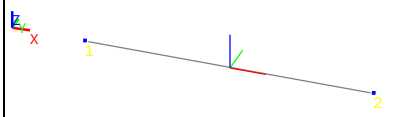
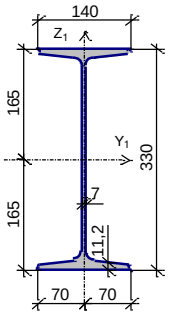
Имя файла с исходными данными:
3.1 Beam_Example_3.1.spr;
отчет – 3.1 Beam_Example_3.1.doc

Исходные данные:

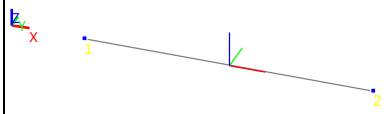
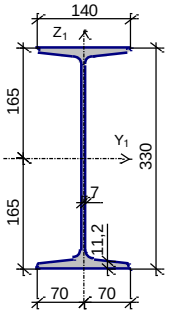
$a = 1{,}125$ м	Шаг балок настила
$q_н$ = (0,77 + 20) кН/м^2 ×1,125 м = 23,37 кН/м	Суммарная нормативная нагрузка
q_1 = 1,05×0,77 кН/м^2 ×1,125 м = 0,91 кН/м	Расчетная постоянная нагрузка
q_2 = 1,2×20 кН/м^2 ×1,125 м = 27 кН/м	Расчетная временная нагрузка
R_y = 23 кН/см^2	Сталь марки С235
l = 6 м	Пролет балки
$[f]$ = 1/250×6,0 м = 24 мм	Предельный прогиб
$\gamma_c = 1$	Коэффициент условий работы
W_x = 596,364 см^3	Принятый двутавр №33 по ГОСТ 8239-89
I_x = 9840 см^4, $S_x = 339$ см^3, $t_w = 7$ мм.	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 12,8 Т*м Привязка 3 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 8,54 Т Привязка 0 м  Макс. -8,54 Т Привязка 6 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1 - "1"	

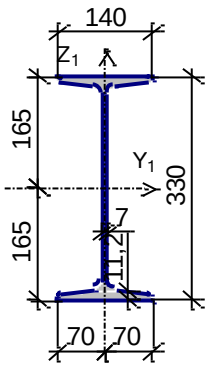
[Элемент № 1] Прогибы

X	Y	Z
		Макс. -23,23 мм Привязка 3 м
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1 - "1"	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент beam

Сталь: С235
Длина элемента 6 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 0,01 м

Сечение



Профиль: Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 33

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	0,92
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,31
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,92
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	0,92
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,72
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,15

Коэффициент использования 0,92 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет:

1. Расчетный изгибающий момент и поперечная сила:

$$M_{\max} = \frac{q_{\Sigma} l^2}{8} = \frac{(0.91+27)\cdot 6.0^2}{8} = 125.593 \text{ кНм};$$

$$Q_{\max} = \frac{q_{\Sigma} l}{2} = \frac{(0.91+27)\cdot 6.0}{2} = 83,73 \text{ кН}.$$

2. Необходимый момент сопротивления балки в предположении упругих деформаций стали:

$$W = \frac{M_{\max}}{R_y} = \frac{125.593\cdot 100}{23} = 546.057 \text{ см}^3.$$

3. Максимальный прогиб, возникающий в середине пролета балки:

$$f_{\max} = \frac{5}{384}\cdot\frac{q_н l^4}{EI_x} = \frac{5}{384}\cdot\frac{23,37\cdot 6^4}{2,06\cdot 10^5\cdot 10^3\cdot 9840\cdot 10^{-8}} = 19,46 \text{ мм}.$$

4. Проверка максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{I_x t_w} = \frac{83,73\cdot 339}{9840\cdot 0,7} = 4,12577 \text{ кН/см}^2 < R_s\gamma_c = 0,58\cdot 23 = 13,34 \text{ кН/см}^2.$$

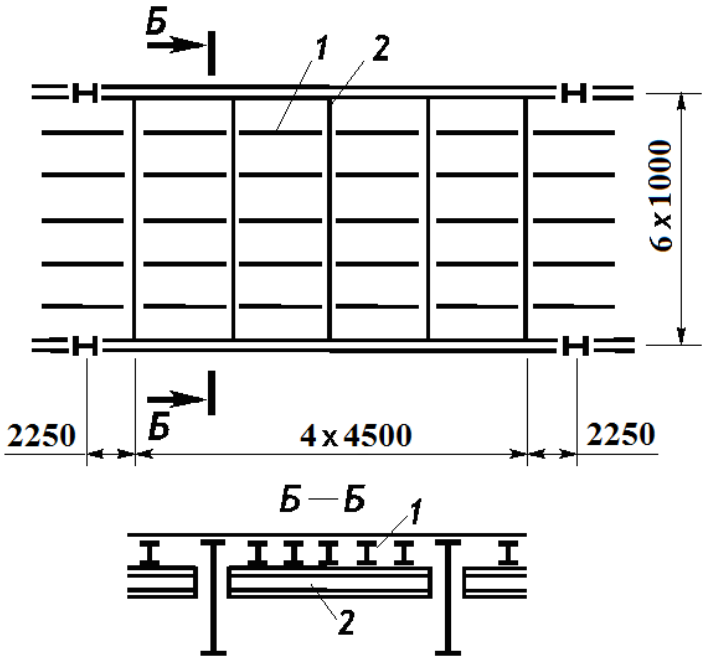
Сравнение решений:

Фактор	Прочность при действии поперечной силы	Прочность при действии изгибающего момента	Устойчивость плоской формы изгиба при действии момента	Максимальный прогиб
Ручной счет	4,126/13,34 = 0,309	546,06/596,36 = 0,916	–	19,46/24 = 0,81
SCAD	0,309	0,916	0,916	23,23/1,1945/24 = 0,81
Отклонение, %	0,0	0,0	0,0	0,0

Комментарии:

1. Проверка общей устойчивости балки при ручном счете не выполнялась, поскольку сжатый пояс балки раскреплен от поперечных смещений из плоскости изгиба приваренным настилом.
2. Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой расчет возможен только при соответствующем оребрении стенки балки. В исходных данных примера балка настила задавалась без промежуточных ребер жесткости.

Расчет прочности и жесткости балок настила для усложненного типа балочной клетки



1 – балка настила
2 – второстепенная балка

Цель: Проверка расчета балок в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Подобрать прокатный двутавровый профиль для балок настила пролетом 4,5 м в балочной клетке усложненного типа. Верхний пояс балок настила непрерывно раскреплен по всей длине настилом.

Источник: Металлические конструкции : учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 183.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

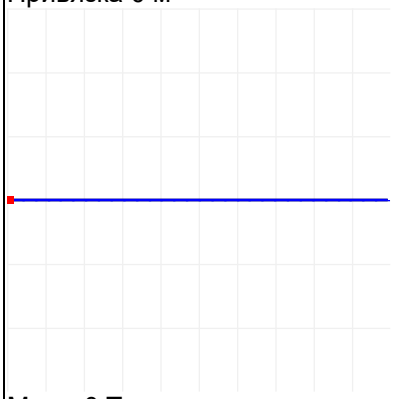
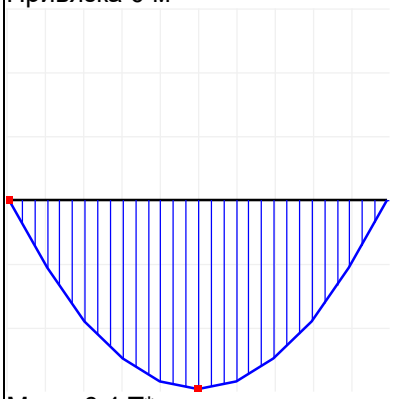
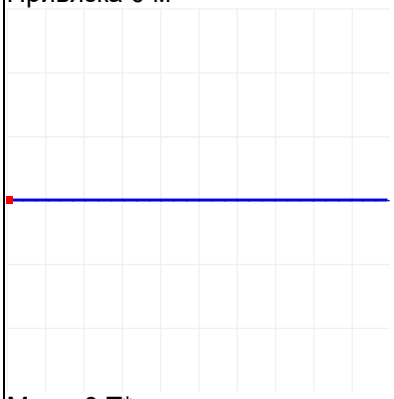
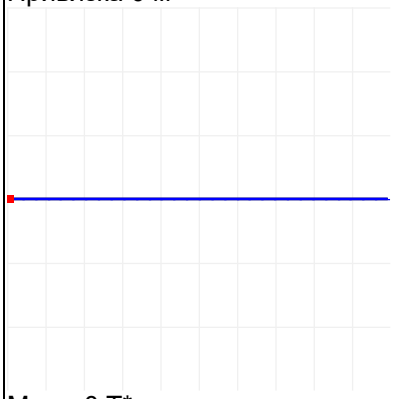
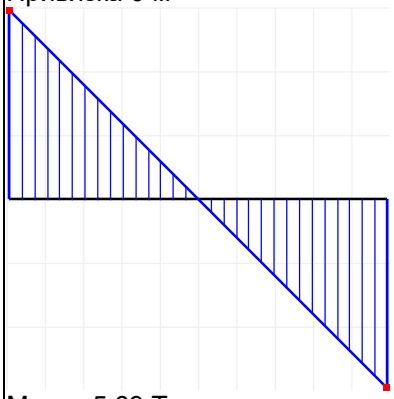
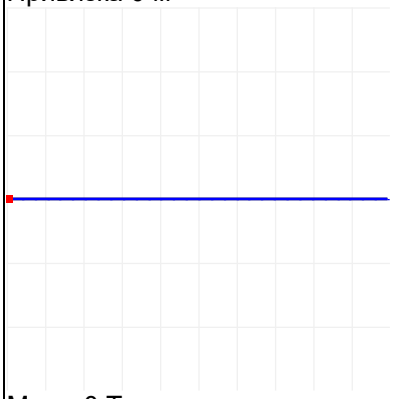
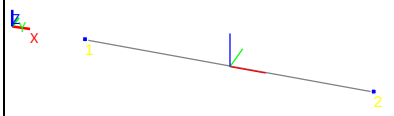
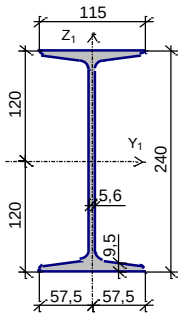
Имя файла с исходными данными:
3.2 Beam_Example_3.2.spr;
отчет – 3.2 Beam_Example_3.2.doc

Исходные данные:

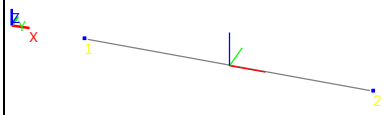
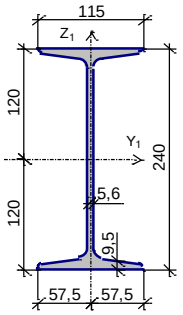
$a = 1{,}0$ м	Шаг балок настила;
$q_н$ = (0,77 + 20) кН/м^2 ×1 м = 20,77 кН/м	Суммарная нормативная нагрузка;
q_1 = 1,05×0,77 кН/м^2 ×1 м = 0,8085 кН/м	Расчетная постоянная нагрузка;
q_2 = 1,2×20 кН/м^2 ×1 м = 24 кН/м	Расчетная временная нагрузка;
R_y = 23 кН/см^2,	Сталь марки С235;
l = 4,5 м	Пролет балки;
$[f]$ = 1/250×4,5 м = 18 мм	Предельный прогиб;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
W_x = 288,33 см^3	Принятый двутавр №24 по ГОСТ 8239-89.
I_x = 3460 см^4	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 6,4 Т*м Привязка 2,25 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 5,69 Т Привязка 0 м  Макс. -5,69 Т Привязка 4,5 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 4,5 м Длина гибкой части 4,5 м Загружение L1 - "1"	

[Элемент № 1] Прогибы

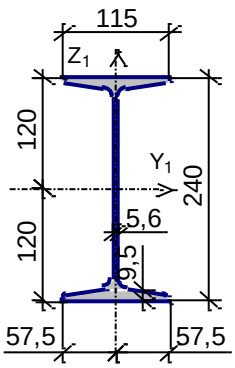
X	Y	Z
		Макс. -18,58 мм Привязка 2,25 м
	Длина стержня 4,5 м Длина гибкой части 4,5 м Загружение L1 - "1"	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент *beam*

Сталь: С235

Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент условий работы 1
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Длина элемента 4,5 м
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления на плоскости 0,01 м

Сечение



Профиль: Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 24

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	0,95
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,35
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,95
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	0,95
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,63
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,15

Коэффициент использования 0,95 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет:

1. Расчетный изгибающий момент, действующий в пролете балки:

$$M_{\max} = \frac{q_{\Sigma} l^2}{8} = \frac{(0,8085 + 24) \cdot 4,5^2}{8} = 62,7965 \text{ кНм}.$$

2. Необходимый момент сопротивления балки в предположении упругих деформаций стали:

$$W = \frac{M_{\max}}{R_y} = \frac{62,7965 \cdot 100}{23} = 273,028 \text{ см}^3.$$

3. Максимальный прогиб, возникающий в середине пролета балки:

$$f_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_н l^4}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{20,77 \cdot 4,5^4}{2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 15,56 \text{ мм}.$$

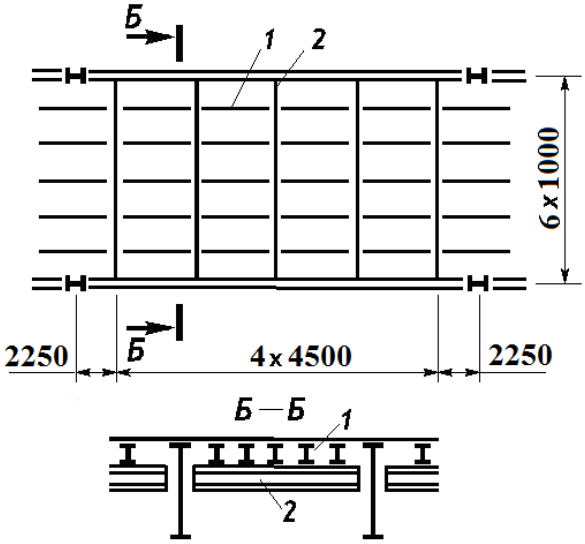
Сравнение решений:

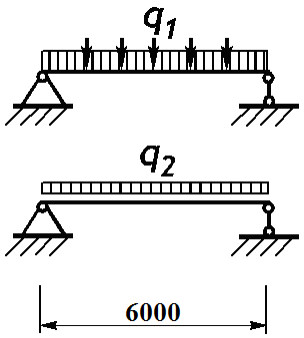
Фактор	Прочность при действии поперечной силы	Прочность при действии изгибающего момента	Устойчивость плоской формы изгиба при действии момента	Максимальный прогиб
Ручной счет	не определено	273,028/288,33 = 0,947	не определено	15,56/18 = 0,864
SCAD	0,352	0,947	0,947	18,58/1,1944/18 = 0,864
Отклонение, %	0,0	0,0	0,0	0,0

Комментарии:

1. Проверка касательных напряжений при ручном счете не произведена из-за отсутствия ослаблений и относительно большой толщины стенок балки.
2. Проверка общей устойчивости балки при ручном счете не произведена, поскольку сжатый пояс балки раскреплен от поперечных смещений из плоскости изгиба приваренным настилом.
3. Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой расчет возможен только при соответствующем оребрении стенки балки. В исходных данных примера балка настила задавалась без промежуточных ребер жесткости.

Расчет прочности и жесткости второстепенных балок для усложненного типа балочной клетки





1 – балка настила
2 – второстепенная балка

Цель: Проверка расчета балок в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Подобрать прокатный двутавровый профиль для второстепенных балок пролетом 6 м в балочной клетке усложненного типа. Верхний пояс второстепенных балок раскреплен по длине балками настила, расположенными с шагом 1 м.

Источник: Металлические конструкции: учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 183.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

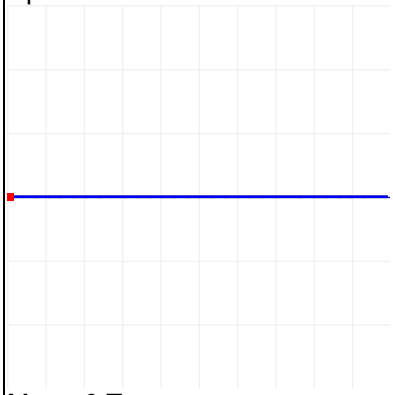
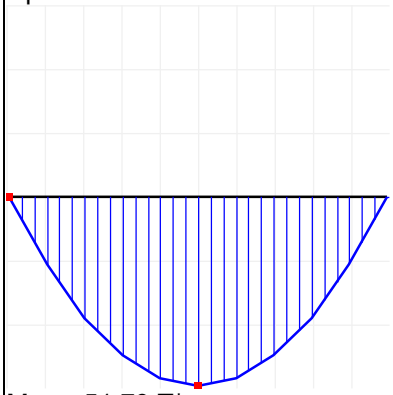
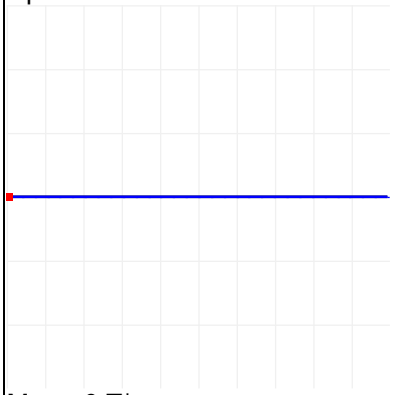
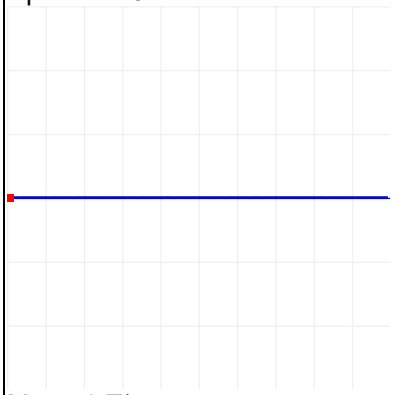
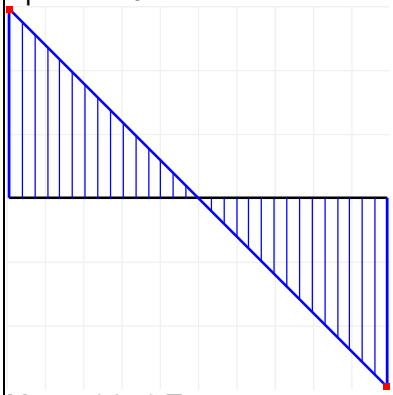
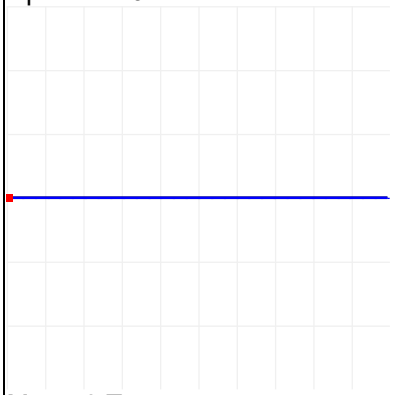
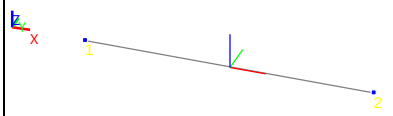
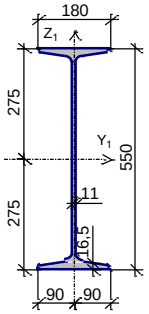
Имя файла с исходными данными:
3.3 Beam_Example_3.3.spr;
отчет – 3.3 Beam_Example_3.3.doc

Исходные данные:

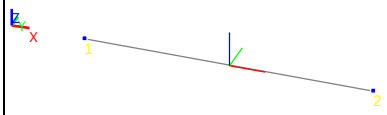
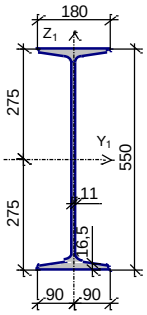
a = 4,5 м	Шаг второстепенных балок;
$q_н$ = (0,77 + 27,3/102 + 20) кН/м^2 × 4,5 м = 94,67 кН/м	Суммарная нормативная нагрузка;
q_1 = 1,05×(0,77 + 27,3/102) кН/м^2 × 4,5 м = 4,9 кН/м	Расчетная постоянная нагрузка;
q_2 = 1,2×20 кН/м^2 × 4,5 м = 108 кН/м	Расчетная временная нагрузка;
R_y = 23 кН/см^2,	Сталь марки С235;
l = 6,0 м	Пролет балки;
$[f]$ = 1/250×6,0 м = 24 мм	Предельный прогиб;
γ_c = 1	Коэффициент условий работы;
W_y = 2034,98 см^3	Принятый двутавр №55 по ГОСТ 8239-89.
I_y = 55962 см^4	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

[Элемент № 1] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 51,79 Т*м Привязка 3 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 34,53 Т Привязка 0 м  Макс. -34,53 Т Привязка 6 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1 - "1"	

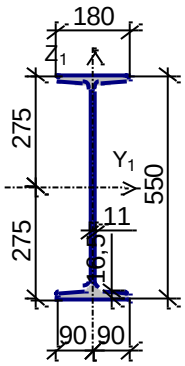
[Элемент № 1] Прогибы

X	Y	Z
		Макс. -16,53 мм Привязка 3 м
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1 - "1"	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент beam

Сталь: С235
Длина элемента 6 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 0,01 м

Сечение



Профиль: Двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 55

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	**1,09**
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,49
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	**1,09**
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	**1,09**
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,59
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,09

Коэффициент использования 1,09 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет:

1. Расчетный изгибающий момент, действующий в пролете балки:

$$M_{\max} = \frac{q_{\Sigma} l^2}{8} = \frac{(4,9+108)\cdot 6,0^2}{8} = 508,05 \text{ кНм}.$$

2. Необходимый момент сопротивления балки в предположении упругих деформаций стали:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y} = \frac{508,05\cdot 100}{23} = 2208,913 \text{ см}^3.$$

3. Максимальный прогиб, возникающий в середине пролета балки:

$$f_{\max} = \frac{5}{384}\cdot\frac{q_н l^4}{EI_y} = \frac{5}{384}\cdot\frac{94,67\cdot 6,0^4}{2,06\cdot 10^5\cdot 10^3\cdot 55962\cdot 10^{-8}} = 13,858 \text{ мм}.$$

4. Условная предельная гибкость сжатого пояса балки:

$$\bar{\lambda}_{ub} = 0,35 + 0,0032\frac{b_f}{t_f} + \left(0,76 - 0,02\frac{b_f}{t_f}\right)\frac{b_f}{h_f} = 0,35 + 0,0032\frac{180}{16,5} +$$

$$\left(0,76 - 0,02\frac{180}{16,5}\right)\frac{180}{533,5} = 0,5677.$$

5. Условная фактическая гибкость сжатого пояса балки:

$$\bar{\lambda}_b = \frac{l_{ef}}{b_f}\sqrt{\frac{R_y}{E}} = \frac{1000}{180}\sqrt{\frac{230}{2,06\cdot 10^5}} = 0,1856 < \bar{\lambda}_{ub} = 0,5677$$ – проверка устойчивости не требуется.

Сравнение решений:

Фактор	Прочность при действии поперечной силы	Прочность при действии изгибающего момента	Устойчивость плоской формы изгиба при действии момента	Максимальный прогиб
Ручной счет	не определено	2208,913/2034,98 =1,085	проверка не требуется	13,858/24 = 0,577
SCAD	0,488	1,085	1,085	16,53/1,1925/24 = 0,577
Отклонение, %	0,0	0,0	0,0	0,0

Комментарии:

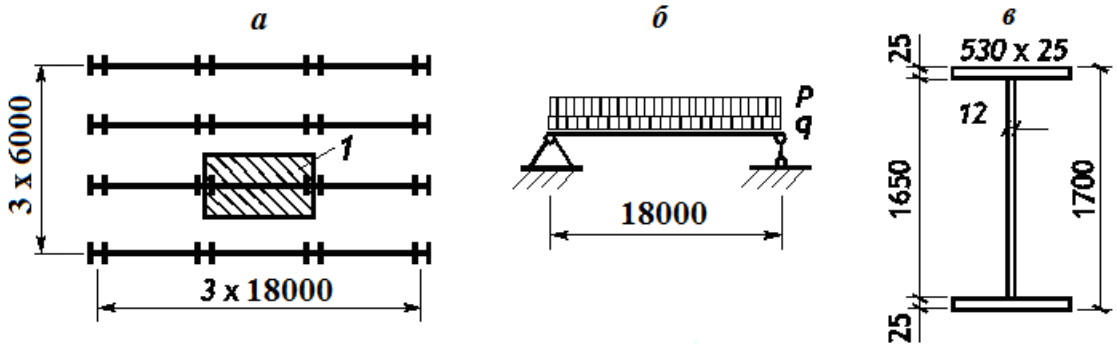
1. Проверка касательных напряжений при ручном счете не выполнялась из-за отсутствия ослаблений и относительно большой толщины стенок балки.

2. Проверка устойчивости плоской формы изгиба балки при автоматизированном расчете выполнялась согласно норм при $\varphi_b = 1,0$.

3. Проверка прочности балки с учетом развития ограниченных пластических деформаций не выпонялась, поскольку согласно норм такой расчет возможен только при соответствующем

оребрении стенки балки. В исходных данных примера для второстепенной балки подбиралась прокатная балка без промежуточных ребер жесткости.

Расчет прочности и жесткости главных балок балочных клеток



а – план перекрытия; б – расчетная схема главной балки; в – сечение балки; 1 – грузовая площадь

Цель: Проверка расчета балок в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Подобрать сварной двутавровый профиль для главных балок пролетом 18,0 м в балочной клетке нормального типа. Верхний пояс главных балок раскреплен по длине балками настила, расположенными с шагом 1 м.

Источник: Металлические конструкции : учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 192.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

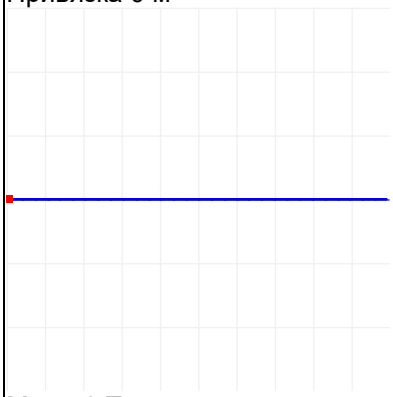
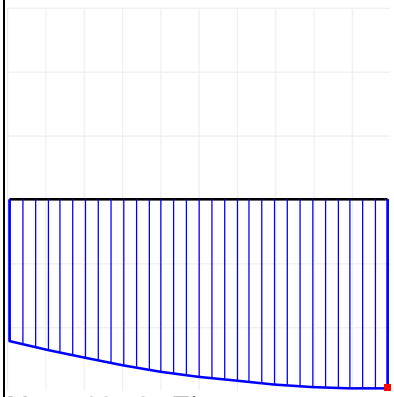
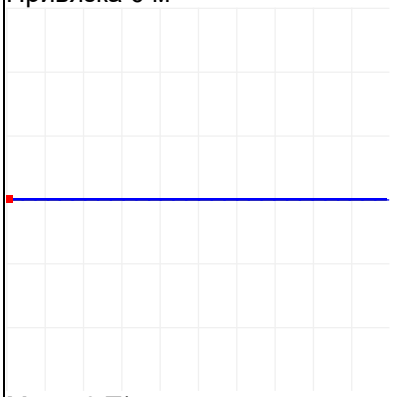
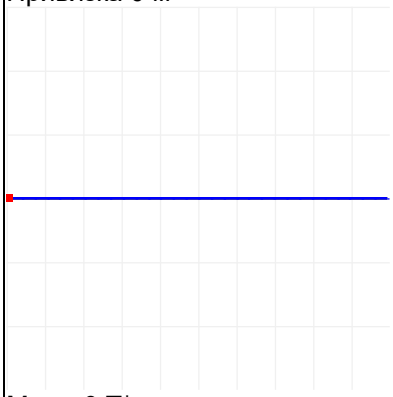
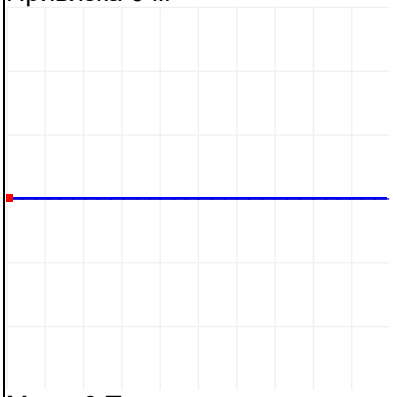
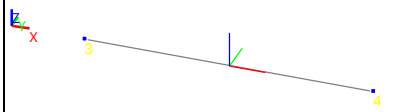
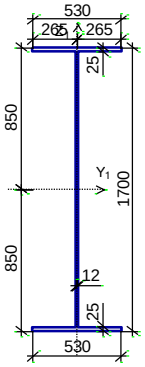
Имя файла с исходными данными:
3.4 Beam_Example_3.4.spr;
отчет – 3.4 Beam_Example_3.4.doc

Исходные данные:

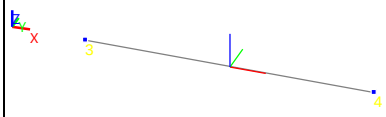
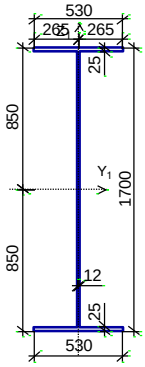
a = 6 м	Шаг главных балок
g_1 = 1,16 кН/м^2	Масса настила и балок настила
p = 20 кН/м^2	Временная (полезная) нагрузка
$q_н$ = 127,099 кН/м	Суммарная нормативная нагрузка на балку
q_1 = 1,05*1,16 кН/м^2 * 6 м*1,02 = 7,454 кН/м	Расчетная постоянная нагрузка (коэффициент 1,02 учитывает собственный вес главной балки)
q_2 = 1,2*20 кН/м^2 * 6 м = 144,0 кН/м	Расчетная полезная нагрузка
l = 18 м	Пролет главной балки
R_y = 23 кН/см^2	Сталь марки С255 при толщине t>20 мм
R_s = 0,58*23=13,34 кН/см^2	
$[f] = l/400$ = 45 мм	Предельный прогиб
$b_p \times t_p = 530 \times 20$ мм	Сечение опорного ребра
$k_p = 6$ мм	Катет углового шва в сварном соединении опорного ребра с балкой
γ_c = 1	Коэффициент условий работы
$W_y = 27153,85$ см^3	Геометрические характеристики для сварного двутавра с полками 530×25 мм и стенкой 1650×12 мм
$I_y = 2308077,083$ см^4	
$S_y = 15180,625$ см^3	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

[Элемент № 3] Усилия

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y**  Макс. 625,27 Т*м Привязка 4,5 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 69,47 Т Привязка 0 м Макс. 0 Т Привязка 4,5 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 4,5 м Длина гибкой части 4,5 м Загружение L1 - "1"	

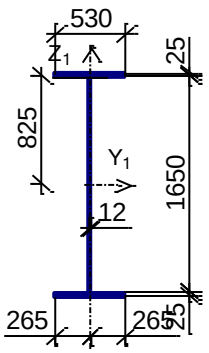
[Элемент № 3] Прогибы

X	Y	Z
		Макс. -43,54 мм Привязка 4,5 м
	Длина стержня 4,5 м Длина гибкой части 4,5 м Загружение L1 - "1"	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент main beam

Сталь: С255
Длина элемента 18 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1
Расстояние между точками раскрепления из плоскости 1 м

Сечение



Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
п.5.12	Прочность при действии изгибающего момента My	0,98
пп.5.12,5.18	Прочность при действии поперечной силы Qz	0,56
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,98
п.5.15	Устойчивость плоской формы изгиба	0,98
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,52
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,08

Коэффициент использования 0,98 - Прочность при действии изгибающего момента My

Ручной расчет (СНиП II-23-81)*

1. Максимальный изгибающий момент и поперечная сила, действующие в расчетных сечениях балки:

$$M_{\max} = \frac{q_{\Sigma} l^2}{8} = \frac{(7,454+144)\cdot 18,0^2}{8} = 6133,887 \text{ кНм}.$$

$$Q_{\max} = \frac{q_{\Sigma} l}{2} = \frac{(7,454+144)\cdot 18,0}{2} = 1363,086 \text{ кН}.$$

2. Необходимый момент сопротивления балки:

$$W_{nes} = \frac{M_{\max}}{R_y \gamma_c} = \frac{6133,887\cdot 100}{23} = 26669,074 \text{ см}^3.$$

3. Максимальные касательные напряжения, возникающие в опорном сечении балки:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_y}{I_y t_w} = \frac{1363,086\cdot 15180,625}{2308077,083\cdot 1,2} = 7,471 \text{ кН/см}^2.$$

4. Максимальный прогиб, возникающий в середине пролета балки:

$$f_{\max} = \frac{5}{384}\cdot\frac{q_н l^4}{EI_y} = \frac{5}{384}\cdot\frac{127,099\cdot 18,0^4}{2,06\cdot 10^5\cdot 10^3\cdot 2308077,083\cdot 10^{-8}} = 36,539 \text{ мм}.$$

5. Условная предельная гибкость сжатого пояса балки:

$$\bar{\lambda}_{ub} = 0,35 + 0,0032\frac{b_f}{t_f} + \left(0,76 - 0,02\frac{b_f}{t_f}\right)\frac{b_f}{h_f} = 0,35 + 0,0032\frac{530}{25} + \left(0,76 - 0,02\frac{530}{25}\right)\frac{530}{1675} = 0,524$$

6. Условная фактическая гибкость сжатого пояса балки:

$\bar{\lambda}_b = \frac{l_{ef}}{b_f}\sqrt{\frac{R_y}{E}} = \frac{1000}{530}\sqrt{\frac{230}{2,06\cdot 10^5}} = 0,063 < \bar{\lambda}_{ub} = 0,524$ – проверка устойчивости не требуется.

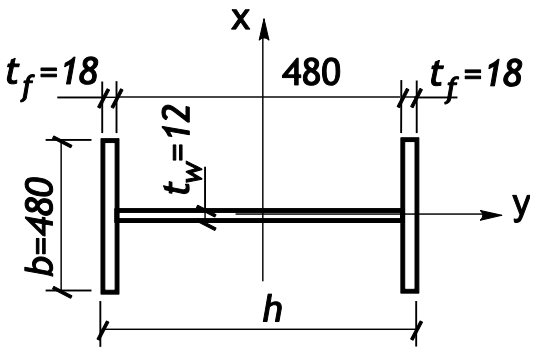
Сравнение решений:

Фактор	Ручной счет	SCAD	Отклонение, %
Прочность при действии поперечной силы	7,471/13,34 = 0,56	0,56	0,0
Прочность при действии изгибающего момента	26669,074/ 27153,85 =0,982	0,982	0,0
Устойчивость плоской формы изгиба при действии момента	–	0,982	0,0

Максимальный прогиб	36,539/45 = 0,812	43,54/1,1916/45= 0,812	0,0

Комментарии:
Проверка устойчивости плоской формы изгиба балки при автоматизированном расчете выполнялась согласно норм при $\varphi_b = 1,0$.

Расчет центрально-сжатой колонны сварного двутаврового сечения



Цель: Проверка режима расчета стоек сплошного сечения в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD.

Задача: Проверить расчетное сечение сварного двутаврового профиля для центрально-сжатой стойки высотой 6,5 м.

Источник: Металлические конструкции : учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. - 13-е изд., испр. - М. : Издательский центр "Академия", 2011. С 256.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010.

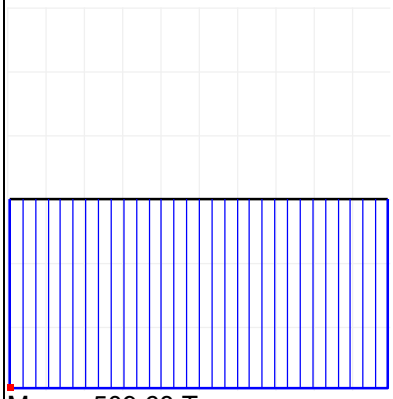
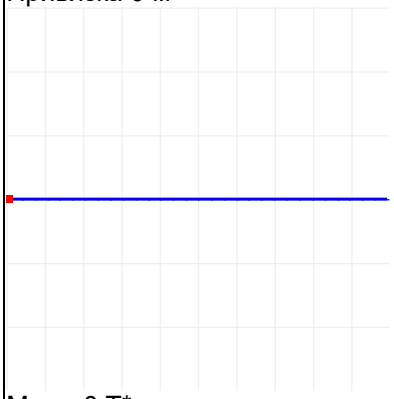
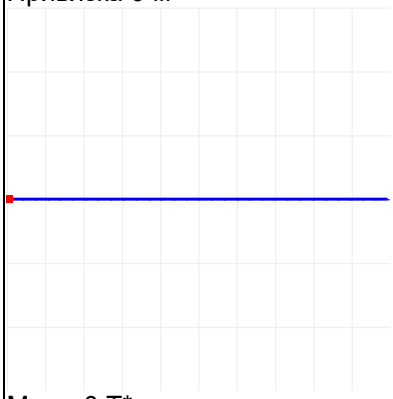
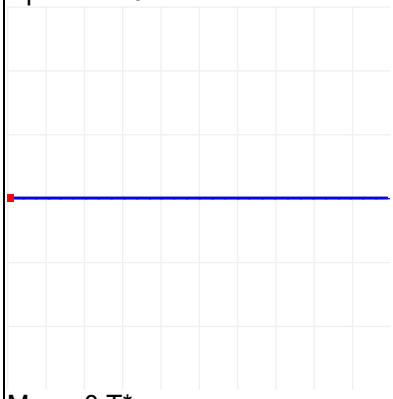
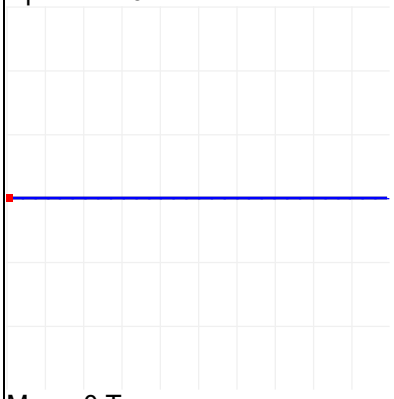
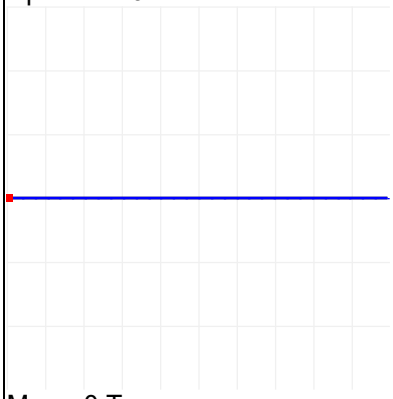
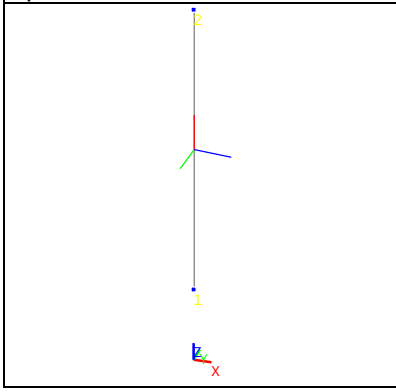
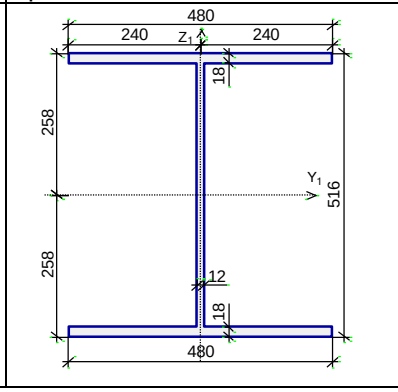
Имя файла с исходными данными:
5.1 Column_Example_5.1.spr;
отчет – 5.1 Column_Example_5.1.doc

Исходные данные:

l = 6,5 м	Высота колонны
μ = 0,7	Закрепление внизу жесткое, сверху шарнирное
N = 5000 кН	Расчетное сжимающее усилие
γ_c = 1	Коэффициент условий работы
R_y = 24 кН/см^2	Сталь марки С245
$A = 230,4\,\text{см}^2$	Геометрические характеристики
$I_x = 118243,584\,\text{см}^4,\ I_y = 33184,512\,\text{см}^4$	принятого сечения
$i_x = 22,654\,\text{см},\ i_y = 12,001\,\text{см}$	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

[Элемент № 1] Усилия

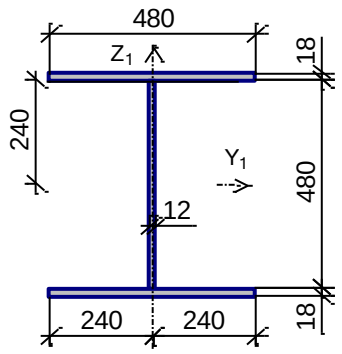
N  Макс. -509,68 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 6,5 м Длина гибкой части 6,5 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент column

Сталь: С245
Длина элемента 6,5 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180 - 60
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 0,7
Коэффициент расчетной длины XoY -- 0,7

Расстояние между точками раскрепления из плоскости 0 м

Сечение



Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,9
п.5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoU)	**1**
п.5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XoZ (XoV))	0,94
п.5.1	Прочность при центральном сжатии/растяжении	0,9
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoY	0,316
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XoZ	0,162

Коэффициент использования 1 - Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoU)

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Проверка прочности принятого сечения колонны:

$$\frac{N}{AR_y\gamma_c}=\frac{5000}{230,4\cdot 24\cdot 1}=0,904.$$

2. Гибкости колонны:

$$\lambda_x=\frac{l_{ef,x}}{i_x}=\frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{22,654}=20,08475;$$

$$\lambda_y=\frac{l_{ef,y}}{i_y}=\frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{12,001}=37,9135.$$

3. Условные гибкости колонны:

$$\bar{\lambda}_x=\frac{l_{ef,x}}{i_x}\sqrt{\frac{R_y}{E}}=\frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{22,654}\sqrt{\frac{240}{2,06\cdot 10^5}}=0,68555;$$

$$\bar{\lambda}_y=\frac{l_{ef,y}}{i_y}\sqrt{\frac{R_y}{E}}=\frac{0,7\cdot 6,5\cdot 100}{12,001}\sqrt{\frac{240}{2,06\cdot 10^5}}=1,2941.$$

4. Коэффициенты продольного изгиба:

$$\varphi_y=1-\left(0,073-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y\sqrt{\bar{\lambda}_y}=1-\left(0,073-\frac{5,53\cdot 240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 0,68555\sqrt{0,68555}=0,9622;$$

$$\varphi_y=1-\left(0,073-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y\sqrt{\bar{\lambda}_y}=1-\left(0,073-\frac{5,53\cdot 240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 1,2941\sqrt{1,2941}=0,902.$$

5. Несущая способность колонны из условия обеспечения общей устойчивости при центральном сжатии:

$$N_{b,x} = \varphi_x A R_y \gamma_c = 0,9622 \cdot 230,4 \cdot 24 \cdot 1 = 5320,58 \text{ кН};$$

$$N_{b,y} = \varphi_y A R_y \gamma_c = 0,902 \cdot 230,4 \cdot 24 \cdot 1 = 4987,7 \text{ кН}.$$

6. Предельная гибкость колонны:

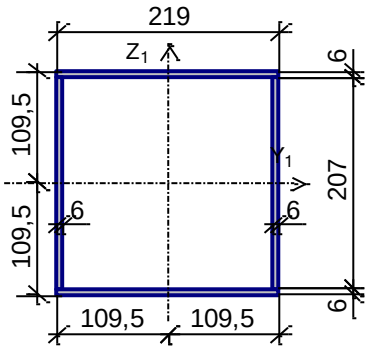
$$[\lambda]_x = 180 - 60\alpha_x = 180 - 60 \cdot \frac{N}{\varphi_x A R_y \gamma_c} = 180 - 60 \cdot \frac{5000}{5320,58} = 123,615;$$

$$[\lambda]_y = 180 - 60\alpha_y = 180 - 60 \cdot \frac{N}{\varphi_y A R_y \gamma_c} = 180 - 60 \cdot 1 = 120.$$

Сравнение решений:

Фактор	Источник	Ручной расчет	SCAD	Отклонение, %
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	0,904	0,904	0,0
Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoY)	23,69/24=0,987	5000/4987,7 = 1,002	1,002	0,0
Устойчивость при сжатии в плоскости XoZ (XoV))	–	5000/5320,58 = 0,940	0,94	0,0
Прочность при центральном сжатии/растяжении	5000/230,4/24= 0,904	0,904	0,904	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoY	–	37,9135/120 = 0,316	0,316	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	–	20,08475/123,615 = 0,162	0,162	0,0

Расчет центрально-сжатой колонны из электросварной трубы



Цель: Проверка режима расчета стоек сплошного сечения в постпроцессоре «Сталь» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить расчетное сечение центрально-сжатой колонны из электросварной трубы высотой 7,7 м.

Источник: Кузнецов А. Ф., Козьмин Н. Б., Амелькович С. В. Примеры расчета металлических конструкций гражданских и промышленных зданий. Учебное пособие для студентов строительных специальностей. – Челябинск, 2009. – С. 11, 12.

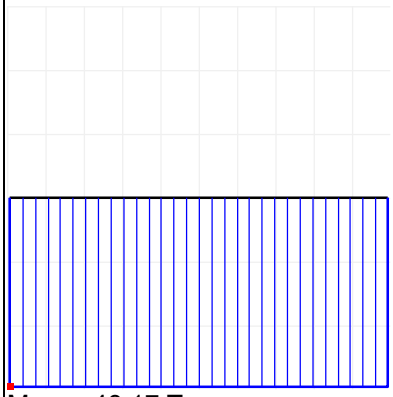
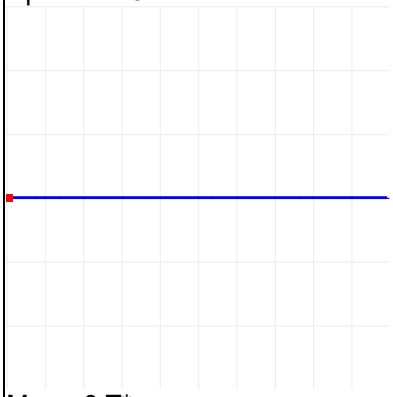
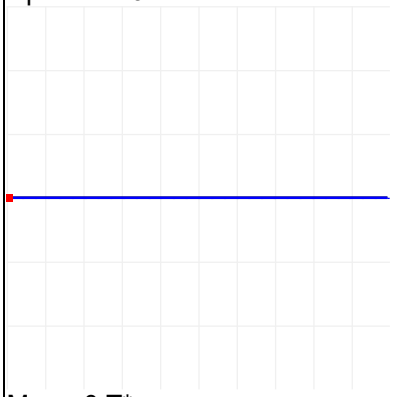
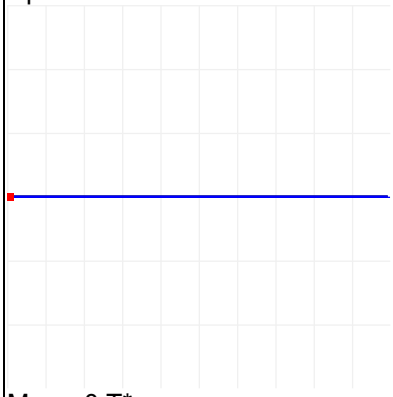
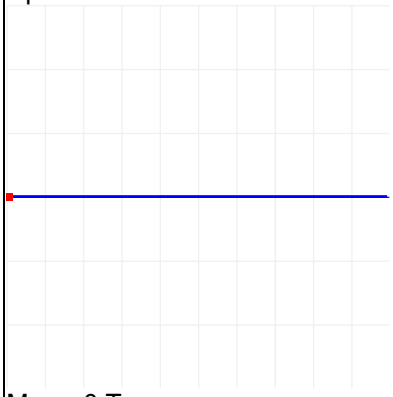
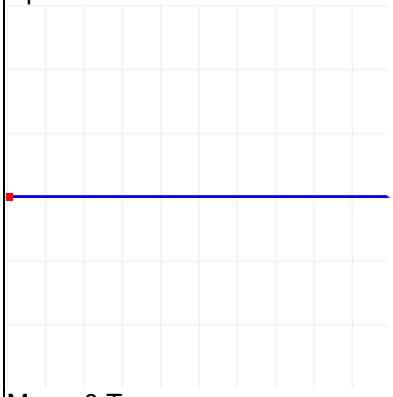
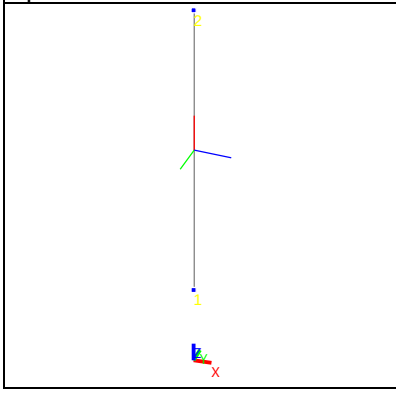
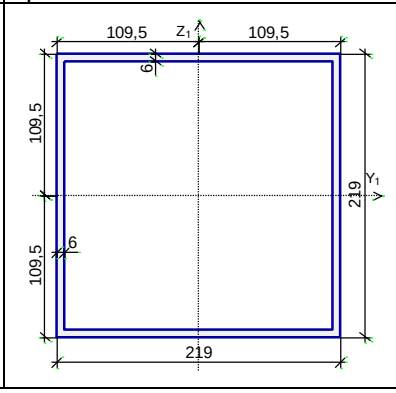
Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010, ДБН В.2.6-198:2014.

Имя файла с исходными данными:
5.3 Column_Example_5.3.spr;
отчет – 5.3 Column_Example_5.3.doc

Исходные данные:

l = 7,7 м	Высота колонны
μ = 1,0	Закрепление внизу и сверху – шарнирное
N = 472,5 кН	Расчетное сжимающее усилие
γ_c = 1	Коэффициент условий работы
R_y = 23 кН/см^2	Сталь марки С235
$A = 51{,}12$ см^2	Геометрические характеристики
$I_y = I_z = 3868{,}506$ см^4	принятого сечения
$i_y = i_z = 8{,}699$ см	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:
[Элемент № 1] Усилия

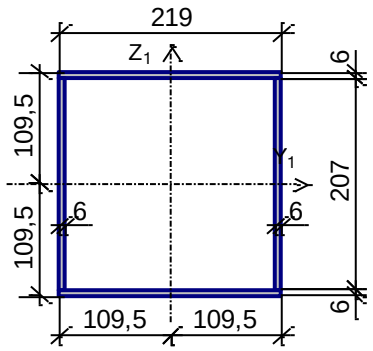
N  Макс. -48,17 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**M_z** Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 Т*м Привязка 0 м  Макс. 0 Т*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**Q_y** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м
	Длина стержня 7,7 м Длина гибкой части 7,7 м Загружение L1	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент column1

Сталь: С235
Длина элемента 7,7 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180 - 60
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 1
Коэффициент надежности по ответственности 1
Коэффициент расчетной длины XoZ -- 1,0
Коэффициент расчетной длины XoY -- 1,0

Расстояние между точками раскрепления из плоскости 7,7 м

Сечение:



Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
пп. 5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,4
п. 5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XOY (XOU)	0,63
п. 5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XOZ (XOV))	0,63
п. 5.34	Устойчивость при сжатии с изгибом в двух плоскостях	0,63
п. 5.1	Прочность при центральном сжатии/растяжении	0,4
пп. 6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XOY	0,62
пп. 6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XOZ	0,62

Коэффициент использования 0,63 - Устойчивость при сжатии в плоскости XOY (XOU)

Ручной расчет (СНиП II-23-81):*

1. Проверка прочности принятого сечения колонны:

$$\frac{N}{AR_y\gamma_c}=\frac{472,5}{51,12\cdot 23\cdot 1}=0,402.$$

2. Гибкости колонны:

$$\lambda_y=\frac{l_{ef,y}}{i_y}=\frac{1,0\cdot 7,7\cdot 100}{8,699}=88,516;$$

$$\lambda_z=\frac{l_{ef,z}}{i_z}=\frac{1,0\cdot 7,7\cdot 100}{8,699}=88,516.$$

3. Условные гибкости колонны:

$$\bar{\lambda}_y=\frac{l_{ef,y}}{i_y}\sqrt{\frac{R_y}{E}}=\frac{1,0\cdot 7,7\cdot 100}{8,699}\sqrt{\frac{230}{2,06\cdot 10^5}}=2,9577;$$

$$\bar{\lambda}_z=\frac{l_{ef,z}}{i_z}\sqrt{\frac{R_y}{E}}=\frac{1,0\cdot 7,7\cdot 100}{8,699}\sqrt{\frac{230}{2,06\cdot 10^5}}=2,9577.$$

4. Коэффициенты продольного изгиба при $2,5<\bar{\lambda}\le 4,5$:

$$\varphi_y=\varphi_z=1,47-13,0\frac{R_y}{E}-\left(0,371-27,3\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y+\left(0,0275-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y^2=$$

$$=1,47-\frac{13,0\cdot 230}{2,06\cdot 10^5}-\left(0,371-\frac{27,3\cdot 230}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 2,9577+\left(0,0275-\frac{5,53\cdot 230}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 2,9577^2=0,6349.$$

5. Несущая способность колонны из условия обеспечения общей устойчивости при центральном сжатии:

$$N_{b,y} = \varphi_y A R_y \gamma_c = 0,6349 \cdot 23 \cdot 51,12 \cdot 1 = 746,476 \text{ кН};$$

$$N_{b,z} = \varphi_z A R_y \gamma_c = 0,6349 \cdot 23 \cdot 51,12 \cdot 1 = 746,476 \text{ кН}.$$

6. Предельная гибкость колонны:

$$[\lambda]_y = 180 - 60\alpha_y = 180 - 60 \cdot \frac{N}{\varphi_y A R_y \gamma_c} = 180 - 60 \cdot \frac{472,5}{746,476} = 142,022;$$

$$[\lambda]_z = 180 - 60\alpha_z = 180 - 60 \cdot \frac{N}{\varphi_z A R_y \gamma_c} = 180 - 60 \cdot \frac{472,5}{746,476} = 142,022.$$

Сравнение решений:

Фактор	**Источник**	**Ручной расчет**	**SCAD**	**Отклонение, %**
Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	–	0,402	0,4	0,0
Устойчивость при сжатии в плоскости XoY (XoY)	0,966	472,5/746,476 = 0,633	0,63	0,0
Устойчивость при сжатии в плоскости XoZ (XoV))	0,966	472,5/746,476 = 0,633	0,63	0,0
Прочность при центральном сжатии/растяжении	0,511	0,402	0,4	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoY	–	88,516/142,022 = 0,62	0,62	0,0
Предельная гибкость в плоскости XoZ	–	88,516/142,022 = 0,62	0,62	0,0

Расчет верхнего пояса фермы из неравнополочных уголков

Цель: Проверка режима расчета элементов фермы в постпроцессоре «Сталь» расчетного комплекса SCAD

Задача: Проверить сечение верхнего пояса фермы из двух неравнополочных уголков сечением 160×100×9 мм. Ширина панели фермы 2,58 м. Ферма раскреплена из плоскости изгиба через панель.

Источник: Металлические конструкции : учебник для студ. Учреждений высш. проф. Образования / [Ю. И. Кудишин, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др.] ; под. Ред. Ю. И. Кудишина. – 13-е изд., испр. – М. : Издательский центр "Академия", 2011. – С. 280.

Соответствие нормативным документам: СНиП II-23-81*, СП 16.13330, ДБН В.2.6-163:2010, ДБН В.2.6-198:2014.

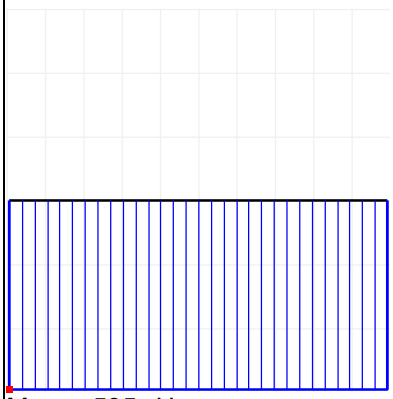
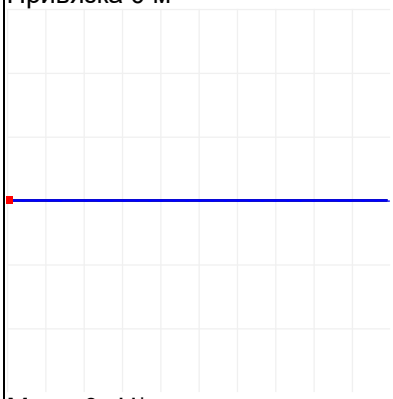
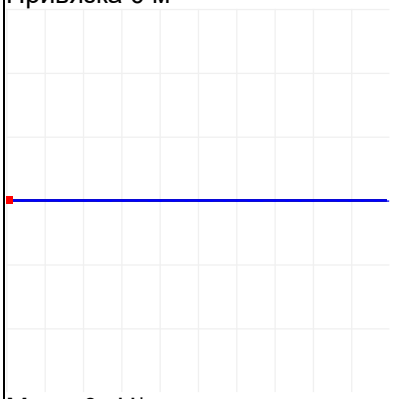
Имя файла с исходными данными:
7.1 Truss_Element_Example_7.1.spr;
отчет – 7.1 Truss_Element_Example_7.1.doc

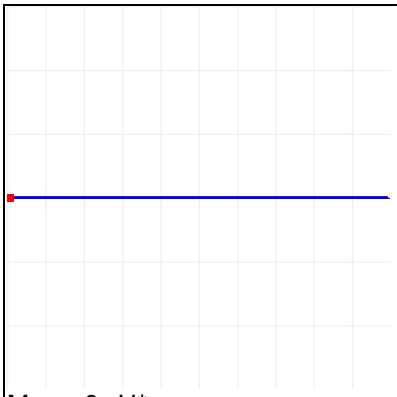
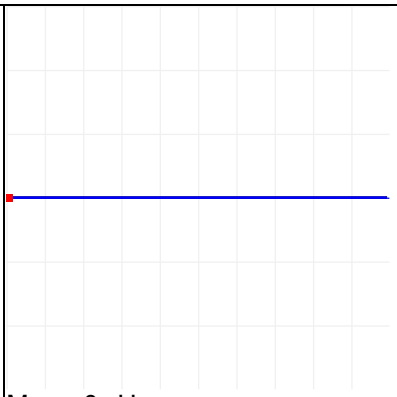
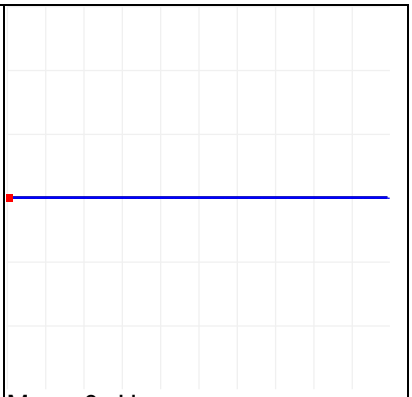
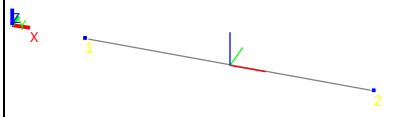
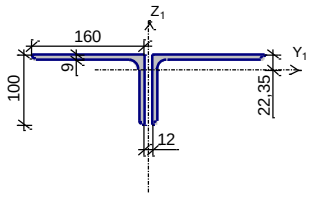
Исходные данные:

N = 535 кН	Расчетное сжимающее усилие
R_y = 24 кН/см^2	Сталь марки С245
γ_c = 0,95	Коэффициент условий работы
g = 12 мм	Толщина фасонки
l_y = 2,58, l_z = 5,16	Расчетные длины стержня
i_y = 2,851 см, A = 45,74 см^2	Геометрические характеристики
i_z = 7,745 см	сечения верхнего пояса из двух уголков
160x100x9	

Результаты SCAD Постпроцессор СТАЛЬ:

[Элемент № 1] Усилия

<table>
<tr>
<td>N
 
Макс. -535 кН
Привязка 0 м</td>
<td>M_y
Макс. 0 кН*м
Привязка 0 м
 
Макс. 0 кН*м
Привязка 0 м</td>
<td>M_z
Макс. 0 кН*м
Привязка 0 м
 
Макс. 0 кН*м
Привязка 0 м</td>
</tr>
<tr>
<td>M_k
Макс. 0 кН*м
Привязка 0 м</td>
<td>Q_z
Макс. 0 кН
Привязка 0 м</td>
<td>Q_y
Макс. 0 кН
Привязка 0 м</td>
</tr>
</table>

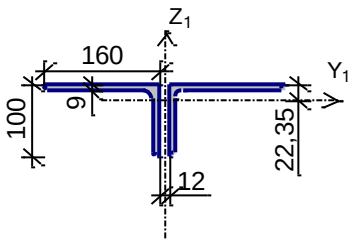
 Макс. 0 кН*м Привязка 0 м	 Макс. 0 кН Привязка 0 м	 Макс. 0 кН Привязка 0 м
 	Длина стержня 2,58 м Длина гибкой части 2,58 м Загружение L1 - "ff"	

Расчет выполнен по СНиП II-23-81*
Конструктивный элемент Пояс фермы

Сталь: С245
Длина элемента 2,58 м
Предельная гибкость для сжатых элементов: 180 - 60□
Предельная гибкость для растянутых элементов: 300
Коэффициент условий работы 0,95
Коэффициент надежности по ответственности 1
Неупругая работа сечения не допускается

Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OZ_1 1
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OY_1 2
Расстояние между точками раскрепления из плоскости изгиба 2,58 м

Сечение:



Профиль: Уголок неравнополочный по ГОСТ 8510-86* L160x100x9

Результаты расчета	Проверка	Коэффициент использования
пп.5.24,5.25	Прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,51
п.5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XOY (XOU)	0,66
п.5.3	Устойчивость при сжатии в плоскости XOZ (XOV))	0,84
п.5.1	Прочность при центральном сжатии/растяжении	0,51
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XOY	0,48
пп.6.15,6.16	Предельная гибкость в плоскости XOZ	0,7

Коэффициент использования 0,84 - Устойчивость при сжатии в плоскости XOZ (XOV)

Ручной расчет (СНиП II-23-81*):

1. Проверка прочности

$$\frac{N}{A}=\frac{535}{45,74}=11,69655\ \text{кН/см}^2 < R_y\gamma_c=24\cdot 0,95=22,8\ \text{кН/см}^2.$$

2. Гибкости элемента фермы:

$$\lambda_y=\frac{l_{ef,y}}{i_y}=\frac{2,58\cdot 100}{2,851}=90,49456;$$

$$\lambda_z=\frac{l_{ef,z}}{i_z}=\frac{5,16\cdot 100}{7,745}=66,6236.$$

3. Условные гибкости элемента фермы:

$$\bar{\lambda}_y=\frac{l_{ef,y}}{i_y}\sqrt{\frac{R_y}{E}}=\frac{2,58\cdot 100}{2,851}\sqrt{\frac{240}{2,06\cdot 10^5}}=3,0888;$$

$$\bar{\lambda}_z=\frac{l_{ef,z}}{i_z}\sqrt{\frac{R_y}{E}}=\frac{5,16\cdot 100}{7,745}\sqrt{\frac{240}{2,06\cdot 10^5}}=2,274.$$

4. Коэффициенты продольного изгиба:

$$\varphi_y=1,47-13,0\frac{R_y}{E}-\left(0,371-27,3\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y+\left(0,0275-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_y^2=$$

$$=1,47-\frac{13,0\cdot 240}{2,06\cdot 10^5}-\left(0,371-\frac{27,3\cdot 240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 3,0888+\left(0,0275-\frac{5,53\cdot 240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 3,0888^2=0,60805$$

$$\varphi_z=1-\left(0,073-5,53\frac{R_y}{E}\right)\bar{\lambda}_z\sqrt{\bar{\lambda}_z}=1-\left(0,073-\frac{5,53\cdot 240}{2,06\cdot 10^5}\right)\cdot 2,274\sqrt{2,274}=0,77176.$$

5. Несущая способность элемента фермы из условия обеспечения общей устойчивости при центральном сжатии:

$$N_{b,y}=\varphi_y AR_y\gamma_c=0,60805\cdot 45,74\cdot 24\cdot 0,95=634,118\ \text{кН};$$

$$N_{b,z}=\varphi_z AR_y\gamma_c=0,77176\cdot 45,74\cdot 24\cdot 0,95=804,847\ \text{кН}.$$

6. Предельная гибкость элемента фермы:

$$[\lambda]_y=180-60\alpha_y=180-60\cdot\frac{N}{\varphi_y AR_y\gamma_c}=180-60\cdot\frac{535}{634,118}=129,3785;$$

$$[\lambda]_z=180-60\alpha_z=180-60\cdot\frac{N}{\varphi_z AR_y\gamma_c}=180-60\cdot\frac{535}{804,847}=140,1166.$$

Сравнение решений:

Фактор	Источник	Ручной расчет	SCAD	Отклонение, %
Прочность элемента	535/45,8/22,8=0,512	11,6966/22,8 = 0,513	0,51	0,0
Устойчивость элемента в плоскости фермы	21,4/22,8=0,938	535/634,118 = 0,844	0,84	0,0
Устойчивость элемента из плоскости фермы	не определено	535/804,847 = 0,665	0,66	0,0
Гибкость элемента в плоскости фермы	не определено	90,4946/129,3785 = 0,7	0,7	0,0
Гибкость элемента из плоскости фермы	не определено	66,6236/140,1166 = 0,4755	0,48	0,0

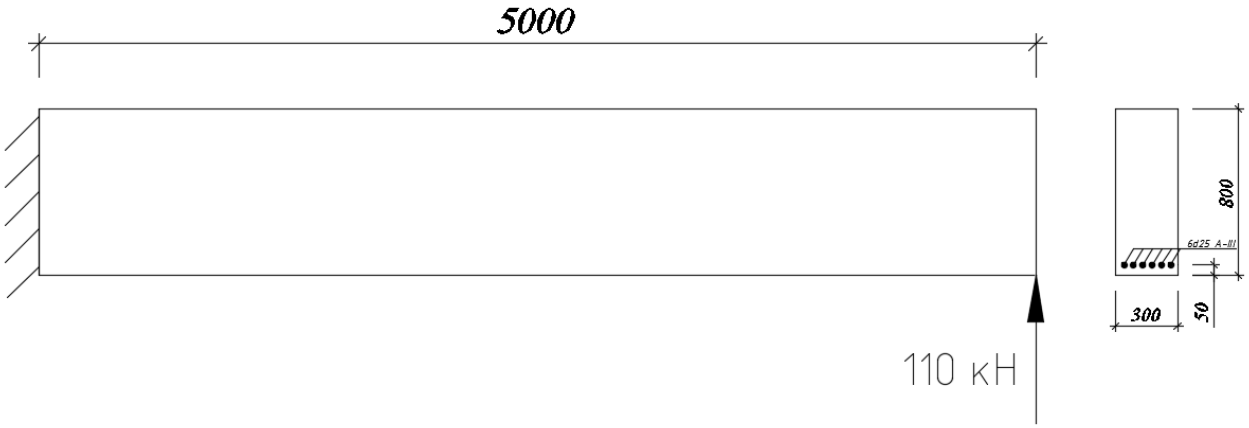
Комментарии:

В источнике коэффициент продольного изгиба для условной гибкости стержня 3,09 принят ошибочно равным 0,546 вместо 0,6081, что и вызвало различия в результатах расчета устойчивости.

Элементы железобетонных конструкций

Расчеты по СНиП 2.03.01-84*

Расчет прочности балки прямоугольного сечения



Цель: Проверка режима экспертизы железобетона в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить прочность сечения консольной балки при заданном армировании

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84), 1989, с. 26.

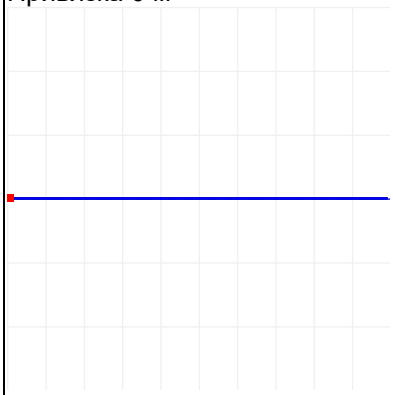
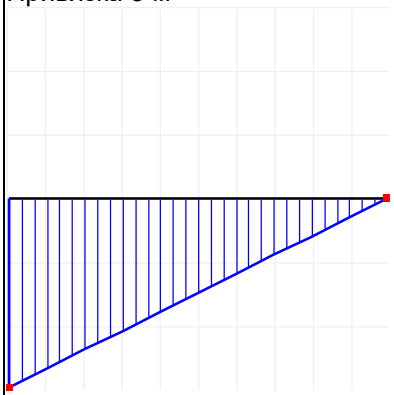
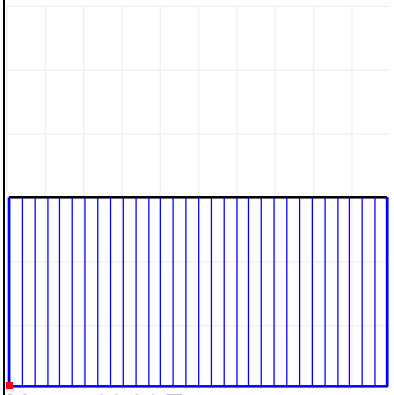
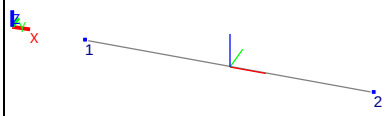
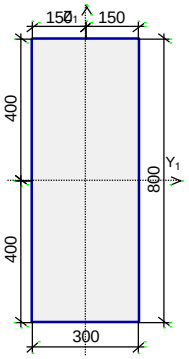
Файл с исходными данными:
SCAD 3 SNiP.spr
отчет – SCAD 3 SNiP.doc

Соответствие нормативным документам: СНиП 2.03.01-84.

Исходные данные:

b = 200 мм	Размеры сечения балки
h = 800 мм	
a = 50 мм	Расстояние от центра тяжести арматуры до сжатого края сечения
A_s = 2945 мм^2 (6Ø25)	Площадь сечения заданной арматуры
Класс бетона	B25
Класс арматуры	A-III
l = 4,8 м	Пролет балки
q = 191 кН/м	Нагрузка на балку
M = 550 кНм	Изгибающий момент в сечении от действия нагрузки

Результаты расчета SCAD:

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 5 м  Макс. 550,55 кН*м Привязка 0 м	**M_z**
M_k	**Q_z**  Макс. -11,21 Т Привязка 0 м	**Q_y**
	Длина стержня 5 м Длина гибкой части 5 м Загружение L1 - "110 кн"	

Конструктивная группа Балка

Расстояние между арматурными стержнями в первом ряду S1 меньше допускаемого (см. п. 5.12 СНиП 2.03.01-84*) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Коэффициент надежности по ответственности (2-е предельное состояние) = 1

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
50	50

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A-III	1
Поперечная	A-I	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B25
Условия твердения: Естественное
Коэффициент условий твердения 1

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b2}	учет нагрузок длительного действия	0,9
	результирующий коэффициент без γ_{b2}	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Категория трещиностойкости - 3
Условия эксплуатации конструкции: В помещении
Режим влажности бетона - Естественная влажность
Допустимая ширина раскрытия трещин:
Непродолжительное раскрытие 0,4 мм
Продолжительное раскрытие 0,3 мм

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1
Длина элемента 5,0 м

Заданное армирование

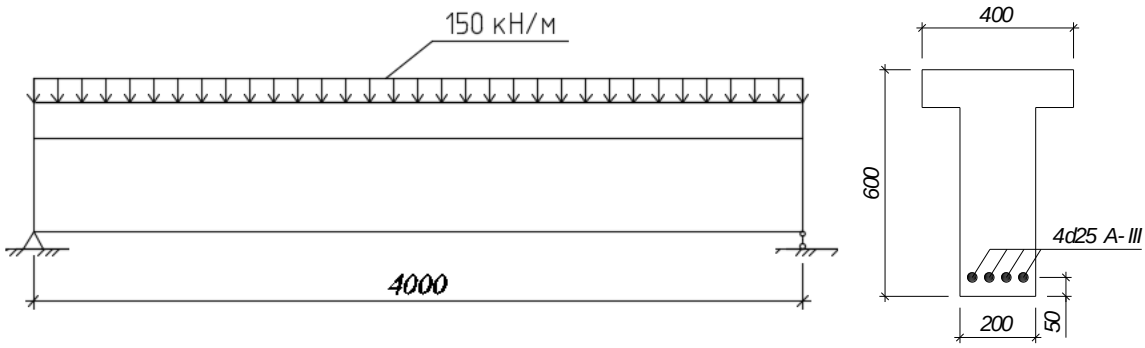
Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 6∅25	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,83	Прочность по предельному моменту сечения	п.п. 3.15-3.20, 3.27-3.28

Сравнение решений

Проверка	прочность сечения
Пособие	550/636,4 = 0,864
SCAD	0,83
Отклонение, %	4,1 %

Расчет прочности таврового сечения



Цель: Проверка расчета прочности сечения

Задача: Проверить прочность сечения балки таврового сечения длиной 4,0 м при шарнирном опирании и при заданном армировании

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84), 1989, с. 27-28.

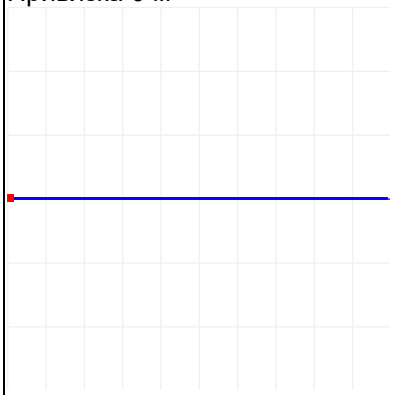
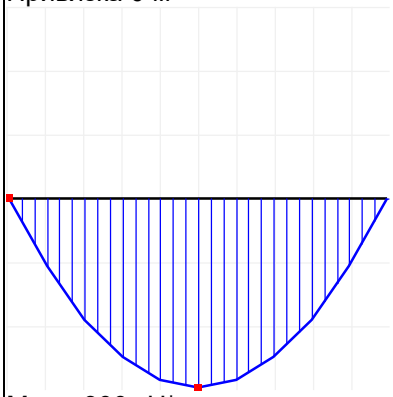
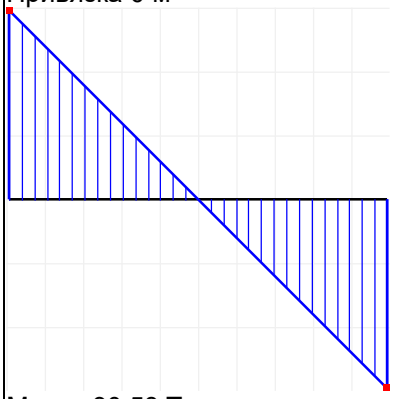
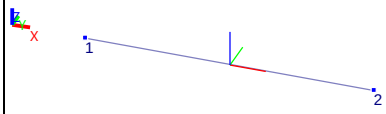
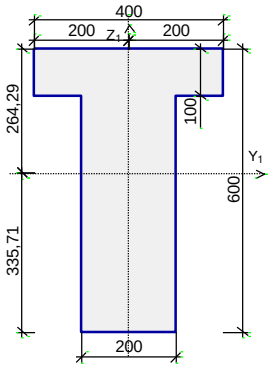
Файл с исходными данными:
SCAD 7 SNiP.spr
отчет – SCAD 7 SNiP.doc

Соответствие нормативным документам: СНиП 2.03.01-84.

Исходные данные:

b = 200 мм	Размеры сечения балки
h = 600 мм	
b_f' = 400 мм	
h_f' = 100 мм	
a = 50 мм	Расстояние от центра тяжести арматуры до сжатого края сечения
A_s = 1964 мм^2 (4Ø25)	Площадь сечения арматуры
Класс бетона	B25
Класс арматуры	A-III
q = 191 кН/м	Нагрузка на балку
M = 300 кНм	Изгибающий момент в сечении

Результаты расчета SCAD:

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 300 кН*м Привязка 2 м	**M_z**
M_k	**Q_z** Макс. 30,58 Т Привязка 0 м  Макс. -30,58 Т Привязка 4 м	**Q_y**
	Длина стержня 4 м Длина гибкой части 4 м Загружение L1 - "150 кн/м"	

Конструктивная группа Балка

Расстояние между арматурными стержнями в первом ряду S1 меньше допускаемого (см. п. 5.12 СНиП 2.03.01-84*) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Коэффициент надежности по ответственности (2-е предельное состояние) = 1

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
58,5	20

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A-III	1
Поперечная	A-I	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B25
Условия твердения: Естественное
Коэффициент условий твердения 1

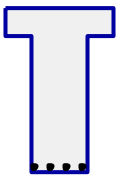
Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b2}	учет нагрузок длительного действия	0,9
	результирующий коэффициент без γ_{b2}	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Категория трещиностойкости - 3
Условия эксплуатации конструкции: В помещении
Режим влажности бетона - Естественная влажность
Допустимая ширина раскрытия трещин:
Непродолжительное раскрытие 0,4 мм
Продолжительное раскрытие 0,3 мм

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1
Длина элемента 4 м

Заданное армирование

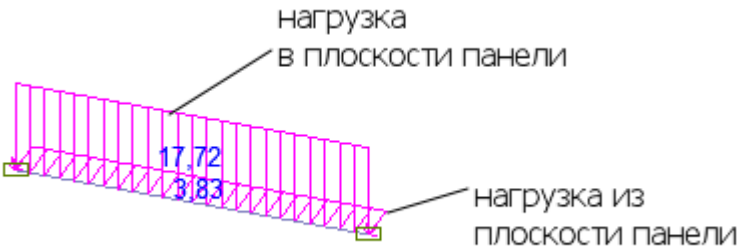
Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 4∅25	

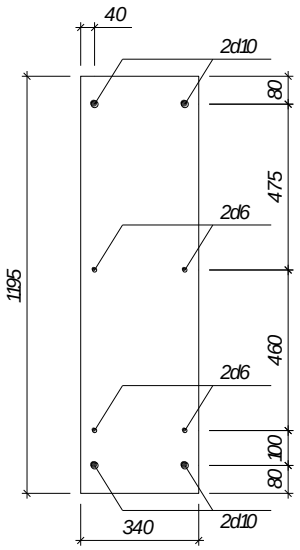
Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,89	Прочность по предельному моменту сечения	п.п. 3.15-3.20, 3.27-3.28

Сравнение решений

Проверка	прочность сечения
Пособие	300/327,1 = 0,917
SCAD	0,89
Отклонение, %	3,0 %

Расчет прочности стеновой панели





Цель: Проверка прочности стеновой панели

Задача: Проверить прочность сечения

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84), 1989, с. 32-34.

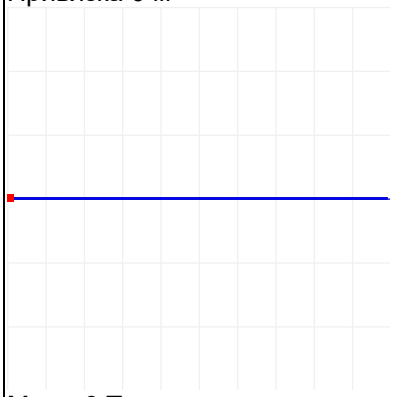
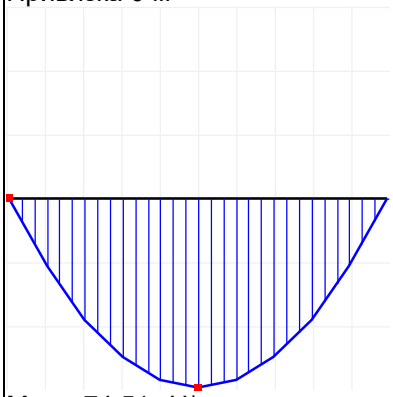
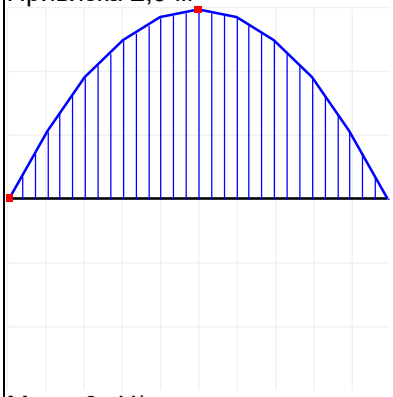
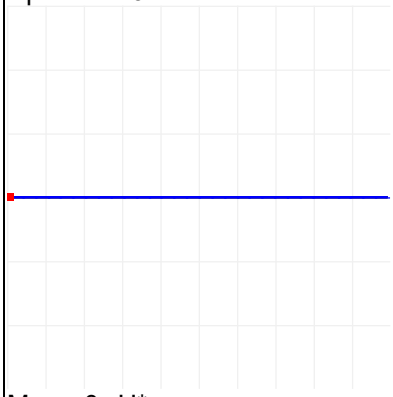
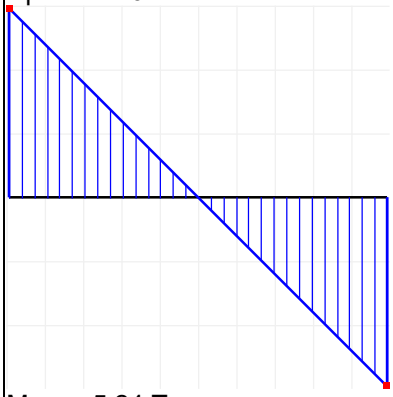
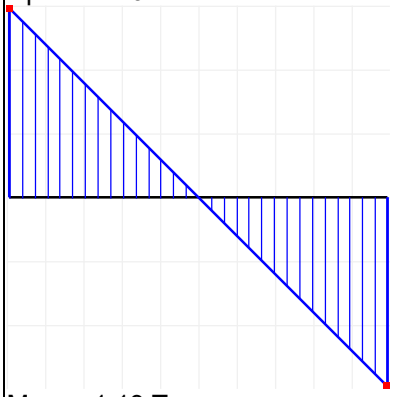
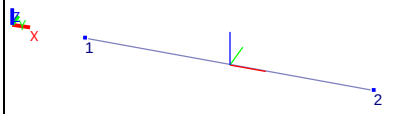
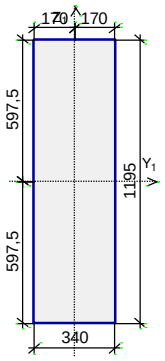
Файл с исходными данными:
SCAD 12 SNiP.spr
отчет – SCAD 12 SNiP.doc

Соответствие нормативным документам: СНиП 2.03.01-84.

Исходные данные:

l = 5,8 м	Пролет стеновой панели
$b \times h$ = 340×1195 мм	Размеры сечения стеновой панели
q_{tot} = 3,93 кН/м^2	Полная вертикальная равномерно распределенная нагрузка
(q_x = 17,72 кН/м)	Приведенная нагрузка, действующая в плоскости панели
q_w = 0,912 кН/м^2	Ветровая нагрузка
(q_y = 3,83 кН/м)	Приведенная нагрузка, действующая из плоскости панели
Класс бетона	B3,5; D1100
Класс арматуры	A-III

Результаты расчета SCAD:

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 74,51 кН*м Привязка 2,9 м	**M_z** Макс. -16,11 кН*м Привязка 2,9 м  Макс. 0 кН*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 0 кН*м Привязка 0 м	**Q_z** Макс. 5,24 Т Привязка 0 м  Макс. -5,24 Т Привязка 5,8 м	**Q_y** Макс. 1,13 Т Привязка 0 м  Макс. -1,13 Т Привязка 5,8 м
	Длина стержня 5,8 м Длина гибкой части 5,8 м Загружение L1 - "17,72 кН/м + 3,83 кН/м"	

Конструктивная группа Стеновая панель

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Сжато-изогнутый (растянутый)

Напряженное состояние - Косой изгиб

Максимальный процент армирования 10
Случайный эксцентриситет по оси Z_1 0 мм
Случайный эксцентриситет по оси Y_1 0 мм

Статически неопределимая система
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OZ_1 1
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OY_1 1

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
75	75

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A-III	1
Поперечная	A-I	1

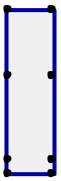
Бетон
Вид бетона: Легкий
Класс бетона: B3,5
Марка по средней плотности: D1100
Заполнитель: Искусственный плотный
Условия твердения: Естественное
Коэффициент условий твердения 1

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b2}	учет нагрузок длительного действия	1
	результирующий коэффициент без γ_{b2}	1,1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Конструктивная группа Стеновая панель. Элемент № 1
Длина элемента 5,8 м

Заданное армирование

Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 2∅10, второй ряд 2∅6 Расстояние в свету между рядами 92 мм S_2 - 2∅10, второй ряд 2∅6 Расстояние в свету между рядами 467 мм	

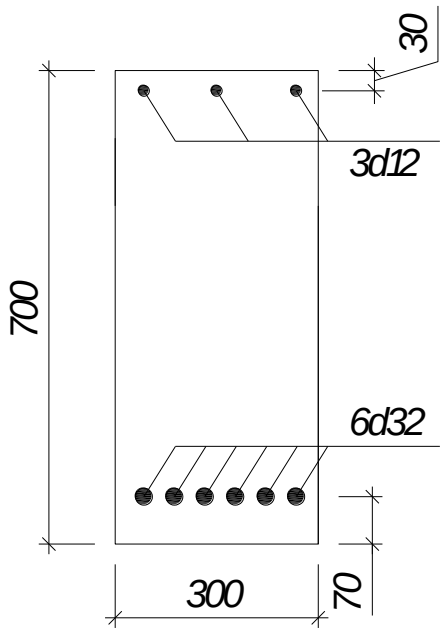
Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,99	Прочность по предельному моменту сечения	п.п. 3.15-3.20, 3.27-3.28

Сравнение решений:

Проверка	Прочности сечения
Пособие	74,5/78,4 = 0,95
SCAD	0,99
Отклонение, %	4,2 %

Расчеты по СНиП 52-01-2003

Расчет прочности балки прямоугольного сечения



Цель: Проверка режима экспертизы железобетона в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить прочность сечения балки при заданном армировании

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003), 2005, с. 28.

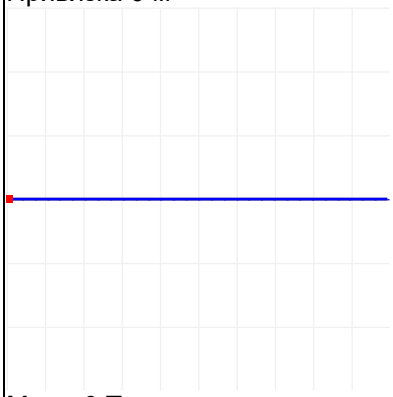
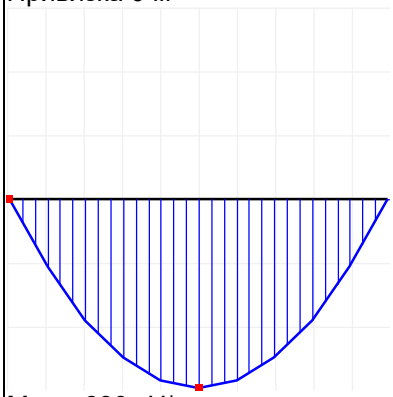
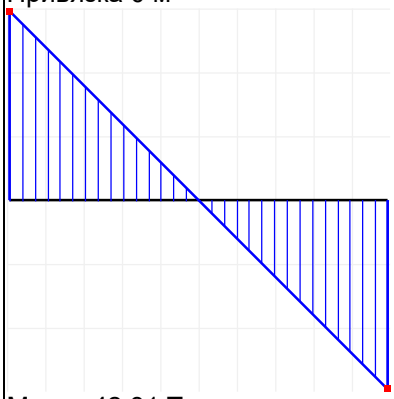
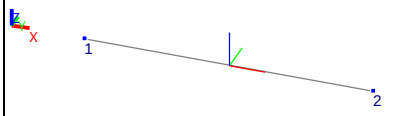
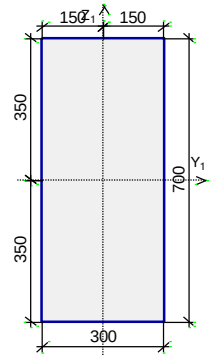
Файл с исходными данными:
SCAD 6 SP.spr
отчет – SCAD 6 SP.doc

Соответствие нормативным документам: СП 52-101-2003.

Исходные данные:

$b \times h$ = 300×700 мм	Размеры сечения
a = 70 мм	Расстояние до ц.т. растянутой арматуры
a' = 30 мм	Расстояние до ц.т. сжатой арматуры
A_s = 4826 мм^2 (6∅32)	Площадь сечения растянутой арматуры
A'_s = 339 мм^2 (3∅12)	Площадь сечения сжатой арматуры
l = 6,0 м	Пролет балки
q = 140 кН/м	Нагрузка на балку
M = 630 кНм	Изгибающий момент
Класс бетона	B20
Класс арматуры	A400

Результаты расчета SCAD:

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 630 кН*м Привязка 3 м	**M_z**
M_k	**Q_z** Макс. 42,81 Т Привязка 0 м  Макс. -42,81 Т Привязка 6 м	**Q_y**
	Длина стержня 6 м Длина гибкой части 6 м Загружение L1 - "140 кН/м"	

Конструктивная группа Балка

Расстояние между арматурными стержнями в первом ряду S1 меньше допускаемого (см. п. 8.3.3 СП 52-101-2003) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
70	30

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A400	1
Поперечная	A240	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B20

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

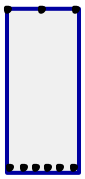
Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Ограниченная ширина раскрытия трещин
Требования к ширине раскрытия трещин выбираются из условия сохранности арматуры
Допустимая ширина раскрытия трещин:
Непродолжительное раскрытие 0,4 мм
Продолжительное раскрытие 0,3 мм

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1

Длина элемента 6 м

Заданное армирование

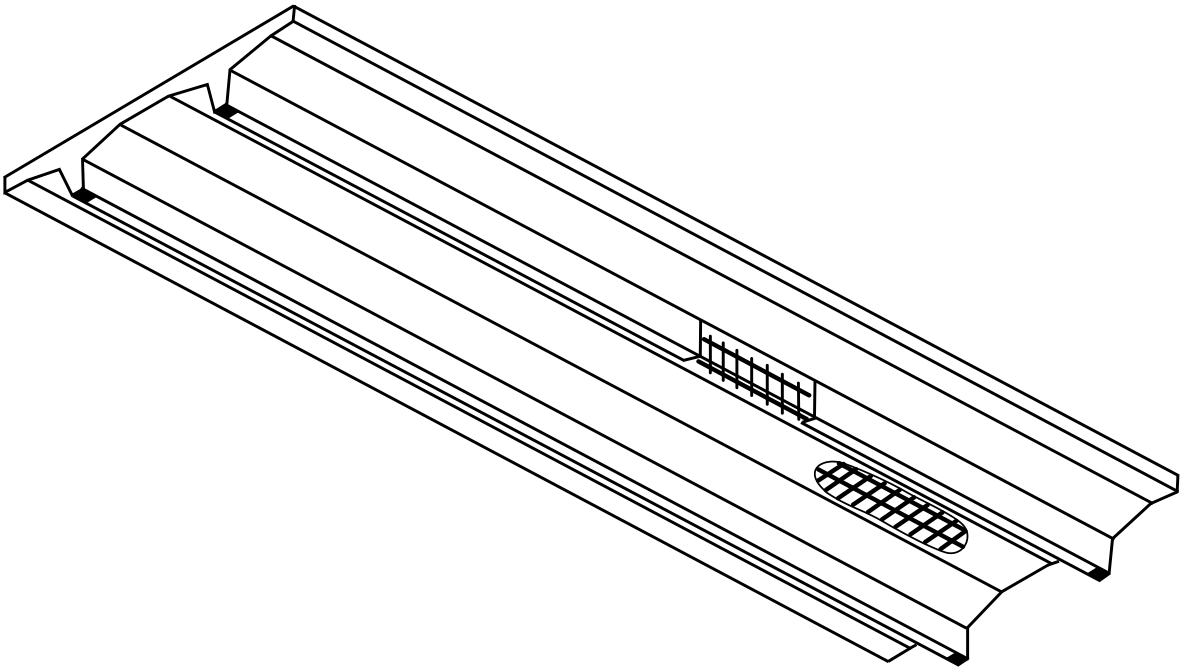
Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 6∅32 S_2 - 3∅12	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	**1,02**	Прочность по предельному моменту сечения	

Сравнение решений:

Проверка	Прочности сечения
Пособие	630/606,2 = 1,039
SCAD	1,02
Отклонение, %	1,9 %

Расчет ребра ТТ-образной плиты перекрытия по несущей способности на действие поперечных сил



Цель: Проверка режима экспертизы железобетона в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить правильность анализа прочности наклонных сечений и бетонной полосы между наклонными сечениями.

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003), 2005, с. 56-57.

Файл с исходными данными:

при поперечной силе Q = 62 кН – SCAD 12.1.SP. spr
отчет – SCAD 12.1.SP.doc.
при поперечной силе Q = 58,4 кН – SCAD 12.2.SP. spr
отчет – SCAD 12.2.SP.doc.

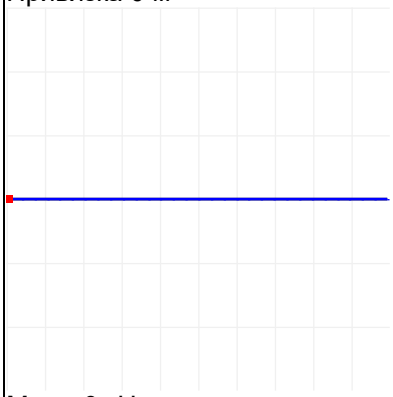
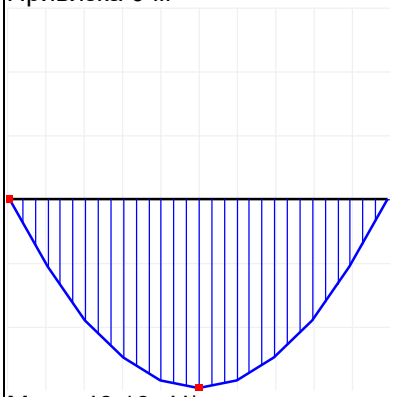
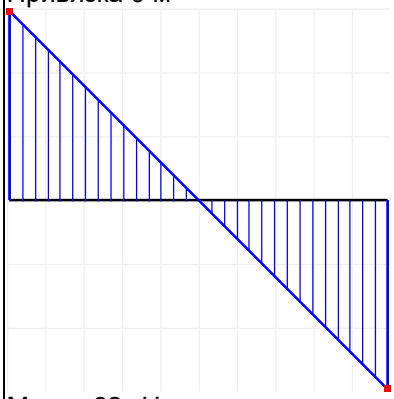
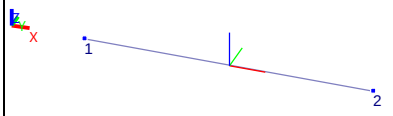
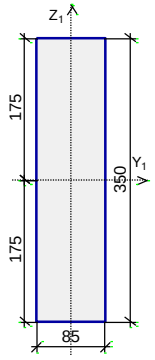
***Соответствие нормативным документам*:** СП 52-101-2003, СП 63.13330.2012.

Исходные данные:

$b \times h$ = 85×350 мм	Размеры сечения
a = 35 мм	Расстояние до ц.т. растянутой арматуры
d = 8 мм	Диаметр поперечной арматуры
s = 100 мм	Шаг поперечной арматуры
q = 21,9 кН/м	Нагрузка, действующая на ребро
q = 18 кН/м	Временная эквивалентная нагрузка
Q = 62 кН	Поперечная сила на опоре

Класс бетона В15
Класс поперечной арматуры А400

Результаты расчета SCAD (при поперечной силе Q = 62 кН):

N Макс. 0 кН Привязка 0 м  Макс. 0 кН Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 48,18 кН*м Привязка 1,55 м	**M_z**
M_k	**Q_z** Макс. 62 кН Привязка 0 м  Макс. -62 кН Привязка 3,11 м	**Q_y**
	Длина стержня 3,11 м Длина гибкой части 3,11 м Загружение L1 - "39,9 кН/м"	

Конструктивная группа Балка

Число стержней в ряду должно быть не менее двух (см. п. 8.3.7 СП 52-101-2003) Расстояние между арматурными стержнями в первом ряду S1 меньше допускаемого (см. п. 8.3.3 СП 52-101-2003) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
32	32

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A400	1
Поперечная	A400	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B15

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

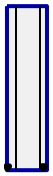
Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Отсутствие трещин

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1

Длина элемента 3,11 м

Заданное армирование

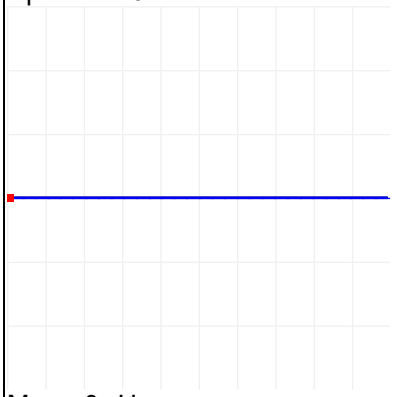
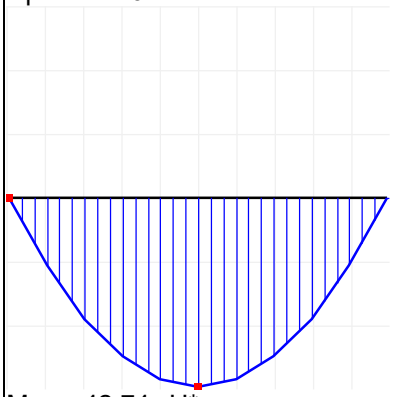
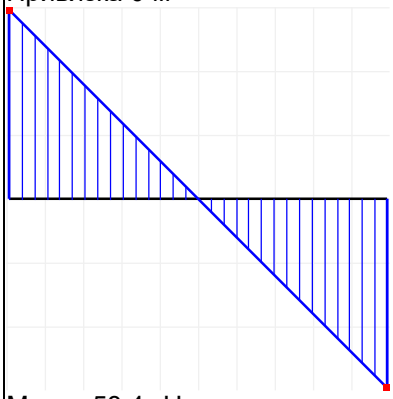
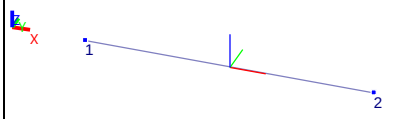
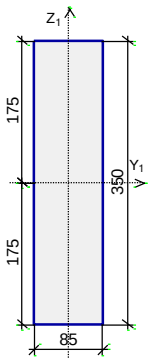
Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 2∅6 Поперечная арматура вдоль оси Z 1∅8, шаг поперечной арматуры 100 мм	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,9	Прочность по бетонной полосе между наклонными сечениями	п. 6.2.33, п. 3.52 Пособия

Сравнение решений

Проверка	Прочность по бетонной полосе между наклонными сечениями
Пособие	62/68,276 = 0,908
SCAD	0,9
Отклонение, %	0,9 %

Результаты расчета SCAD (при поперечной силе Q = 58,4 кН):

N Макс. 0 кН Привязка 0 м  Макс. 0 кН Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 42,74 кН*м Привязка 1,46 м	**M_z**
M_k	**Q_z** Макс. 58,4 кН Привязка 0 м  Макс. -58,4 кН Привязка 2,93 м	**Q_y**
	Длина стержня 2,93 м Длина гибкой части 2,93 м Загружение L1 - "39,9 кН/м"	

Конструктивная группа Балка

Число стержней в ряду должно быть не менее двух (см. п. 8.3.7 СП 52-101-2003) Расстояние между арматурными стержнями в первом ряду S1 меньше допускаемого (см. п. 8.3.3 СП 52-101-2003) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
32	32

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A400	1
Поперечная	A400	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B15

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Отсутствие трещин

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1

Длина элемента 2,93 м

Заданное армирование

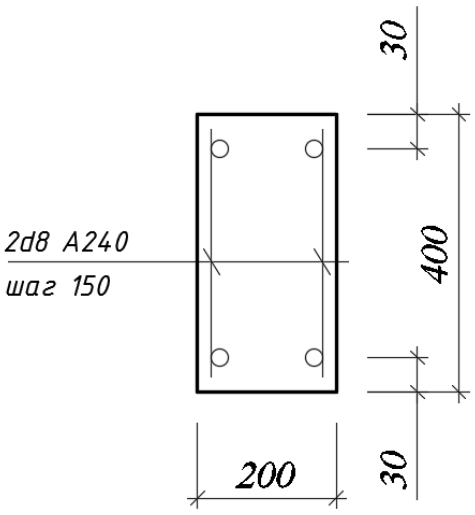
Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 2∅6 Поперечная арматура вдоль оси Z 1∅8, шаг поперечной арматуры 100 мм	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,9	Прочность по наклонному сечению	п. 6.2.34, пп. 3.52,3.71 Пособия

Сравнение решений:

Проверка	Прочность по наклонному сечению
Пособие	58,4/63,97 = 0,913
SCAD	0,9
Отклонение, %	1,4 %

Расчет свободно опертой балки прямоугольного сечения на действие поперечных сил



Цель: Проверка режима экспертизы железобетона в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить прочность наклонного сечения балки при заданном армировании

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003), 2005, с. 57-58.

Файл с исходными данными:
SCAD 13 SP.spr
отчет – SCAD 13 SP.doc

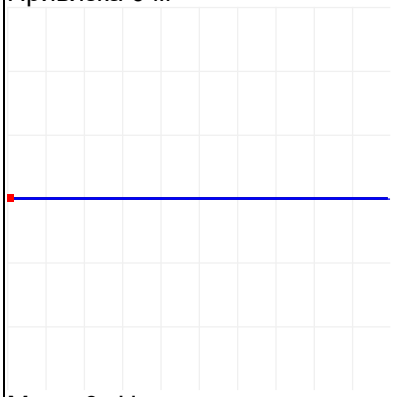
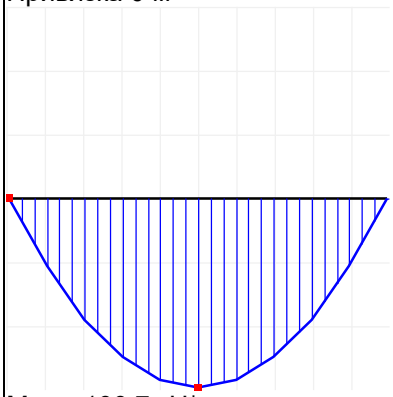
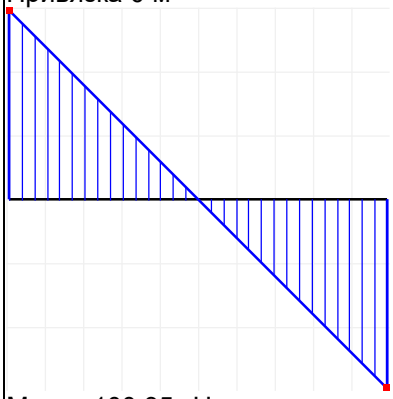
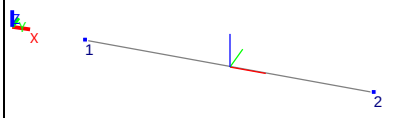
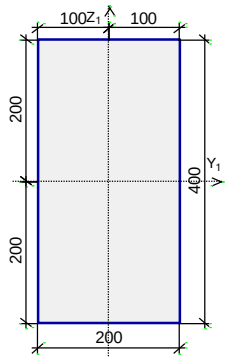
Соответствие нормативным документам: СП 52-101-2003.

Исходные данные:

$b \times h$ = 200×400 мм	Размеры сечения
a = 30 мм	Расстояние до ц.т. растянутой арматуры
a' = 30 мм	Расстояние до ц.т. сжатой арматуры
A_{sw} = 101мм^2 (2∅8)	Площадь сечения поперечной арматуры
s_w = 150 мм	Шаг поперечной арматуры
q_v = 36 кН/м	Временная нагрузка на балку
q_g = 14 кН/м	Постоянная нагрузка на балку
Q = 100,35 кНм	Поперечная сила на опоре

Класс бетона B25
Класс арматуры 240

Результаты расчета SCAD:

N Макс. 0 кН Привязка 0 м  Макс. 0 кН Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 100,7 кН*м Привязка 2,01 м	**M_z**
M_k	**Q_z** Макс. 100,35 кН Привязка 0 м  Макс. -100,35 кН Привязка 4,01 м	**Q_y**
	Длина стержня 4,01 м Длина гибкой части 4,01 м Загружение L1 - "50 кН/м"	

Конструктивная группа Балка

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
30	30

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A240	1
Поперечная	A240	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B25

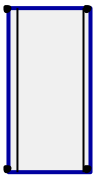
Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Отсутствие трещин

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1
Длина элемента 4,01 м

Заданное армирование

Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 2∅6 S_2 - 2∅6 Поперечная арматура вдоль оси Z 2∅8, шаг поперечной арматуры 150 мм Поперечная арматура вдоль оси Y 2∅8, шаг поперечной арматуры 150 мм	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,98	Прочность по наклонному сечению	п. 6.2.34, пп. 3.52,3.71 Пособия

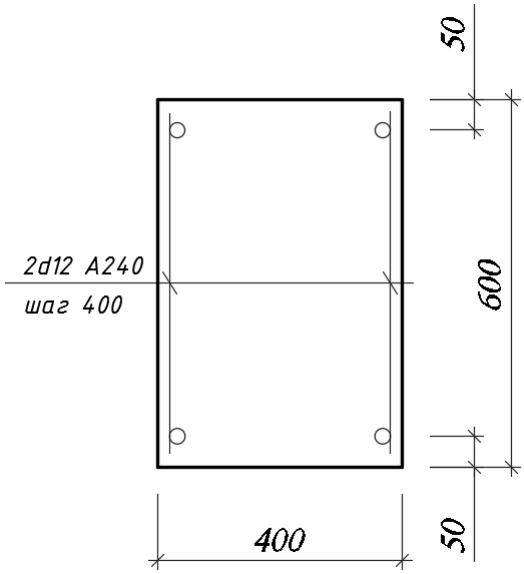
Сравнение решений

Проверка	Прочности сечения
Пособие	100,35/100,69 = 0,997
SCAD	0,98
Отклонение, %	1,7 %

Комментарии

1. Проверка прочности по наклонному сечению заключается в сравнении суммы поперечных сил, воспринимаемых бетоном и хомутами в наклонном сечении (*Qb +Qsw*), с поперечной силой *Q* в наклонном сечении, которая определяется как проекция на нормаль к продольной оси элемента равнодействующей всех внешних сил, которые действуют на элемент по одну сторону от рассматриваемого наклонного сечения (*Q = Qmax – q1c*). В качестве поперечной силы в нормальном сечении используется значение *Q* = 100,35 кН, полученное в Пособии.
2. В SCAD необходимо ввести данные по продольной арматуре. Т.к. в задаче они не определены, использовано: арматура класса А240, стержни 2Ø6.

Расчет колонны многоэтажного рамного каркаса по несущей способности на действие поперечной силы



Цель: Проверка режима экспертизы железобетона в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить прочность сечения колонны при заданном армировании

Ссылки: Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003), 2005, с. 104-105.

Файл с исходными данными: SCAD 34 SP.spr
отчет – SCAD 34 SP-2003.doc
отчет – SCAD 34 SP-2012.doc

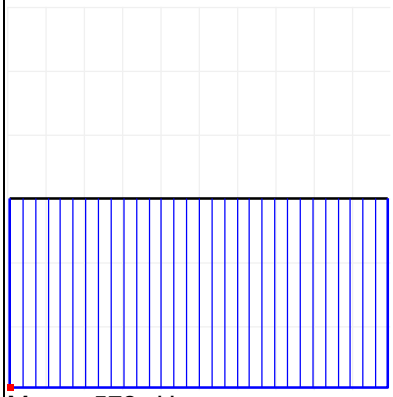
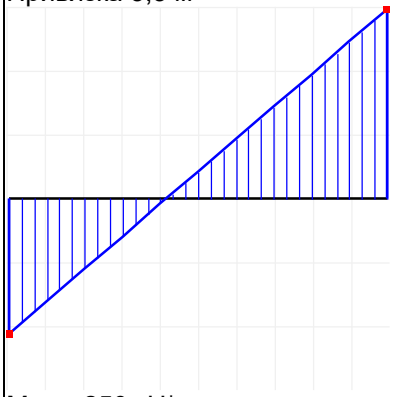
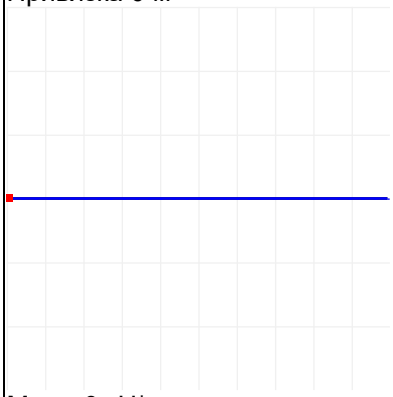
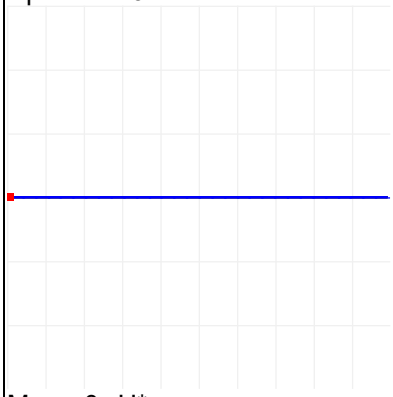
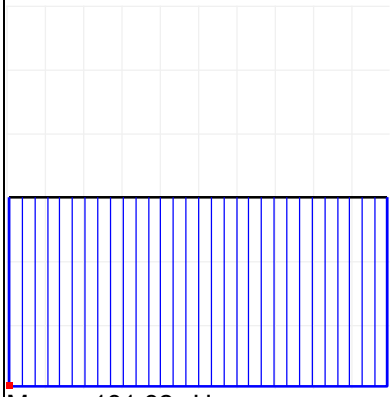
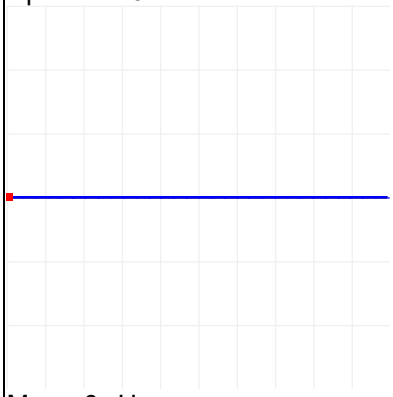
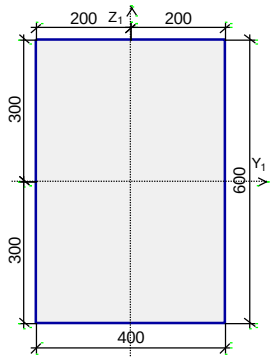
Соответствие нормативным документам: СП 52-101-2003, СП 63.13330.2012.

Исходные данные:

$b \times h$ = 400×600 мм	Размеры сечения
a = 50 мм	Расстояние до ц.т. растянутой арматуры
a' = 50 мм	Расстояние до ц.т. сжатой арматуры
A_{sw} = 226 мм^2 (2∅12)	Площадь сечения растянутой арматуры
s_w = 400 мм	Площадь сечения сжатой арматуры
l = 3,3 м	Длина колонны
M_{inf} = 250 кНм	Изгибающий момент в нижнем опорном сечении
M_{sup} = 350 кНм	Изгибающий момент в верхнем опорном сечении
N = 572 кН	Продольная сжимающая сила

Класс бетона B25
Класс поперечной арматуры A240

Результаты расчета SCAD:

N  Макс. -572 кН Привязка 0 м	**M_y** Макс. -350 кН*м Привязка 3,3 м  Макс. 250 кН*м Привязка 0 м	**M_z** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 0 кН*м Привязка 0 м
M_k Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 0 кН*м Привязка 0 м	**Q_z**  Макс. -181,82 кН Привязка 0 м	**Q_y** Макс. 0 кН Привязка 0 м  Макс. 0 кН Привязка 0 м
	Длина стержня 3,3 м Длина гибкой части 3,3 м Загружение L1 - "123"	

Конструктивная группа Колонна

Шаг поперечной арматуры больше допускаемого (см. п. 8.3.11 СП 52-101-2003) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Сжато-изогнутый (растянутый)

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Максимальный процент армирования 10
Случайный эксцентриситет по оси Z_1 0 мм
Случайный эксцентриситет по оси Y_1 0 мм

Статически неопределимая система
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OZ_1 1
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OY_1 1

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
50	50

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A240	1
Поперечная	A240	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B25

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Отсутствие трещин

Конструктивная группа Колонна. Элемент № 1

Длина элемента 3,3 м

Заданное армирование

Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 2∅6 S_2 - 2∅6 Поперечная арматура вдоль оси Z 2∅12, шаг поперечной арматуры 400 мм Поперечная арматура вдоль оси Y 2∅12, шаг поперечной арматуры 400 мм	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,98	Прочность по наклонному сечению	п. 6.2.34, пп. 3.52,3.71 Пособия

Сравнение решений (по СНиП 52-101-2003):

Проверка	Прочность по наклонному сечению
Пособие	181,8/184,8 = 0,984
SCAD	0,98
Отклонение, %	0,4 %

Конструктивная группа Колонна

Шаг поперечной арматуры больше допускаемого (см. п. 10.3.13 СП 63.13330.2012) .
Элементы: 1

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Сжато-изогнутый (растянутый)

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Максимальный процент армирования 10
Случайный эксцентриситет по оси Z_1 0 мм
Случайный эксцентриситет по оси Y_1 0 мм

Статически неопределимая система
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OZ_1 1
Коэффициент расчетной длины в плоскости X_1OY_1 1

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
50	50

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A240	1
Поперечная	A240	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B25

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b5}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Отсутствие трещин

Конструктивная группа Колонна. Элемент № 1
Длина элемента 3,3 м

Заданное армирование

Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 2∅6 S_2 - 2∅6 Поперечная арматура вдоль оси Z 2∅12, шаг поперечной арматуры 400 мм Поперечная арматура вдоль оси Y 2∅12, шаг поперечной арматуры 400 мм	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,84	Прочность по наклонному сечению	пп. 8.1.33, 8.1.34

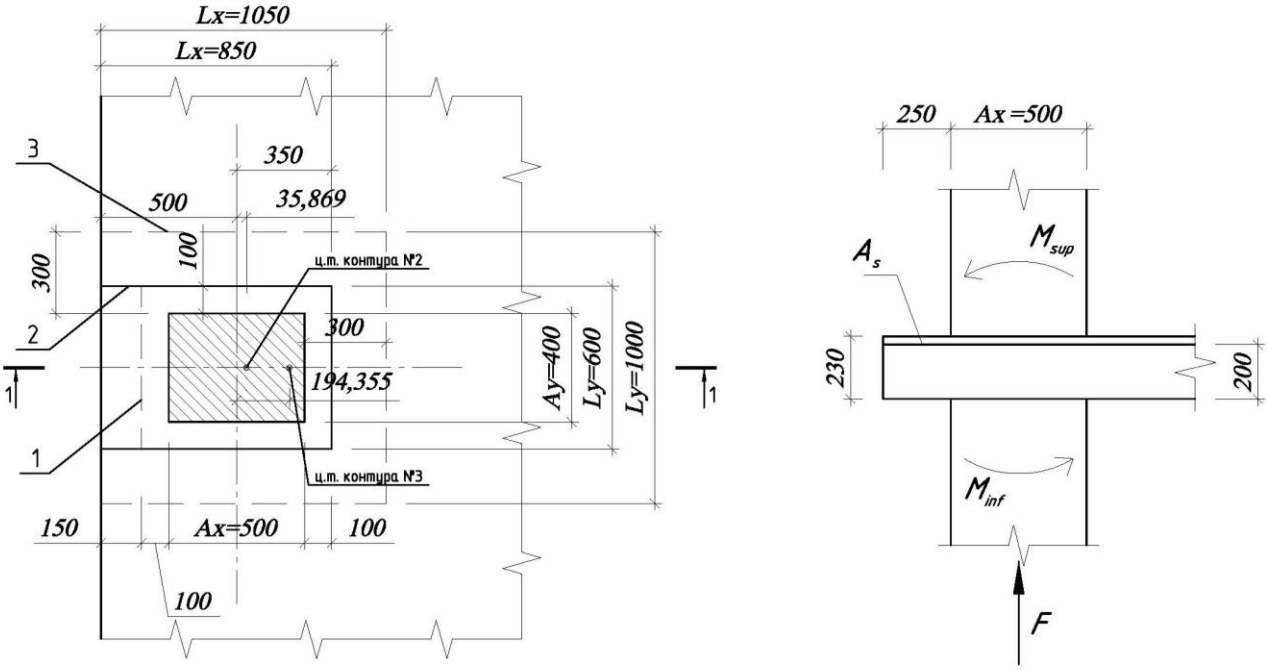
Сравнение решений (по СП 63.13330.2012)

Проверка	Прочность по наклонному сечению
Пособие	181,8/184,8 = 0,984
SCAD	0,84
Отклонение, %	14,6 %

Комментарий

Различие коэффициентов использования в 14,6% в результатах решения в Пособии и SCAD согласно СП 63.13330.2012 обусловлено иным учетом сжимающих напряжений соответственно с данными нормами (п. 8.1.34) в отличии от СНиП 52-101-2003.

Пример продавливания у края плиты



1 – замкнутый расчетный контур №1, 2 – незамкнутый расчетный контур №2, 3 – незамкнутый расчетный контур №3.

Расчет плиты плоского монолитного перекрытия на продавливание

Цель: Проверка режима расчета на продавливание в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить правильность анализа прочности на продавливание бетонного элемента при действии сосредоточенной силы и изгибающего момента в случае расположения площадки приложения нагрузки у края плиты.

Соответствие нормативам: СНиП 52-101-2003, СП 63.13330.2012.

Файл с исходными данными:

SCAD 41 SP-2003.spr, SCAD 41 SP-2012.spr

отчет – SCAD 41 SP-2003.doc

отчет – SCAD 41 SP-2012.doc

Исходные данные:

h = 230 мм	Толщина плиты
h_0 = 200 мм	Усреднённая рабочая высота плиты
$a \times b$ = 500×400 мм	Размеры сечения колонн
F = 150 кН	Нагрузка, передающаяся с перекрытия на колонну
M_{sup} = 80 кН·м	Момент в сечении колонны по верхней грани плиты
M_{inf} = 90 кН·м	Момент в сечении колонны по нижней грани плиты
x_0 = 500 мм	Расстояние от центра сечения колонны до свободного края плиты
Класс бетона	B25

Аналитическое решение:

В данном случае необходимо проверить прочность трех контуров расчетного поперечного сечения:

контур №1 – замкнутый контур вокруг сечения колонны на расстоянии $0,5h_0$ от контура колонны;

контур №2 – незамкнутый контур вокруг сечения колонны на расстоянии $0,5h_0$ от контура колонны с продлением контура до свободного края плиты;

контур №3 – незамкнутый контур вокруг сечения колонны на расстоянии $1,5h_0$ от контура колонны (контура поверочного расчета без учета арматуры).

1. <u>Замкнутый контур №1:</u>

$L_x = A_x + h_0 = 500 + 200 = 700$ мм = 0,7 м,

$L_y = A_y + h_0 = 400 + 200 = 600$ мм = 0,6 м,

Периметр расчетного контура поперечного сечения:

$u = 2(L_x + L_y) = 2\ (0,7 + 0,6) = 2,6$ м.

Площадь расчетного контура поперечного сечения:

$A_b = uh_0 = 2,6$ x $0,2 = 0,52$ м^2.

Предельное усилие, воспринимаемое бетоном:

$F_{b,ult} = R_{bt}A_b = 1,05$ x10^3 x $0,52 = 546$ кН.

Момент инерции расчетного контура относительно оси X, проходящей через его центр тяжести:

$$I_{bx} = 2\frac{L_y^3}{12} + 2L_x\left(\frac{L_y}{2}\right)^2 = 2\frac{0,6^3}{12} + 2\cdot 0,7\left(\frac{0,6}{2}\right)^2 = 0,162 \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления расчетного контура бетона

$$W_{bx} = \frac{I_{bx}}{y_{\max}} = = \frac{0,162}{0,3} = 0,54 \text{ м}^2.$$

Момент инерции расчетного контура относительно оси Y, проходящей через его центр тяжести:

$$I_{by} = 2\frac{L_x^3}{12} + 2\cdot L_y\left(\frac{L_x}{2}\right)^2 = 2\frac{0,7^3}{12} + 2\cdot 0,6\left(\frac{0,7}{2}\right)^2 = 0,204 \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления расчетного контура бетона

$$W_{by} = \frac{I_{by}}{x_{\max}} = = \frac{0,204}{0,35} = 0,583 \text{ м}^2.$$

Изгибающий момент, который может быть воспринят бетоном в расчетном поперечном сечении:

$M_{bx,ult} = R_{bt}W_{bx}h_0 = 1,05$ x10^3 x $0,54$ x $0,2 = 113,4$ кНм.

$M_{by,ult} = R_{bt}W_{by}h_0 = 1,05$ x10^3 x $0,583$ x $0,2 = 122,4$ кНм.

Для СНиП 52-101-2003:

$$\frac{M_x}{M_{bx,ult}} \le \frac{F}{F_{b,ult}}; \qquad \frac{M_y}{M_{by,ult}} \le \frac{F}{F_{b,ult}}$$

$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{85}{122,4} = 0,694 \le \frac{F}{F_{b,ult}} = \frac{150}{546} = 0,275$ – условие не выполняется.

Принимаем

$$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{F}{F_{b,ult}} = 0,275$$

Прочность плиты при продавливании:

$$K1 = \left[\frac{F}{F_{b,ult}} + \frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}}\right] \le 1,0$$

К1 = 0,275+0+0,275 = 0,55

Для СП 63.13330.2012:

$$\frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}} \le 0,5\frac{F}{F_{b,ult}}$$

$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{85}{122,4} = 0,694 \le 0,5\frac{F}{F_{b,ult}} = \frac{150}{546} = 0,5 \cdot 0,275 = 0,1375$ – условие не выполняется.

Принимаем

$$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{F}{F_{b,ult}} = 0,1375$$

Прочность плиты при продавливании:

$$K1 = \left[\frac{F}{F_{b,ult}} + \frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}}\right] \le 1,0$$

К1 = 0,275+0+0,1375 = 0,413

Незамкнутый контур №2:

$L_x = A_x + h_0 + 150 = 500 + 200 + 150 = 850$ мм = 0,85 м,

$L_y = A_y + h_0 = 400 + 200 = 600$ мм = 0,6 м,

Периметр расчетного контура поперечного сечения:

$u = 2L_x + L_y = 2\text{x}0{,}85 + 0{,}6 = 2{,}3$ м.

Площадь расчетного контура поперечного сечения:

$A_b = uh_0 = 2{,}3 \text{ x } 0{,}2 = 0{,}46$ м^2.

Координата X центра тяжести незамкнутого контура относительно левого края плиты:

$$X = \frac{425 \cdot 850 \cdot 2 + 850 \cdot 600}{850 \cdot 2 + 600} = 535{,}869 \text{ мм}$$

Предельное усилие, воспринимаемое бетоном:

$F_{b,ult} = R_{bt} A_b = 1{,}05 \text{ x}10^3 \text{ x } 0{,}46 = 483$ кН.

Момент инерции расчетного контура относительно оси X, проходящей через его центр тяжести:

$$I_{bx} = \frac{L_y^3}{12} + 2L_x \left(\frac{L_y}{2} \right)^2 = \frac{0{,}6^3}{12} + 2 \cdot 0{,}85 \left(\frac{0{,}6}{2} \right)^2 = 0{,}171 \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления расчетного контура бетона

$$W_{bx} = \frac{I_{bx}}{y_{\max}} = \frac{0{,}171}{0{,}3} = 0{,}57 \text{ м}^2.$$

Момент инерции расчетного контура относительно оси Y, проходящей через его центр тяжести:

$$I_{by} = 2\frac{L_x^3}{12} + 2L_x (0{,}075 + 0{,}035869)^2 + L_y \left(0{,}35 - 0{,}035869\right)^2 = 2\frac{0{,}85^3}{12} + 2 \cdot 0{,}85 (0{,}075 + 0{,}035869)^2 + 0{,}6 \left(0{,}35 - 0{,}035869\right)^2$$

=0,183 м^3.

Момент сопротивления расчетного контура бетона

$$W_{by} = \frac{I_{by}}{x_{\max}} = \frac{0{,}183}{0{,}535869} = 0{,}341 \text{м}^2.$$

Изгибающий момент, который может быть воспринят бетоном в расчетном поперечном сечении:

$M_{bx,ult} = R_{bt} W_{bx} h_0 = 1{,}05 \text{ x}10^3 \text{ x } 0{,}57 \text{ x } 0{,}2 = 119{,}7$ кНм.

$M_{by,ult} = R_{bt} W_{by} h_0 = 1{,}05 \text{ x}10^3 \text{ x } 0{,}341 \text{ x } 0{,}2 = 71{,}6$ кНм.

$M_y = M_y - Fe_0 = 85 - 150\text{x}0{,}035869 = 85 - 5{,}38 = 79{,}62$ кНм.

Для СНиП 52-101-2003:

$$\frac{M_x}{M_{bx,ult}} \le \frac{F}{F_{b,ult}}; \qquad \frac{M_y}{M_{by,ult}} \le \frac{F}{F_{b,ult}}$$

$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{79,62}{71,6} = 1,112 \le \frac{F}{F_{b,ult}} = \frac{150}{483} = 0,311$ – условие не выполняется.

Принимаем

$$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{F}{F_{b,ult}} = 0,311$$

Прочность плиты при продавливании:

$$K1 = \left[\frac{F}{F_{b,ult}} + \frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}} \right] \le 1,0$$

К1 = 0,311+0+0,311 = 0,622

Для СП 63.13330.2012:

$$\frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}} \le 0,5\frac{F}{F_{b,ult}}$$

$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{79,62}{71,6} = 1,112 \le 0,5\frac{F}{F_{b,ult}} = \frac{150}{483} = 0,5 \cdot 0,311 = 0,155$ – условие не выполняется.

Принимаем

$$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{F}{F_{b,ult}} = 0,155$$

Прочность плиты при продавливании:

$$K1 = \left[\frac{F}{F_{b,ult}} + \frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}} \right] \le 1,0$$

К1 = 0,311+0+0,155 = 0,466

Незамкнутый контур №3:

$L_x = A_x + 1,5h_0 + 250 = 500 + 1,5\text{x}200 + 250 = 1050$ мм = 1,05 м,

$L_y = A_y + 2 \cdot 1,5h_0 = 400 + 2\text{x}1,5\text{x}200 = 1000$ мм = 1,0 м,

Периметр расчетного контура поперечного сечения:

$u = 2L_x + L_y = 2\text{x}1,05 + 1,0 = 3,1$ м.

Площадь расчетного контура поперечного сечения:

$A_b = uh_0 = 3,1 \text{ x } 0,2 = 0,62$ м^2.

Координата X центра тяжести незамкнутого контура относительно левого края плиты:

$$X = \frac{525 \cdot 1050 \cdot 2 + 1050 \cdot 1000}{1050 \cdot 2 + 1000} = 694,355 \text{ мм}$$

Предельное усилие, воспринимаемое бетоном:

$F_{b,ult} = R_{bt} A_b = 1,05 \text{ x}10^3 \text{ x } 0,62 = 651$ кН.

Момент инерции расчетного контура относительно оси X, проходящей через его центр тяжести:

$$I_{bx} = \frac{L_y^3}{12} + 2L_x \left(\frac{L_y}{2} \right)^2 = \frac{1,05^3}{12} + 2 \cdot 1,05 \left(\frac{1,0}{2} \right)^2 = 0,608 \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления расчетного контура бетона

$$W_{bx} = \frac{I_{bx}}{y_{\max}} = \frac{0,608}{0,5} = 1,217 \text{ м}^2.$$

Момент инерции расчетного контура относительно оси Y, проходящей через его центр тяжести:

$$I_{by} = 2\frac{L_x^3}{12} + 2L_x (0,194355 - 0,025)^2 + L_y \left(1,05 - 0,694355\right)^2 = 2\frac{1,05^3}{12} + 2 \cdot 1,05 (0,194355 - 0,025)^2 + 1,0 \left(1,05 - 0,694355\right)^2 = 0,38 \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления расчетного контура бетона

$$W_{by} = \frac{I_{by}}{x_{\max}} = \frac{0,38}{0,694355} = 0,547 \text{ м}^2.$$

Изгибающий момент, который может быть воспринят бетоном в расчетном поперечном сечении:

$M_{bx,ult} = R_{bt} W_{bx} h_0 = 1,05 \text{ x}10^3 \text{ x } 1,217 \text{ x } 0,2 = 255,57$ кНм.

$M_{by,ult} = R_{bt} W_{by} h_0 = 1,05 \text{ x}10^3 \text{ x } 0,547 \text{ x } 0,2 = 114,87$ кНм.

$M_y = M_y - Fe_0 = 85 - 150\text{x}0,194355 = 85 - 29,15 = 55,85$ кНм.

Для СНиП 52-101-2003:

$$\frac{M_x}{M_{bx,ult}} \le \frac{F}{F_{b,ult}}; \qquad \frac{M_y}{M_{by,ult}} \le \frac{F}{F_{b,ult}}$$

$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{55,85}{114,87} = 0,486 \le \frac{F}{F_{b,ult}} = \frac{150}{651} = 0,23$ – условие не выполняется.

Принимаем

$$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{F}{F_{b,ult}} = 0,23$$

Прочность плиты при продавливании:

$$K1 = \left[\frac{F}{F_{b,ult}} + \frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}}\right] \le 1,0$$

К1 = 0,23+0+0,23 = 0,46

Для СП 63.13330.2012:

$$\frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}} \le 0,5\frac{F}{F_{b,ult}}$$

$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{55,85}{114,87} = 0,486 \le 0,5\frac{F}{F_{b,ult}} = \frac{150}{651} = 0,5 \cdot 0,23 = 0,115$ – условие не выполняется.

Принимаем

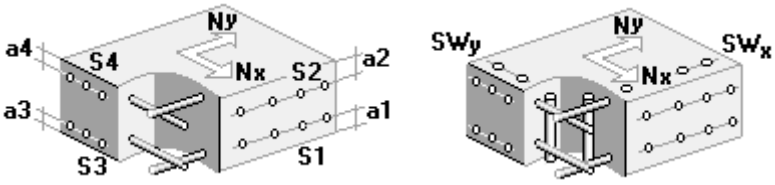
$$\frac{M_y}{M_{by,ult}} = \frac{F}{F_{b,ult}} = 0,155$$

Прочность плиты при продавливании:

$$K1 = \left[\frac{F}{F_{b,ult}} + \frac{M_x}{M_{bx,ult}} + \frac{M_y}{M_{by,ult}}\right] \le 1,0$$

К1 = 0,23+0+0,115 = 0,345

Результаты расчета SCAD:



Узел № 5

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B25

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

Расстояние до ц.т. арматуры			
a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**
мм	**мм**	**мм**	**мм**
30	30	0	0

Результаты расчета

Расчетный случай – крайняя колонна

Длина контура верхнего основания пирамиды продавливания - 1800 мм
Длина контура нижнего основания пирамиды продавливания - 2300 мм

Сравнение решений (по СНиП 52-101-2003)

Проверено по СНиП	**Проверка**	**Коэффициент использования**
п.6.2.49	Прочность без учета армирования	0,62

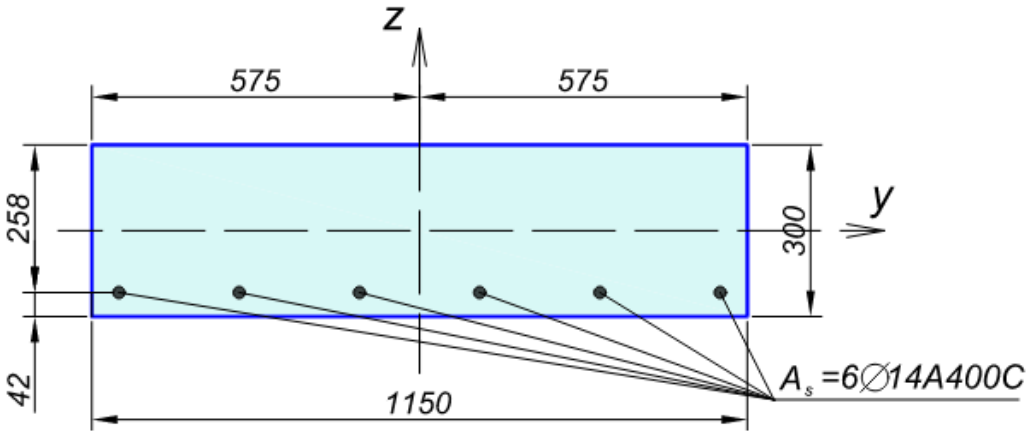
Проверка	прочность на продавливание по незамкнутому контуру бетонного элемента при действии сосредоточенной силы и изгибающих моментов (в том числе дополнительных от внецентренного приложения силы относительно контура продавливания) с векторами вдоль осей X,Y (площадка приложения у края плиты)
Аналитическое решение	0,622
SCAD	0,62
Отклонение, %	0,1 %

Сравнение решений (по СП 63.13330.2012)

Проверено по СП	**Проверка**	**Коэффициент использования**
п.8.1.49	Прочность без учета армирования	0,47

Проверка	прочность на продавливание по незамкнутому контуру бетонного элемента при действии сосредоточенной силы и изгибающих моментов (в том числе дополнительных от внецентренного приложения силы относительно контура продавливания) с векторами вдоль осей X,Y (площадка приложения у края плиты)
Аналитическое решение	0,466
SCAD	0,47
Отклонение, %	0,1 %

Расчет железобетонной плиты фундамента по раскрытию нормальных трещин



Цель: Проверка расчета ширины раскрытия трещин в постпроцессоре «Железобетон» вычислительного комплекса SCAD

Задача: Проверить правильность анализа раскрытия нормальных трещин.

Ссылки:
1. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003), 2005, с. 155-157.
2. Перельмутер М.А., Попок К.В., Скорук Л.Н. *Расчет ширины раскрытия нормальных трещин по СП 63.13330.2012*, Бетон и железобетон , 2014, №1, с.21-22.

Файл с исходными данными:
SCAD 43 SP.spr
отчет – SCAD 43 SP-2003.doc

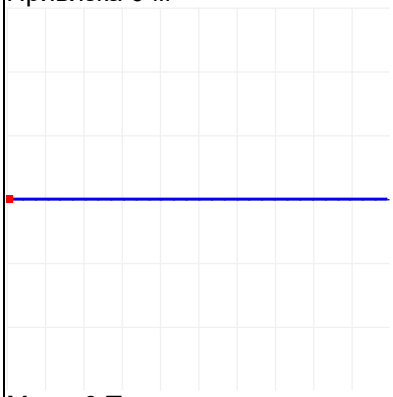
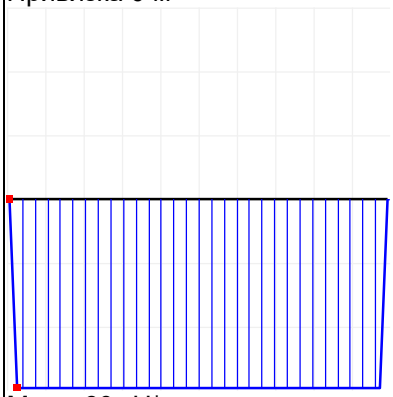
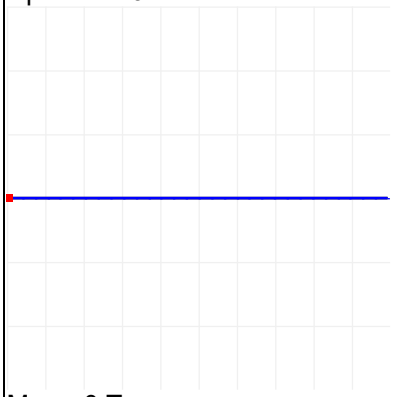
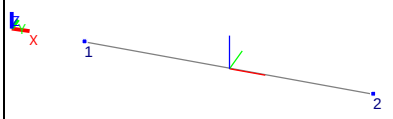
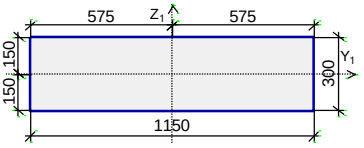
Соответствие нормативным документам: СП 52-101-2003.

Исходные данные:

$b \times h$ = 1150×300 мм	Размеры сечения плиты
a = 42 мм	Расстояние до ц.т. растянутой арматуры
A_{sw} = 923 мм^2 (6∅14)	Площадь сечения растянутой арматуры
M_l = 50 кНм	Изгибающий момент в расчетном сечении от постоянных и длительных нагрузок
M_{sh} = 10 кНм	Изгибающий момент от кратковременных нагрузок

Класс бетона В15
Класс арматуры А400

Результаты расчета SCAD:

N Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**M_y** Макс. 0 кН*м Привязка 0 м  Макс. 60 кН*м Привязка 0,02 м	**M_z**
M_k	**Q_z** Макс. 0 Т Привязка 0 м  Макс. 0 Т Привязка 0 м	**Q_y**
	Длина стержня 1 м Длина гибкой части 1 м Загружение L1 - "Момент"	

Конструктивная группа Балка

Коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$

Тип элемента - Изгибаемый

Напряженное состояние - Одноосный изгиб

Максимальный процент армирования 10

Коэффициенты учета сейсмического воздействия	
Нормальные сечения	0
Наклонные сечения	0

Расстояние до ц.т. арматуры	
a_1	**a_2**
мм	**мм**
42	42

Арматура	**Класс**	**Коэффициент условий работы**
Продольная	A400	1
Поперечная	A240	1

Бетон
Вид бетона: Тяжелый
Класс бетона: B15

Коэффициенты условий работы бетона		
γ_{b1}	учет нагрузок длительного действия	1
γ_{b2}	учет характера разрушения	1
γ_{b3}	учет вертикального положения при бетонировании	1
γ_{b4}	учет замораживания/оттаивания и отрицательных температур	1

Влажность воздуха окружающей среды - 40-75%

Трещиностойкость
Ограниченная ширина раскрытия трещин
Требования к ширине раскрытия трещин выбираются из условия сохранности арматуры
Допустимая ширина раскрытия трещин:
Непродолжительное раскрытие 0,4 мм
Продолжительное раскрытие 0,3 мм

Конструктивная группа Балка. Элемент № 1

Длина элемента 1 м

Заданное армирование

Участок	Арматура	Сечение
1	S_1 - 6∅14	

Результаты расчета			
Участок	**Коэффициент использования**	**Проверка**	**Проверено по СНиП**
1	0,97	Ширина раскрытия трещин (длительная)	п.п. 7.2.3, 7.2.4, 7.2.12

Сравнение решений

Проверка	ширина раскрытия трещин (длительная)
Пособие	0,306/0,3 = 1,02
SCAD	0,97
Отклонение, %	4,9 %

Комментарии:

1. Значение полного момента, действующего в сечении, $M = Ml + Msh$ = 50 + 10 = 60 кН·м, коэффициент длительной части равен Ml / M = 50/60 = 0,833.
2. Отклонение результатов SCAD от теоретического решения связано с тем, что в SCAD для обеспечения вычислительной устойчивости рассматривается не идеальные диаграммы работы материалов, а диаграммы, в которых горизонтальная часть графика σ(ε) имеет небольшой наклон.