

# Некоторые особенности расчета изгибаемых железобетонных конструкций с использованием конечно-элементных моделей

Д.т.н. Кантур О.В., Лоскутов И.С. Глотов Д.А.,  
ООО «ПКБ Катриэль», г. Москва

Рассматриваются особенности расчета необходимой арматуры и деформации несущих горизонтальных элементов конструкции зданий и сооружений с использованием конечно элементных моделей. Все приведенные результаты оценок получены в результате моделирования конструкций с использованием расчетного комплекса SCAD 11.5 [1].

Методологической основой при определении параметров требуемого армирования железобетонных элементов (включая и «плиты») является балочная схема деформирования. Например, в [3] прямо сформулировано: «подавляющее число современных сложных зданий включают в себя несущие железобетонные конструкции плоскостного типа (перекрытия, стены, диафрагмы жесткости), а нормы проектирования упорно игнорируют этот конструктивный тип, оставаясь, как и пятьдесят лет назад, ориентированными только на проверку стержневых элементов».

В общем случае задача расчета любой конструкции, в наиболее общей постановке (и вне зависимости от предполагаемого метода решения задачи) ставится как решение задачи **механики сплошной среды**.

## 1. К общей постановке задачи расчета конструкций

Задача расчета напряжений, деформаций при статическом воздействии на деформированную среду сводится к решению следующей системы уравнений, описывающих поведение дифференциальных объемов материала в декартовой системе координат:

- уравнения равновесия

$$\mathbf{f}_i = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j + \rho \cdot \mathbf{g}_i = \begin{cases} \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}_i & \text{- при динамических воздействиях} \\ \mathbf{0} & \text{- в статических задачах} \end{cases} ; \quad (1)$$

- уравнения непрерывности  $\dot{V} / V = \partial \dot{\mathbf{u}}_j / \partial x_j$  или  $\Delta V / V = \partial (\Delta \mathbf{u}_j) / \partial x_j$  ; (1.1)

- определение деформаций:

- без учета геометрической нелинейности

$$\epsilon_{ij} = (\partial \mathbf{u}_i / \partial x_j + \partial \mathbf{u}_j / \partial x_i) / 2 ; \quad (1.2)$$

- с учетом геометрической нелинейности

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (\partial \dot{\mathbf{u}}_i / \partial x_j + \partial \dot{\mathbf{u}}_j / \partial x_i) / 2 \text{ или } \Delta \epsilon_{ij} = (\partial (\Delta \mathbf{u}_i) / \partial x_j + \partial (\Delta \mathbf{u}_j) / \partial x_i) / 2 ; \quad (1.3)$$

- уравнения состояния материалов:

а) соотношения теории упругости

$$\epsilon_{ij} = (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot 3 \cdot \mu \cdot \sigma_0) / (2 \cdot G) ; \quad (1.4)$$

б) математическая модель деформирования материалов сооружения, учитывающая нелинейные деформации.

На всей внешней поверхности сооружения  $\Gamma$  (которая включает в себя все поверхности конструктивных элементов) задаются граничные условия вида

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}_{\Gamma}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\Gamma}, \sigma_{ij\Gamma}, \mathbf{t}) = \mathbf{0} , \quad (1.5)$$

- во всей области решение, задаются начальные условия

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t} = 0) . \quad (1.6)$$

**Обозначения:** оси координат  $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ; во всех выражениях принято суммирование по повторяющимся индексам;  $\mathbf{f}_i$  -  $\mathbf{x}_i$  -компонента силы, действующей на единицу объема среды;  $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$  - тензоры напряжений и деформаций;  $\mathbf{u}_i$  - смещение точки среды в направлении  $\mathbf{x}_i$ ;  $V$  - выделенный элемент объема;  $\Delta$  – знак малого приращения величины в процессе изменения;  $\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3$  - среднее напряжение в среде;  $E, m$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $G = E / [2 \cdot (1 + \mu)]$  - модуль сдвига;  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера;  $\bar{\mathbf{g}}$  - ускорение силы тяжести (в ис-

пользуемой системе координат (рис. 1,2)  $\bar{g} = (0, 0, -g)^T$ ;  $\rho$  - плотность материала; точка над переменной означает производную по времени  $t$ .

В (1) «оставлены» члены, описывающие динамическую деформацию среды для иллюстрации известного факта, что  $\bar{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$  является вектором силы, действующей на единичный объем деформированной среды, поскольку очевидно, что для выделенного объема  $G$

$$F_i = \iiint_{\Delta G} \rho \cdot \ddot{u}_i \cdot dG^1 \text{ является вторым законом Ньютона для } \Delta G.$$

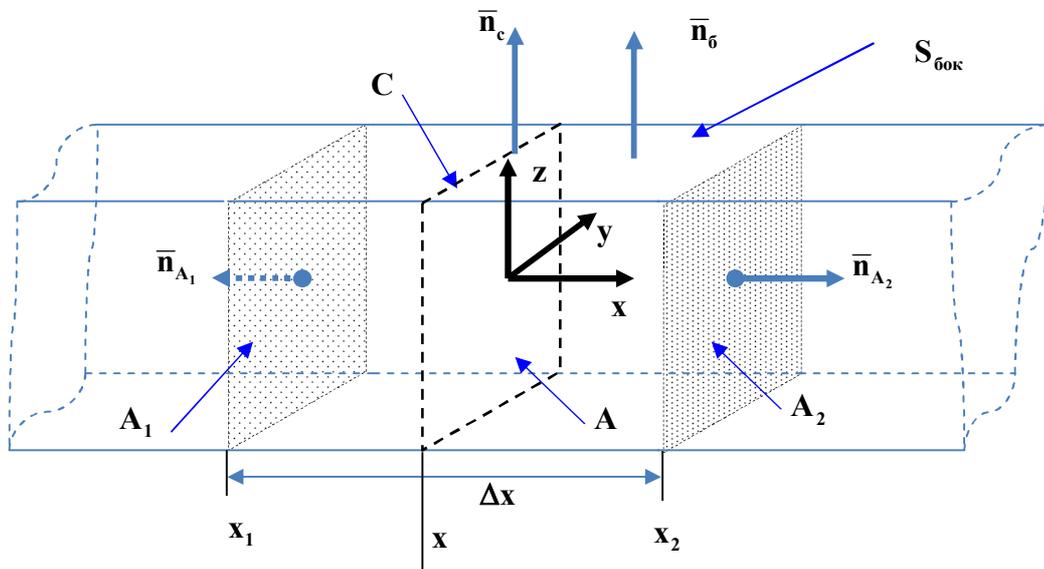
Уравнения типа (1) прямо используются в практике расчета реальных конструкций, Значительно чаще прибегают к использованию стержневых и оболочечных приближений.

*Особенностями линейных решений задачи расчета параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) при статическом воздействии на конструкцию являются: единственность решения и независимость его от начальных условий.*

## 2. Особенности стержневого приближения при описании деформаций конструктивных элементов.

Использование стержневого приближения при моделировании несущих элементов конструкции предполагает в качестве параметров напряженного состояния использование интегральных характеристик напряжений: внутренние усилия  $N, M_i, Q_i$ , определенных в сечениях конструкции перпендикулярных изогнутой (и сжато - растянутой) продольной оси, - нормальные сечения, физический смысл которых станет ясным из нижеприведенных соотношений.

Рассмотрим лишь «движение» в плоскости  $xOz$ , координаты связаны со стержнем (локальные), другие формы движения могут быть получены по аналогии.<sup>2</sup>



**Рис. 1.** Выделенный объем  $\Delta G$  призматической балки, между двумя плоскостями  $A_1$  и  $A_2$ , перпендикулярными ее оси.

Рассматривая строительные несущие железобетонные конструкции, в которых допускаются малые прогибы ( $1/400 - 1/100$ )  $L$ ,  $L$  - длина стержня, можно, в силу их малости, пренебречь влиянием искривления оси стержня на направление векторов  $\bar{p}$  (везде далее  $\bar{p}$ , в том числе с индексом).

<sup>1</sup> Интеграл (1) по объему  $G$ .

<sup>2</sup> Быть может это самый распространенный расчетный случай для изгибаемых железобетонных конструкций.

сами, - единичный вектор внешней нормали к поверхности). Тогда (рис. 1) внешние нормали выделенного объема  $\Delta G$ , пересекающего стержень перпендикулярно его оси по плоскостям  $A_1$  и  $A_2$   $\bar{n}_{A_1} = \bar{i} = -\bar{n}_{A_2}$ , здесь  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)^T = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})^T$  - орты осей координат  $x, y, z$ .

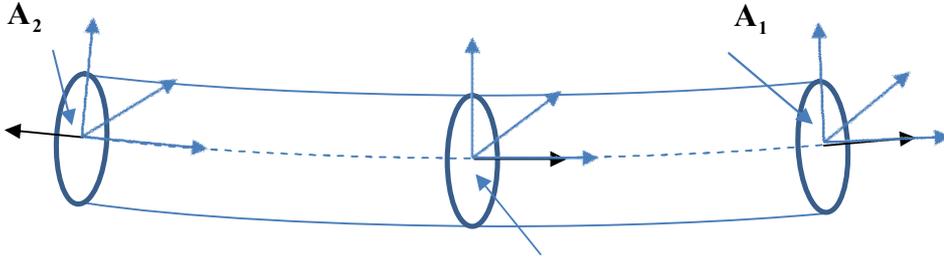


Рис. 2. Схема, иллюстрирующая фрагмент деформированного стержня.

Определим силу  $F_x$ , действующую на выделенный фрагмент среды в направлении  $x$  (Рис. 1), интегрируя первое из (1) по объему тела  $G$  и используя формулу Гаусса-Остроградского [5]<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 F_x &= \iiint_G f_x \cdot dV = \iiint_G \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j} \cdot dV = \iint_S \sigma_{xj} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{e}_j) \cdot dS = \\
 &= \iint_{A_2} \sigma_{xx}^{A_2} \cdot dy \cdot dz - \iint_{A_1} \sigma_{xx}^{A_1} \cdot dy \cdot dz + \iint_{S_{бок}} [\sigma_{xy}^{S_{бок}} \cdot (\bar{n}^6 \cdot \bar{j}) + \sigma_{xz}^{S_{бок}} \cdot (\bar{n}^6 \cdot \bar{k})] \cdot dS \\
 (\bar{n} \cdot \bar{e}_j) &= \cos(\bar{n} \wedge \bar{e}_j) - \text{скалярное произведение единичных векторов.}
 \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) значения  $\sigma_{ij}$  везде «определены» на поверхности, ограничивающей выделенный объем  $\Delta G$ , то есть (2) отражает известный факт, что в отсутствии массовых сил в направлении  $x$  (как в (2)) поверхностные силы определяют суммарную силу, действующую на выделенный объем.<sup>4</sup>

Все три члена в (2) компоненты вектора силы  $F_x$ : первые два члена – силы, действующие на сечения  $A_1$  и  $A_2$ , третий – сила, обусловленная нагрузками на боковой поверхности  $S_{бок}$ , причем при нагружении вдоль оси стержня лишь теми, которые приводят к возникновению касательных напряжений  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}$  (нагрузки вдоль оси балки: тормозные нагрузки, сейсмическое и ветровое воздействие и др.). Причем, для типовых сечений железобетонных балок (призматические, тавровые) в выбранной системе координат для горизонтальных поверхностей балки  $(\bar{n}^6 \cdot \bar{j}) = 0$ , а для вертикальных  $(\bar{n}^6 \cdot \bar{k}) = 0$ .

Величина  $F_x$  может быть вычислена иным способом. Проинтегрируем первое уравнение из (1) по площади поперечного сечения балки  $A$  с координатой  $x$  (рис. 1)  $(\bar{n}, \bar{x}) = 1$

$$F_x^A = \iint_A \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j} \cdot dS = \iint_{A_2} \sigma_{xx}^A \cdot dy \cdot dz + \iint_C [\sigma_{xy}^C \cdot (\bar{n}_c \cdot \bar{j}) + \sigma_{xz}^C \cdot (\bar{n}_c \cdot \bar{k})] \cdot dS, \quad (2.a)$$

<sup>3</sup> В выражениях предполагается суммирование по повторяющимся индексам, если она встречаются в индексных величинах и их произведениях ( $\sigma_{kk} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ ;

$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \partial \sigma_{ix} / \partial x + \partial \sigma_{iy} / \partial y + \partial \sigma_{iz} / \partial z$ ,  $i = x, y, z$  и т.д.)

<sup>4</sup> Может создаться иллюзия, что в таком случае процессы происходящие внутри объема  $G$  малозначительны – это не так.

$\mathbf{F}_x^A$  имеет смысл силы, действующей на единицу длины стержня.

Интегрирую (2.а) по  $\mathbf{x}$  на промежутке  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1]$  получим для силы  $\mathbf{F}_x$

$$\mathbf{F}_x = \iint_{A_2} \sigma_{xx}^{A_2} \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} - \iint_{A_1} \sigma_{xx}^{A_1} \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} + \int_{x_1}^{x_2} d\mathbf{x} \oint_C [\sigma_{xy}^C \cdot (\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{j}}) + \sigma_{xz}^C \cdot (\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{k}})] \cdot d\mathbf{C} \quad (2.6)$$

которое совпадает с (2) при  $\bar{\mathbf{n}}_c = \bar{\mathbf{n}}^{S_{бок}}$ . В практике балки (стержни) очень редко имеют боковые поверхности не параллельные оси, на которые действуют какие-либо распределенные нагрузки, поэтому выражения (2) и (2.6) можно считать тождественными.

Тогда вся информация о структуре стержня, его свойствах и действующей нагрузке на боковой поверхности содержится в выражении (2.1), которое в условии равновесия равно нулю ( $\ddot{\mathbf{u}}_x = \mathbf{0}$ ) и сводится к уравнению (2.1).

$$\frac{d\mathbf{N}}{d\mathbf{x}} + \mathbf{R}_x = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{N} = \iint_A \sigma_{xx}^A \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} \quad (2.2)$$

- нормальная сила, определенная в сечении  $A$ ;

$$\mathbf{R}_x = \oint_C [\sigma_{xy}^C \cdot (\bar{\mathbf{n}}^c \cdot \bar{\mathbf{j}}) + \sigma_{xz}^C \cdot (\bar{\mathbf{n}}^c \cdot \bar{\mathbf{k}})] \cdot d\mathbf{C} \quad (2.3)$$

- реакция в направлении  $\mathbf{x}$ , обусловленная взаимодействием стержня по боковой поверхности с окружающей средой, либо, действующими на боковой поверхности силами (приведенная к единице длины стержня).

**Обратим внимание на несколько принципиальных обстоятельств:**

- величина  $\mathbf{N}$  в сечении  $A$  является  $\mathbf{x}$ -компонентой силы, действующих на «левую (рис. 1) относительно сечения часть стержня в выбранной системе координат;

- выражение (2.1), является прямым следствием уравнений равновесия механики сплошной среды и не зависит от величины тензоров напряжений и деформаций, истории нагружения;

- силы, действующие на выделенный объем стержня (любой объем) определяются напряжениями, «определенными» на поверхности выделенного объема и не зависят от характера распределения напряжений внутри объема.

Наиболее часто встречающийся из эффектов деформирования изгибаемого железобетонного элемента, который делает рассматриваемую среду не сплошной и нелинейной, является образование трещин в растянутой зоне деформирования. Естественно, что при вычислении  $\mathbf{N}$  в (2.2) интегрирование производится по части сечения, сохранившей сплошность, (в области, пересекаемой нормальной трещиной, часть интеграла равна нулю).

Обратим внимание на обстоятельство: если  $\mathbf{R}_x = \mathbf{0} [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ , то на этом участке  $\mathbf{N} = \mathbf{const}$ , справедливо и обратное утверждение.

Производя аналогичную процедуру для направления  $\mathbf{z}$  (учтя наличие массовой силы, - вес материала) получим:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_z}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{R}_z - \mathbf{g} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

$$\text{где: } \mathbf{Q}_z = \iint_A \sigma_{zy}^A \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} \quad (2.5)$$

- перерезывающая сила, определенная в нормальном сечении  $A$ ;

$$\mathbf{R}_z = \oint_C [\sigma_{zy}^C \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{j}}) + \sigma_{yz}^C \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{k}})] \cdot d\mathbf{C} \quad (2.6)$$

- реакция в направлении  $\mathbf{z}$ , обусловленная взаимодействием стержня по боковой поверхности с окружающей средой, либо действующими на боковой поверхности силами;

$$\mathbf{m} = \iint_A \rho \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} \quad (2.7)$$

- «масса сечения» - единицы длины стержня.

При движении стержня в плоскости  $xOz$  единственной отличной от нуля компонентой момента  $\bar{\mathbf{M}}$  является компонента  $\mathbf{M}_y$ . Вычислим величину  $\mathbf{M}_y$  в сечении  $\mathbf{A}$  относительно оси  $y$ . Оси координат центрируем в центре масс сечения ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y &= \iint_A [\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}}]_y \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} = \iint_A \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}_x \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} = \\ &= \iint_A \left[ \frac{\partial(\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xz})}{\partial z} - \boldsymbol{\sigma}_{xz} \right] \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} = \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xx} \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} - \iint_A \boldsymbol{\sigma}_{xz} \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} + \oint_C \mathbf{z} \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{xy} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + \boldsymbol{\sigma}_{xz} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)] \cdot d\mathbf{C}$$

Напомним:  $[\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}}]_{y,x=0} = \bar{\mathbf{j}} \cdot (\mathbf{f}_x \cdot \mathbf{z})$ .

$$\frac{d\mathbf{M}_y}{d\mathbf{x}} + \mathbf{R}_{\varphi y} - \mathbf{Q}_z = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{M}_y = \iint_A \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xx} \cdot d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z} \quad (2.10)$$

- компонента «внутреннего момента», определенная в сечении  $\mathbf{A}$ ;

$$\mathbf{R}_{\varphi y} = - \oint_C \mathbf{z} \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{xy} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + \boldsymbol{\sigma}_{xz} \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)] \cdot d\mathbf{C} \quad (2.11)$$

- «моментная» реакция (2.11), обусловленная взаимодействием стержня по боковой поверхности с окружающей средой, либо действующими на боковой поверхности силами.<sup>5</sup>

### Определенные в сечении стержня величины усилий обладают рядом принципиальных свойств.

1. Величины  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}_y$ , определенные в сечении,  $\mathbf{A}$  являются компонентами векторов (проекции на оси координат  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ).

2. Величины внутренних усилий являются следствием уравнений равновесия **механики сплошной среды** с использованием единственного приближения: они относятся к **его нормальным сечениям типа  $\mathbf{A}$** .

3. При выводе соотношений (2) не использовались:

- дополнительные требования к выбору начала координат в нормальном сечении, поэтому «продольная ось» стержня может быть выбрана в любом месте;

- не вводились предположения об уравнениях состояния материала стержня, поэтому величины  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}_z$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_z$ ,  $\mathbf{R}_{\varphi y}$  могут быть определены с использованием любых уравнений состояния.

4. Оценивая структуру выражения (2.4) можно констатировать, что члены, обусловленные массовыми силами (вес) и внешними нагрузками в уравнении являются слагаемыми и, тогда, массовые силы могут быть «заданы» как внешняя нагрузка равная массовой.

5. Использование вышеприведенных уравнений недостаточно для расчета деформаций стержневой системы. Даже при использовании упругого приближения должна быть введена гипотеза о распределении напряжений (деформаций) по сечению стержневой конструкции.

6. При использовании при расчете конструкций вариантов, использующих уравнения типа (1 – 2.11) естественной процедурой построения модели является учет «условий связи узлов КЭ», «граничные условия». Тогда такие понятия как «статическая неопределимость (определимость)», «неразрезность», перешедшие в системы современного расчета строительных конструкций из более ранних методологий, не имеют серьезного смысла при расчете внутренних усилий в стержнях (и вообще всех конструктивных элементов). При расчете конструкций в подобных методах расчет параметров НДС производится всегда с учетом деформаций всех элементов (к сожалению, в SCAD и в большинстве практических случаев, в упругом приближении).

<sup>5</sup>  $\mathbf{R}_{\varphi y}$  может быть обусловлена тормозными силами транспорта, крана на верхней поверхности балки и др.

7. Задача расчета арматуры для обеспечения требований 1 и 2 групп предельных состояний несущих железобетонных элементов является независимой от расчета усилий (и напряжений) в элементах конструкций с использованием КЭ математических моделей, а лишь использует значения рассчитанных параметров НДС, чаще всего полученных с использованием упругого приближения.

### Некоторые примеры из практики расчетов конструкций

Для расчета арматуры и прогибов, сжатия-растяжения стержня, не существует более надежной информации, чем рассчитанные внутренние усилия, интегральные характеристики, определенные в нормальных сечениях несущих железобетонных элементов конструкции, обеспечение возможности, восприятия которых и является основной задачей конструирования сечений стержневых железобетонных элементов.

Все ниже представленные расчеты конструкций производились при использовании следующих основных параметров конструкций

**Балка:** призматическая с защемленными торцами длиной  $L = 6\text{м}$  или консольная длиной  $L = 3\text{м}$ . Сечение  $h = 0,4\text{м}$ ,  $b = 0,15\text{м}$ .

**Материалы.** Бетон: тяжелый В25,  $\gamma = 25\text{ кН/м}^3$ ,  $E = 3 \cdot 10^7\text{ кПа}$ ,  $\nu = 0,22$ . Арматура: продольная А400С, поперечная А240С.

#### Расчетные характеристики бетона класса В25, МПа.

Модуль упругости		Предельные состояния второй группы			Предельные состояния первой группы		
бетон	арматура	Бетон		арматура	бетон		арматура
$E_b$	$E_s$	$R_{bn}$	$R_{btn}$	$R_{sc}$	$R_b$	$R_{bt}$	$R_s$
30	$2 \cdot 10^5$	18,5	1,6	365	14,5	1,05	400

Основными полагались предельные состояния первой группы (отмечено в таблице).

Везде коэффициенты надежности по нагрузке полагались равными единице.

### Призматическая консольная балка

Это самый простой вариант деформации из известных, но в котором проявляются все эффекты, характерные для изгибаемой балки.

Длина балки  $L = 3\text{м}$ , левый край защемлен (рис. 3).

Балка моделировалась:

**а) вариант** - стержневыми (№ 310) КЭ;

**б) вариант:** оболочечными (№ 344) КЭ (плосконапряженное состояние).

Использование геометрически нелинейных КЭ обусловлено планированием анализа последствий учета геометрической нелинейности.

Размер КЭ и для а) и б) вариантов  $\Delta x = \Delta y = 0,25\text{см}$ .

1. Левый край защемлен: во всех узлах подавлены все перемещения.

Нагрузка на правом торце балки (узловая)  $F = 50\text{кН}$ . В оболочечном варианте на правом конце производилось объединение всех точек торца в твердое пространственное тело. Нагрузка прикладывалась к ведущему узлу, расположенному на центральной оси балки.

Используемые при моделировании варианты хорошо изучены в области упругих деформаций [2]. При использовании приближения о характере распределения напряжений в виде

$$\sigma_{xx} = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot y$$

в варианте модели б) при заданных граничных условиях («защемлен» весь левый торец) пренебрежении весом балки и нагрузке на свободном торце  $F$  напряжения в балке-оболочке имеют следующий вид:

$$\sigma_{xx} = -\frac{F}{J} \cdot (L - x) \cdot y,$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = -\frac{F}{2 \cdot J} \cdot \left( \frac{h^4}{4} - y^2 \right) \quad (3.1)$$

Последнее выражение совпадает с формулой Д.И.Журавского для призматической балки.

Перемещения  $(u, v, w)$  вдоль осей локальных координат  $(x, y, z)$  равны:

$$u = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \left[ -\left(L - \frac{x}{2}\right) \cdot x \cdot y - \frac{(2 + \nu)}{6} \cdot y^3 \right],$$

$$v = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \left[ \frac{\nu \cdot (L - x)}{2} \cdot y^2 + \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1 + \nu) \cdot h^2}{4} \cdot x \right].$$
(3.2)

Уравнение изогнутой оси и максимальный прогиб на конце консоли составляют

$$v = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1 + \nu) \cdot h^2}{4} \cdot x \right],$$

$$v_{\max} = \frac{F \cdot L}{E \cdot J} \cdot \left[ \frac{L^2}{3} + \frac{(1 + \nu) \cdot h^2}{4} \right].$$
(3.3)

Последний член в  $v$  (3.2) – учет сдвиговых деформаций и обусловлен влиянием перерезывающей силы на прогиб балки. Напряженное состояние существенно изменяется лишь на малом расстоянии от торцов балки (эффект Сен-Венана).

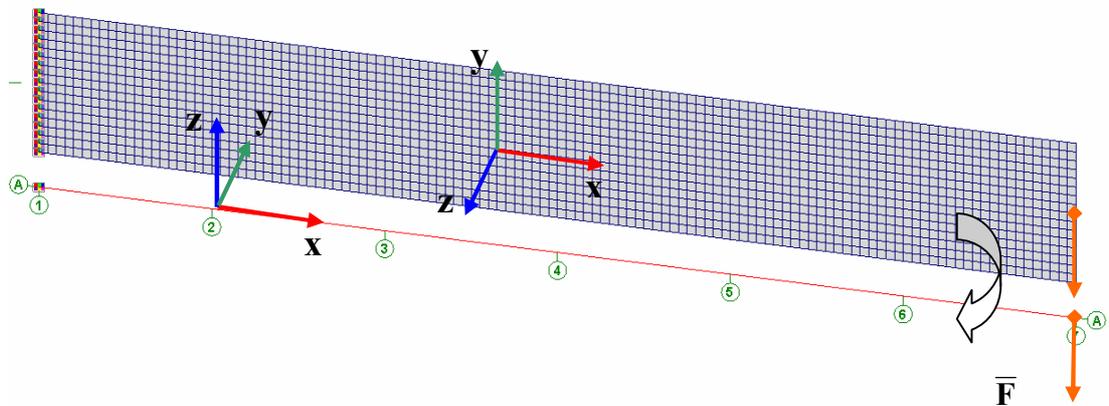


Рис. 3. Структура «оболочечной» и стержневой КЭ моделей балки (стержневыми элементами красная линия).

На рис. 3 : левый край – условия запрещения всех перемещений всех узлов; приведены локальные координаты в стержневом и «оболочечном» вариантах (по умолчанию SCAD) моделей; сила на правом торце  $\bar{F}$  (оранжевые стрелки); глобальные координаты совпадают с локальными координатами стержня.

Внутренние усилия определялись: **в варианте а)** – средствами SCAD; **в варианте б)** - интегрированием по площади сечения в точках  $x$ , совпадающих с числовыми осями (рис.3), при вычислении моментов считалось, что  $y$  - координата совпадает с центром тяжести сечения.

Внутренние усилия в стержне  $N^c = (N^c \cdot Q_x^c \cdot M_y^c)^T$  и балке-оболочке  $N^o = (N^o \cdot Q_y^o \cdot M_z^o)^T$ , если процедуры их вычисления были эквивалентны, должны подчиняться следующим условиям:  
 $N = N^c = N^o$ ,  $Q = Q_z^c = Q_y^o = -50 \text{ кН}$ ,  $M = M_y^c(x_0) = -M_z^o(x_0) = (150 - 50 \cdot x) \text{ кН} \cdot \text{м}$ . (3.5)

Таблица 1

Внутренние усилия в балке, вычисленные различными способами						
Модели	а)	б)	а)	б)	а)	б)
	$N^c$	$N^o$	$Q_z^c$	$Q_y^o$	$M_y^c$	$M_z^o$
м	кН		кН		кН · м	
0	0	0	50	-50	-150	149,6
0,5	0	0	50	-50	-125	124,8
1	0	0	50	-50	-100	100,1

1,5	0	0	50	-50	-75	74,8
2	0	0	50	-50	-50	49,7
2,5	0	0	50	-50	-25	24,8
3	0	0	50	-50	-1,25	0,63

Обращает на себя внимание факт:  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  в обоих вариантах модели. Учет геометрической нелинейности эту ситуацию не изменяет.

Значения  $\mathbf{Q}, \mathbf{M}$  в обоих случаях совпадают с достаточной технической точностью ( $\mathbf{Q}$  практически точно), но различаются по знакам. Видимо, что для стержневого решения в SCAD «выводятся» значения для сечений с отрицательной нормалью к поверхности  $\mathbf{A}$ .

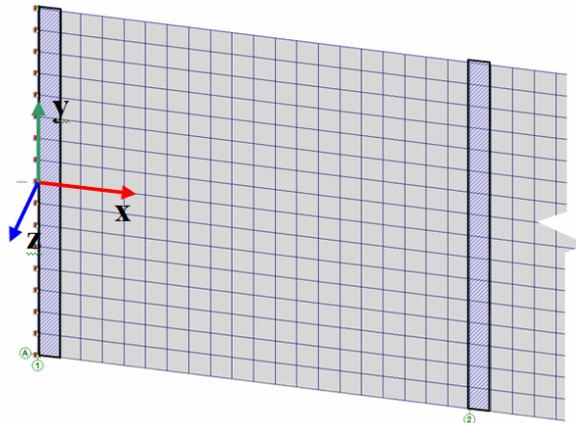


Рис. 4 КЭ, в которых в которых анализировались величины напряжений (с шагом 0,5 м). На правом краю стержня-оболочки анализировались напряжения в левом относительно торца слое КЭ (см. рис.5).

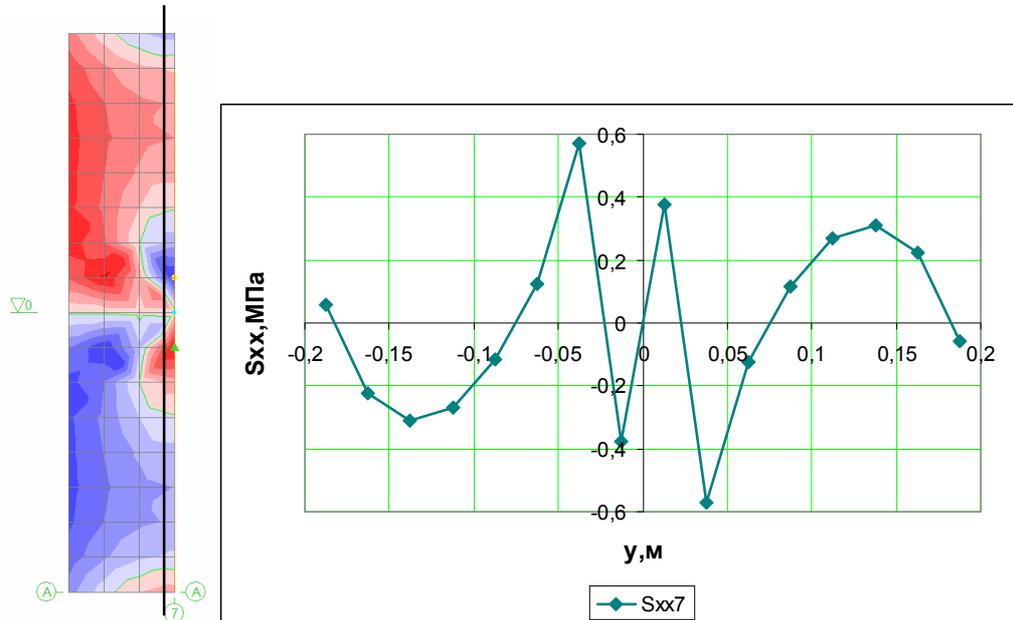


Рис. 5. Величина напряжений  $\sigma_{xx}(y) - N_x$  (МПа) вблизи правого торца балки-оболочки. Вертикальная линия на фрагменте диаграммы – сечение, которому соответствует приведенный график.

Приведенные на рис.5 результаты: наиболее значительное отклонение от «плоского сечения» отмеченное во всей расчетной области, - на левом торце «возмущения», вызванные влиянием граничных условий совсем незначительные (Рис.6).

Отметим, что вблизи правого торца величины напряжений  $\sigma_{xx}(y)$  малы, но, даже в этом сечении вычисленный численно интеграл  $N = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(y) \cdot dy = 0$  (остается нулем десятый знак после запятой, дальше не проверялось).

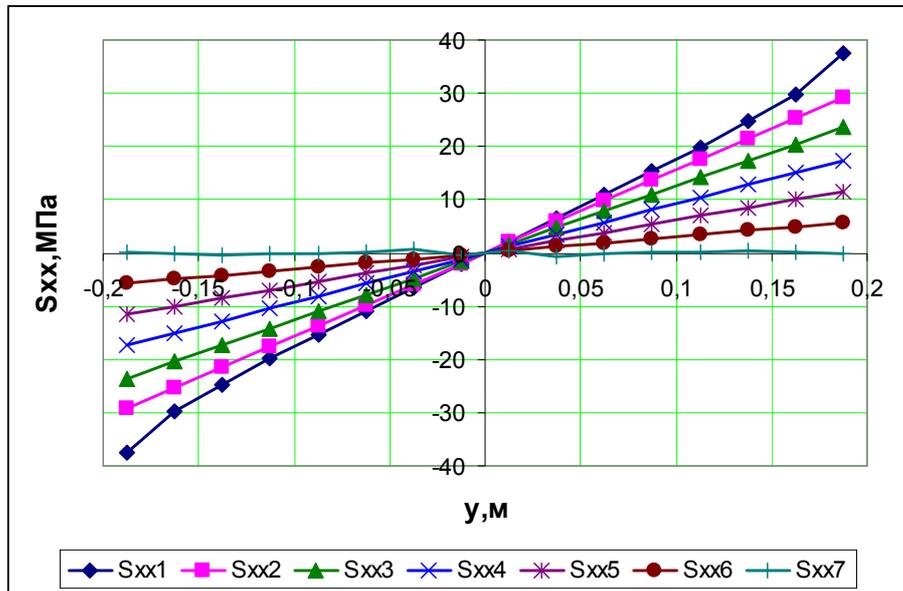


Рис. 6. Величина напряжений  $\sigma_{xx}(y) - N_x$  (МПа) в сечениях 1-7 балки-оболочки.

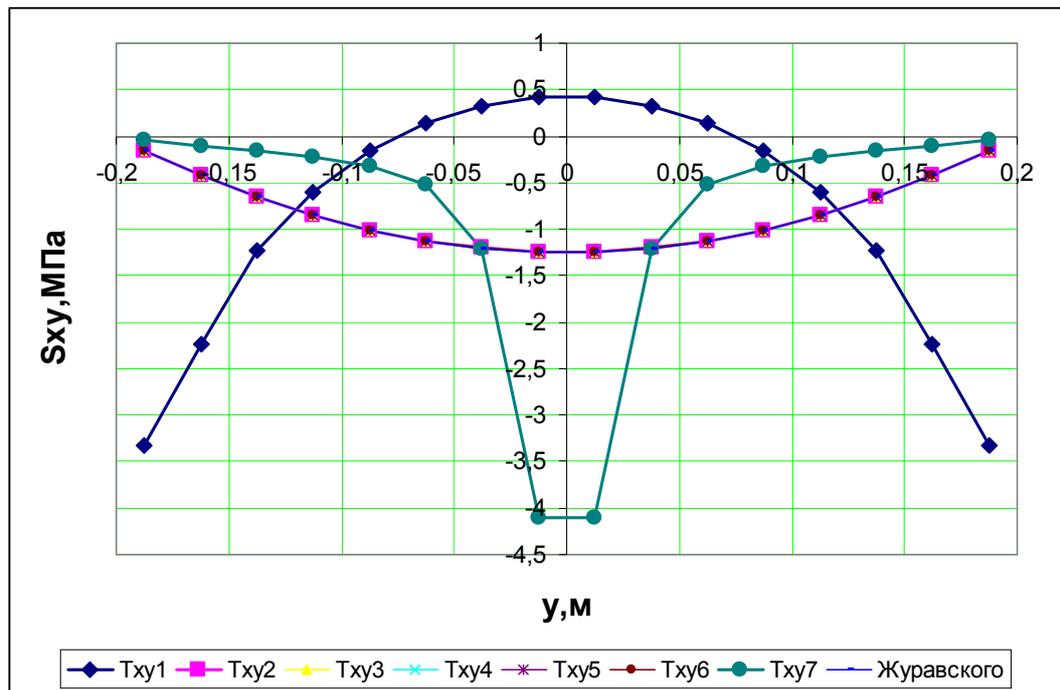


Рис. 7. Сдвиговые напряжения  $\sigma_{xy}(y)$ , МПа с сечениях 1-7 балки-оболочки. Зависимости  $T_{xy2} - T_{xy9}$  и зависимость Журавского (3.1) совпали с высокой точностью.

Отметим, что также как и при определении  $N$  вычисленная численно величина интеграла

$Q = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(y) \cdot dy = 50 \text{ кН}$  во всех случаях с большой точностью (при использовании  $T_{xy7}$  абсолютная ошибка максимальна из всех анализированных и равна  $\epsilon = 10^{-4}$ ) во всех сечениях.

## Промежуточные заключения

Если при расчете элемента конструкции ставится задача определения внутренних усилий в плоскостях нормальных оси стержня (аналогично для срединной плоскости оболочки), то замена стержневой модели оболочечной с теми же геометрическими и физическими характеристиками является процедурой совершенно излишней.

Увеличение точность интегрирования выражений (2.2, 2.5, 2.10) по сечению лишь позволит приблизиться к результатам, полученным с использованием модели стержневого типа (табл. 1). **Стержневая модель является весьма точным инструментом вычисления интегралов по А.**

Более того, если учесть, что реализация весьма сложного функционала расчета требуемого армирования железобетонной балки (и оболочки) является типовой задачей в ряде программных комплексов (в SCAD, Арбат тоже) использование заготовленной в программах схем расчета арматуры в состоянии существенно облегчить эту процедуру и, в ряде случаев обеспечить ей более высокую точность.

Существенным обстоятельством при расчете внутренних усилий с использованием линейных моделей МКЭ является фактическая невозможность моделирования условий соединения несущих элементов кроме шарнирного или непрерывного объединения. Именно это обстоятельство является одним из главных источников погрешностей в расчете параметров НДС.

**Учитывая изложенное выше, а также факт независимости функционала расчета требуемого армирования от всей процедуры решения линейной задачи определения внутренних усилий представляется вероятным существование определенной устойчивости линейного решения при изменении механических характеристик несущих «железобетонных» элементов конструкции. Если учитываются весовые характеристики элементов то обязательным условием является: при различиях жесткости элементов площади поперечного сечения должны быть неизменны.**

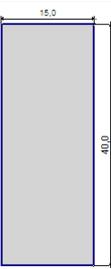
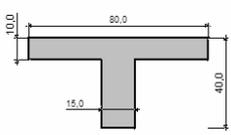
### 3. Об устойчивости расчета параметров НДС железобетонных элементов конструкций линейным методом МКЭ

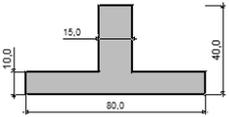
Учитывая, что действия внешних и массовых сил формально описываются членами уравнений, имеющих одинаковый смысл, а упругий прогиб слабо влияет на распределения усилий в несущих элементах (применительно к решению стоящей задачи имеет лишь качественный смысл) задача определения внутренних усилий должна быть устойчива относительно изменений структуры сечений и упругие характеристики материалов. Решение должно в основном определяться нагрузками на конструкции.

На рис. 7 приведены результаты расчета внутренних усилий и деформаций консольной балки с нагрузками, описанными выше. Здесь заведомо сохраняется постоянство нагрузки на свободном торце балки.

В стержневой модели по сравнению с приведенным выше вариантом «0» изменялись:

- величина  $E_b$  снижалась  $E_b = 3 \text{ МПа}$  — вариант «1» и увеличивалась в 10 раз  $E_b = 300 \text{ МПа}$  — вариант «2»; в вариантах «3» и «4» изменялась форма сечения (см. табл. 3)

Вариант	$E_b$ , МПа	Сечение	Максимальный прогиб, мм	
			$\frac{A, \text{ м}}{E_b \cdot J_y, \text{ МН} \cdot \text{ м}^2}$	
«0»	30		$\frac{0,6}{24,0}$	-19
«1»	3		$\frac{0,6}{2,4}$	-190
«2»	300		$\frac{0,6}{240}$	-1,9
«3»	30		$\frac{0,125}{46,7}$	-9,8

«4»	30		$\frac{0,125}{46,7}$	-9,8
-----	----	---	----------------------	------

**Вычисленные внутренние усилия в точности соответствуют зависимостям (3.5). Даже в варианте «1» учет геометрической нелинейности не дает никакого эффекта.**

#### Литература

1. Scad Soft 11.5, Feb 16 2012, В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, М.А. Микитенко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. SCAD OFFICE. Вычислительный комплекс SCAD. М., Из-во СКАД СОФТ, 2007, 591с.
2. А.М. Подгорный, Г.А. Марченко, В.И. Пустынников, Основы и методы прикладной теории упругости. Киев, «Вища школа», 1981, 327с.
3. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Программные средства и нормативные документы: вопросы и проблемы. — М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2008.— 30 с.