

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b>	<b>IX</b>
<b>1. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Определение понятия устойчивости равновесия</b>	<b>3</b>
1.1.1 Теорема Лагранжа-Дирихле. Теоремы Ляпунова	6
1.1.2 Пример 1	11
<b>1.2 Упругие системы с конечным числом степеней свободы</b>	<b>15</b>
1.2.1 Функционал устойчивости – функционал Болотина	23
1.2.2 Линеаризованные постановки задачи устойчивости равновесия	23
1.2.3 Пример 2	28
1.2.4 Пример 3 – парадоксы в задачах устойчивости равновесия?	37
• О неинвариантности критической нагрузки по отношению к выбору обобщенных координат системы	45
<b>1.3 Некоторые общие теоремы теории устойчивости равновесия</b>	<b>47</b>
1.3.1 Отношение Релея и вариационно-рекурсивное определение критических нагрузок	49
1.3.2 О разложении исходного $n$ -мерного пространства векторов обобщенных перемещений в прямую сумму трех подпространств	54
1.3.3 Нормальные координаты системы	58
1.3.4 О влиянии связей на устойчивость равновесия линеаризованной упругой системы	60
1.3.5 Теорема Папковича о выпуклости области устойчивости	64
• Предупредительные замечания к теореме Папковича	73
• Прикладной аспект теоремы Папковича	76
1.3.6 Еще раз о геометрической матрице жесткости	81
1.3.7 Устойчивость равновесия при несиловом воздействии	83
<b>1.4 Характеристическая кривая упругой системы</b>	<b>87</b>
• Система с одной степенью свободы	88
• Система с несколькими степенями свободы	93
<b>1.5 Заключительные комментарии к главе 1</b>	<b>97</b>
<b>2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТЕЛ</b>	<b>99</b>
<b>2.1 Геометрически нелинейные задачи теории упругости</b>	<b>99</b>
2.1.1 Геометрические уравнения	99
• Варьирование компонент тензора деформаций	103

#### IV СОДЕРЖАНИЕ

---

2.1.2 Уравнения равновесия и статические краевые условия ..	104
<b>2.2 Устойчивость равновесия упругого тела</b> .....	109
2.2.1 Линеаризованные постановки задачи устойчивости равновесия упругого тела .....	113
2.2.2 О механической интерпретации отдельных слагаемых в функционале устойчивости. Понятие об эквивалентной нагрузке .....	118
2.2.3 Критерии критического состояния системы .....	120
<b>2.3 Метод Ритца</b> .....	124
<b>2.4 Смешанные функционалы в задачах устойчивости равновесия</b> .....	128
• Пример .....	130
<b>2.5 О функционалах типа Тимошенко</b> .....	136
2.5.1 Об использовании статически допустимых усилий в функционале устойчивости равновесия .....	142
<b>2.6 Упругие системы при наличии связей</b> .....	146
2.6.1 Упругие системы с конечным числом степеней свободы • Пример .....	148
• Общий случай учета влияния связей способом понижения размерности задачи .....	152
• Учет влияния связей способом повышения размерности задачи .....	156
2.6.2 Упруго деформируемое тело со связями .....	160
• Упругое тело, армированное несжимаемой нитью .....	160
<b>2.7 Упругие системы при наличии абсолютно твердых тел</b> .....	163
2.7.1 О равновесии упругой системы при наличии жестких тел	164
2.7.2 Кинематические соотношения для абсолютно жесткого тела .....	168
2.7.3 О работе сил, приложенных к абсолютно твердому телу	171
2.7.4 Функционал устойчивости равновесия для системы с абсолютно жестким телом .....	172
2.7.5 Матрица геометрической жесткости для абсолютно жесткого тела .....	177
• Системы с конечным числом степеней свободы .....	180
2.7.6 Пример .....	181
• О моделировании пружин сжимаемыми стержнями ....	183
<b>2.8 Условие жесткого контура, рассматриваемое в качестве связи</b>	186
<b>2.9 Заключительные комментарии к главе 2</b> .....	189
<b>3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ</b> .....	191
<b>3.1 О роли начальных несовершенств</b> .....	191
3.1.1 Устойчивость в большом. Верхние и нижние критические нагрузки .....	202
<b>3.2 Системы со многими степенями свободы</b> .....	210
3.2.1 Первоначальный анализ .....	212
3.2.2 Анализ в высших приближениях .....	216
3.2.3 Классификация сингулярных точек .....	217

3.2.4	Качество равновесия в сингулярных точках .....	218
3.3	Заключительные комментарии к главе 3 .....	222
<b>4.</b>	<b>УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ .</b>	<b>225</b>
4.1	Устойчивость равновесия сжатого стержня .....	226
4.1.1	О краевых условиях при расчетах на устойчивость равновесия сжатого стержня .....	232
4.1.2	Ортогональность форм потери устойчивости стержня ....	238
4.1.3	Начальные несовершенства .....	241
•	О расчете по деформированной схеме .....	244
4.1.4	Закритическое поведение сжато-изогнутого стержня .....	246
4.1.5	Устойчивость равновесия стержня Тимошенко – учет деформаций сдвига .....	252
4.1.6	Устойчивость равновесия стержня, покоящегося на упругом основании .....	256
4.2	Вариационный вывод уравнения устойчивости сжатого стержня .....	259
4.2.1	Устойчивость равновесия сжатого стержня в рамках технической теории стержней Бернулли-Эйлера .....	259
4.2.2	Устойчивость равновесия стержня Тимошенко .....	263
4.3	Устойчивость равновесия сжатой пружины .....	269
4.3.1	Модель с двумя степенями свободы .....	270
4.3.2	Дискретно-континуальная модель .....	272
•	Учет деформаций сдвига .....	276
4.3.3	Модель эквивалентного стержня .....	277
•	Учет деформаций сдвига .....	282
4.4	О выпучивании растянутого стержня .....	285
4.5	Пространственные формы потери устойчивости стержня ...	291
4.6	Зависит ли критическая сила от поперечной нагрузки ? .....	296
4.7	Отношение Релея и формула Тимошенко .....	302
•	О формуле типа Тимошенко для стержня Тимошенко .	308
4.8	Устойчивость стержней при кручении .....	311
4.8.1	Об интегрировании системы уравнений (8.9) .....	319
4.8.2	Кручение стержня при отсутствии продольной силы .....	321
4.8.3	Краевые условия .....	322
4.8.4	Примеры .....	325
•	Случай стержня, защемленного с двух концов .....	326
•	Случай консольного стержня .....	328
4.9	Заключительные комментарии к главе 4 .....	331
<b>5.</b>	<b>УСТОЙЧИВОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ И АРОК 333</b>	
5.1	Основные уравнения для криволинейного стержня в линейной постановке задачи .....	334
5.1.1	Упрощения уравнений для криволинейного стержня с несжимаемой осью .....	338
•	Пример 1 .....	341
•	Пример 2 .....	347
5.2	Вариационный вывод уравнений устойчивости равновесия	

криволинейного стержня .....	350
<b>5.3 Устойчивость равновесия несжимаемого криволинейного стержня .....</b>	<b>354</b>
5.3.1 Устойчивость несжимаемого кругового кольца при действии мертвых радиальных сил .....	356
5.3.2 Устойчивость несжимаемой круговой арки под действием гидростатического давления .....	357
• Круговая двухшарнирная арка .....	359
• Круговая бесшарнирная арка .....	361
5.3.3 Устойчивость кольца под действием полярной радиальной нагрузки .....	364
5.3.4 Устойчивость арок при вертикальной нагрузке .....	364
<b>5.4 Устойчивость равновесия пологих арок .....</b>	<b>367</b>
5.4.1 Модельная задача – ферма Мизеса .....	369
5.4.2 Пологая арка под действием вертикальной нагрузки .....	378
<b>6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ .....</b>	<b>385</b>
<b>6.1 Тонкостенный стержень открытого профиля .....</b>	<b>386</b>
6.1.1 Устойчивость равновесия внецентренно сжатого стержня .....	386
• Краевые условия .....	398
• Характеристическое уравнение для критических сил внецентренно сжатого стержня .....	402
• Тонкостенный стержень, сжатый вдоль линии центров изгиба .....	407
• Центально сжатый тонкостенный стержень .....	413
• Устойчивость равновесия тонкостенного стержня с недепланируемым сечением .....	414
<b>6.2 Поперечный изгиб тонкостенных стержней .....</b>	<b>421</b>
• Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенного стержня. Случай чистого изгиба .....	427
• Обобщенная задача Прандтля-Мичелла .....	429
• Обобщенная задача Тимошенко .....	435
6.2.1 Вариационный способ получения функционала Власова .....	438
• Об учете уровня приложения внешней поперечной нагрузки .....	440
<b>6.1 Тонкостенные стержни в рамках полусдвиговой теории .....</b>	<b>442</b>
6.3.1 Устойчивость равновесия внецентренно сжатого стержня .....	444
• Случай недепланируемого сечения .....	449
6.3.2 Устойчивость равновесия при поперечном изгибе стержней в рамках полусдвиговой теории .....	449
6.3.3 Многоэтажное здание как тонкостенный стержень .....	452
<b>7. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ КРИВОЛИНЕЙНЫЙ СТЕРЖЕНЬ – ТЕОРИЯ КИРХГОФФА-КЛЕБША .....</b>	<b>455</b>
<b>7.1 Элементарные сведения о геометрии пространственной кривой .....</b>	<b>455</b>

<b>7.2 Криволинейный стержень и его геометрия</b> .....	460
<b>7.3 Кинематические соотношения для стержня</b> .....	466
<b>7.4 Уравнения равновесия для стержня</b> .....	471
<b>7.5 Физические уравнения</b> .....	474
<b>7.6 Плоский криволинейный стержень</b> .....	476
7.6.1 Функционалы устойчивости равновесия для плоского криволинейного стержня .....	478
• Упрощения в функционале $S_{изв}$ .....	485
• Упрощения в функционале $S_{эф}$ .....	486
7.6.2 Устойчивость плоской формы изгиба криволинейного стержня .....	488
• Круговое кольцо под действием радиальной нагрузки - задача Николаи .....	489
• Круговая арка в условиях чистого изгиба - задача Тимошенко .....	491
<b>7.7 Прямолинейный стержень с начальной круткой</b> .....	496
<b>7.8 Заключительные комментарии к теории Кирхгоффа-Клебша</b> .....	499
<b>8. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ.</b>	
<b>Парадоксы и заблуждения</b> .....	<b>501</b>
<b>8.1 Некоторые случаи поведения внешних сил</b> .....	503
<b>8.2 О гидростатической нагрузке</b> .....	510
• Функционал устойчивости равновесия при действии гидростатической нагрузки .....	512
<b>8.3 О полярной нагрузке</b> .....	513
<b>8.4 Моментная нагрузка</b> .....	515
8.4.1 Понятие обобщенных моментов .....	515
8.4.2 Компоненты вектора моментов и вектора поворотов в лагранжевой и эйлеровой координатных системах .....	524
• Полулагранжевы координаты .....	527
8.4.3 Условия консервативности вектора внешних моментов .	528
8.4.4 Общий случай момента мертвых сил .....	539
8.4.5 Некоторые механические модели реализации моментов мертвых сил .....	543
• О бимоментном воздействии .....	546
8.4.6 Уравнения равновесия, отвечающие поворотным степеням свободы механической системы .....	546
8.4.7 О попытке введения в обиход вектора обобщенных поворотов .....	549
<b>8.5 Устойчивость стержней в трехмерном пространстве</b> .....	551
8.5.1 Возвращение к задаче устойчивости стержня при кручении .....	551
• Пример. Устойчивость равновесия изолированного узла .....	554
8.5.2 Задача Николаи .....	555
• Тангенциальный внешний момент – статический	

## VIII СОДЕРЖАНИЕ

анализ .....	559
• Аксиальный внешний момент – статический анализ ....	560
• Тангенциальный внешний момент – динамический анализ .....	561
8.5.3 Возвращение к задаче устойчивости плоской формы изгиба .....	565
• Шарнирно опертый стержень в условиях чистого изгиба .....	568
• Чистый изгиб консольного стержня .....	573
• Распределенная моментная нагрузка .....	582
• Потеря устойчивости нулевого начального равновесного состояния .....	585
<b>8.6 Парадокс Аргироза и сопутствующие мифы .....</b>	<b>587</b>
• Парадокс Аргироза. Миф о полутангенциальности изгибающего момента .....	588
• Миф о тангенциальности моментов сил упругости .....	591
• Компоненты поворотов и производные от поперечных перемещений оси стержня .....	591
• Компоненты вектора поворотов как обобщенные координаты системы .....	593
<b>8.7 Заключительные комментарии к главе 8 .....</b>	<b>594</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>597</b>
<b>A. Обоснование упрощений в функционале устойчивости равновесия для тонкостенного стержня .....</b>	<b>597</b>
<b>B. Ортогональные криволинейные координаты – формулы для компонент деформаций .....</b>	<b>602</b>
B.1 Ортогональные криволинейные координаты. Общий случай .....	602
B.2 Ортогональные криволинейные координаты, порождаемые плоской кривой .....	605
<b>C. Дополнения к теореме Папковича .....</b>	<b>607</b>
C.1 Еще один вариант обоснования теоремы Папковича .....	607
C.2 Дополнительное замечание к теореме Папковича .....	608
<b>D. Качественные оценки критических сил .....</b>	<b>611</b>
D.1 Преобразования нагрузки .....	611
D.2 Преобразования жесткости .....	617
<b>E. Элементарные сведения из теории катастроф .....</b>	<b>620</b>
E.1 Идеология теории катастроф .....	620
E.2 Некоторые элементарные катастрофы .....	624
E.3 Влияние начальных несовершенств .....	628
E.4 Взаимодействие форм потери устойчивости .....	630
E.5 Процедура использования теории катастроф .....	639
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>641</b>
<b>ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>648</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>651</b>